

Versuch 401

Das Michelson-Interferometer

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Durchführung: 02.05.2017

Abgabe: 09.05.2017

1 Zielsetzung

Der Versuch V401 setzt sich in erster Linie mit dem Michelson–Interferometer auseinander. Die Wellenlänge der verwendeten Lichtquelle, sowie der Brechungsindex verschiedener Gase sollen im Laufe des Versuches bestimmt werden.

2 Theorie

Das Michelson-Interferometer ist ein Messgerät, welches auf dem Interferenzprinzip beruht. Das Ausbreitungsverhalten von Licht kann sehr gut durch das Verhalten von elektromagnetischen Wellen beschrieben werden. Da die Maxwell'schen-Gleichungen durch lineare Differentialgleichungen gegeben sind, können ihre Lösungen, welche auch elektromagnetische Wellen sind, superponiert werden. Der \vec{E} -Feld Vektor kann jedoch nicht direkt bestimmt werden, sondern lediglich seine Intensität, die gegeben ist durch

$$I = |\vec{E}|^2. \quad (1)$$

Aus der Superposition zweier Wellen mit verschiedenen Phasen (Δ_1, Δ_2) entsteht neben der Summe der Einzelintensitäten noch ein Interferenzterm, der das Verhalten der Überlagerung der beiden Wellen beschreibt. Dieser Term weist die folgende Gestalt auf.

$$2k\vec{E}_0^2 \cos(\Delta_2 - \Delta_1), \quad k \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Da der Kosinus beschränkt ist, ist auch der Interferenzterm beschränkt durch $\pm 2k\vec{E}_0^2$. Wenn das Argument ein Vielfaches von $\frac{n\pi}{2} + \pi$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist verschwindet der Interferenzterm.

Bei den alltäglichen Lichtquellen treten keine Interferenzeffekte auf, da die Phasenbeziehungen Δ_i normalerweise Funktionen der Zeit sind. Dies ist auf den statistischen Prozess der Lichterzeugung zurückzuführen. Licht, dessen Phasenbeziehung nicht konstant ist wird als inkohärent bezeichnet.

Damit Interferenzeffekte auftreten, muss die Phasenbeziehung unabhängig von der Zeit t sein. Solch ein Licht wird als kohärent bezeichnet.

Nur Licht aus der selben Quelle weist die gleiche Phasenbeziehung auf. Damit dies möglich ist, wird ein Strahlteiler verwendet. Die geteilten Strahlen legen im Allgemeinen unterschiedliche Strecken zurück, weshalb sie eine Phasenverschiebung zueinander aufweisen. Der Emissionsakt aus der Lichtquelle ist ein endlicher Prozess, dessen Zeitdauer als Kohärenzzeit τ bezeichnet wird. Ist die Kohärenzlänge klein gegenüber λ verschwinden die Interferenzeffekte. Dies ist begründet durch die endliche Lichtgeschwindigkeit,

weil dann Licht aus verschiedenen Quellen an dem Detektor registriert wird. Daraus folgt, dass eine notwendige Bedingung für das Erscheinen von Interferenzeffekten ein geringer Wegunterschied zwischen den geteilten Strahlen ist. Der Wegunterschied, bei dem die Interferenzeffekte verschwinden wird als Kohärenzlänge ℓ bezeichnet. Diese wird charakterisiert über

$$\ell = N\lambda, \text{ (N: Anzahl der am Detektor beobachteten Intensitätsmaxima).} \quad (3)$$

Die Kohärenzzeit hängt mit der Kohärenzlänge eng zusammen. Die beiden Größen sind über den folgenden Zusammenhang (4) erklärt.

$$\tau = \frac{\ell}{c} \quad (4)$$

Die verwendete Lichtquelle sollte möglichst als punktförmig approximiert werden können, da ansonsten der Kontrast des Interferenzmusters verschlechter wird. Als angemessene Forderung folgt die Ungleichung:

$$a \sin(\zeta) << \frac{\lambda}{2}. \quad (5)$$

In (5) ist a die räumliche Ausdehnung der Lichtquelle und ζ der Richtungsunterschied. Die Größen sind in Abb. 1 abgebildet.

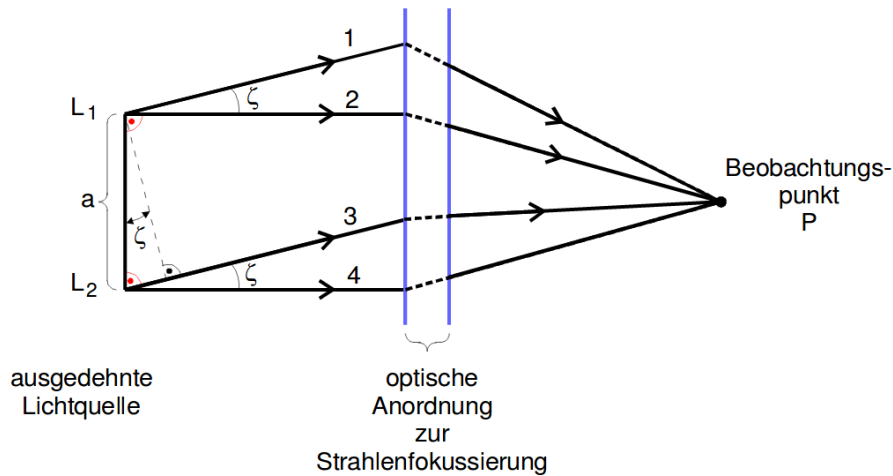


Abbildung 1: Darstellung der Winkelbeziehungen einer ausgedehnten Lichtquelle[1]

Die Bedingung (5) lässt sich aus der Forderung folgern, dass das ausgesendete Licht in dem Punkt P interferenzfähig sein muss.

2.1 Wellenlänge

Die Wellenlänge λ zu bestimmen ist eine zentrale Aufgabe des Versuches. Durch Verändern der Weglänge Δd des Lichtes kann diese bestimmt werden. Die Wellenlänge ist gegeben durch Formel (6).

$$\lambda = 2 \frac{\Delta d}{z} \quad (6)$$

Dabei ist z die Anzahl der auftretenden Intensitätsmaxima.

2.2 Brechungsindex

Der Versuch beschäftigt sich ebenfalls mit der Messung des Brechungsindex von verschiedenen Gasen. Allgemein wird in der Optik zwischen der Weglänge und der optischen Weglänge unterschieden. Die optische Weglänge ist um den Faktor des Brechungsindex größer als die Weglänge. Dies ist so zu verstehen, dass Licht durch ein Medium mehr Zeit benötigt als durch das Vakuum. Die optische Weglänge beschreibt einen Weg im Vakuum, der die selbe Zeit beansprucht, wie das Licht durch das Medium benötigt.

Die Brechungszahl der Gase wird mit Hilfe einer Messzelle bestimmt, deren Innendruck variiert werden kann. Der Brechungsindex ist abhängig von der Temperatur und von dem Druck. Der Zusammenhang ist wie folgt bestimmt.

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n(p, p') \frac{T \cdot p_0}{T_0 (p - p')} \quad (7)$$

In Formel (7) ist $T_0 = 273,15 \text{ K}$, $p_0 = 1013,2 \text{ mbar}$, Δn der variierte Brechungsindex, p der Anfangsdruck, p' der Enddruck und T die Temperatur. Der variierte Brechungsindex hängt mit der Anzahl der auftretenden Intensitätsmaxima z , der Wellenlänge λ und der Länge b der Messzelle zusammen. Der Zusammenhang ist in (8) gegeben.

$$\Delta n = \frac{z\lambda}{2b} \quad (8)$$

Somit kann mit den Formeln (7) und (8) der Brechungsindex des Füllgases einer Messzelle der Länge b berechnet werden.

3 Durchführung

Der Versuch wird mit der in Abb.2 dargestellten Apparatur durchgeführt. Die Lichtquelle ist ein Laser, der kohärentes Licht gewährleistet. Eine konstante Phasenbeziehung zwischen den interferierenden Lichtstrahlen ist durch den Strahlteiler gegeben. Die geteilten Strahlen entstammen der selben Quelle und haben somit eine zueinander konstante Phasenbeziehung. Die Messzelle kann mit Gasen befüllt werden und dient zur Bestimmung des Brechungsindex des Füllgases. Die Messzelle ist mit einer Vakuumpumpe und einer Gasflasche über Schlauchsysteme verbunden. Der justierbare Spiegel ist für die Kalibrierung der Apparatur notwendig. Der Synchromotor verstellt den verschiebbaren Spiegel, sodass die Weglänge und somit die Phasenverschiebung zwischen den geteilten Strahlen präzise und kontinuierlich verändert werden kann. An dem Motor ist eine Mikrometerschraube befestigt, sodass die veränderte Position des Spiegels bestimmt werden kann. Die abgelesene Strecke hängt mit der veränderten Position des Spiegels über einen Übersetzungsfaktor zusammen. Als Detektor fungiert ein Photoelement, dass die veränderlichen Intensitätsmaxima registriert und über eine Zählwerk abzählbar darstellt.

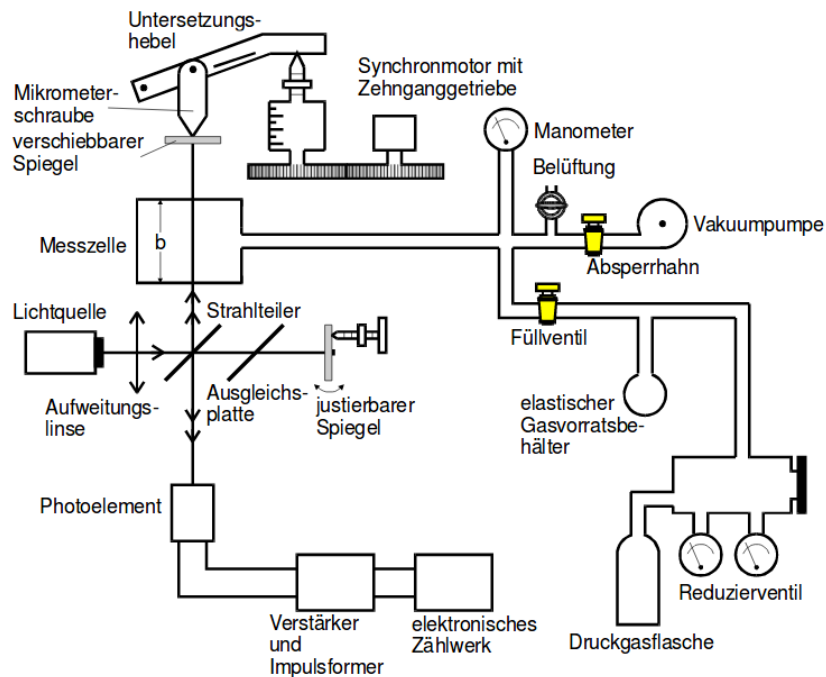


Abbildung 2: Schematische Darstellung der verwendeten Apparatur[1]

Zu Beginn des Versuches ist die Apparatur zu kalibrieren. Dabei kann eine Mattscheibe, oder ein Blatt Papier verwendet werden, um die Intefferenzmaxima sichtbar zu machen. Über eine Schraube an dem justierbaren Spiegel wird die Apparatur kalibriert. Die Kalibrierung ist abgeschlossen, wenn die beiden geteilten Strahlen auf dem Detektor zusammen geführt sind und ein Intefferenzmuster ausbilden. Damit das Zählwerk die

auftretenden Maxima besser zählen kann, wird das Interferenzmuster so grob wie möglich eingestellt. Für die erste Messung wird zuerst die Startposition des Motors notiert. Dieser wird danach angeschaltet und während dieser zählt das Zählwerk die auftretenden Intensitätsmaxima. Die Messung ist abgeschlossen, wenn ≈ 1000 Werte genommen sind. Abschließend ist die Endposition des Motors an der Millimeterschraube abzulesen. Der Messvorgang wird zehn mal wiederholt. Mit den gesammelten Daten kann dann die Wellenlänge der verwendeten Lichtquelle bestimmt werden.

Die zweite Messung zielt darauf ab, die Brechungsindizes verschiedener Gase zu ermitteln. Als erstes wird der Brechungsindex von Luft ermittelt. Dafür wird die Messzelle, die in Abb. 2 dargestellt ist evakuiert. Bei ausreichender Evakuierung wird eine Stellschraube an der Vakuumpumpe gelockert, sodass Luft in die Messzelle eindringen kann. Die Druckdifferenz, sowie die abgezählten Intensitätsmaxima sind zu notieren. Die Messung wird zehn mal wiederholt und daraufhin mit CO_2 wiederholt. Dafür ist eine CO_2 -Flasche an die Messzelle angeschlossen. Nach Evakuierung der Zelle kann so das Gas in diese eingefüllt werden. Auch hier sind zehn Messungen durchzuführen.

4 Auswertung

Bei den folgenden Rechnungen werden die Fehler mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet, wobei hierfür die automatische Fehlerrechnung mittels des Ufloat-Paketes von Python genutzt wird. Bei den Rechnungen werden die folgenden Konstanten für die Normalbedingungen, die Umgebungstemperatur und die Länge des Gasbehälters (b), sowie die Übersetzung (\ddot{U}) verwendet:

$$\begin{aligned}T_0 &= 273,15 \text{ K} \\p_0 &= 1,0132 \text{ bar} \\T &= 293,15 \text{ K} \\b &= 0,05 \text{ m} \\\ddot{U} &= 5.046\end{aligned}$$

4.1 Bestimmung der Wellenlänge

Die Wellenlängen ergeben sich dabei aus den gemessenen Werten mit der Formel (6), wobei die gemessenen Werte als fehlerfrei angenommen werden. Die berechneten Werte sind in der folgenden Tabelle eingetragen:

Tabelle 1: Gemessene Intensitätsmaxima (z) und die daraus resultierende Wellenlänge.

Δd in mm	z	λ in nm
0.355	1051	675.05
0.339	1002	676.41
0.351	1044	671.98
0.349	1036	673.34
0.343	1013	676.89
0.343	1031	665.07
0.345	1027	671.52
0.347	1034	670.81
0.347	1029	674.07
0.343	1022	670.93

Durch das Mitteln der bestimmten Wellenlängen (Tabelle 1) ergibt sich für die Wellenlänge des verwendeten Lasers ein Wert von $\lambda = (672.6 \pm 1.1) \text{ nm}$, wobei es sich bei dem Fehler um die Standardabweichung handelt:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (9)$$

4.2 Bestimmung des Brechungsindex von Luft und Kohlenstoffdioxid

Mit den anfangs angegebenen Werten und den Formeln (7) und (8) lässt sich aus der gemessenen Anzahl an Intensitätsmaxima (z) und der Druckdifferenz (Δp) der Brechungsindex von Luft sowie von Kohlenstoffdioxid bestimmen. Bei Δn handelt es sich hier nicht um den Fehler sondern die Differenz des Brechungsindex, der Fehler wird durch σ_n angegeben.

Tabelle 2: Gemessene Intensitätsmaxima (z) und der daraus resultierende Brechungsindex für Luft.

Δp in bar	z	Δn	n	$\sigma_n \cdot 10^6$
0.76	35	0.000235	1.000337	0.543
0.8	34	0.000229	1.000311	0.501
0.8	34	0.000229	1.000311	0.501
0.8	35	0.000235	1.000320	0.516
0.82	35	0.000235	1.000312	0.503
0.83	35	0.000235	1.000308	0.497
0.8	34	0.000229	1.000311	0.501
0.81	35	0.000235	1.000316	0.509
0.82	35	0.000235	1.000312	0.503
0.8	33	0.000222	1.000302	0.486

Die Fehler ergeben sich mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung durch folgende Formel:

$$\sigma_{\Delta n} = \frac{1}{2} \frac{z}{b} \cdot \sigma_\lambda \quad (10)$$

$$\sigma_n = \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{\Delta p} \cdot \sigma_{\Delta n} \quad (11)$$

Mit den Werten aus Tabelle 3 ergibt sich für den Brechungsindex von Luft folgender Wert:

$$n_{\text{Luft}} = (1.000314 \pm 0.000001)$$

Äquivalent dazu lässt sich auch der Brechungsindex von Kohlenstoffdioxid berechnen. Die gemessenen Werte sowie der jeweilige Brechungsindex sind in folgender Tabelle eingetragen:

Die Fehler werden dabei wieder nach Formel (10) und (11) berechnet. Für den Brechungsindex von Kohlenstoffdioxid ergibt sich damit der folgende Wert:

Tabelle 3: Gemessene Intensitätsmaxima (z) und der daraus resultierende Brechungsindex für Kohlenstoffdioxid.

Δp in bar	z	Δn	n	$\sigma_n * 10^6$
0.8	58	0.000390	1.000530	0.855
0.8	50	0.000336	1.000457	0.737
0.64	36	0.000242	1.000411	0.663
0.6	39	0.000262	1.000475	0.766
0.56	37	0.000249	1.000483	0.779
0.52	35	0.000235	1.000492	0.794
0.48	29	0.000195	1.000442	0.712
0.44	28	0.000188	1.000465	0.750
0.4	25	0.000168	1.000457	0.737
0.37	24	0.000161	1.000474	0.765

$$n_{\text{CO}_2} = (1.000469 \pm 0.000001)$$

5 Diskussion

Bei Vergleich der gemessenen Werte mit den Literaturwerten (Tabelle 4) wird erkenntlich, dass die bestimmten Größen in der richtigen Größenordnung liegen und auch nicht zu stark von den Literaturwerten abweichen. Jedoch liegt keiner dieser Werte im Fehlerintervall des experimentell bestimmten Wertes.

Tabelle 4: Vergleich der experimentell bestimmten Werte mit den Literaturwerten.

	Experimenteller Wert	Literaturwert
λ in nm	672.6 ± 1.1	632.8
n_{Luft}	1.000314 ± 0.000001	1.000292
n_{CO_2}	1.000469 ± 0.000001	1.000449

Die auftretenden Abweichungen lassen sich auf mehrer Ursachen zurückführen. Einerseits war die verwendete Messdiode so empfindlich, dass schon bei kleinen Erschütterungen am Messaufbau Interferenzmaxima registriert wurden. Ein weitere Fehlerquelle kann auch das Ablesen der Wegstrecke der Spiegelverschiebung an der Mikrometerschraube sein, da die nur in gewissem Maße genau ist.

Vor allem bei der Bestimmung des Brechungsindex von Kohlenstoffdioxid ist die Gaskammer eine Fehlerquelle. Es befand sich immer ein kleiner Restanteil an Luft in der Kammer, so dass die gemessenen Werte nicht für reines Kohlenstoffdioxid gelten. Um diesen Fehler so gering wie möglich zu halten, wurden jedoch mehrere Messungen gemacht.

Somit ist bei diesem Teil des Experimentes anscheinend ein systematischer Fehler vorhanden. Die Fehler der Wellenlänge und des Brechungsindex von Luft sind aber vermutlich lediglich statistischer Natur.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V401 Das Michelson-Interferometer*. 2017.