

Der Doppler-Effekt

Sebastian Pape Jonah Nitschke

Durchführung: 18.10.2016

1 Der Doppler-Effekt

Der Doppler-Effekt tritt auf, sobald sich der Sender und der Empfänger einer Welle relativ zueinander bewegen. Wenn ein ruhender Sender eine Welle der Frequenz f_0 aussendet, nimmt ein relativ dazu bewegter Empfänger die Frequenz f_E wahr. Hingegen empfängt ein ruhender Empfänger die ausgesendete Frequenz f_0 . Diesen Frequenzunterschiede zwischen bewegten und ruhenden Empfänger bezeichnet man als Doppler-Effekt. Der Empfänger misst eine Frequenz von:

$$f_E = f_0 + \frac{v}{\lambda_0}.$$

v : Geschwindigkeit, mit der sich der Empfänger bewegt

λ_0 : Wellenlänge

Oder mit $c = f_0 \lambda_0$ als Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle:

$$f_E = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (1)$$

Somit unterscheidet sich die gesendete Frequenz von empfangenen Frequenz um den Summanden $f_0 \frac{v}{c}$. In dem Versuch werden Schallwellen untersucht, die sich in dem Medium Luft mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten.

Bewege sich nun die Quelle relativ zum Ausbreitungsmedium mit der Geschwindigkeit v . Ein ruhender Empfänger misst dann

$$f_Q = f_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}. \quad (2)$$

Entwickelt man (2) nach Potenzen von $\frac{v}{c}$ erhält man

$$f_Q = f_0 \left(1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \dots\right) = f_E + f_Q \left(\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots\right).$$

Anhand der Entwicklung wird sofort ersichtlich, dass für $v > 0$ gilt

$$f_Q > f_E > f_0.$$

Jedoch ist der Unterschied zwischen (1) und (2) für $|v| \ll c$ beliebig klein.

Die Frequenzänderung $\Delta f = f_Q - f_0$ kann ebenfalls durch eine Schwebungsmethode beobachtet werden. Eine Schwebung entsteht durch die Überlagerung von Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen. Wenn nun die Wellen eines ruhenden und eines bewegten Senders überlagert werden, entsteht eine solche Schwebung.

2 Durchführung

Anhand des Experiments soll insbesondere Formel (??) überprüft werden. Dafür muss die Relativgeschwindigkeit v zwischen Sender und Empfänger, die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle, sowie die Frequenz f_0 und f_Q bei $v = 0$ bzw. $v \neq 0$ ermittelt werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium Luft ist die Schallgeschwindigkeit.

2.1 Bestimmen der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger

Zur Bestimmung der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger wird ein Lautsprecher auf einen Wagen montiert. Dieser fungiert in dem Experiment als Sender, der sich relativ zu einem fixiertem Mikrofon Vor- bzw. Rückwärts bewegen kann. Der Wagen wird durch einen Synchronmotor angetrieben, bei dem durch eine Zehngangschaltung verschiedene Geschwindigkeiten eingestellt werden können. Damit die Geschwindigkeit bestimmt werden kann benötigt man eine Zeit- und eine Streckenmessung. Deshalb fährt der Wagen über eine definierte Strecke, die vor Versuchsbeginn mit einem Maßband vermessen wurde. Die Laufzeitmessung wird durch zwei Lichtschranken am Anfang und am Ende der definierten Strecke realisiert. Sobald die Lichtschranke unterbrochen wird sendet sie einen **L**-Impuls, dieser wird durch einen Schmitt-Trigger an den \bar{S} -Eingang eines bistabilen Kippschalters (**Flip-Flop**) weitergegeben. Dadurch entsteht an dem Q -Ausgang ein **H**-Impuls, der in einem Und-Gatter mit dem **H**-Impuls, der aus einem Zeitbasisgenerator (**ZBG**) resultiert zusammengeführt wird. Der Ausgang des Und-Gatters ist mit dem Zählwerk verbunden, sodass solange die Impulse des ZBG gezählt werden bis die zweite Lichtschranke von dem Wagen durchfahren wird. Der **L**-Impuls aus der zweiten Lichtschranke wird durch einen weiteren Schmitt-Trigger an den \bar{R} -Eingang weitergegeben. Dies bewirkt, dass der Q -Ausgang ein **L**-Impuls an das Und-Gatter weiterleitet, wodurch dieses geschlossen wird. Die Zeitmessung ist dann beendet. Eine Zeitmessung wird fünf mal in jedem der zehn Gänge durchgeführt.

2.2 Messung der Schallgeschwindigkeit c über die Wellenlänge

Damit die Wellenlänge λ gemessen werden kann, wird ein Lautsprecher, gegenüber eines fixierten Mikrofons auf einen Präzisionsschlitten montiert. Der Lautsprecher wird von einem frequenzstabilen Generator angesteuert. Der Generator und das Mikrofon werden an einem Oszilloskop angeschlossen. Die Signalspannung des Mikrofons wird auf die Y-Achse und die Generatorspannung wird auf die X-Achse des Oszilloskops gelegt. Zur Bestimmung der Wellenlänge wird der Lautsprecher solange auf dem Präzisionsschlitten verschoben, bis die beiden Spannungen in Phase sind. Dies kann mit Hilfe von Lissajous-Figuren überprüft werden. Der Verschiebungsweg des Lautsprechers entspricht der Wellenlänge λ .

2.3 Frequenzmessung

Der Lautsprecher wird erneut auf den Wagen montiert. Das Mikrofon wird an einen Verstärker angeschlossen, der wiederum das Signal an einen Impulsformer weitergibt. Der Impulsformer formt die einkommenden Schwingungen in einen Rechtecksimpuls um. Über ein Und-Gatter werden zwei Impulse aneinander gekoppelt. Der eine kommt von dem Mikrofon und der andere resultiert aus dem Fototransistor einer Lichtschranke. Das Und-Gatter ist direkt mit dem Zählwerk verbunden. Der **L**-Impuls, den die Lichtschranke sendet, wenn sie unterbrochen wird gelangt über einen Schmitt-Trigger an den \bar{S} -Eingang eines bistabilen Kippschalters. Dadurch wird am Q -Ausgang ein **H**-Impuls weitergegeben, der letztendlich in dem Und-Gatter endet. Der **H**-Impuls aus dem Flip-Flop wird nicht nur an das Und-Gatter weitergeleitet, sondern auch noch ein weiteres Und-Gatter abgezweigt. Das weitere Und-Gatter empfängt Impulse von dem Flip-Flop und von dem ZBG. Dieses Und-Gatter leitet ankommende Impulse, seiner Logik entsprechend an einen Untersetzer weiter. Der Untersetzer hält die ankommenden Impulse auf, bis eine vorhereingestellte Impulsanzahl erreicht worden ist. In dem Versuch war der Untersetzer auf 10^6 eingestellt. Nach Erreichen der Impulsanzahl im Untersetzer sendet dieser einen **H**-Impuls an den T -Eingang des Flip-Flops weiter. Sobald der T -Eingang ein **H**-Impuls empfängt wird der Zustand des Q -Ausgangs in jedem Fall geändert. Das bedeutet, dass der Q -Ausgang auf ein **L**-Impuls umgestellt wird, wodurch das mit dem Zählwerk verbundene Und-Gatter geschlossen wird und die Frequenzmessung abgeschlossen ist. Während der Messung wird der \bar{R} -Eingang durch ein konstantes Signal auf **H** gehalten.

2.3.1 Bewegter Sender

Zunächst wird die Frequenz f_Q für $v > 0$ gemessen. Der Sender bewegt sich also auf den Empfänger zu. Es werden für jeden der Zehn Gänge fünf Messungen durchgeführt. Danach wird die Frequenz f_0 für $v < 0$ gemessen. Nun bewegt sich der Sender von dem Empfänger weg. Erneut werden pro Gang fünf Messungen durchgeführt.

2.3.2 Ruhefrequenz

Nun muss die Ruhefrequenz f_0 bestimmt werden, damit man einen Referenzwert gegenüber den Messungen bei bewegtem Sender hat. Dafür wird die Frequenz des vom Generator betriebenen Lautsprechers in Ruhe gemessen.

2.3.3 Schwebungsmethode

Bei der Schwebungsmethode wird anstelle eines Lautsprechers ein Reflektor auf den Wagen gestellt. Der Lautsprecher wird nun neben dem fixierten Mikrofon aufgestellt und ebenfalls, in Richtung des Reflektors fixiert. Der Reflektor wirkt somit ebenfalls als Sender, ist aber hingegen zu dem Lautsprecher bewegt. Das Mikrofon nimmt somit

die Überlagerung aus den emittierten Wellen des ruhenden und des bewegten Senders wahr. Damit Δf gemessen werden kann, muss die Spannung des Mikrofons verstärkt und gleichgerichtet werden. Danach läuft sie durch einen Tiefpass, der die Spannung gefiltert wiederum an einen Verstärker und Impedanzwandler durchgibt. Dieses Signal wird an den Frequenzzähler weitergegeben. Der Frequenzzähler ist der selbige, den man in dem vorherigen Versuch für die Frequenzmessung benutzt hat.

3 Auswertung

3.1 Einführung

In der folgenden Auswertung werden an verschiedenen Stellen statistische Größen berechnet, die meist mit einem zusätzlichen Fehler angegeben werden. Die verwendeten Formeln für die Berechnung dieser Größen soll in der folgenden Einleitung erläutert werden.

Wird ein Messreihe mit mehreren Messwerten (x_1, x_2, \dots, x_N) für eine Messgröße angelegt, so wird ihr Mittelwert mit der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3)$$

definiert. Des weiteren wird die Standardabweichung einer Messreihe durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (4)$$

errechnet. Mithilfe der Standardabweichung kann folgendermaßen der Fehler des Mittelwertes angegeben werden:

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

Da in vielen Formeln zur Berechnung von weiteren Größen ebenfalls die Fehler der eingehenden Messgrößen beachtet werden soll, nutzt man zur Berechnung dieser Fehler die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, welche durch folgende Formel definiert ist:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 (\Delta y_i)^2} \quad (6)$$

Bei $\partial f / \partial y_i$ handelt es sich hierbei um die Ableitung der Formel nach der Messgröße y_i und bei Δy_i handelt es sich um den Fehler von der jeweiligen Messgröße.

3.2 Bestimmung der Geschwindigkeit

Der für den Versuch bereitstehende Wagen mit dem montierten Lautsprecher lässt sich mit 10 unterschiedlichen Gangeinstellungen bewegen. Für die Bestimmung der jeweiligen Geschwindigkeiten wurden mithilfe des oben beschriebenen Aufbaus von dem Zeitbasisgenerator im Abstand von einer μs Impulse abgesetzt. Durch die Einstellung des Untersetzers auf 10^3 bzw. 10^2 wurde die Impulsrate auf $1/10^{-3}$ bzw. $1/10^{-4}$ reduziert. Die Geschwindigkeit ergibt sich dann aus der eingehenden Impulszahl und der vorher gemessenen Strecke zwischen den Lichtschranken folgendermaßen:

$$v = \frac{s}{Impulse \cdot 10^{-4}s} \quad (7)$$

Die Länge der Strecke wurde vorher gemessen und beträgt $s = (0,202 \pm 0,001)m$. Pro Gangeinstellung wurden dafür 5 Messungen vorgenommen, aus denen jeweils zuerst der Mittelwert und dessen Fehler bestimmt wird. Mit der Formel (7) ergibt sich dann folgende Tabelle:

Tabelle 1: Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Gangeinstellung.

| Gang | Impulse | Fehler | Zeit [s] | Fehler [s] | Geschwindigkeit [m/s] | Fehler [m/s] |
|------|---------|--------|----------|------------|-----------------------|--------------|
| 6.0 | 3980.4 | 5.316 | 3.9804 | 0.0053 | 0.051 | 0.00026 |
| 12.0 | 1994.2 | 2.267 | 1.9942 | 0.0023 | 0.101 | 0.00051 |
| 18.0 | 13287.8 | 17.676 | 1.3288 | 0.0018 | 0.152 | 0.00078 |
| 24.0 | 9956.8 | 18.034 | 0.9957 | 0.0018 | 0.203 | 0.00107 |
| 30.0 | 7979.0 | 5.495 | 0.7979 | 0.0005 | 0.253 | 0.00127 |
| 36.0 | 6665.8 | 8.834 | 0.6666 | 0.0009 | 0.303 | 0.00155 |
| 42.0 | 5699.2 | 2.988 | 0.5699 | 0.0029 | 0.354 | 0.00256 |
| 48.0 | 5020.4 | 7.966 | 0.502 | 0.0008 | 0.402 | 0.00209 |
| 54.0 | 4466.4 | 5.221 | 0.4466 | 0.0005 | 0.452 | 0.0023 |
| 60.0 | 4019.6 | 4.238 | 0.4019 | 0.0004 | 0.503 | 0.00254 |

Der Fehler der Geschwindigkeit folgt dabei mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern der Streckenmessung Δs und dem Fehler der Zeit Δt :

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{t}\right)^2 + \left(\frac{s \cdot \Delta t}{t^2}\right)^2} \quad (8)$$

3.3 Bestimmung der Ruhfrequenz

Die Messung der Ruhfrequenz funktioniert ebenfalls mit der Schaltung der Messung c), jedoch wird hier das Low-Signal für den Flip-Flop manuell geschaltet. Der Untersetzter

wurde auf 10^6 eingestellt, so dass die gemessene Zeitspanne genau einer Sekunde entspricht. Die gemessene Impulszahl entspricht somit genau der Ruhefrequenz. Die Ergebnisse der Messung sind in Tabelle 2 aufgelistet:

Tabelle 2: Werte der Ruhefrequenz.

| Messung | ν_0 [Hz] |
|---------|--------------|
| 1 | 20742 |
| 2 | 20742 |
| 3 | 20742 |
| 4 | 20742 |
| 5 | 20742 |

Die Ruhefrequenz entspricht bei allen fünf Messungen dem selben Wert und wird deshalb in der folgenden Auswertung als Fehlerfrei angenommen. Eine Fehlerbehaftung ist zwar auch hier nicht auszuschließen, allerdings dürfte der Fehler der vorliegenden Messung gegenüber den Fehlern anderer Messwerte vernachlässigbar gering sein.

3.4 Bestimmung der Wellenlänge

Zur Bestimmung der Wellenlänge wurden wie oben beschrieben Lissajous-Figuren auf dem Oszilloskop erzeugt. In der folgenden Tabelle ist die gemessene Strecke x [cm] in Abhängigkeit der vorhandenen Phasenverschiebung aufgetragen:

Tabelle 3: Gemessenen Strecken bei denen die Schwingungen in Phase sind.

| Strecke[cm] | Phasenverschiebung |
|-------------|--------------------|
| 0.0 | 0 |
| 0.9 | π |
| 1.8 | 0 |
| 2.7 | π |
| 3.5 | 0 |
| 4.4 | π |

Die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Positionen entspricht hierbei immer der halben Wellenlänge (berechnete Werte Tabelle 4):

Der Mittelwert und dessen Fehler ergeben sich wie in der Einführung beschrieben:

$$\bar{\lambda} = (0,0176 \pm 0,0018)m \quad (9)$$

Aus der vorhandenen Wellenlänge lässt nun der Faktor ν_0/c , mittels einer Umformung zu $1/\lambda$ über die Definition der Schallgeschwindigkeit, ermitteln:

Tabelle 4: Berechnete Werte der Wellenlänge.

| Differenz der Positionen | $\frac{\lambda}{s}$ [cm] | λ [cm] |
|--------------------------|--------------------------|----------------|
| 2-1 | 0.09 | 0.18 |
| 3-2 | 0.09 | 0.18 |
| 4-3 | 0.09 | 0.18 |
| 5-4 | 0.08 | 0.16 |
| 6-5 | 0.09 | 0.18 |

$$c = \lambda \cdot \nu_o \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_0}{c} = \frac{1}{\lambda} = (56.818 \pm 5.811) \frac{1}{m} \quad (11)$$

Der Wert des Fehlers folgt hierbei mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler der Wellenlänge:

$$\Delta \frac{\nu_0}{c} = \frac{1}{\lambda^2} \Delta \lambda \quad (12)$$

3.5 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c

Die Schallgeschwindigkeit kann nun mithilfe der gemessenen Ruhefrequenz und der oberhalb berechneten Wellenlänge ermittelt werden:

$$c = \lambda \cdot \nu_0 \quad (13)$$

Der Fehler der Schallgeschwindigkeit wird somit durch

$$\Delta c = \Delta \lambda \cdot \nu_0 \quad (14)$$

bestimmt. Wie oben erwähnt wird der Fehler der Ruhefrequenz dabei als verschwindend gering angesehen, sodass sich folgender Wert für die Schallgeschwindigkeit ergibt:

$$c = (365.06 \pm 37.34) \frac{m}{s} \quad (15)$$

3.6 Abschätzung der Differenz von Formel 2 und 5

Mithilfe der Ruhefrequenz und den der Messung entnommenen Daten über die Geschwindigkeit des Wagens soll im Folgendem abgeschätzt werden, ob mit diesem Versuchsaufbau eine Geschwindigkeit erreicht wird, die eine Unterscheidung zwischen bewegter Quelle und bewegtem Empfänger sichtbar macht.

Die Höchstgeschwindigkeit des Wagens in der Gangstufe 60 beträgt $v_{max} = 0,503 \frac{m}{s}$, die Schallgeschwindigkeit $c = 365.06 \frac{m}{s}$ und die Ruhefrequenz hat den Wert $\nu_0 = 20742 [Hz]$. Werden diese Werte nun in die Formeln für den bewegten Empfänger ν_E und die bewegte Quelle ν_Q eingesetzt, zeigt sich ein Unterschied beider Ergebnisse erst in der zweiten Nachkommastelle:

$$\nu_E = 20770,579 \quad (16)$$

$$\nu_Q = 20770,619 \quad (17)$$

Mit dem Ergebniss dieser Abschätzung kann der Unterschied zwischen den Formeln für ν_E und ν_Q als geringfügig und unbedeutend angenommen werden, da auch bei weiteren Messungen der Frequenzen eine höhere Genauigkeit nicht erreicht wird. Evident ist jedoch, dass für alle $v > 0$ weiterhin $\nu_Q > \nu_E > \nu_0$ gilt.

3.7 Bestimmung von $\frac{\nu_0}{c}$ aus der Messung der Frequenzänderung

3.7.1 Bestimmung aus der indirekten Messung der Frequenzveränderung

Analog zu der oben beschriebenen Messung der Ruhefrequenz wurden die Frequenzen in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Wagens bestimmt. Indem man die Differenz beider Frequenzen nimmt, lässt sich die Frequenzänderung errechnen:

$$\Delta\nu = \nu_v - \nu_0 \quad (18)$$

In den folgenden Tabelle ist für jede Geschwindigkeit die jeweilig gemessene Frequenz und die Differenz zur Ruhefrequenz eingetragen.

Tabelle 5: Frequenzänderung bei "positiver Geschwindigkeit."

| Gang | Geschwindigkeit [m/s] | Frequenz [Hz] | Differenz |
|------|-----------------------|---------------|-----------|
| 6.0 | 0.0507 | 20745.0 | 3.0 |
| 12.0 | 0.101 | 20748.0 | 6.0 |
| 18.0 | 0.152 | 20751.0 | 9.0 |
| 24.0 | 0.203 | 20754.2 | 12.2 |
| 30.0 | 0.253 | 20757.0 | 15.0 |
| 36.0 | 0.303 | 20760.0 | 18.0 |
| 42.0 | 0.354 | 20763.6 | 21.6 |
| 48.0 | 0.402 | 20766.4 | 24.4 |
| 54.0 | 0.452 | 20769.2 | 27.2 |
| 60.0 | 0.502 | 20772.0 | 30.0 |

Tabelle 6: Frequenzänderung bei "negativer Geschwindigkeit."

| Gang | Geschwindigkeit [m/s] | Frequenz [Hz] | Differenz |
|------|-----------------------|---------------|-----------|
| 6.0 | -0.0507 | 20739.2 | -2.8 |
| 12.0 | -0.101 | 20735.8 | -6.2 |
| 18.0 | -0.152 | 20733.0 | -9.0 |
| 24.0 | -0.203 | 20730.0 | -12.0 |
| 30.0 | -0.253 | 20726.8 | -15.2 |
| 36.0 | -0.303 | 20723.8 | -18.2 |
| 42.0 | -0.354 | 20722.2 | -19.8 |
| 48.0 | -0.402 | 20722.0 | -20.0 |

Wird nun $\Delta\nu$ gegen die Geschwindigkeit v aufgetragen, so lässt sich mittels linearer Regressionsrechnung eine Gerade ermitteln, die als Steigung den Faktor $\frac{\nu_0}{c}$ besitzt. Somit ergibt sich für die Messung folgender Faktor:

$$\frac{\nu_0}{c} = (56.818 \pm 5.812) \frac{1}{m} \quad (19)$$

$$a = (58.326 \pm 0.764) \frac{1}{m} \quad (20)$$

$$b = (0.418 \pm 0.220) Hz \quad (21)$$

Im Graph sichtbar wird hier, dass die Werte für die größten negativen Geschwindigkeiten etwas von der linearen Regression abweichen. Dies liegt daran, dass die Messstrecke bei den höheren Geschwindigkeiten nicht ausreichte, um alle Impulse zu zählen. Somit kamen ähnliche Werte für die Gänge 42 und 48 heraus und alle höheren Gänge wurden bei der Messung weggelassen, da sie das Ergebnis stark verfälschen würden.

3.7.2 Berechnung aus der Messung mittel Schwebemethode

Wie im Aufbau schon beschrieben, gibt es für die Messung der Frequenzveränderung eine Alternative mit der Schwebungsmethode. Mit dieser wird im Gegensatz zu 1.7.1 die Frequenzveränderung direkt gemessen.

Auffällig in Tabelle 7 ist, dass alle Werte für die Differenz zur Ruhefrequenz ca. doppelt so groß sind, wie bei der indirekten Messung der Frequenzveränderung. Die Ursache hierfür ist die Verwendung eines reflektors für die Messung. Das Signal muss die Strecke von Lautsprecher bis zum Reflektor zweimal durchlaufen bis das Signal beim Mikrophon ankommt. Die Strecke und somit auch die Frequenzveränderung ist dadurch doppelt so groß wie bei der Messung 1.7.1. Für die Bestimmung des Faktors $\frac{\nu_0}{c}$ muss also der Faktor 2 noch aus der Frequenzdifferenz herausgezogen werden.

Tabelle 7: Frequenzänderung bei Messung mit der Schwebemethode.

| Gang | Geschwindigkeit [m/s] | Differenz [Hz] | Fehler [Hz] |
|------|-----------------------|----------------|----------------|
| 6.0 | 0.0507 | 5.8 | 0.2 |
| 12.0 | 0.101 | 11.8 | 0.2 |
| 18.0 | 0.152 | 17.8 | 0.2 |
| 24.0 | 0.203 | 23.8 | 0.374165738677 |
| 30.0 | 0.253 | 24.6 | 9.20386392289 |
| 36.0 | 0.303 | 35.8 | 0.489897948557 |

Mit der Schwebungsmethode kann zudem immer nur der Betrag der Frequenzänderung ermittelt werden, die Ergebnisse für die Differenz müssen also im nachhinein mit verschiedenen Vorzeichen versehen werden, je nachdem auf welche Geschwindigkeit sie sich

beziehen. Da die Messung bei der Bewegung des Wagens in Ausbreitungsrichtung keine Ergebnisse lieferte, sind in der obigen Tabelle nur die Werte für eine Bewegung entgegen der Ausbreitungsrichtung angegeben.

Außerdem sind lediglich die Geschwindigkeiten bis zur Gangstufe 36 angegeben, da die Strecke nicht ausreichte, um bei weiteren Gangeinstellungen bis zum Ende Impulse empfangen zu können. Für alle Gangeinstellungen über 36 ergaben sich deshalb die gleichen Frequenzdifferenzen wie bei der Gangeinstellung 36.

Analog zur Messung in 1.7.1 wird die Frequenzdifferenz gegen die Geschwindigkeit aufgetragen. Für die Steigung a und den Y-Achsenabschnitt b erhält man mittels einem linearen Fit mit Python folgende Werte:

$$a = (109.911 \pm 10.356) \frac{1}{m} \quad (22)$$

$$b = (0.466 \pm 2.040) Hz \quad (23)$$

Da wie oben beschrieben in der Steigung a der Faktor 2 enthalten ist, muss für $\frac{\nu_0}{c}$ noch aus a der Faktor 2 gezogen werden:

$$\frac{\nu_0}{c} = \frac{a}{2} = (54.955 \pm 5.178) \frac{1}{m} \quad (24)$$

3.8 Vergleich der Ergebnisse aus 1.4 und 1.7 mithilfe des Studentschen T-Tests

Der "Student'sche T-Test" ist ein Hypothesentest. Er dient zum Vergleich der Messmethoden bzw. gibt an, ob zwischen den Messmethoden A und B eine systematische Abweichung vorliegt. Dafür muss zuerst die Prüfgröße t bestimmt werden, welche durch folgenden Formeln definiert wird:

$$t := \frac{\overline{x_a} - \overline{x_b}}{S_D} \quad (25)$$

$\overline{x_a}$ und $\overline{x_b}$ sind die Mittelwerte der Stichproben bzw. der Messreihen. S_D ist die Standardabweichung und durch:

$$S_D = \sqrt{\frac{s_a^2(n_a - 1) + s_b^2(n_b - 1)}{n_a + n_b - 2} \cdot \frac{n_a + n_b}{n_a \cdot n_b}} \quad (26)$$

s_a und s_b sind dabei die Fehler der Stichproben und n ist die Anzahl an Messungen der jeweiligen Messreihen.

Anschließend wird ein Signifikanzniveau α festgelegt, welches angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Hypothese bestätigt bzw. widerlegt werden soll. Zudem wird die Anzahl der Freiheitsgrade f durch folgende Formel bestimmt:

$$f = n_a + n_b - 2 \quad (27)$$

Mit der Anzahl an Freiheitsgraden und den Werten für t kann in einer Vergleichstabelle nach Werten für α gesucht werden, so dass für den ermittelten Wert t gilt:

$$\tilde{t} < |t|. \quad (28)$$

Mit dieser Bedingung beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein systematischer Fehler vorliegt, $1 - \alpha$.

Tabelle 8: Benötigte Werte für den T-Test

| | Mittelwert \bar{x} | Fehler s | Anzahl der Messungen n |
|-----------------------|----------------------|------------|--------------------------|
| Wellenlänge-Messung A | 56.818 | 5.811 | 5 |
| indirekte Messung B | 58.326 | 0.764 | 18 |
| Schwebung C | 54.955 | 5.178 | 6 |

Tabelle 9: Ergebnisse des T-Test

| Vergleich von | S_D | t | α | f | \tilde{t} | Wahrscheinlichkeit |
|---------------|-------|-------|----------|-----|-------------|--------------------|
| A und B | 1.361 | 1.108 | 0.15 | 21 | 1.063 | 85.0 % |
| B und C | 1.206 | 2.762 | 0.01 | 22 | 2.508 | 99.9 % |
| A und C | 3.311 | 0.563 | 0.30 | 9 | 0.543 | 70.0 % |

Die Wert für \tilde{t} können aus Quelle [1] entnommen werden. Der "Student'sche T-Test" zeigt, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit systematische Fehler zwischen denen jeder Messung bestehen. Zu sehen sind aber auch sehr hohe statistische Fehler besonders bei dem Messungsvergleich A und B sowie dem Vergleich A und C.