

Der Doppler-Effekt

Sebastian Pape Jonah Nitschke

Durchführung: 18.10.2016

1 Auswertung

1.1 Einführung

In der folgenden Auswertung werden an verschiedenen Stellen statistische Größen berechnet, die meist mit einem zusätzlichen Fehler angegeben werden. Die verwendeten Formeln für die Berechnung dieser Größen soll in der folgenden Einleitung erläutert werden.

Wird eine Messreihe mit mehreren Messwerten (x_1, x_2, \dots, x_N) für eine Messgröße angelegt, so wird ihr Mittelwert mit der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

definiert. Des Weiteren wird die Standardabweichung einer Messreihe durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

errechnet. Mithilfe der Standardabweichung kann folgend der Fehler des Mittelwertes angegeben werden:

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

Da in vielen Formeln zur Berechnung von weiteren Größen ebenfalls die Fehler der eingehenden Messgrößen beachtet werden soll, nutzt man zur Berechnung dieser Fehler die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, welche durch folgende Formel definiert ist:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 (\Delta y_i)^2} \quad (4)$$

Bei $\partial f / \partial y_i$ handelt es sich hierbei um die Ableitung der Formel nach der Messgröße y_i und bei Δy_i handelt es sich um den Fehler von der jeweiligen Messgröße.

1.2 Bestimmung der Geschwindigkeit

Der für den Versuch bereitstehende Wagen mit dem montierten Lautsprecher lässt sich mit 10 unterschiedlichen Gangeinstellungen bewegen. Für die Bestimmung der jeweiligen Geschwindigkeiten wurden mithilfe des oben beschriebenen Aufbaus von dem Zeitbasisgerät im Abstand von einer μs Impulse abgesetzt. Durch die Einstellung des Untersetzers auf 10^3 bzw. 10^2 wurde die Impulsrate auf $1/10^{-3}$ bzw. $1/10^{-4}$ reduziert. Die Geschwindigkeit ergibt sich dann aus der eingehenden Impulszahl und der vorher gemessenen Strecke zwischen den Lichtschranken folgendermaßen:

$$v = \frac{s}{Impulse \cdot 10^{-4}s} \quad (5)$$

Die Länge der Strecke wurde vorher gemessen und beträgt $s = (0,202 \pm 0,001)m$. Pro Gangeinstellung wurden dafür 5 Messungen vorgenommen, aus denen jeweils zuerst der Mittelwert und dessen Fehler bestimmt wird. Mit der Formel (5) ergibt sich dann folgende Tabelle:

Tabelle 1: Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Gangeinstellung.

Gang	Impulse	Fehler	Zeit	Fehler	Geschwindigkeit	Fehler
6.0	3980.4	5.316	3.9804	0.0053	0.051	0.00026
12.0	1994.2	2.267	1.9942	0.0023	0.101	0.00051
18.0	13287.8	17.676	1.3288	0.0018	0.152	0.00078
24.0	9956.8	18.034	0.9957	0.0018	0.203	0.00107
30.0	7979.0	5.495	0.7979	0.0005	0.253	0.00127
36.0	6665.8	8.834	0.6666	0.0009	0.303	0.00155
42.0	5699.2	2.988	0.5699	0.0029	0.354	0.00256
48.0	5020.4	7.966	0.502	0.0008	0.402	0.00209
54.0	4466.4	5.221	0.4466	0.0005	0.452	0.0023
60.0	4019.6	4.238	0.4019	0.0004	0.503	0.00254

Der Fehler der Geschwindigkeit folgt dabei mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern der Streckenmessung Δs und dem Fehler der Zeit Δt :

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{t}\right)^2 + \left(\frac{s \cdot \Delta t}{t^2}\right)^2} \quad (6)$$

1.3 Bestimmung der Ruhefrequenz

Die Messung der Ruhefrequenz funktioniert ebenfalls mit der Schaltung der Messung c), jedoch wird hier das Low-Signal für den Flip-Flop manuell geschaltet. Der Untersetz-

ter wurde auf 10^6 eingestellt, so dass die gemessene Zeitspanne genau einer Sekunde entspricht. Die gemessene Impulszahl entspricht somit genau der Ruhefrequenz. Die Ergebnisse der Messung sind in Tabelle 2 aufgelistet:

Tabelle 2: Werte der Ruhefrequenz.

Messung	ν_0 [Hz]
1	20742
2	20742
3	20742
4	20742
5	20742

Da bei jeder Messung der Ruhefrequenz der Wert der selbe war, wird in der folgenden Auswertung die Ruhefrequenz als fehlerfrei angenommen. Eine Fehlerbehaftung ist zwar auch hier nicht auszuschließen, allerdings dürfte der Fehler der vorliegenden Messung gegenüber den Fehlern anderer Messwerte vernachlässigbar gering sein.

1.4 Bestimmung der Wellenlänge

Zur Bestimmung der Wellenlänge wurden wie oben beschrieben Lissajous-Figuren auf dem Oszilloskop erzeugt. In der folgenden Tabelle ist die gemessene Strecke x [cm] in Abhängigkeit der vorhandenen Phasenverschiebung aufgetragen:

Tabelle 3: Gemessenen Strecken bei denen die Schwingungen in Phase sind.

Strecke[cm]	Phasenverschiebung
0.0	0
0.9	π
1.8	0
2.7	π
3.5	0
4.4	π

Die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Positionen entspricht hierbei immer der halben Wellenlänge (berechnete Werte Tabelle 4):

Der Mittelwert und dessen Fehler ergeben sich wie in der Einführung beschrieben:

$$\bar{\lambda} = (0,0176 \pm 0,0018)m \quad (7)$$

Aus der vorhandenen Wellenlänge lässt nun der Faktor ν_0/c , mittels einer Umformung zu $1/\lambda$ über die Definition der Schallgeschwindigkeit, ermitteln:

Tabelle 4: Berechnete Werte der Wellenlänge.

Differenz der Positionen	$\frac{\lambda}{s}$ [cm]	λ [cm]
2-1	0.09	0.18
3-2	0.09	0.18
4-3	0.09	0.18
5-4	0.08	0.16
6-5	0.09	0.18

$$c = \lambda \cdot \nu_o \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_0}{c} = \frac{1}{\lambda} = (56.818 \pm 5.811) \frac{1}{m} \quad (9)$$

Der Wert des Fehlers folgt hierbei mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler der Wellenlänge:

$$\Delta \frac{\nu_0}{c} = \frac{1}{\lambda^2} \Delta \lambda \quad (10)$$

1.5 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c

Die Schallgeschwindigkeit kann nun mithilfe der gemessenen Ruhefrequenz und der oberhalb berechneten Wellenlänge ermittelt werden:

$$c = \lambda \cdot \nu_0 \quad (11)$$

Der Fehler der Schallgeschwindigkeit wird somit durch

$$\Delta c = \Delta \lambda \cdot \nu_0 \quad (12)$$

bestimmt. Wie oben erwähnt wird der Fehler der Ruhefrequenz dabei als verschwindend gering angesehen, sodass sich folgender Wert für die Schallgeschwindigkeit ergibt:

$$c = (365.06 \pm 37.34) \frac{m}{s} \quad (13)$$

1.6 Abschätzung der Differenz von Formel 2 und 5

Mithilfe der Ruhfrequenz und den der Messung entnommenen Daten über die Geschwindigkeit des Wagens soll im folgenden abgeschätzt werden, ob mit diesem Versuchsaufbau eine Geschwindigkeit erreicht wird, die eine Unterscheidung zwischen bewegter Quelle und bewegtem Empfänger sichtbar macht.

Die Höchstgeschwindigkeit des Wagens in der Gangstufe 60 beträgt $v_{max} = 0,503 \frac{m}{s}$, die Schallgeschwindigkeit $c = 365.06 \frac{m}{s}$ und die Ruhfrequenz hat den Wert $\nu_0 = 20742 [Hz]$. Werden diese Werte nun in die Formeln für den bewegten Empfänger ν_E und die bewegte Quelle ν_Q eingesetzt, zeigt sich ein Unterschied beider Ergebnisse erst in der zweiten Nachkommastelle:

$$\nu_E = 20770,579 \quad (14)$$

$$\nu_Q = 20770,619 \quad (15)$$

Mit dem Ergebniss dieser Abschätzung kann der Unterschied zwischen den Formeln für ν_E und ν_Q als geringfügig und unbedeutend angenommen werden, da auch bei weiteren Messungen der Frequenzen eine höhere Genauigkeit nicht erreicht wird. Evident ist jedoch, dass für alle $v > 0$ weiterhin $\nu_Q > \nu_E > \nu_0$ gilt.

1.7 Bestimmung von $\frac{\nu_0}{c}$ aus der Messung der Frequenzänderung

1.7.1 Bestimmung aus der direkten Messung der Frequenzen

Analog zu der oben beschriebenen Messung der Ruhfrequenz wurden die Frequenzen in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Wagens bestimmt. Indem man die Differenz beider Frequenzen nimmt, lässt sich die Frequenzänderung errechnen:

$$\Delta\nu = \nu_v - \nu_0 \quad (16)$$

In den folgenden Tabelle ist für jede Geschwindigkeit die jeweilig gemessene Frequenz und die Differenz zur Ruhfrequenz eingetragen.

Wird nun $\Delta\nu$ gegen die Geschwindigkeit v auf, so lässt sich mittels linearer Regressionsrechnung eine Gerade ermitteln, die als Steigung den Faktor $\frac{\nu_0}{c}$ besitzt.

Tabelle 5: Frequenzänderung bei "positiver Geschwindigkeit."

Gang	Geschwindigkeit [m/s]	Frequenz [Hz]	Differenz
6.0	0.0507	20745.0	3.0
12.0	0.101	20748.0	6.0
18.0	0.152	20751.0	9.0
24.0	0.203	20754.2	12.2
30.0	0.253	20757.0	15.0
36.0	0.303	20760.0	18.0
42.0	0.354	20763.6	21.6
48.0	0.402	20766.4	24.4
54.0	0.452	20769.2	27.2
60.0	0.502	20772.0	30.0

Tabelle 6: Frequenzänderung bei "negativer Geschwindigkeit."

Gang	Geschwindigkeit [m/s]	Frequenz [Hz]	Differenz
6.0	-0.0507	20739.2	-2.8
12.0	-0.101	20735.8	-6.2
18.0	-0.152	20733.0	-9.0
24.0	-0.203	20730.0	-12.0
30.0	-0.253	20726.8	-15.2
36.0	-0.303	20723.8	-18.2
42.0	-0.354	20722.2	-19.8
48.0	-0.402	20722.0	-20.0

1.7.2 Berechnung aus der Messung mittel Schwebemethode

Tabelle 7: Frequenzänderung bei Messung mit der Schwebemethode.”

Gang	Geschwindigkeit [m/s]	Differenz [Hz]	Fehler [Hz]
6.0	0.0507	5.8	0.2
12.0	0.101	11.8	0.2
18.0	0.152	17.8	0.2
24.0	0.203	23.8	0.374165738677
30.0	0.253	24.6	9.20386392289
36.0	0.303	35.8	0.489897948557