Klausur zu „Höhere Mathematik I (P/MP/ET/IT/I-I)“ am 1.4.2016

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Beweis mittels vollständiger Induktion

$$\boldsymbol{n=1:}\quad \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} \quad \checkmark$$

$\boldsymbol{n \to n+1:}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&\overset{(I.V.)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (8+8+8=24 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n[(n+2)!+(n+3)!]}{(n+4)!}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} n(\log(n+4)-\log n)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3xe^{3x}-\sin(3x)}{x^2e^x}$

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{5n[(n+2)!+(n+3)!]}{(n+4)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n(n+2)![1+n+3]}{(n+2)!(n+3)(n+4)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1+\frac{3}{n}} \\ &= 5\end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n(\log(n+4)-\log n) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right) = \log\left(e^4\right) = 4$$

c) Zweimaliges Anwenden der Regel von de l'Hospital liefert:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{3xe^{3x}-\sin(3x)}{x^2e^x} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3(1+3x)e^{3x}-3\cos(3x)}{(2x+x^2)e^x} \\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3(6+9x)e^{3x}+9\sin(3x)}{(2+4x+x^2)e^x} \\ &= 9\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (6+6+6+6=24 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & a & a \\ a & -a & 1 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie $\det A$.

b) Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}$ an, für die A invertierbar ist.

c) Es sei $a = -1$. Bestimmen Sie eine Basis von $R(A)$ sowie $\dim N(A)$.

d) Es sei $a = -2$. Bestimmen Sie die zweite Komponente des Lösungsvektors von

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & a & a \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot(-a) \quad \uparrow \quad \cdot(-a) \downarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & -a-a^2 \\ 1 & a & a \\ 0 & -a-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1-a^2 & -a-a^2 \\ -a-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} \\
&= -((1-a^2)^2 - (-a-a^2)^2) \\
&= 2a^3 + 3a^2 - 1
\end{aligned}$$

b) Bestimme die Nullstellen von $\det A$:

$$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a^3 + 3a^2 - 1 = 0$$

Raten liefert $a_1 = -1$ als Nullstelle. Abspalten dieser Nullstelle vom Polynom mittels Polynomdivision bzw. Horner-Schema ergibt:

$$2a^2 + a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{2,3} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

Die weiteren Nullstellen lauten also $a_2 = \frac{1}{2}$ und $a_3 = -1$.

A ist invertierbar für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $\det A \neq 0$, also für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$.

c) **i)** Setze $a = -1$ ein und schreibe die Spalten von A in Zeilen:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \quad \downarrow \quad \cdot 1 \downarrow \\ \leftarrow \quad\quad \downarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Somit ist $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von $R(A)$.

ii) Mit der Dimensionsformel folgt:

$$\dim N(A) \;=\; 3 - \dim R(A) \;=\; 3 - 1 \;=\; 2$$

d) Setze $a = -2$ ein. Nach Teil a) ist $\det A = -5$ und mit der Cramerschen Regel folgt:

$$x_2 \;=\; -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \;=\; -\frac{1}{5}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \;=\; -\frac{2}{5}$$

Aufgabe 4 (6+6=12 Punkte)

a) Es sei $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, d.h. es gelte $U^*U = I$. Zeigen Sie, dass

$$\det U \;=\; \cos\varphi + i\sin\varphi$$

für ein $\varphi \in \mathbb{R}$. Ist φ eindeutig bestimmt?

b) Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $\det A = 1$. Zeigen Sie, dass $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

a) Es gilt:

$$1 \;=\; \det I \;=\; \det\overline{U^T}\cdot\det U \;=\; \overline{\det U}\cdot\det U \;=\; |\det U|^2$$

Somit ist $|\det U| = 1$ und es existiert $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$\det U \;=\; \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

Wegen

$$\cos(\varphi + 2k\pi) \;=\; \cos\varphi \quad \text{und} \quad \sin(\varphi + 2k\pi) \;=\; \sin\varphi$$

für $k \in \mathbb{Z}$ ist φ nicht eindeutig bestimmt.

b) Wegen $\det A \neq 0$ ist A invertierbar, und nach der Cramerschen Regel gilt:

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{\det A}\,(\Delta_{ji}) \quad \text{mit} \quad \Delta_{ij} \;=\; (-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

Mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ folgt $\Delta_{ij} \in \mathbb{Z}$ und wegen $\frac{1}{\det A} = 1 \in \mathbb{Z}$ die Behauptung.

Aufgabe 5 (6+6+4+6=22 Punkte)

Es sei $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$.

a) Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, auf denen f jeweils monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

c) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f.

d) Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen hat.

a) Es gilt

$$f'(x) = -e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x) = -2\sin x\, \underbrace{e^{-x}}_{>0}$$

und somit:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \leq 0$$

Also ist $f'(x) \geq 0$ und f somit monoton wachsend auf $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ und auf $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Desweiteren ist $f'(x) \leq 0$ und f somit monoton fallend auf $[0, \pi]$.

b) Es gilt:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = \pi$$

Da f' in $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von plus nach minus hat, liegt dort ein lokales Maximum vor mit $f(0) = 1$.

Da f' in $x = \pi$ einen Vorzeichenwechsel von minus nach plus hat, liegt dort ein lokales Minimum vor mit $f(\pi) = -e^{-\pi}$.

c) Die Kandidaten für globale Extremstellen (welche nach Theorem 19.2 existieren) sind die lokalen Extremstellen und die Ränder des Definitionsintervalls. Wegen $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}}$ und $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -e^{-\frac{3}{2}\pi}$ liegt in $x = -\frac{\pi}{2}$ ein globales Minimum und in $x = 0$ ein globales Maximum vor.

d)

i) Da $f'(x) > 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ gilt, ist f auf $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ streng monoton wachsend und somit injektiv. Dies gilt auch auf dem abgeschlossenen Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Wegen $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ und $f(0) > 0$ gibt es dort nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle.

ii) Da $f'(x) < 0$ für $x \in (0, \pi)$ gilt, ist f auf $(0, \pi)$ streng monoton wachsend und somit injektiv. Dies gilt auch auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, \pi]$. Wegen $f(0) > 0$ und $f(\pi) < 0$ gibt es dort nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle.

iii) Da $f'(x) \geq 0$ für $x \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ gilt, ist f auf $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ monoton wachsend. Wegen $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) < 0$ hat f dort keine Nullstelle.

Insgesamt hat f also genau zwei Nullstellen.