Klausur Höhere Mathematik I (P/MP/ET/IT/I-I) am 19.2.2016

Aufgabe 1 (7+8+10 = 25 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen (a_n) konvergieren und bestimmen Sie in diesem Fall den Grenzwert:

a) $a_n \;=\; \dfrac{5n+2^{n+1}}{\sqrt{n^2+7}+2^{n-1}}\,,$ b) $a_n \;=\; \dfrac{4^n\cdot n!}{n^n}\,,$ c) $a_n \;=\; \sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\,.$

Lösung:

a) Kürzen durch 2^{n-1} liefert $a_n \;=\; \dfrac{\frac{5n}{2^{n-1}}+2^2}{\frac{\sqrt{n^2+7}}{2^{n-1}}+1} \to 4\,.$

b) Es gilt $n! \geq (\frac{n}{3})^n$ für $n\in\mathbb{N}$ nach Aussage 6.4 in der Vorlesung. Damit ergibt sich $a_n \;\geq\; \dfrac{4^n\cdot(\frac{n}{3})^n}{n^n} \;=\; (\dfrac{4}{3})^n \to \infty\,;$ die Folge (a_n) ist also divergent.

c) **Lösung A**: Es gilt $x^3-y^3 \;=\; (x-y)\,(x^2+xy+y^2)$ nach Formel (2.7) der Vorlesung. Damit ergibt sich mittels Kürzen durch n^2

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3} \\ &= \frac{n^3+2n^2-n^3}{(\sqrt[3]{n^3+2n^2})^2+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2} \\ &= \frac{2}{(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}})^2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1} \;\to\; \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

Lösung B: Für $f: x\mapsto \sqrt[3]{x}$ gilt $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\,2/3}\,.$ Der Mittelwertsatz liefert

$$a_n = f(n^3+2n^2)-f(n^3) = f'(n^3+2\theta_n n^2)\,(n^3+2n^2-n^3) = \frac{2n^2}{3\,(n^3+2\theta_n n^2)^{\,2/3}}$$

für geeignete $0\leq\theta_n\leq 1\,.$ Es folgt $a_n \;=\; \dfrac{2}{3\,(1+2\frac{\theta_n}{n})^{\,2/3}} \to \dfrac{2}{3}\,.$

Lösung C: Für Für $f: x\mapsto\sqrt[3]{x}$ gilt $\dfrac{1}{3} = f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+h}-\sqrt[3]{1}}{h}\,.$ Damit ergibt sich

$$a_n \;=\; n\,(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}-\sqrt[3]{1}) \;=\; 2\,\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}-\sqrt[3]{1}}{\frac{2}{n}} \to \frac{2}{3}\,.$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\cos x = x$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Lösung besitzt.

Lösung:

a) Die Hilfsfunktion $h : x \mapsto x - \cos x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (sogar $\mathcal{C}^\infty$).

b) Existenz einer Lösung: Es ist $h(0) = -1 < 0 < h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Der Zwischenwertsatz liefert die Existenz von $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $h(\xi) = 0$.

c) Eindeutigkeit der Lösung: Die Hilfsfunktion h ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend; dies sieht man direkt oder mittels $h'(x) = 1 + \sin x \geq 1 > 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Folglich ist h auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ injektiv und hat dort höchstens eine Nullstelle.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Durch $f : x \mapsto \dfrac{\cos x + 3}{x^4 + 1}$ wird eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiert.

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist und bestimmen Sie das Supremum $\sup f$ und Infimum $\inf f$ dieser Funktion.

Besitzt f ein Maximum und / oder ein Minimum auf $\mathbb{R}$?

Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung:

a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $h(x) := x^4 + 1 \geq 1 > 0$ und $0 < 2 \leq g(x) := \cos x + 3 \leq 4$. Somit hat man $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. 0 ist eine untere Schranke von f.

b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) \leq g(0) = 4$ und $h(x) \geq h(0) = 1$; somit folgt $f(x) \leq f(0) = 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher hat man $\sup f = \max f = 4$.

c) Es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ (und auch $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$).

d) Mit a) und c) folgt $\inf f = 0$. Begründung: Für $s > 0$ gibt es nach c) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < f(x) < s$, und daher kann s keine untere Schranke von f sein. Mit a) folgt dann die Behauptung $\inf f = 0$.

e) Wegen $f(x) > \inf f$ für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt f kein Minimum auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (4+16 = 20 Punkte)

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

a) Hat das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^2$?

b) Bestimmen Sie den Abstand von $b \in \mathbb{R}^4$ zum Bildraum $R(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^4$ der Matrix A .

Lösung:

a) Das System $Ax = b$ ist unlösbar: die 2. Zeile liefert $-x_2 = -1$, also $x_2 = 1$, die 4. Zeile $2x_1 = -2$, also $x_1 = -1$. Dies widerspricht der 1. Zeile $x_1 + 4x_2 = 0$.

b) **Lösung A**:

① Der Raum $R(A)$ wird von den beiden Spaltenvektoren $v = (1, 0, -2, 2)^T$ und $w = (4, -1, 2, 0)^T$ von A aufgespannt: $R(A) = [v, w]$.

② Die Vektoren v, w sind orthogonal: $v \bullet w = 0$.

③ Man hat $|\, v\,|^2 = 9$ und $|\, w\,|^2 = 21$, also die orthonormalen Einheitsvektoren $v_1 = \frac{1}{3}v$ und $w_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}w$.

④ Die orthogonale Projektion Pb von b auf $R(A)$ ist gegeben durch
$Pb = (b \bullet v_1)v_1 + (b \bullet w_1)w_1$.

⑤ Man berechnet $b \bullet v_1 = \frac{1}{3}b \bullet v = -2$ und $(b \bullet v_1)v_1 = -\frac{2}{3}(1, 0, -2, 2)^T$ sowie $b \bullet w_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}b \bullet w = \frac{3}{\sqrt{21}}$ und $(b \bullet w_1)w_1 = \frac{3}{21}w = \frac{1}{7}(4, -1, 2, 0)^T$. Es folgt
$Pb = \frac{1}{21}(-2, -3, 34, -28)^T$.

⑥ Es ist $|\, b - Pb\,|$ der Abstand von b zu $R(A)$.

⑦ Es ist $b - Pb = \frac{1}{21}(0 + 2, -21 + 3, 21 - 34, -42 + 28)^T = \frac{1}{21}(2, -18, -13, -14)^T$, also $|\, b - Pb\,|^2 = \frac{1}{21^2}(4 + 324 + 169 + 196) = \frac{693}{21^2} = \frac{11}{7}$ und $|\, b - Pb\,| = \sqrt{\frac{11}{7}} = \frac{\sqrt{77}}{7}$.

b) **Lösung B**:

① Der Abstand von b zu $R(A)$ ist gegeben durch $|\, b - Pb\,|$, wobei P die orthogonale Projektion auf $R(A)$ bezeichnet.

② Für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $Ax = Pb \Leftrightarrow A^*Ax = A^*b$ mit der adjungierten Matrix $A^* = A^T$ nach Formel (16.5) der Vorlesung.

③ Man berechnet $A^*A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$ und $A^*b = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

④ Das System $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \end{pmatrix}$.

⑤ Es folgt $Pb = Ax = \frac{1}{21}(-2, -3, 34, -28)^T$.

⑥ Es ist $b - Pb = \frac{1}{21}(0+2, -21+3, 21-34, -42+28)^T = \frac{1}{21}(2, -18, -13, -14)^T$, also $|\, b - Pb\,|^2 = \frac{1}{21^2}(4 + 324 + 169 + 196) = \frac{693}{21^2} = \frac{11}{7}$ und $|\, b - Pb\,| = \sqrt{\frac{11}{7}} = \frac{\sqrt{77}}{7}$.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Es seien E ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit $\dim E = n \geq 2$ und $U, V \subseteq E$ Unterräume mit $\dim U = r$ und $\dim V = s$. Es gelte $r + s = n$ sowie $U \cap V = \{0\}$.

Zeigen Sie: Zu jedem Vektor $x \in E$ gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u \in U$ und $v \in V$ mit $x = u + v$.

Lösung:

a) Existenz einer Zerlegung:

① Es sei $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von U und $\{v_1, \ldots, v_s\}$ eine Basis von V.

② Die Vektoren $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ sind linear unabhängig:

Es gelte $\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j u_j + \sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k v_k = 0$. Dann ist $\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j u_j = -\sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k v_k \in U \cap V = \{0\}$, also $\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j u_j = 0$ und $\sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k v_k = 0$. Somit folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, da die Vektoren $\{u_1, \ldots, u_r\}$ linear unabhängig sind, und $\mu_1 = \ldots = \mu_s = 0$, da auch die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_s\}$ linear unabhängig sind.

③ Wegen $r + s = n$ bilden die Vektoren $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ eine Basis von E.

④ Für $x \in E$ gilt also $x = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j u_j + \sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k v_k$ für geeignete $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $\mu_k \in \mathbb{C}$.

Nun setzt man einfach $u = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j u_j$ und $v = \sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k v_k$.

b) Eindeutigkeit der Zerlegung: Es seien $u \in U$ und $v \in V$ mit $x = u + v$. Dann hat man $u = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j u_j$ und $v = \sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k v_k$, wobei die λ_j und μ_k nach ③ durch $x \in E$ eindeutig bestimmt sind; dies gilt dann auch für $u \in U$ und $v \in V$.

Alternativer Beweis von b) ohne Verwendung von a): Es gelte $x = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ für $u_1, u_2 \in U$ und $v_1, v_2 \in V$. Dann folgt $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in U \cap V = \{0\}$, also $u_1 = u_2$ und $v_1 = v_2$.