Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Durchführung: 01.02.2017
Abgabe: 08.02.2017

1 Theorie

In dem folgenden Versuch wird ein elektronischer Kreis, im Kern bestehend aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator. Über diese Schaltung kann eine gedämpfte Schwingung betrachtet werden, sowie durch Anschluss eines Generators aus eine erzwungene Schwingung. Im Laufe des Versuches sollen der Dämpfungswiderstand, die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung sowie die Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung betrachtet werden.

1.1 Der gedämpfte Schwingkreis

Der in diesem Experiment betrachtete gedämpfte Schwingkreis ist in Im Grunde nur eine Erweiterung des RC-Kreise mit einer Spule. Somit kommen in der Schaltung zwei Energiespeicher vor, zwischen denen die Energie hin und her pendelt. Durch den eingebauten Widerstand geht bei der Schwingung Energie in Form von Wärme verloren und somit wird das ganze System gedämpft. Betrachtet man solch eine Schaltung, kann mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze eine Differentialgleichung für den Strom aufgestellt werden:

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}I = 0. \tag{1}$$

Durch Lösen der Differentialgleichung ergibt sich mit einem geeigneten Ansatz für die Frequenz ein Term, der von der Stärke der Dämpfung abhängig ist:

$$\tilde{\omega}_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{2}$$

Je nachdem wie sich der unter der Wurzel stehende Term verhält, können für die gedämpfte Schwingung verschiedene Fälle betrachtet werden, von denen zwei im folgenden Erläutert werden.

1.Fall : $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

In diesem Fall ist der Term mit der Wurzel rein reel und es entsteht eine harmonische Schwingung, deren Amplitude mit zunehmender Zeit gegen Null geht. Die Einhüllende wird dabei durch eine Exponentialfunktion beschrieben. Mithilfe der Schwingungsdauer lässt sich dann errechnen, nach welcher Zeit die Amplitude auf den e-ten Teil ihrer Ursprungsamplitude abgesenkt ist:

$$T_{\text{ex}} := \frac{2L}{R}\text{s}. \tag{3}$$

2.Fall : $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Bei diesem Fall handelt es sich um eine aperiodische Dämpfung, bei der die Lösung keinen oszillatorischen Teil besitzt. In diesem Versuch wird dabei nur der als aperiodischer Grenzfall bezeichneter Spezialfall betrachtet, bei dem $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ gilt und der Strom ohne Überschwinger am schnellsten gegen Null geht.

1.2 Die erzwungene Schwingung

Wird bei dem vorher betrachteten Schaltkreis noch ein Generator mit eingebaut, handelt es sich um eine erzwungene Schwingung, für die sich mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze für die Kondensatorspannung U_C folgende Differentialgleichung ergibt:

$$LC\frac{\mathrm{d}^2U_\text{C}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}U_\text{C}}{\mathrm{d}t} + U_\text{C} = U_0 \exp^{j\omega t}\,. \tag{4}$$

Aus dieser Differentialgleichung können nun mit einem geeigneten Ansatz eine Funktion für die Kondensatorspannung U_c sowie eine Gleichung für die Phasenverschiebung φ zwischen Erreger- und Kondensatorspannung bestimmt werden:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \tag{5}$$

$$U_\text{C}(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + \omega^2R^2C^2}}. \tag{6}$$

Die Kondensatorspannung kann bei der sogenannten Resonanzfrequenz ω_res auch einen Wert größer als U_0 annehmen:

$$\omega_\text{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \tag{7}$$

Wird bei der Schaltung eine schwache Dämpfung betrachtet, für die $\frac{R^2}{2L^2} << \frac{1}{LC}$ gilt, nähert sich ω_res der Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung an. In diesem Fall übertrifft U_C die Erregerspannung U_0 um den Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$, welcher auch als Güte des Schwingkreises bezeichnet wird.