# Versuch 101

**Das Trägheitsmoment**

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Durchführung: 08.11.2016
Abgabe: 15.11.2016

# 1 Theorie

Das Trägheitsmoment bei der Rotationsbewegung ist das Äquivalent zu der Masse bei einer Translationsbewegung. Die um eine Drehachse rotierende Punktmasse mit Masse $m$ und Abstand $r$ zur Rotationsachse besitzt ein Trägheitsmoment von $I = mr^2$. Trägheitsmomente sind additiv. Eine diskrete Anordnung von $n$ Punktmassen besitzt somit ein Gesamtträgheitsmoment aus der Summe der einzelnen Trägheitsmomente.

$$I = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 \cdot m_i \tag{1}$$

Entsprechend gilt für eine kontinuierliche Masseverteilung

$$I = \int r^2 \mathrm{dm}. \tag{2}$$

In der folgenden Aufzählung sind die Trägheitsmomente ausgewählter Geometrien aufgeführt.

*Kugel*:

$$I_K = \frac{2}{5} m R^2 \tag{3}$$

*Zylinder*:

$$I_{Zs} = \frac{mR^2}{2} \qquad I_{Zh} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \tag{4}$$

Wobei $I_{Zs}$ das Trägheitsmoment eines Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse parallel zu Höhenachse und $I_{Zh}$ das Trägheitsmoment bezüglich der zur Symmetrieachse senkrechten Drehachse durch den Schwerpunkt ist.

Falls die Rotationsachse nicht durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers verläuft, sondern parallel zu einer Schwerpunktsachse liegt, kann das Trägheitsmoment mit dem Steinerschen Satz berechnet werden

$$I = I_S + m \cdot a^2. \tag{5}$$

$I_S$ Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktsachse

$a$ Abstand der Drehachse zur Schwerpunktsachse

Die Gleichung (5) ermöglicht es, dass nur das Trägheitsmoment sowie der Abstand zu der parallelen Schwerpunktsachse benötigt werden, um das Trägheitsmoment bezüglich aller dazu parallelen Drehachsen zu bestimmen.

## 1.1 Bestimmen der Trägheitsmomente

Trägheitsmomente können über schwingungsfähige Systeme bestimmt werden. Die Schwingungsdauer und das Trägheitsmoment hängen folgendermaßen zusammen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{6}$$

$I$ Trägheitsmoment des Körpers

$D$ Winkelrichtgröße

Das Drehmoment ist das Kraftäquivalent bei einer Rotationsbewegung. Es ist definiert als $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$ mit einer anliegenden Kraft $\vec{F}$ und dem Abstand $\vec{r}$ von der Drehachse. In dem Versuch wurden Torsionsschwingungen ausgenutzt, um die Trägheitsmomente zu berechnen. Der Betrag des Drehmoments kann über den Auslenkwinkel $\varphi$ und die Winkelrichtgröße der Feder $D$ berechnet werden. Dann ist $M = D \cdot sin(\varphi)$, bzw. kleinwinkelgenähert $M = D \cdot \varphi$.

# 2 Durchführung

Der Versuch wurde mit Hilfe einer Torsionsfeder realisiert. Der Aufbau des schwingenden Systems ist aus Abbildung 1 zu entnehmen.

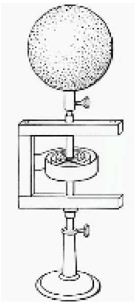


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau.[TUD16]

## 2.1 Winkelrichtgröße und Trägheitsmoment der Drillachse

Zu Beginn des Versuches musste die Winkelrichtgröße der Feder und das Eigenträgheitsmoment der Drillachse ermittelt werden. Die Winkelrichtgröße wurde mit Hilfe einer Federwaage bestimmt, die in einem bestimmten Abstand senkrecht an einer Metallstange angebracht wurde. Die Metallstange ist durch die Drillachse verlegt. Für sie muss ebenfalls das Trägheitsmoment berechnet werden. Die Torsionsfeder wird ausgelenkt bis die

Federwaage auf Null kalibriert wurde. Dann kann die Winkelskala eingestellt werden, sodass die Null mit der Auslenkung des Stabes übereinstimmt. Die Messung wird für drei verschiede Abstände und vier verschiedene Winkel durchgeführt. Die Winkelrichtgröße kann dann durch $D = \frac{F \cdot R}{\varphi}$ berechnet werden. $F$ ist die Federkraft, $R$ der Abstand und $\varphi$ der ausgelenkte Winkel.
Das Eigenträgheitsmoment der Drillachse wird dadurch bestimmt, dass zwei Gewichte an der Metallstange fixiert werden. Die Metallstange wird ausgelenkt, sodass das System zu schwingen beginnt. Die Periodendauer kann dann bestimmt werden. Die Messungen werden fünf mal für fünf Schwingungen durchgeführt. Insgesamt wird die Messung mit zehn verschiedenen Abstände realisiert.

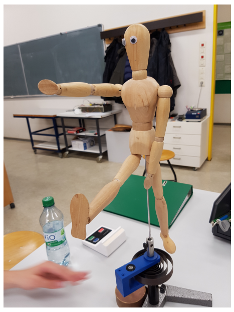
## 2.2 Trägheitsmoment zwei verschiedener Körper

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Körpers wird dieser auf der Drillachse befestigt und aus der Ruhelage ausgelenkt. Die Schwingungsdauer für fünf Schwingungen wird mithilfe einer Stoppuhr gemessen. Die Messung wird zehn mal wiederholt. Es wurde das Trägheitsmoment der weißen Kugel und des grauen Zylinders bestimmt.

## 2.3 Trägheitsmoment einer Holzpuppe

In dem Experiment wird ausgenutzt, dass Trägheitsmomente additiv sind. Das Trägheitsmoment eines komplexen Körpers, wie zum Beispiel einer Holzpuppe kann dadurch approximiert werden, dass man den Körper in einfachere Geometrien zerlegt. Einfach Geometrien wie Zylinder oder Kugeln lassen sich schnell berechnen. Alle Trägheitsmomente bezüglich der selben Achse dürfen addiert werden. Aus diesem Grund haben wir uns für folgende Stellungen der Holzpuppe entschieden.

(a) Stellung a



(b) Stellung b

Somit haben alle einfachen Geometrien Trägheitsmomente bezüglich der selben Drehachse. Die Holzpuppe wird, in aufrechter Position auf die Drillachse eingespannt und es wird erneut die Schwingungsdauer von fünf Schwingungen genemssen. Die Messung wird zehn mal wiederholt.

# 3 Auswertung

## 3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße und des Eigenträgheitmomentes der Drillachse

Für die Bestimmung der Winkelrichtgröße wurde folgende Formel verwendet:

$$D = \frac{|F| \cdot |r|}{\varphi} \tag{7}$$

Unsere Messergebenisse der Winkel und der jeweilig wirkenden Kraft sind in Tabelle 1 eingetragen.

Tabelle 1: Wirkende Kraft in N in Abhängigkeit des Drehwinkels bei verschiedenen Abständen.

| Abstand in m | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.31 | 0.61 | 0.89 | 1.20 |
| 0.15 | 0.20 | 0.40 | 0.595 | 0.89 |
| 0.20 | 0.16 | 0.30 | 0.44 | 0.59 |

Mithilfe der Messdaten werden die jeweiligen Winkelrichtgrößen berechnet und gemittelt, sodass sich folgender Wert für die "statische" Winkelrichtgröße ergibt:

$$D_{stat} = (0.0291 \pm 0.0003)\text{Nm} \tag{8}$$

Die Winkelrichtgröße kann auch dynamisch bestimmt werden. Die Messergebnisse dazu befinden sich in Tabelle 2. Zur Bestimmung von $D_{dyn}$ wird in einem Graphen $T^2$ gegen $a^2$ aufgetragen, wobei $a$ dem jeweiligen Abstand zum Drillachsenmittelpunkt $|r|$ entspricht und $T$ der jeweilig gemessenen Schwingungsdauer. Mittels linearer Regression wird dann die Steigung $m$ sowie der y-Achsenabschnitt $b$ berechnet. Mithilfe dieser Werte wird dann ebenfalls die Winkelrichtgröße mit folgender Formel berechnet:

$$D_{dyn} = \frac{8\pi^2 \cdot m_{zyl}}{m} \tag{9}$$

Der Fehler ergibt sich dabei mithilfe Gauß´scher Fehlerrechnung aus folgender Formel:

$$\sigma_{D_{dyn}} = \frac{8\pi^2 \cdot m_{zyl}}{m^2} \cdot \sigma_m \tag{10}$$

Tabelle 2: Schwingungsdauern bei jeweiligen Abständen.

| $a$ in $m$ | $a^2$ in $m^2$ | $T$ in $s$ | $T^2$ in $s^2$ |
|---|---|---|---|
| 0.0500 | 0.0025 | 2.79867 | 7.8325 |
| 0.1000 | 0.0100 | 3.61067 | 13.037 |
| 0.1245 | 0.0155 | 4.12933 | 17.051 |
| 0.1504 | 0.0226 | 4.71533 | 22.234 |
| 0.1751 | 0.0306 | 5.29200 | 28.005 |
| 0.2000 | 0.0400 | 5.84000 | 34.106 |
| 0.2261 | 0.0511 | 6.49133 | 42.137 |
| 0.2505 | 0.0628 | 7.10800 | 50.524 |
| 0.2740 | 0.0751 | 7.69600 | 59.228 |
| 0.3000 | 0.0900 | 8.33733 | 69.511 |

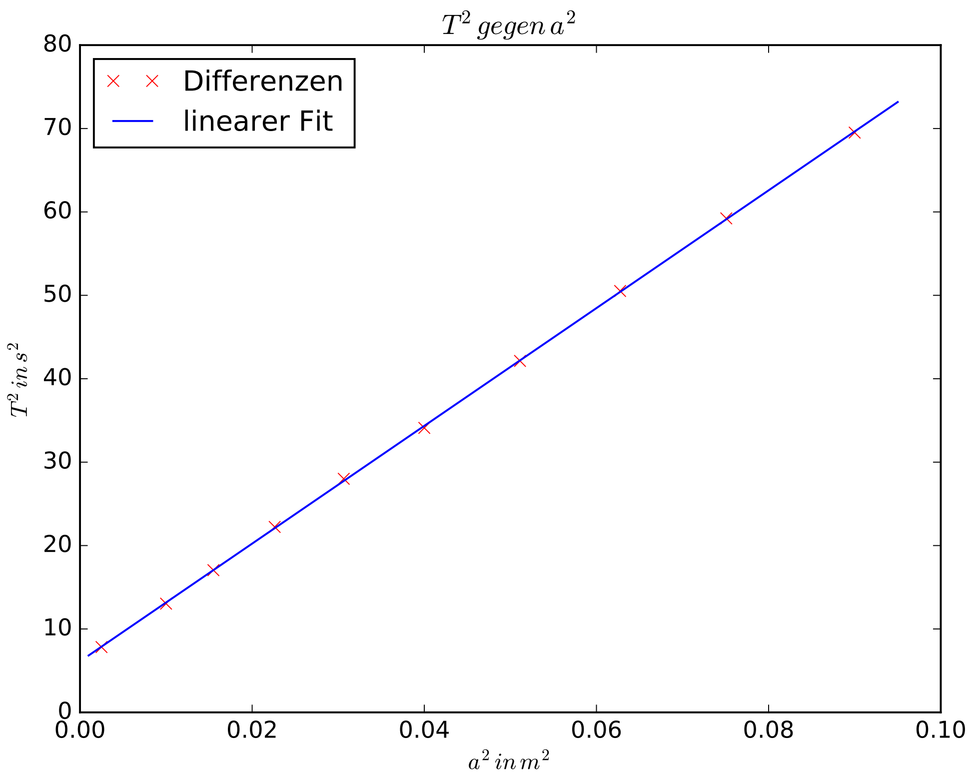



Abbildung 3: Die Quadrate der Schwingungsdauer gegenüber den Abstandsquadraten

Die Regression wird dabei von Python durchgeführt, indem an folgende Funktion gefittet wird. Die Parameter $C_1$ und $C_2$ entsprechen dabei der Steigung und dem y-Achsenabschnitt:

$$T^2 = C_1 * a^2 + C_2 \tag{11}$$
$$C_1 = m \tag{12}$$
$$C_2 = b \tag{13}$$

Die Steigung der Regressionsgerade beträgt $m = (706 \pm 2)\frac{s^2}{m^2}$ und der y-Achsenabschnitt hat einen Wert von $b = (6.12 \pm 0.09)s^2$. So ergibt sich für die "dynamische" Winkelrichtgröße folgender Wert:

$$D_{dyn} = (0.02925 \pm 0.00008)\text{Nm} \tag{14}$$

Zu sehen ist, dass $D_{dyn}$ im Fehlerbereich von $D_{stat}$ liegt, dies aber anders herum nicht gilt. Da $D_{dyn}$ den geringeren Fehler hat, wird im folgenden mit diesem Wert weitergerechnet.

Mithilfe von $D_{dyn}$ und des y-Achsenabschnittes von Abbildung 1 können nun mit folgenden Formeln auch das Trägheitsmoment der Drillachse und der Fehler bestimmt werden:

$$I_D = I_{ges} - 2 \cdot I_Z - I_{Stange} \tag{15}$$
$$= \frac{b \cdot D_{dyn}}{4\pi^2} - 2 \cdot I_Z - I_{Stange} \tag{16}$$
$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{D_{dyn}}{4\pi^2} \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\frac{b}{4\pi^2} \cdot \sigma_{D_{dyn}}\right)^2} \tag{17}$$

Die Trägheitsmomente von Zylinder und Stange müssen vorher noch berechnet werden und hinterher abgezogen werden. Dabei ergeben sich für $I_Z$ und $I_{Stange}$ folgende Werte:

$$I_Z = m_{zylinder} \cdot \left(\frac{R_Z^2}{4} + \frac{H_Z^2}{12}\right) \tag{18}$$
$$I_{Stange} = \frac{1}{12} \cdot m_{Stange} \cdot H_{Stange}^2 \tag{19}$$

Bei $R_Z$ und $H_Z$ handelt es sich dabei um Radius und Höhe des Zylinders. Da wir in unserer Formel den y-Achsenabschnitt verwenden, muss der Steinersche Satz (5) nicht beachtet werden, da wir sozusagen mit einer Schwingungsdauer bei $r = 0$ rechnen. Mit dem obigen y-Achsenabschnitt ergibt sich dann für das Trägheitsmoment der Drillachse folgender Wert:

$$I_D = (0.0045 \pm 0.0007)\text{kgm}^2 \tag{20}$$

## 3.2 Bestimmung der Trägheitsmomente zwei verschiedener Körper

Im folgenden Abschnitt wird das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel sowie einer homogenen Zylinders sowohl theoretisch über Abmessung und Masse sowie experimentell über die Schwingungsdauer bestimmt und danach verglichen.

### 3.2.1 Trägheitsmoment einer homogenen Kugel

Vor dem Start der Messungen wurden zuerst sowohl Masse als auch Durchmesser der Kugel ermittelt. Dabei wird beides als fehlerfrei angenommen:

$$r_K = 0.06883\text{m} \tag{21}$$

$$m_{Kugel} = 0.33821\text{kg} \tag{22}$$

Mit diesen Werten lässt sich das "theoretische" Trägheitsmoment wie folgt bestimmen:

$$I_{Kugel,theo} = \frac{2}{5} m_{Kugel} \cdot r_K^2 = 0.00154 \text{ kgm}^2 \tag{23}$$

Als nächstes wird das Trägheitsmoment über die Schwingungsdauer bestimmt. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 3 eingetragen.

Tabelle 3: Schwingungsdauern der homogenen Kugel

| $Messung$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Dauer[s]$ | 7.50 | 7.50 | 7.47 | 7.44 | 7.50 | 7.41 | 7.50 | 7.47 | 7.56 | 7.47 |

Für die Schwingungsdauer werden die Werte noch durch 5 geteilt und gemittelt. Wir erhalten somit einen Wert von :

$$T_{Kugel} = (1.4964 \pm 0.0026)\text{s} \tag{24}$$

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment folgender Wert:

$$I_{Kugel,exp} = \frac{T^2 D_{dyn}}{4\pi^2} - I_D = (0.00154 \pm 0.00007)\text{kgm}^2 \tag{25}$$

Der Fehler errechnet sich wie folgt mithilfe der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_I = \sqrt{(2T\frac{D_{dyn}}{4\pi^2} \cdot \sigma_T)^2 + (\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \sigma_{D_{dyn}})^2} \tag{26}$$

Verwendet wird dabei die dynamisch bestimmte Winkelrichtgröße, da dieser Größe der selbige Messprozess zugrunde liegt, den wir auch bei der Bestimmung der Trägheitsmomente über die Schwingungsdauer verwendet haben.

### 3.2.2 Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders

Die Messwerte für die Schwingungsdauern finden sich in Tabelle 4. Die Rechnungen sind dabei analog zu denen der homogenen Kugel.

$$r_Z = 0.04012\text{m} \tag{27}$$
$$h_Z = 0.13990\text{m} \tag{28}$$
$$m_Z = 1.00580\text{kg} \tag{29}$$

$$I_{Zylinder,theo} = \frac{1}{2} m_Z \cdot r_Z^2 = 0.000809 \text{ kgm}^2 \tag{30}$$

Tabelle 4: Schwingungsdauern des homogenen Zylinder

| *Messung* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Dauer*[*s*] | 5.22 | 5.28 | 5.28 | 5.25 | 5.28 | 5.22 | 5.28 | 5.22 | 5.25 | 5.25 |

Für die Schwingungsdauer erhalten wir somit einen Wert von:

$$T_{Zylinder} = (1.0506 \pm 0.0017)\text{s} \tag{31}$$

Damit errechnet sich für das Trägheitsmoment und dessen Fehler (26) folgender Wert:

$$I_{Zylinder,exp} = (0.00070 \pm 0.00007)\text{kgm}^2 \tag{32}$$

### 3.3 Das Trägheitsmoment einer Holzpuppe in zwei verschiedenen Positionen

Als letzter Teil der Messungen soll das Trägheitsmoment eine Holzpuppe in zwei verschiedenen Positionen bestimmt werden. In Position 1 sind die beiden Arme seitlich ausgestreckt und bei Position 2 sind der rechte Arm sowie das rechte Bein nach vorne ausgestreckt.

#### 3.3.1 Abschätzung des Trägheitsmomentes aus den Abmessungen

In der folgenden Tabelle sind alle Abmessungen der Puppe eingetragen. Die Indizes entsprechen dabei dem entsprechendem Körperteil [t = Torso, k = Kopf, a = Arm, b = Bein].

Tabelle 5: Abmessungen der Holzfigur in Metern

| $r_t$ | $h_t$ | $r_k$ | $h_k$ | $r_a$ | $h_a$ | $r_b$ | $h_b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.023034 | 0.13114 | 0.015805 | 0.071 | 0.1002 | 0.17864 | 0.01136 | 0.20042 |

Bei den Rechnungen werden die einzelnen Körperteile als Zylinder angenommen. Da die Körperteile allerdings teilweise erheblich von diesen Formen abweichen kann folgendes jedoch lediglich als Abschätzung betrachtet werden. Somit macht auch eine Fehlerrechnung in diesem Fall keinen Sinn und wird in diesem Abschnitt nicht durchgeführt.

Das Gesamtträgheitsmoment entspricht somit einer Summation der Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile. Um die Massen der einzelnen Körperteile zu ermitteln, wurde das Gesamtvolumen der Figur berechnet und damit die Dichte bestimmt. Mit dem Volumen der einzelnen Körperteile wurden dann die einzelnen Massen [Tabelle 6] bestimmt:

Tabelle 6: Volumen und Massen der einzelnen Körperteile

| $Objekt$ | $Volumen[cm^3]$ | $Masse[kg]$ |
|---|---|---|
| Torso | 0.0004373 | 0.134536 |
| Kopf | 0.0001110 | 0.034293 |
| Arm | 0.0001125 | 0.034679 |
| Bein | 0.0001625 | 0.050011 |

Für Position 1 gilt somit folgende Formel:

$$
\begin{aligned}
I_{ges} &= I_T + I_K + 2 \cdot I_A + 2 \cdot I_B - I_D & (33)\\
&= \frac{1}{2} m_t r_t^2 + \frac{1}{2} m_k r_k^2 + 2 \cdot (m_a(\frac{r_a^2}{4} + \frac{h_a^2}{12}) + m_a(r_t + \frac{h_a}{2})^2) & (34)\\
&+ 2 \cdot (\frac{1}{2} m_b r_b^2 + m_b(\frac{r_b}{2})^2) & (35)
\end{aligned}
$$

Position 2 wird analog berechnet, allerdings wird vorab noch der Abstand der Mittelpunkte von ausgestrecktem Arm und Bein zur Drehachse bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\Delta_a &= \sqrt{(r_t + r_a)^2 + \frac{h_a^2}{4}} & (36)\\
\Delta_b &= \sqrt{(r_t + r_b)^2 + \frac{h_b^2}{4}} & (37)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{ges} &= I_T + I_K + I_A + I_B - I_D & (38)\\
&= \frac{1}{2} m_t r_t^2 + \frac{1}{2} m_k r_k^2 + (\frac{1}{2} m_a r_a^2 + m_a(r_a + r_t)^2) & (39)\\
&+ (\frac{1}{2} m_b r_b^2 + m_b(\frac{r_t}{2})^2) + (m(\frac{r_b^2}{4} + \frac{h_b^2}{12}) + m_b \Delta_2^2) & (40)\\
&+ (m(\frac{r_a^2}{4} + \frac{h_a^2}{12}) + m_a \Delta_1^2) & (41)
\end{aligned}
$$

Somit ergeben sich folgende Trägheitsmomente:

$$
\begin{aligned}
I_{ges,pos1} &= 0.001117 \text{ kgm}^2 & (42)\\
I_{ges,pos2} &= 0.001251 \text{ kgm}^2 & (43)
\end{aligned}
$$

### 3.3.2 Brechnung der Trägheitsmomente anhand der experimentellen Daten

Wie zuvor kann nun das Trägheitsmoment auch anhand der experimentell ermittelten Daten (Tabelle 7) bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
T_{pos1} &= (1.1284 \pm 0.0029)\text{s} & (44)\\
T_{pos2} &= (1.4096 \pm 0.0032)\text{s} & (45)
\end{aligned}
$$

Der angegebenen Fehler für die Trägheitsmomente errechnet sich nach (26). Somit ergeben sich für die Trägheitsmomente folgende Werte:

$$I_{pos1} = (0.00083 \pm 0.00007)\text{kgm}^2 \tag{46}$$
$$I_{pos2} = (0.00136 \pm 0.00007)\text{kgm}^2 \tag{47}$$

Tabelle 7: Schwingungsdauer der beiden Positionen der Holzpuppe

| $5T_{pos1}[s]$ | $T_{pos1}[s]$ | $5T_{pos2}[s]$ | $T_{pos2}[s]$ |
|---|---|---|---|
| 5.63 | 1.126 | 6.07 | 1.394 |
| 5.62 | 1.124 | 7.06 | 1.412 |
| 5.59 | 1.118 | 7.06 | 1.412 |
| 5.63 | 1.126 | 7.04 | 1.408 |
| 5.60 | 1.120 | 7.10 | 1.420 |
| 5.72 | 1.144 | 7.03 | 1.406 |
| 5.62 | 1.124 | 7.13 | 1.426 |
| 5.63 | 1.126 | 7.00 | 1.400 |
| 5.72 | 1.144 | 7.09 | 1.418 |
| 5.66 | 1.132 | 7.00 | 1.400 |

# 4 Diskussion

Die Abweichung der dynamischen Winkelrichtgröße zur statischen Winkelrichtgröße beträgt lediglich ca. 0.6%, somit scheint hier kein systematischer Fehler vorzuliegen. Für die weiteren Berechnungen wurde in diesem Fall $D_{dyn}$ verwendet, da dieser den kleineren Fehler hatte.

Die Abweichung der experimentell und theoretisch berechneten Werte der beiden Figuren ist mit einer nahezu nicht vorhandenen Abweichung bei dem homogenen Zylinder ziemlich gering, während sich bei der homogenen Kugel eine Abweichung von ca. 14 % ergibt. Allerdings kann davon ausgegangen werden, dass die theoretischen Werte für beide Objekte näher an den tatsächlichen Werten sind, da die Abmessungen relativ genau bestimmt werden konnten.

Bei den beiden Figurpositionen erhält man bei Position 1 eine Abweichung von ca. 26 % und bei Position 2 eine Abweichung von ca. 9 %. Diese Abweichungen können überraschend als ziemlich gering angesehen werden, da die Abmessungen der Figuren und die anschließende Abschätzung aufgrund der stark idealisierten Werte eher als ziemlich ungenau betrachtet werden müssen. Somit wurde im Vorfeld der Messung ein weitaus größerer Fehler erwartet.

Ein mögliche Fehlerquelle bei den Messungen ist vermutlich das Messen mithilfe einer Stoppuhr, da hier Faktoren wie zum Beispiel die menschliche Reaktionszeit mit reinspielen.

# Literatur

[TUD16] TU-Dortmund. *Versuch V101: Das Trägheitsmoment*. 11. Nov. 2016. URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Traegheit.pdf.