

1 Auswertung

1.1 Bestimmung der Schwingungsdauern

Zu Beginn des Versuches wurde die Schwingungsdauer der beiden frei schwingenden Pendel bestimmt. Es wurden insgesamt 10 Messungen von jeweils 5 Schwingungen gemacht. Die Schwingungsdauern ergeben sich rechnerisch aus

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

wobei l die Länge des Pendels ist und g die Erdbeschleunigung. Die Messreihe wurde zuerst mit einer Pendellänge von 0,797 m und danach mit einer Pendellänge von 0,946 m durchgeführt. Anschließend wurde die Schwingungsdauer T_+ der gleichsinnigen Schwingung und T_- der gegensinnigen Schwingung bestimmt. In der folgenden Tabelle sind die Schwingungsdauern erfasst. Die Fehler ergeben sich aus der Standardabweichung der Mittelwerte.

Tabelle 1: Schwingungsdauern

Messung	T_1 [s]	Fehler [s]	T_2 [s]	Fehler [s]	T_+ [s]	Fehler [s]	T_- [s]	Fehler [s]
1	1,75	0,03	1,74	0,02	1,73	0,03	1,33	0,04
2	1,90	0,03	1,92	0,02	1,89	0,03	1,73	0,03

Tabelle 2: Berechnete Schwingungsdauern

Messung	T_1 [s]	T_2 [s]	T_+ [s]	T_- [s]
1	1,79	1,79	1,79	1,75
2	1,95	1,95	1,95	1,93

1.2 Bestimmung der Schwebungsdauern

Darüberhinaus wurde die Schwebungsdauer T_S und die Schwingungsdauer T für eine gekoppelte Schwingung gemessen. Die Daten dieser Messung sind in den folgenden Tabellen aufgeführt. In Tabelle 3 sind die gemessenen Zeiten der Schwebungen aufgeführt.

Tabelle 3: Schwebungsdauern

<i>Messung</i>	T_S [s]	<i>Fehler</i> [s]	T [s]	<i>Fehler</i> [s]	T_S berechnet [s]	<i>Fehler</i> [s]
1	5,58	0,03	5,99	0,14	5,80	0,80
2	19,66	0,08	20,30	1,50	20,00	4,00

Die Fehlerrechnung wurde mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet. Die Formel dazu lautet:

$$\begin{aligned}\Delta T_S &= \sqrt{(\partial_{T_+} T_S \cdot \Delta T_+)^2 + (\partial_{T_-} T_S \cdot \Delta T_-)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{T_+ \cdot T_-^3}{(T_+ - T_-)^3} \cdot \Delta T_+\right)^2 + \left(\frac{T_+^3 \cdot T_-}{(T_+ - T_-)^3} \cdot \Delta T_-\right)^2}\end{aligned}$$

1.3 Vergleich der gemessenen mit den berechneten Werten

Die Differenzen zwischen den gemessenen und berechneten Schwingungsdauern ist in Tabelle 4 visualisiert.

Tabelle 4: Vergleich der Schwingungsdauern

<i>Messung</i>	ΔT_1 [s]	ΔT_2 [s]	ΔT_+ [s]	ΔT_- [s]	ΔT_S [s]
1	0,04	0,05	0,06	0,42	0,38
2	0,05	0,07	0,06	0,20	0,44

Es wird deutlich, dass besonders große Abweichungen zwischen berechnetem und gemessenem Wert bei der gegenphasigen Schwingungsdauer und der Schwebungsdauer zu beobachten sind. Alle weiteren Werte weichen weniger als 3,5% von den errechneten Werten ab und liegen in einem 2σ Bereich der Messunsicherheit. Die Abweichung bei der gegenphasigen Schwingungsdauer ist dadurch zu erklären, dass die Feder, welche die Pendel koppelt nicht optimal gestaucht wird. Dies bewirkt, dass die Pendel von ihrer Bahn leicht abgelenkt werden, wodurch die Schwingzeit verändert wird. Die Messfehler sind somit auf einen systematischen Fehler zurückzuführen. Die Schwebungsdauer mit der gegenphasigen Schwingungsdauer korreliert durch die Formel

$$T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}$$

Somit fließen die Messfehler von T_- direkt in T_S ein.

1.4 Bestimmung der Schwingfrequenzen

Aus den gemessenen Schwingungsdauern wurden die Schwebungsfrequenz, die Schwingungsfrequenz der gleichsinnigen und die Schwingungsfrequenz der gegensinnigen Schwingung bestimmt. Dafür wurde zum einen die Formel

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

benutzt. Die Messdaten für die Schwingfrequenzen sind in Tabelle 5 aufgelistet.

Tabelle 5: Schwingfrequenzen

Messung	ω_+ [Hz]	Fehler [Hz]	ω_- [Hz]	Fehler [Hz]
1	3,64	0,05	4,72	0,13
2	3,32	0,05	3,64	0,05

Andererseits, ergeben sich die Schwingfrequenzen aus den Formeln

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g + 2K}{l}}.$$

Wobei ω_+ die Frequenz der gleichsinnigen Schwingung und ω_- die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist. Aus den berechneten Werten ergibt sich

$$\text{Messung 1 : } \omega_+ = 3,51\text{Hz} \quad \omega_- = 3,60\text{Hz}$$

$$\text{Messung 2 : } \omega_+ = 3,22\text{Hz} \quad \omega_- = 3,25\text{Hz}$$

Die gemessenen Werte weichen von den berechneten Werten deutlich ab. Die berechnete Schwingfrequenz ω_+ der ersten Messung ist 3,7% kleiner als der gemessene Wert. Noch deutlicher ist der Unterschied zwischen der berechneten und gemessenen Schwingfrequenz ω_- in der ersten Messung. Der gemessene Wert ist um 31% größer als der aus den Schwingdauern berechnete Wert. Ebenso sind Diskrepanzen bei den Schwingfrequenzen der zweiten Messung. ω_+ ist um 3,1% größer als der berechnete Wert und ω_- weicht um 12% nach oben von dem berechneten Wert ab. Die Abweichungen der Schwingfrequenz der gegenphasigen Schwingungen ist damit zu begründen, dass bei der Messung der gegensinnigen Schwingungsdauer ein signifikanter Messfehler aufgetreten ist. Der Zusammenhang zwischen der Schwingfrequenz und der Schwingungsdauer ist in Formel (1) dargestellt.

1.4.1 Bestimmung der Schwebungsfrequenz

In dem Versuch sollte die Schwebungsfrequenz ω_S ermittelt werden. Die Schwebungsfrequenz ergibt sich aus den Schwingfrequenzen ω_+ und ω_- über die Formel

$$\omega_S = \omega_+ - \omega_-.$$

Die Schwingfrequenzen wurde gemessen und zuzüglich noch berechnet. Somit ergibt sich für die Schwebungsfrequenz zum einen der aus den gemessenen Werten ermittelte Wert $\omega_{S \text{ gemessen}}$ und zum anderen der aus den berechneten Werten ermittelte Wert $\omega_{S \text{ berechnet}}$. Die Werte sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Tabelle 6: Schwebungsfrequenz

<i>Messung</i>	$\omega_{S \text{ gemessen}}$ [Hz]	<i>Fehler</i> [Hz]	$\omega_{S \text{ berechnet}}$ [Hz]
1	1,08	0,14	0,09
2	0,32	0,07	0,03

1.4.2 Bestimmung der Kopplungskonstante

Die *Kopplungskonstante* K gibt das Maß der Kopplung an, durch welches die beiden Pendel miteinander verbunden sind. Im Fall der über eine Feder gekoppelten Pendel, entspricht die *Kopplungskonstante* K der Federkonstante der Kopplungsfeder. Anhand der gleich- und gegenphasigen Schwingungsdauer, kann die *Kopplungskonstante* berechnet werden. In der Tabelle 7 ist die wurde K einmal durch die berechneten und einmal durch die gemessenen Werte bestimmt. Die Differenz wird als ΔK dargestellt.

Tabelle 7: Kopplungskonstante

<i>Messung</i>	K _{gemessen} [Hz]	<i>Fehler</i> [Hz]	K _{berechnet} [Hz]	ΔK
1	0,26	0,03	0,03	0,23
2	0,09	0,02	0,01	0,08

Erneut sind die großen Unterschiede des gemessenen und des berechneten Wert auf den Fehler bei der Bestimmung der gegensinnigen Schwingungsdauer zurückzuführen. Die Fehler der Kopplungskonstante wurde mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ermittelt.

$$\begin{aligned}\Delta_K &= \sqrt{(\partial_{T_+} K \cdot \Delta_{T_+})^2 + (\partial_{T_-} K \cdot \Delta_{T_-})^2} \\ &= \sqrt{\left(4 \frac{T_+ \cdot T_-^2}{(T_+^2 + T_-^2)^2} \cdot \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \cdot \Delta_{T_+}\right)^2 + \left(-4 \frac{T_- \cdot T_+^2}{(T_+^2 + T_-^2)^2} \cdot \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \cdot \Delta_{T_-}\right)^2}\end{aligned}$$

2 Diskussion

In der Auswertung wurden alle angegebenen Werte in zweistelliger Arithmetik dargestellt. Dies hängt mit der Art der Messung zusammen. Die Zeitmessungen wurde mit einer Stoppuhr realisiert, bei der die Zeit im hundertstel Sekunden Bereich gemessen werden konnte. Aus diesem Grund sind die Mittelwerte der Messergebnisse auf die zweite Nachkommastelle gerundet.

2.1 Schwingungsdauern

Aufgrund der Reaktionszeit des Menschen, die ca. 1ms beträgt wurden immer zehn Versuchsdurchgänge mit jeweils fünf Schwingungen gemessen. Es kann angenommen werden, dass sich die Reaktionszeit des Menschen herausmittelt. Die gemessenen Resultate der frei schwingenden Pendel stimmen mit den berechneten Schwingungsdauern nahezu überein und untermauern die Richtigkeit der Formeln. Die Formel für die Schwingungsdauer gilt nur für kleine Auslenkungen. Somit können kleine Unterschiede zwischen gemessenen und berechneten Werten dadurch erklärt werden, dass die Formel nur im Rahmen der Kleinwinkelnäherung gültig ist. Die in Tabelle 4 dargestellten Daten zeigen die Aussagekraft des Experimentes über die Formeln. Sobald die Pendel gekoppelt sind und die Kopplungsfeder ausgelenkt ist weichen die Messergebnisse signifikant von den berechneten Werten ab. Somit ist zu vermuten, dass die Messfehler auf die Kopplungsfeder zurückzuführen sind. Argumente für diese Hypothese sind, dass die Feder, nicht wie in der Theorie direkt an den Massestücken befestigt war. Desweiteren ist die Feder nicht optimal gestaucht worden, wodurch sie das Pendel dazu brachte von seiner zweidimensionalen auf eine dreidimensionale Bahn auszuweichen. Dadurch könnten die Schwingungszeiten direkt beeinflusst worden sein.

2.2 Schwingfrequenzen

Bei den Schwingfrequenzen wird erneut die Auswirkung des Fehlers der gegenphasigen Schwingungsdauer ersichtlich. Die gegenphasigen Schwingfrequenzen ω_- weichen deutlich von den berechneten Werten ab. Während die gleisinnigen Schwingfrequenzen ω_+ nur um maximal 3,7% voneinander abweichen, sind die Unterschiede bei den gegensinnigen Schwingfrequenzen bis zu 31% verschieden. Bei der Ermittlung von ω_+ wurde die Kopplungsfeder nicht ausgelenkt. Dadurch wird die Hypothese, dass die Kopplungsfeder einen systematischen Fehler beinhaltet erneut untermauert.

2.3 Schwebungsfrequenz

Die Schwebungsfrequenz wird direkt aus den beiden Schwingfrequenzen errechnet. Das bedeutet, wenn ω_- einen Fehler aufweist, spiegelt dieser sich ebenso signifikant in ω_S wieder. Zwischen ω_S und ω_- besteht ein linearer Zusammenhang. Die Ergebnisse für die Schwebungsfrequenz haben auf Grund ihrer großen Abweichung vom berechneten Wert keine Aussagekraft.

2.4 Kopplungskonstante

In dem Versuch wurde für beide Messungen mit unterschiedlicher Pendellänge immer die selbe Kopplungsfeder verwendet. Das bedeutet, dass sich bei beiden Messreihen die selbe Kopplungskonstante ergeben sollte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Eine mögliche Begründung dafür ist, dass die Kopplungsfeder nicht direkt mit den Massen der Pendel verbunden war. Durch das Verändern der Pendellänge von 0,797 m auf 0,946 wurde somit auch der Hebel verändert, mit dem die Kopplungsfeder die Kraft auf die Massstücke der Pendel ausübte.