106

Das gekoppelte Pendel

Sebastian Pape Jonah Nitschke

Durchführung: 18.10.2016

1 Theorie

In dem folgenden Versuch werden verschiedene Schwingungsarten von gekoppelten Pendeln betrachtet. Bei den verwendeten Pendeln handelt es sich um Fadenpendel mit der Fadenlänge l und der Masse m. Bei einer Auslenkung des Pendels um den Winkel φ wirkt auf das Massenstück ein durch die Gravitation verursachtes Drehmoment:

$$M = D_p \cdot \varphi \tag{1}$$

Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage ($\sin(\varphi) = \varphi$) kann mit dieser Kraft eine Bewegungsgleichung aufgestellt werden:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + D_p \cdot \varphi = 0 \tag{2}$$

Bei D_p handelt es sich dabei um die Winkelrichtgröße und bei J um das Trägheitsmoment des Pendels. Bei der Lösung der Bewegungsgleichung handelt es sich um eine harmonische Schwingung mit folgender Frequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3}$$

Werden zwei identische Pendel nun mit einer Feder gekoppelt, schwingen sie nicht mehr unabhängig voneinander, da auf jedes Pendel eine zusätzliche Kraft wirkt. Somit ergeben sich zwei neue Bewegungsgleichung:

$$J \cdot \ddot{\varphi}_1 + D \cdot \varphi_1 = D_F(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{4}$$
$$J \cdot \ddot{\varphi}_2 + D \cdot \varphi_2 = D_F(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{5}$$

Diese beiden Differentialgleichungen können entkoppelt werden, so dass sich die Bewegung des Systems als Überlagerung von Eigenschwingungen darstellen lässt. Bei den lösungen handelt es sich dabei ebensfalls um harmonische Schwingungen. Für verschiedene Anfangsbedigungen ergeben sich daraus verschiedene Schwingungsarten.

1.1 Gleichphasige Schwingung: $\alpha_1 = \alpha_2$

Bei dieser Schwingung werden die beiden Pendel zu jedem Zeitpunkt um den gleichen Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$ ausgelenkt. Resultierend daraus wird von der Kopplungsfeder keine Kraft auf die beiden Pendel ausgeübt und im idealisierten Fall entsteht somit keine Auslenkung der Feder. Da die rücktreibende Kraft der beiden Pendel alleine durch die Gewichtskraft ausgeübt wird, kann die Feder auch entfernt werden, ohne das sich die System- Schwingung verändern würde.

Die Freqguenz des gekoppelten Pendels stimmt somit auch mit der Frequenz der ursprünglichen Pendel und kann mit

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{6}$$

beschrieben werden. Die Schwingungsdauer ergibt sich dann anhand der Frequenz mit folgender Formel:

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7}$$

1.2 Gegenphasige Schwingung: $\alpha_1 = -\alpha_2$

Bei der gegenphasigen Schwingung werden die beiden Pendel um den entgegengesetzten Winkel $\alpha_1 = -\alpha_2$ ausgelenkt. Dabei wird von der Kopplungsfeder auf jede Masse die gleiche aber entgegen- gesetzte Kraft ausgeübt, so dass ein symmetrisches Schwingungssystem entsteht. Die resultierenden Formeln für die Schwingungsfrequenz und Schwingungsdauer lautet wie folgt:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \tag{8}$$

$$T_- = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + 2K}} \tag{9}$$

Bei K handelt es sich hierbei um die Kopplungskonstante der Feder.

1.3 Gekoppelte Schwingung: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$

Wird am Anfang nur ein Pendel $\alpha_1 \neq 0$ ausgelenkt, während das andere in der unausgelenkten Position verharrt $\alpha_2 = 0$, kommt es zu einer gekoppelten Schwingung. Wird nun das erste Pendel losgelassen, überträgt es seine Energie auf das zweite Pendel, so dass dieses anfängt zu schwingen. Sobald das erste Pendel stillsteht, kehrt sich dieser Prozeß wieder um. Die maximale Amplitude wird dabei immer erreicht, wenn das andere Pendel stillsteht. Die vollständige Energieübetragung wiederholt sich immer wieder. Den zeitlichen Abstand zwischen zwei Stillständen nennt man dabei Schwebung. Die Schwebefrquenz und Schwebungsdauer sind durch folgende Formeln definiert:

$$\omega_S = \omega_+ - \omega_- \tag{10}$$

$$T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \tag{11}$$

Dabei entspricht T_+ der gleichphasigen und T_- der gegenphasigen Schwingung. Die in den Formeln vorkommende Kopplungskonstante K kann entweder mit den Frequenzen oder mit den Schwingungsdauern der gleich- und gegenphasigen Schwingung bestimmt werden:

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \tag{12}$$

2 Durchführung

Als erstes werden die Gewichte am Pendel so verschoben, dass beide Pendel dieselbe Pendellänge besitzen. Dann wird mithilfe einer Stoppuhr erst die Schwingungdauer des ersten Pendels und danach die des zweiten Pendels gemessen. Dabei enthält eine Messreihe gemessene Werte von jeweils 5 Schwingungen.

Nachdem die einzelnen Schwingungsdauern bestimmt sind, werden die beiden Pendel mithilfe der Feder gekoppelt. Anschließend wird zuerst die Schwingungsdauer der gleichphasigen Schwingung gemessen, indem die Pendel so ausgelenkt werden, dass die Feder nicht gespannt wird. Für die zweite Messreihe werden die beiden Pendel dann exakt gegenphasig ausgelenkt. Eine Messung entspricht erneut jeweils 5 Schwingungen.

Bei der letzten Messung wird nur ein Pendel ausgelenkt, während das andere in seiner Ruhelage verharrt. Zuerst werden 10 Werte der Dauer einer einzelnen Schwebung aufgenommen, indem die Zeit zwischen dem beschleunigen und dem erneuten Stillstand eines Pendels gemessen wird. Anschließend werden noch einmal die Zeiten von 5 Schwebungen gemessen.

Alle Messungen werden anschließend für eine beliebige weitere Länge durchgeführt.

1 Auswertung

Im Folgendem werden die Messergebnisse der Messungen des Versuches V106 "Das gekoppelte Pendel" dargestellt und ausgewertet. Anschließend werden die Ergebnisse in Abschnitt 4 diskutiert.

1.1 Bestimmung der Schwingungsdauern

Zu Beginn des Versuches wurde die Schwingungsdauer der beiden frei schwingenden Pendel bestimmt. Es wurden insgesamt 10 Messungen von jeweils 5 Schwingungen gemacht. Die Schwingungsdauern ergeben sich rechnerisch aus

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

wobei l die Länge des Pendels ist und g die Erdbeschleunigung. Die Messreihe wurde zuerst mit einer Pendellänge von (0,797 $\pm$ 0,001 m) und danach mit einer Pendellänge von (0,946 $\pm$ 0,001 m) durchgeführt. Anschließend wurde die Schwingungsdauer T_+ der gleichsinnigen Schwingung und T_- der gegensinnigen Schwingung bestimmt. In der folgenden Tabelle sind die Schwingungsdauern erfasst. Die Fehler ergeben sich aus dem Fehler der Mittelwerte.

Tabelle 1: Schwingungsdauern

Messung	T_1 [s]	*Fehler* [s]	T_2 [s]	*Fehler* [s]	T_+ [s]	*Fehler* [s]	T_- [s]	*Fehler* [s]
1	1,75	0,007	1,74	0,005	1,73	0,005	1,33	0,008
2	1,90	0,005	1,92	0,004	1,89	0,006	1,73	0,005

Tabelle 2: Berechnete Schwingungsdauern

Messung	T_1 [s]	*Fehler* [s]	T_2 [s]	*Fehler* [s]	T_+ [s]	*Fehler* [s]	T_- [s]	*Fehler* [s]
1	1,79	0,001	1,79	0,001	1,79	0,001	1,75	0,001
2	1,95	0,001	1,95	0,001	1,95	0,001	1,93	0,001

Die Tabelle 2 zeigt die berechneten Schwingungsdauern. Diese wurden durch die Formeln (7) und (9) errechnet.

1.2 Bestimmung der Schwebungsdauern

Darüberhinaus wurde die Schwebungsdauer T_S und die Schwingungsdauer T für eine gekoppelte Schwingung gemessen. Die Daten dieser Messung sind in den folgenden Tabellen aufgeführt. In Tabelle 3 sind die gemessenen Zeiten der Schwebungen aufgeführt. Die Schwebungsdauer wurde mit Hilfe von Formel (11) berechnet.

Tabelle 3: Schwebungsdauern

Messung	T_S [s]	*Fehler* [s]	T [s]	*Fehler* [s]	$T_{S\text{ berechnet}}$ [s]	*Fehler* [s]
1	5,58	0,006	5,99	0,14	5,80	0,16
2	19,66	0,017	20,27	1,50	19,54	4,00

Die Fehlerrechnung wurde mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet. Die Formel dazu lautet:

$$\Delta_{T_S} = \sqrt{(\partial_{T_+} T_S \cdot \Delta_{T_+})^2 + (\partial_{T_-} T_S \cdot \Delta_{T_-})^2}$$

1.3 Messergebnisse der Schwingungsdauern

1.3.1 Messung 1

Tabelle 4: Schwingungsdauer

Pendel										
1	8,74	8,47	8,78	8,91	8,73	8,78	8,67	8,69	8,84	8,75
2	8,60	8,58	9,60	8,80	8,73	8,80	8,64	8,73	8,69	8,64

Tabelle 5: Gegen- und Gleichphasige Schwingung

T_-	6,76	6,44	6,58	6,70	6,75	6,66	6,55	6,70	6,53	6,86
T_+	8,70	8,50	8,72	8,72	8,75	8,58	8,60	8,58	8,60	8,58

Tabelle 6: Schwebungsdauer

T_S	5,67	5,55	5,61	5,58	5,52	5,69	5,41	5,58	5,67	5,50
T	30,96	29,55	30,21	29,49	30,21	29,77	29,64	29,66	30,26	29,80

1.3.2 Messung 2

Tabelle 7: Schwingungsdauer

Pendel										
1	9,56	9,55	9,43	9,40	9,46	9,36	9,59	9,50	9,44	9,61
2	9,53	9,60	9,47	9,60	9,63	9,60	9,56	9,60	9,67	9,50

Tabelle 8: Gegen- und Gleichphasige Schwingung

T_-	8,68	8,76	8,52	8,53	8,60	8,55	8,64	8,72	8,61	8,69
T_+	9,53	9,43	9,47	9,60	9,46	9,40	9,38	9,56	9,61	9,32

Tabelle 9: Schwebungsdauer

T_S	19,96	19,95	19,50	19,61	19,40	19,86	19,16	19,50	19,75	19,93
T	110,21	110,24	102,83	99,40	100,93	100,77	96,77	96,76	98,64	96,85

1.4 Bestimmung der Schwingfrequenzen

Aus den gemessenen Schwingungsdauern wurden die Schwebungsfrequenz, die Schwingungsfrequenz der gleichsinnigen und die Schwingungsfrequenz der gegensinnigen Schwingung bestimmt. Dafür wurde zum einen die Formel

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

benutzt. Die Messdaten für die Schwingfrequenzen sind in Tabelle 10 aufgelistet.

Tabelle 10: Schwingfrequenzen

Messung	ω_+ [Hz]	*Fehler* [Hz]	ω_- [Hz]	*Fehler* [Hz]
1	3,64	0,011	4,72	0,028
2	3,32	0,01	3,64	0,011

Andererseits, ergeben sich die Schwingfrequenzen aus den Formeln

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{g+2K}{l}}.$$

Wobei ω_+ die Frequenz der gleichsinnigen Schwingung und ω_- die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist. K ist die Kopplungskonstante, die in Abschnitt *Bestimmung der Kopplungskonstante* berechnet wird. Aus den vorliegenden Werten ergibt sich

$$\textbf{Messung 1}: \quad \omega_+ = 3,51 \pm 0.0022Hz \qquad \omega_- = 3,60 \pm 0.0023Hz$$
$$\textbf{Messung 2}: \quad \omega_+ = 3,22 \pm 0.0017Hz \qquad \omega_- = 3,25 \pm 0.0017Hz$$

1.4.1 Bestimmung der Schwebungsfrequenz

In dem Versuch sollte die Schwebungsfrequenz ω_S ermittelt werden. Die Schwebungsfrequenz ergit sich aus den Schwingfrequenzen ω_+ und ω_- über die Formel

$$\omega_S = \omega_+ - \omega_-.$$

Die Schwingfrequenzen wurde gemessen und zuzüglich noch aus dem berechnetem Wert von T_S errechnet. Somit ergibt sich für die Schwebungsfrequenz zum einen der aus den gemessenen Werten ermittelte Wert $\omega_{S \text{ gemessen}}$ und zum anderen der aus den berechneten Werten ermittelte Wert $\omega_{S \text{ berechnet}}$. Die Werte sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Tabelle 11: Schwebungsfrequenz

Messung	$\omega_{S \text{ gemessen}}$ [Hz]	*Fehler* [Hz]	$\omega_{S \text{ berechnet}}$ [Hz]	*Fehler* [Hz]
1	1,13	0,031	1,08	0,000 06
2	0,32	0,07	0,31	0,000 016

1.4.2 Bestimmung der Kopplungskonstante

Die *Kopplungskonstante* K gibt das Maß der Kopplung an, durch welches die beiden Pendel miteinander verbunden sind. Im Fall der über eine Feder gekoppelten Pendel, entspricht die *Kopplungskonstante* K der Federkonstante der Kopplungsfeder. Anhand der gleich- und gegenphasigen Schwingungsdauer kann die *Kopplungskonstante* berechnet werden. In der Tabelle 12 wurde K einmal durch die berechneten und einmal durch die gemessenen Werte bestimmt.

Tabelle 12: Kopplungskonstante

Messung	K_{gemessen}	*Fehler*	$K_{\text{berechnet}}$	*Fehler*
1	0,26	0,006	0,03	0,0006
2	0,09	0,004	0,01	0,0004

Erneut sind die großen Unterschiede des gemessenen und des berechneten Wertes auf den Fehler bei der Bestimmung der gegensinnigen Schwingungsdauer zurückzuführen. Die Fehler der Kopplungskonstante wurde mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ermittelt.

$$\Delta_K = \sqrt{(\partial_{T_+} K \cdot \Delta_{T_+})^2 + (\partial_{T_-} K \cdot \Delta_{T_-})^2}$$

2 Diskussion

In der Auswertung wurden alle angegebenen Werte in zweistelliger Arithmetik dargestellt. Dies hängt mit der Art der Messung zusammen. Die Zeitmessungen wurden mit einer Stoppuhr realisiert, bei der die Zeit im hundertstel Sekundenbereich gemessen werden konnte. Aus diesem Grund sind die Mittelwerte der Messergebnisse auf die zweite Nachkommastelle gerundet.

2.1 Schwingungsdauern

Aufgrund der Reaktionszeit des Menschen, die ca. 1ms beträgt wurden immer zehn Versuchsdurchgänge mit jeweils fünf Schwingungen gemessen. Es kann angenommen werden, dass sich die Reaktonszeit des Menschens bei der Zeitmessung herausmittelt. Die gemessenen Resultate der frei schwingenden Pendel stimmen mit den berechneten Schwingungsdauern nahezu überein und untermauern die Richtigkeit der Formeln. Die Formel für die Schwingungsdauer gilt nur für kleine Auslenkungen. Somit können kleine

Unterschiede zwischen gemessenen und berechneten Werten dadurch erklärt werden, dass die Formel nur im Rahmen der Kleinwinkelnäherung gültig ist. Sobald die Pendel gekoppelt sind und die Kopplungsfeder ausgelenkt ist, weichen die Messergebnisse signifikant von den berechneten Werten ab. Somit ist zu vermuten, dass die Messfehler auf die Kopplungsfeder zurückzuführen sind. Argumente für diese Hypothese sind, dass die Feder, nicht wie in der Theorie direkt an den Massestücken befestigt war. Desweiteren ist die Feder nicht optimal gestaucht worden, wodurch sie das Pendel dazu brachte, von seiner zweidimensionalen auf eine dreidimensionale Bahn auszuweichen. Dadurch könnten die Schwingungszeiten direkt beeinflusst worden sein. Die Schwebungsdauer mit der gegenphasigen Schwingungsdauer korreliert durch die Formel

$$T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}$$

Somit fließen die Messfehler von T_- direkt in T_S ein.

2.2 Schwingfrequenzen

Bei den Schwingfrequenzen wird erneut die Auswirkung des Fehlers der gegenphasigen Schwingungsdauer ersichtlich. Die gegenphasigen Schwingfrequenzen ω_- weichen deutlich von den berechneten Werten ab. Während die gleichsinnigen Schwingfrequenzen ω_+ nur gering voneinander abweichen, sind die Unterschiede bei den gegensinnigen Schwingfrequenzen signifikant größer. Bei der Ermittlung von ω_+ wurde die Kopplungsfeder nicht ausgelenkt. Dadurch wird die Hypothese, dass die Kopplungsfeder einen systematischen Fehler beinhaltet erneut untermauert.

2.3 Schwebungsfrequenz

Die Ergebnisse der gemessenen und berechneten Schwebungsfrequenz stimmen im Rahmen der Messunsicherheit überein. Dadurch wird die Formel für die Schwebungsfrequenz bestätigt.

2.4 Kopplungskonstante

In dem Versuch wurde für beide Messungen mit unterschiedlicher Pendellänge immer die selbe Kopplungsfeder verwendet. Das bedeutet, dass sich bei beiden Messreihen die selbe Kopplungskonstante ergeben sollte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Eine möglich Begründung dafür ist, dass die Kopplungsfeder nicht direkt mit den Massen der Pendel verbunden war. Durch das Verändern der Pendellänge von 0,797 $\pm$ 0.001 m auf 0,946 $\pm$ 0.001 m wurde somit auch der Hebel verändert, mit dem die Kopplungsfeder die Kraft auf die Massestücke der Pendel ausübte. Somit erhält man für unterschiedliche Pendellängen verschiedene Kopplunkonstanten trotz der selben Kopplungsfeder.