104

Der Doppler-Effekt

Sebastian Pape Jonah Nitschke

Durchführung: 18.10.2016

1 Auswertung

1.1 Einführung

In der folgenden Auswertung werden an verschiedenen Stellen statistische Größen berechnet, die meist mit einem zusätzlichen Fehler angegeben werden. Die verwendeten Formeln für die Berechnung diese Größen soll in der folgenden Einleitung erläutet werden.
Wird ein Messreihe mit mehreren Messwerten $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ für eine Messgröße angelegt, so wird ihr Mittelwert mit der Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1}$$

definiert. Des weiteren wird die Standardabweichung einer Messreihe durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{2}$$

errechnet. Mithilfe der Standardabweichung kann folgend der Fehler des Mittelwertes angegeben werden:

$$\Delta\overline{x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

Da in vielen Formeln zur Berechnung von weiteren Größen ebenfalls die Fehler der eingehenden Messgrößen beachtet werden soll, nutz man zur Berechnung dieser Fehler die Gauß´sche Fehlerfortpflanzung, welche durch folgende Formel definiert ist:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial y_i})^2(\Delta y_i)^2} \tag{4}$$

Bei $\partial f/\partial y_i$ handelt es sich hierbei um die Ableitung der Formel nach der Messgröße y_i und bei Δy_i handelt es sich um den Fehler von der jeweiligen Messgröße.

1.2 Bestimmung der Geschwindigkeit

Der für den Versuch bereitstehende Wagen mit dem montierten Lautsprecher lässt sich mit 10 unterschiedlichen Gangeinstellungen bewegen. Für die Bestimmung der jeweiligen Geschwindigkeiten wurden mithilfe des oben beschriebenen Aufbaus von dem Zeitbasisgerät im Abstand von einer μs Impulse abgesetzt. Durch die Einstellung des Untersetzers auf 10^3 bzw. 10^2 wurde die Impulsrate auf $1/10^-3$ bzw. $1/10^-4$ reduziert. Die Geschwindigkeit ergibt sich dann aus der eingehenden Impulszahl und der vorher gemessenen Strecke zwischen den Lichtschranken folgendermaßen:

$$v = \frac{s}{Impulse \cdot 10^-4s} \tag{5}$$

Die Länge der Strecke wurde vorher gemessen und beträgt $s = (0,202 \pm 0,001)m$. Pro Gangeinstellung wurden dafür 5 Messungen vorgenommen, aus denen jeweils zuerst der Mittelwert und dessen Fehler bestimmt wird. Mit der Formel (5) ergibt dich dann folgende Tabelle:

Tabelle 1: Geschwindigkeit in Abhänigkeit von der Gangeinstellung.

Gang	Impulse	Fehler	Zeit	Fehler	Geschwindigkeit	Fehler
6.0	3980.4	5.316	3.9804	0.0053	0.051	0.00026
12.0	1994.2	2.267	1.9942	0.0023	0.101	0.00051
18.0	13287.8	17.676	1.3288	0.0018	0.152	0.00078
24.0	9956.8	18.034	0.9957	0.0018	0.203	0.00107
30.0	7979.0	5.495	0.7979	0.0005	0.253	0.00127
36.0	6665.8	8.834	0.6666	0.0009	0.303	0.00155
42.0	5699.2	2.988	0.5699	0.0029	0.354	0.00256
48.0	5020.4	7.966	0.502	0.0008	0.402	0.00209
54.0	4466.4	5.221	0.4466	0.0005	0.452	0.0023
60.0	4019.6	4.238	0.4019	0.0004	0.503	0.00254

Der Fehler der Geschwindigkeit folgt dabei mithilfe der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern der Streckenmessung Δs und dem Fehler der Zeit Δt:

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{t}\right)^2 + \left(\frac{s \cdot \Delta t}{t^2}\right)^2} \tag{6}$$

1.3 Bestimmung der Ruhefrequenz

Die Messung der Ruhefrequenz funktioniert ebenfalls mit der Schaltung der Messung c), jedoch wird hier das Low-Signal für den Flip-Flop manuell geschaltet. Der Untersetzter wurde auf 10^6 eingestellt, so dass die gemessene Zeitspanne genaus einer Sekunde entspricht. Die gemessene Impulszahl entspricht somit genau der Ruhefrequenz. Die Ergebnisse der Messung sind in Tabelle 2 aufgelistet:

Tabelle 2: Werte der Ruhefrequenz.

Messung	ν_0 [Hz]
1	20742
2	20742
3	20742
4	20742
5	20742

Da bei jeder Messung der Ruhefrequenz der Wert der selbe war, wird in der folgenden Auswertung die Ruhefrequenz als Fehlerfrei angenommen. Eine Fehlerbehaftung ist zwar auch hier nicht auszuschließen, allerdings dürfte der Fehler der vorliegenden Messung gegenüber den Fehlern anderer Messwerte vernachlässigbar gering sein.

1.4 Bestimmung der Wellenlänge

Zur Bestimmung der Wellenlänge wurden wie oben beschrieben Lissajous-Figuren auf dem Oszilloskop erzeugt. In der folgenden Tabelle ist die gemessene Strecke x [cm] in Abhängigkeit der vorhandenen Phasenverschiebung aufgetragen:

Tabelle 3: Gemessenen Strecken bei denen die Schwingungen in Phase sind.

Strecke[cm]	Phasenverschiebung
0.0	0
0.9	π
1.8	0
2.7	π
3.5	0
4.4	π

Die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Positionen entspricht hierbei immer der halben Wellenlänge (berechnete Werte Tabelle 4):

Der Mittelwert und dessen Fehler ergeben sich wie in der Einführung beschrieben:

$$\overline{\lambda} = (0,0176 \pm 0,0018)m \tag{7}$$

Aus der vorhandenen Wellenlänge lässt nun der Faktor ν_0/c, mittels einer Umformung zu $1/\lambda$ über die Definition der Schallgeschwindkeit, ermitteln:

Tabelle 4: Berechnete Werte der Wellenlänge.

Differenz der Positionen	$\frac{\lambda}{s}$ [cm]	λ [cm]
2-1	0.09	0.18
3-2	0.09	0.18
4-3	0.09	0.18
5-4	0.08	0.16
6-5	0.09	0.18

$$c = \lambda \cdot \nu_o \tag{8}$$

$$\implies \frac{\nu_0}{c} = \frac{1}{\lambda} = (56.818 \pm 5.811)\frac{1}{m} \tag{9}$$

Der Wert des Fehlers folgt hierbei mithilfe der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler der Wellenlänge:

$$\Delta\frac{\nu_0}{c} = \frac{1}{\lambda^2}\Delta\lambda \tag{10}$$

1.5 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c

Die Schallgeschwindigkeit kann nun mithilfe der gemessenen Ruhefrequenz und der oberhalb berechneten Wellenlänge ermittelt werden:

$$c = \lambda \cdot \nu_0 \tag{11}$$

Der Fehler der Schallgeschwindigkeit wird somit durch

$$\Delta c = \Delta\lambda \cdot \nu_0 \tag{12}$$

bestimmt. Wie oben erwähnt wird der Fehler der Ruhefrequenz dabei als verschwindend gering angesehen, sodass sich folgender Wert für die Schallgeschwindigkeit ergibt:

$$c = (365.06 \pm 37.34)\frac{m}{s} \tag{13}$$

1.6 Abschätzung der Differenz von Formel 2 und 5

Mithilfe der Ruhefrequenz und den der Messung entnommenen Daten über die Geschwindigkeit des Wagens soll im folgenden abgeschätzt werden, ob mit diesem Versuchsaufbau eine Geschwindigkeit erreicht wird, die eine Unterscheidung zwischen bewegter Quelle und bewegtem Empfänger sichtbar macht.

Die Höchstgeschwindigkeit des Wagens in der Gangstufe 60 beträgt $v_{max} = 0,503 \frac{m}{s}$, die Schallgeschwindigkeit $c = 365.06 \frac{m}{s}$ und die Ruhefrequenz hat den Wert $\nu_0 = 20742\,[Hz]$. Werden diese Werte nun in die Formeln für den bewegten Empfänger ν_E und die bewegte Quelle ν_Q eingesetzt, zeigt sich ein Unterschied beider Ergebnisse erst in der zweiten Nachkommastelle:

$$\nu_E = 20770,579 \tag{14}$$
$$\nu_Q = 20770,619 \tag{15}$$

Mit dem Ergebniss dieser Abschätzung kann der Unterschied zwischen den Formeln für ν_E und ν_Q als geringfügig und unbedeutend angenommen werden, da auch bei weiteren Messungen der Frequenzen eine höhere Genauigkeit nicht erreicht wird. Ersichtlich ist jedoch, dass für alle $v > 0$ weiterhin $\nu_Q > \nu_E > \nu_0$ gilt.

1.7 Bestimmung von $\frac{\nu_0}{c}$us der Messung der Frequenzänderung

1.7.1 Bestimmung aus der indirekten Messung der Frequenzveränderung

Analog zu der oben beschriebenen Messung der Ruhefrequenz wurden die Frequenzen in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Wagens bestimmt. Indem man die Differenz beider Frequenzen nimmt, lässt sich die Frequenzänderung errechnen:

$$\Delta\nu = \nu_v - \nu_0 \tag{16}$$

In den folgenden Tabelle ist für jede Geschwindigkeit die jeweilig gemessene Frequenz und die Differenz zur Ruhefrequenz eingetragen.

Tabelle 5: Frequenzänderung bei ”positiver Geschwindigkeit.”

Gang	Geschwindikgeit [m/s]	Frequenz [Hz]	Differenz
6.0	0.0507	20745.0	3.0
12.0	0.101	20748.0	6.0
18.0	0.152	20751.0	9.0
24.0	0.203	20754.2	12.2
30.0	0.253	20757.0	15.0
36.0	0.303	20760.0	18.0
42.0	0.354	20763.6	21.6
48.0	0.402	20766.4	24.4
54.0	0.452	20769.2	27.2
60.0	0.502	20772.0	30.0

Tabelle 6: Frequenzänderung bei ”negativer Geschwindigkeit.”

Gang	Geschwindikgeit [m/s]	Frequenz [Hz]	Differenz
6.0	-0.0507	20739.2	-2.8
12.0	-0.101	20735.8	-6.2
18.0	-0.152	20733.0	-9.0
24.0	-0.203	20730.0	-12.0
30.0	-0.253	20726.8	-15.2
36.0	-0.303	20723.8	-18.2
42.0	-0.354	20722.2	-19.8
48.0	-0.402	20722.0	-20.0

Wird nun $\Delta\nu$ gegen die Geschwindigkeit v auf, so lässt sich mittels linearer Regressionsrechnung eine Gerade ermitteln, die als Steigung den Faktor $\frac{\nu_0}{c}$ besitzt. Somit ergibt sich für die Messung folgender Faktor:

$$\frac{\nu_0}{c} = (56.818 \pm 5.812)\frac{1}{m} \tag{17}$$

$$a = (58.326 \pm 0.764)\frac{1}{m} \tag{18}$$

$$b = (0.418 \pm 0.220)Hz \tag{19}$$

Im Graph sichtbar wird hier, dass die Werte für die größten negativen Geschwindigkeiten etwas von der linearen Regression abweichen. Dies liegt daran, dass die Messstrecke bei den höheren Geschwindigkeiten nicht ausreichte, um alle Impulse zu zählen. Somit kamen ähnliche Werte für die Gänge 42 und 48 heraus und alle höheren Gänge wurden bei der Messung weggelassen, das sie das Ergebniss stark verfälschen würden.

1.7.2 Berechnung aus der Messung mittel Schwebemethode

Wie im Aufbau schon beschrieben, gibt es für die Messung der Frequenzveränderung eine Alternative mit der Schwebungsmethode. Mit dieser wird im Gegensatz zu 1.7.1 die Frequenzveränderung direkt gemessen.

Auffällig in Tabelle 7 ist, dass alle Werte für die Differenz zur Ruhefrequenz ca. doppelt so groß sind, wie bei der indirekten Messung der Frequenzveränderung. Die Ursache hierfür ist die Verwendung eines reflektors für die Messung. Das Signal muss die Strecke von Lautsprecher bis zum Reflektor zweimal durchlaufen bis das Signal beim Mikrophon ankommt. Die Strecke und somit auch die Frequenzveränderung ist dadurch doppelt so groß wie bei der Messung 1.7.1 . Für die Bestimmung des Faktors $\frac{\nu_0}{c}$ muss also der Faktor 2 noch aus der Frequenzdifferenz herausgezogen werden.

Tabelle 7: Frequenzänderung bei Messung mit der Schwebemethode.

Gang	Geschwindikgeit [m/s]	Differenz [Hz]	Fehler [Hz]
6.0	0.0507	5.8	0.2
12.0	0.101	11.8	0.2
18.0	0.152	17.8	0.2
24.0	0.203	23.8	0.374165738677
30.0	0.253	24.6	9.20386392289
36.0	0.303	35.8	0.489897948557

Mit der Schebungsmethode kann zudem immer nur der Betrag der Frequenzänderung ermittelt werden, die Ergebnisse für die Differenz müssen also im nachhinein mit verschiedenen Vorzeichen versehen werden, je nachdem auf welche Geschwindigkeit sie sich beziehen. Da die Messung bei der Bewegung des Wagens in Ausbreitungsrichtung keine Ergebnisse lieferte, sind in der obigen Tabelle nur die Werte für eine Bewegung entgegen der Ausbreitungsrichtung angegeben.

Außerdem sind lediglich die Geschwindigkeiten bis zur Gangstufe 36 angegeben, da die Strecke nicht ausreichte, um bei weiteren Gangeinstellungen bis zum Ende Impulse empfangen zu können. Für alle Gangeinstellungen über 36 ergaben sich deshalb die gleichen Frequenzdifferenzen wie bei der Gangeinstellung 36.

Analog zur Messung in 1.7.1 wird die Frequenzdifferenz gegen die Geschwindigkeit aufgetragen. Für die Steigung a und den Y-Achsenabschnitt b erhält man mittels einem linearen Fit mit Python folgende Werte:

$$a = (109.911 \pm 10.356)\frac{1}{m} \tag{20}$$

$$b = (0.466 \pm 2.040)Hz \tag{21}$$

Da wie oben beschrieben in der Steigung a der Faktor 2 enthalten ist, muss für $\frac{\nu_0}{c}$ noch aus a der Faktor 2 gezogen werden:

$$\frac{\nu_0}{c} = \frac{a}{2} = (54.955 \pm 5.178)\frac{1}{m} \tag{22}$$