

# **Versuch 14**

## **Tomographie**

Jonah Nitschke  
lejonah@web.de

Sebastian Pape  
sepa@gmx.de

Durchführung: 10.01.2018

Abgabe: 15. Januar 2018

# 1 Einleitung

Der Versuch V14 umfasst die Anwendung des Verfahrens der Tomographie mittels  $\gamma$ -Strahlung. Das Ziel des Versuches ist es die materielle Zusammensetzung zwei bekannter, sowie einem unbekannten Objekt zu untersuchen.

## 2 Theorie

Die Tomographie ist ein bildgebendes Verfahren, welches auf dem Prinzip der Absorption basiert. Dabei wird ein Objekt von  $\gamma$ -Strahlung, oder auch Teilchen wie Elektronen oder Neutronen durchdrungen. Die Anfangsintensität  $I_0$  und Endintensität  $I_f$  werden vermessen, sodass die Absorptionskonstante  $\mu$  des durchdrungenen Materials bestimmt werden kann.

In dem Versuch wird ausschließlich  $\gamma$ -Strahlung verwendet. Diese wechselwirkt mit Materie über drei Prozesse, der Photoeffekt, der Compton-Effekt und die Paarbildung. Die Wirkungsquerschnitte der Prozesse sind abhängig von der Photonenenergie der  $\gamma$ -Strahlung, sodass gilt  $\sigma_i = \sigma_i(E_\gamma)$ . Eine exemplarische Darstellung der Wirkungsquerschnitte der drei Effekte ist in Abb. 1 anhand des Absorptionskoeffizienten von Blei dargestellt.

Die Intensitäten der materialdurchdringenden Photonen hängen über einen exponentiellen Zusammenhang mit der Absorptionskonstante und der Materialdicke  $d$  zusammen.

$$I_f = I_0 \exp - \sum_i \mu \cdot d_i \quad (1)$$

Die Absorptionskonstante ist materialspezifisch, weshalb aufgrund ihres Wertes auf das Material zurückgeschlossen werden kann. Das einmaligen Durchführen des Verfahren gibt lediglich einen Eindruck von einem Querschnittes des Objektes. Deshalb ist eine mehrfach Ausführung mit verschiedenen Durchdringungsrichtungen notwendig, um das Gesamtobjekt zu vermessen.

Die Gleichung (1) kann umgestellt werden, sodass ein Gleichungssystem der Form:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{\mu} = \vec{I} \quad (2)$$

In dem Versuch wird ein  $3 \times 3 \times 3$  Würfel untersucht. Deshalb ist die Dicke der einzelnen Würfel  $d_i$  gleich  $d = 1 \text{ cm}$  für alle Einheitswürfel. Das bedeutet, dass es insgesamt neun verschiedene Absorptionskonstanten  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_9$  in einer Ebene des Würfels vorliegen. Dementsprechend werden mindestens neun verschiedene Projektionen benötigt, um das Gleichungssystem (2) zu lösen. Das Messverfahren wird durch eine Überbestimmung des Gleichungssystems erhöht, weshalb anstelle der nötigen neun Projektionen zwölf

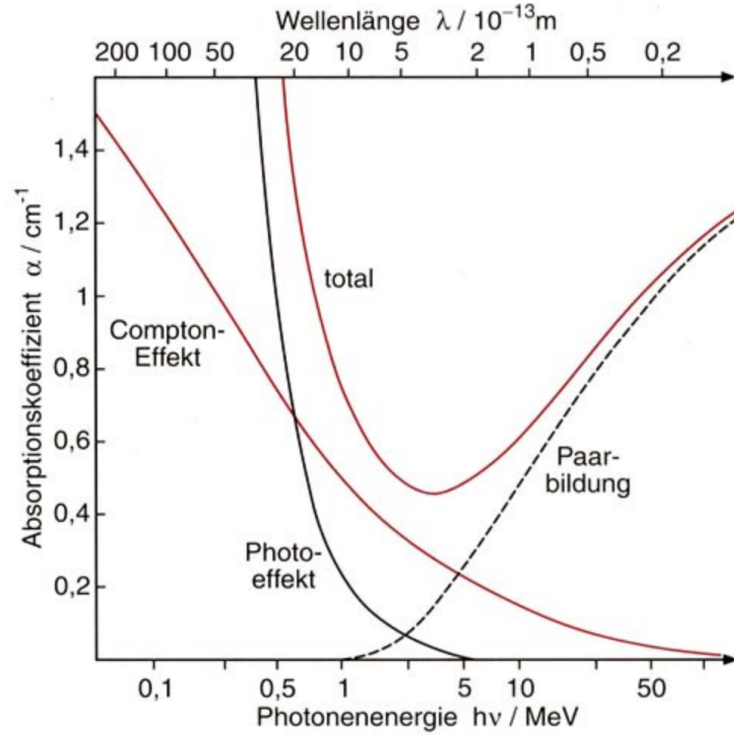


Abbildung 1: Beiträge von Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung zum Absorptionskoeffizienten von Blei in Abhängigkeit von der Photonenenergie.[drei\_effekte]

Projektionen gewählt werden. Eine Darstellung der gewählten Projektionen ist in Abb. 2 zu sehen.

Die gewählten Projektionen erzeugen ein Gleichungssystem der Form:

$$d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

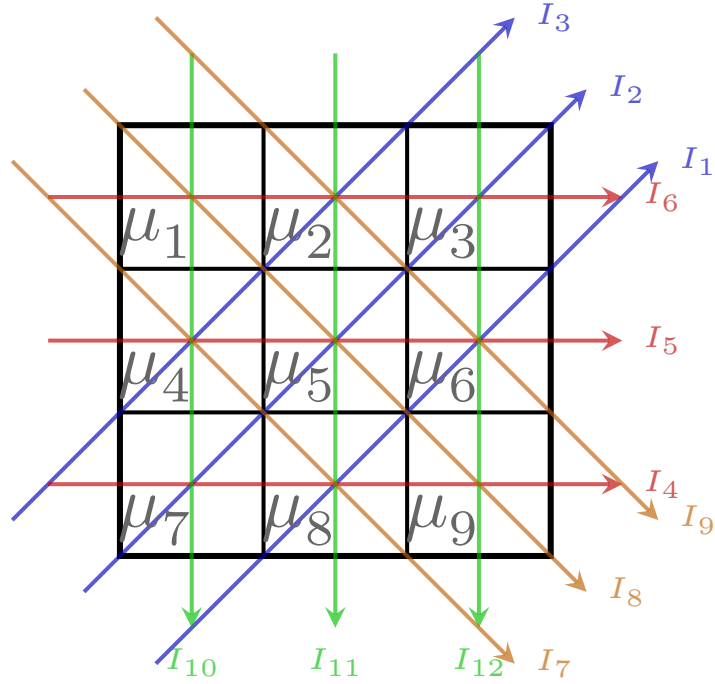


Abbildung 2: Schematische Darstellung der zwölf verwendeten Projektionen  $I_1 - I_{12}$ . [LuckyJosh]

Aufgrund der Überbestimmtheit von (3) wird die "Methode der kleinsten Quadrate" verwendet, wodurch (3) in eine Normalgleichung der Form  $(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}) \cdot \vec{\mu} = (\underline{\underline{A}}^T \cdot \vec{I})$  überführt wird. Umgestellt nach  $\vec{\mu}$  ergibt:

$$\vec{\mu} = (\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{\underline{A}}^T \cdot \vec{I}. \quad (4)$$

Die Varianz des Vektors  $\vec{I}$  ist durch eine Diagonalmatrix gegeben (vgl. (5)).

$$V[\vec{I}] = \text{diag}(\sigma_{I_1}^2, \sigma_{I_2}^2, \dots, \sigma_{I_{12}}^2) \quad (5)$$

Daraus ergibt sich die Kovarianzmatrix von  $\vec{\mu}$  zu:

$$V[\vec{\mu}] = (\underline{\underline{A}}^T V^{-1}[\vec{I}] \underline{\underline{A}})^{-1}. \quad (6)$$

Damit muss  $\vec{\mu}$  umgeschrieben werden zu:

$$\vec{\mu} = V[\vec{\mu}] \underline{\underline{A}}^T V^{-1}[\vec{I}] \cdot \vec{I}. \quad (7)$$

### 3 Durchführung

Die Durchführung des Versuches benötigt eine  $\gamma$ -Strahlungsquelle, einen Szintillationsdetektor, einen Vielkanalanalysator, Bleiabschirmungen und einen Computer, der die Daten des Vielkanalanalysators aufnimmt und mit geeigneter Software verarbeitet. Eine Abbildung des verwendeten Aufbaus ist in ?? dargestellt. Auf der Abbildung fehlen die Bleiabschirmungen, die geeignet den Versuch positioniert werden, sodass die Sicherheit vor Streustrahlung gewährleistet ist.

Als  $\gamma$ -Strahlungsquelle wurde das Caesium-Isotop 137 ( $^{137}\text{Cs}$ ) verwendet, welches  $\gamma$ -Strahlung mit einer Energie von  $E_\gamma \approx 0,6617 \text{ MeV}$  besitzt. Die Photonenenergie ist kleiner als die Energie, bei der der Effekt der Paarbildung auftritt. Damit sind die beiden relevanten Prozesse der Photonenwechselwirkung mit Materie der Photoeffekt und der Compton-Effekt.

Die untersuchten Objekte sind die bereits erwähnten  $3 \times 3 \times 3$  Würfel, die aus insgesamt 27 Einheitswürfel aufgebaut sind. Insgesamt werden drei Proben, sowie eine Referenzprobe untersucht. Die Referenzprobe  $P_1$  ist ein  $3 \times 3 \times 3$  Würfel, der nur aus der Ummantelung besteht und dessen Einheitswürfel aus Luft bestehen. Dieser dient dazu den Wert der eingehenden Anfangsintensität  $I_0$  zu bestimmen und es werden für diese Probe lediglich die Projektionen  $I_2, I_3$  und  $I_6$  ausgemessen.

Weiterhin gibt es zwei Proben aus bekannten Materialien ( $P_2$  : Aluminium und  $P_3$  : Blei) und eine unbekannte Probe  $P_4$ . Die Einheitswürfel von  $P_4$  sind entweder aus Blei oder aus Aluminium, aber die Zusammensetzung ist a priori nicht bekannt und gilt als zu ermitteln. Für diese Proben sind alle zwölf Projektionen auszumessen.

Zu Beginn wird das Computerprogramm gestartet und auf seine Funktionsfähigkeit überprüft. Danach wird die Proben  $P_2$  in die in Abb. ?? dargestellt Halterung eingebracht und so ausgerichtet, dass die erste Projektion  $I_1$  von dem Photonenstrahl hin zum Detektor realisiert wird. Die weiteren Projektionen können durch Drehen und Kalibrieren der Halterung eingestellt werden. Die anderen Proben werden im gleichen Verfahren in der Reihenfolge  $P_3, \text{sym}P_1$  und  $P_4$  ausgemessen.

Bei den Proben  $P_1$  und  $P_4$  werden solange Messwert genommen, bis in einem Bereich von 10 bis 14 Kanälen um den Peak herum im Vielkanalanalysator 12 500 bis 15 000 Ereignisse sind.

Die Proben  $P_2$  und  $P_3$  werden nur solange vermessen, bis die statistische Unsicherheit in 5 bis 7 Kanälen um den Peak herum  $\leq 3\%$  ist. Dies entspricht ca. 1200 Ereignissen, da  $\frac{\sqrt{N}}{N} = 3\%$  für  $N = 1200$  realisiert ist. Dabei ist  $N$  die Anzahl der Ereignisse.