

# **Versuch 302**

## **Elektrische Brückenschaltungen**

Sebastian Pape  
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke  
lejonah@web.de

Durchführung: 13.12.2016

Abgabe: 20.12.2016

# 1 Theorie

## 1.1 Elektrische Brückenschaltungen

Bei Brückenschaltungen handelt es sich um elektrische Schaltungen, mit dessen Hilfe die Widerstände von Bauteilen sehr genau bestimmt werden können. Hierbei sind auch komplexe Widerstände erlaubt, sodass auch die Kapazität eines Kondensators und die Induktivität einer Spulen gemessen werden können. Die grundlegende Struktur einer Brückenschaltung ist in Abb. 1 dargestellt.

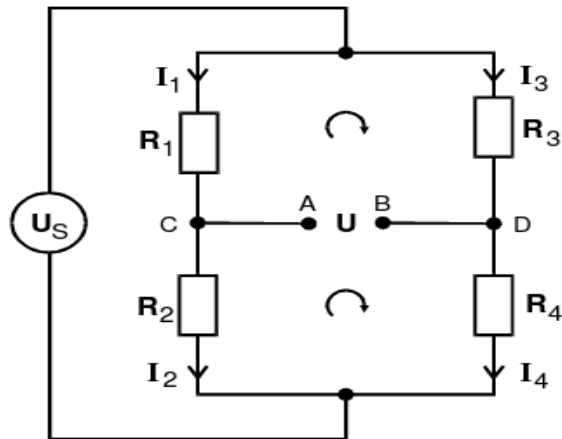


Abbildung 1: Grundlegende Struktur einer Brückenschaltung[anleitung01]

Es wird ausgenutzt, dass zwischen zwei getrennten stromdurchflossenen Leitern eine Potentialdifferenz besteht, die durch die *Kirchhoffschen Gesetze* bestimmt werden kann.

### 1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel):

Die Summe aller in ein Knoten eingehenden Ströme ist gleich der Summe, der aus einem Knoten herausfließenden Ströme. Diese Gleichung ergibt sich aus der Ladungserhaltung.

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

### 2. Kirchhoffsche Gesetz (Maschenregel):

Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist gleich Null. Dieses Gesetz entstammt aus der Energieerhaltung.

$$\sum_k U_k = \sum_k I_k R_k \quad (2)$$

Der Zusammenhang zwischen der Brückenspannung  $U$  und der Speisespannung  $U_S$  ist durch folgenden Zusammenhang gegeben.

$$U_{Br} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S \quad (3)$$

Eine Brücke wird als abgeglichen bezeichnet, wenn die Brückenspannung  $U_{Br}$  verschwindet. Dies ist gerade der Fall, wenn

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (4)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist unabhängig von der Speisespannung  $U_S$  und gilt somit für jede beliebige Speisespannung.

## 1.2 Komplexe Wechselstromwiderstände

Komplexe Wechselstromwiderstände treten auf, wenn Kondensatoren und oder Induktivitäten in einer Schaltung verbaut sind. Für die Bauteile ergibt sich

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_L = i\omega L.$$

Eine Komplexe Zahl besteht allgemein aus einem Realteil  $X$  und einem Imaginärteil  $Y$ . Also ist  $Z$  insgesamt  $Z = X + iY$ .

Dabei ist  $i$  die imaginäre Zahl und  $\omega$  die Kreisfrequenz, mit der die Spannung wechselt. Damit die Abgleichbedingung (4) für die Brückenschaltung für komplexe Widerstände erfüllt ist müssen der Realteil und der Imaginärteil des Gesamtwiderstandes einzeln verschwinden. Somit ergibt sich

$$X_1 X_4 - Y_1 Y_4 = X_2 X_3 - Y_2 Y_3 \quad (5)$$

$$X_1 Y_4 + X_4 Y_1 = X_2 Y_3 + X_3 Y_2. \quad (6)$$

Dabei ist  $X_i$  der Realteil und  $Y_i$  der Imaginärteil.

## 2 Versuchsaufbau

In dem Versuch wurden verschiedene Brückenschaltungen verwendet. In dem folgenden Abschnitt werden die verwendeten Schaltungen erläutert und die dazugehörigen Formeln angegeben.

## 2.1 Wheatstonesche Brücke

Die Wheatstonesche Brücke wird für die Widerstandsmessung eines unbekannten Widerstandes verwendet. In der Schaltung werden ausschließlich ohmsche Widerstände verwendet.

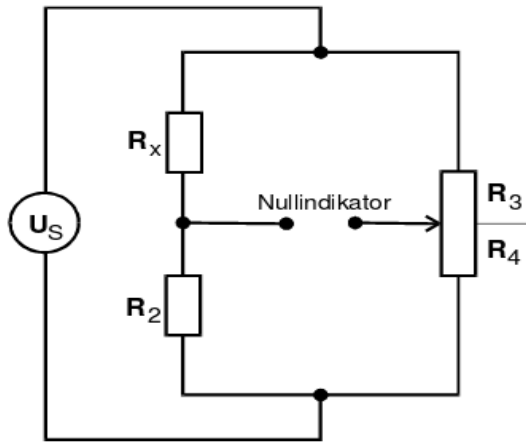


Abbildung 2: Schaltungsskizze einer Wheatstonesche Brückenschaltung[anleitung01]

Der unbekannte Widerstand lässt sich mit Hilfe von (1) und (2) ermitteln. Es ergibt sich

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (7)$$

Dabei werden  $R_3$  und  $R_4$  so eingestellt, dass die Brücke nach der Bedingung (4) abgeglichen ist.

## 2.2 Kapazitätsmessbrücke

Ein idealer Kondensator kann durch ergänzen eines ohmschen Widerstandes zu einem realen Kondensator umgewandelt werden. Ein realer Kondensator ist verlustbehaftet. Diese Eigenschaft wird von dem ergänzten ohmschen Widerstand übernommen. Mit Hilfe einer Kapazitätsmessbrücke kann die Kapazität und der Widerstand eines realen Kondensators bestimmt werden. Dafür wird der in Abb. 3 Aufbau verwendet.

Über die Knoten- und Maschenregel ergeben sich für die unbekannten Größen  $R_x$  und  $C_x$  folgende Gleichungen.

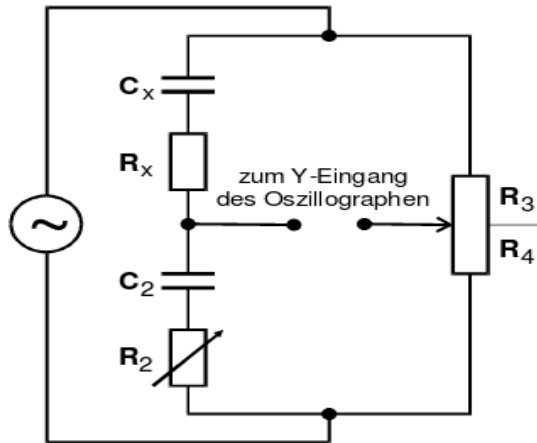


Abbildung 3: Schaltungsskizze einer Kapazitätsmessbrücke[anleitung01]

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (8)$$

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (9)$$

### 2.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Induktivitätsmessbrücke ist der Kapazitätsmessbrücke sehr ähnlich, nur anstelle des zu bestimmenden Kondensators wird die zu vermessende Spule eingebaut. Ebenso ist die ideal Spule mit einem ohmschen Widerstand zu versehen, sodass die sie das Verhalten einer realen Spule beschreibt.

Durch die Komplexen Abgleichbedingungen (5) und (6) ergeben sich

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (10)$$

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (11)$$

Die Induktivität und der Widerstand von einer realen Spule ist mit der Induktivitätsmessbrücke schwierig zu vermessen. Der Wirkanteil sollte möglichst alleine durch  $R_2$  realisiert werden und  $L_2$  sollte eine möglichst hohe Effizienz haben, damit  $L_x$  und  $R_x$  präzise vermessen werden können. Dies ist experimentell schwierig umzusetzen. Deshalb wird für die Messung von Induktivitäten die Maxwell-Brücke verwendet.

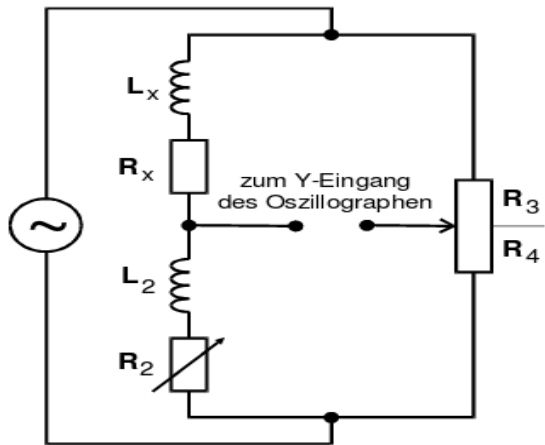


Abbildung 4: Schaltungsskizze einer Induktivitätsmessbrücke[anleitung01]

## 2.4 Maxwell-Brücke

Bei der Maxwell-Brücke wird parallel zum vierten ohmsche Widerstand  $R_4$  eine Kondensator mit der Kapazität  $C_4$  geschaltet. Die Schaltung ist in Abb. 5 skizziert.

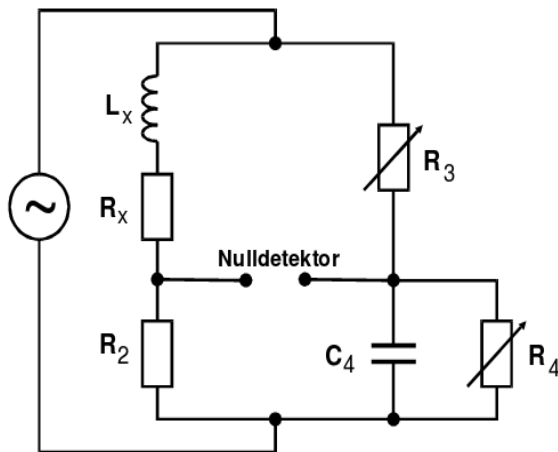


Abbildung 5: Schaltungsskizze einer Maxwell-Brücke[anleitung01]

Durch die Komplexen Abgleichbedingungen (5) und (6) ergeben sich

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (12)$$

$$L_x = R_2 R_3 C_4. \quad (13)$$

Die Regelwiderstände  $R_3$  und  $R_4$  werden als Abgleichelemente verwendet und der Kondensator sollte für eine präzise Messung möglichst verlustarm sein.

## 2.5 Wien-Robinson-Brücke

Die Wien-Robinson-Brücke ist eine frequenzabhängige Brückenschaltung. Der Zusammenhang zwischen der Brückenspannung und der Speisespannung kann über die Formel (3) berechnet werden. Für die Schaltung der Wien-Robinson-Brücke ergibt sich die folgenden Formel.

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9 \left[ (1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9 \omega^2 R^2 C^2 \right]} \quad (14)$$

Die Brückenspannung verschwindet für die Frequenz  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ . Somit wird die Frequenz  $\omega_0$  gefiltert und alle Schwingungen mit der Frequenz  $\omega_0$  werden nicht durch diese Brückenschaltung durchgelassen. Schwingungen mit einer Frequenz nahe von  $\omega_0$  werden stark abgeschwächt.

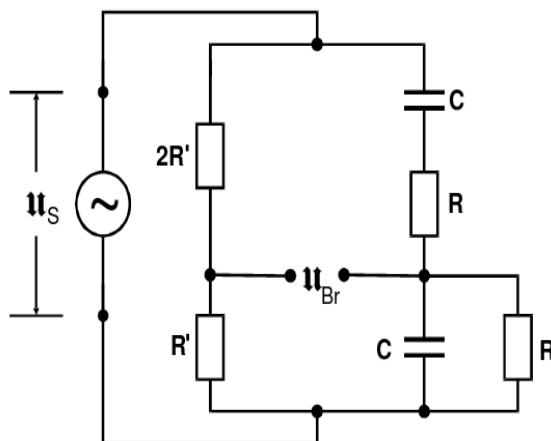


Abbildung 6: Schaltungsskizze einer Wien-Robinson-Brücke[anleitung01]

## 2.6 Klirrfaktor

In dem Versuch soll der Klirrfaktor des verwendeten Sinusgenerator bestimmt werden. Der Klirrfaktor ist eine Zeichen der Güte eines Generators und beschreibt die Anteile der Oberwellen im Verhältnis zu der Grundwelle. Der Klirrfaktor kann mit Hilfe der Wien-Robinson-Brücke (Abb.6) ermittelt werden. Dafür stellt man die Widerstände so ein, dass die Brückenspannung minimal ist. An diesem Minimum ist die Frequenz  $\omega_0$

erreicht, bei dem nur noch die Oberwellen des Sinusgenerators durch die Schaltungen gelassen werden.

Der Klirrfaktor ist definiert als:

$$k := \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1}. \quad (15)$$

Dabei ist  $U_1$  die Amplitude der Grundwelle und  $U_i$  die Amplitude der i-ten Oberwelle. Zur vereinfachten Rechnung wird hierbei lediglich  $U_2$  berücksichtigt.



### 3 Messergebnisse

Tabelle 1: Gemessene Werte bei der Wheatstoneschen Brücke

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 10	$R_2$ in $\Omega$	1000	664	332
	$R_3$ in $\Omega$	196	268	422
	$R_4$ in $\Omega$	804	732	578
Wert 12	$R_2$ in $\Omega$	1000	664	332
	$R_3$ in $\Omega$	284	373	543
	$R_4$ in $\Omega$	716	627	457

Tabelle 2: Gemessene Werte für die Kapazitätsmessbrücke ohne Widerstände

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 3	$C_2$ in nF	450	399	597
	$R_3$ in $\Omega$	519	490	590
	$R_4$ in $\Omega$	481	510	410
Wert 1	$C_2$ in nF	450	399	597
	$R_3$ in $\Omega$	407	380	478
	$R_4$ in $\Omega$	593	520	522

Tabelle 3: Gemessene Werte für die Kapazitätsmessbrücke mit Widerständen

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 8	$C_2$ in nF	450	399	597
	$R_2$ in $\Omega$	371	418	278
	$R_3$ in $\Omega$	606	578	673
	$R_4$ in $\Omega$	394	422	327
Wert 9	$C_2$ in nF	450	399	597
	$R_2$ in $\Omega$	466	524	352
	$R_3$ in $\Omega$	511	481	581
	$R_4$ in $\Omega$	489	519	419

Tabelle 4: Gemessene Werte für die Induktivitätsmessbrücke

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 10	$L_2$ in mH	14.6	20.1	27.5
	$R_2$ in $\Omega$	45	57	85
	$R_3$ in $\Omega$	907	875	837
	$R_4$ in $\Omega$	83	125	163
Wert 18	$L_2$ in mH	14.6	20.1	27.5
	$R_2$ in $\Omega$	108	143	197
	$R_3$ in $\Omega$	775	715	648
	$R_4$ in $\Omega$	225	285	352

Tabelle 5: Gemessene Werte für R-L-Glieder mit der Maxwell-Brücke

		Messung 1	Messung 2	Messung 3
Wert 10	$R_2$ in $\Omega$	100	664	332
	$R_3$ in $\Omega$	347	523	1036
	$R_4$ in $\Omega$	829	829	829
Wert 18	$R_2$ in $\Omega$	100	664	332
	$R_3$ in $\Omega$	128	193	382
	$R_4$ in $\Omega$	347	349	348

Tabelle 6: Gemessene Werte bei der Wien-Robinson-Brücke

$\nu$ in $\frac{1}{s}$	$U_{Br}$ in V	$U_{Sp}$ in V
20	2.480	2.700
100	1.960	2.550
200	1.000	2.200
270	0.524	2.000
320	0.260	1.800
340	0.172	1.800
360	0.078	1.700
370	0.044	1.700
390	0.053	1.650
395	0.084	1.650
400	0.094	1.650
405	0.136	1.650
410	0.140	1.600
415	0.166	1.600
420	0.184	1.600
430	0.210	1.600
440	0.254	1.550
469	0.328	1.500
480	0.384	1.450
500	0.468	1.400
550	0.590	1.250
600	0.740	1.200
700	1.020	1.100
800	1.150	0.950
1000	1.450	0.750
1200	1.660	0.680
1500	1.860	0.540
2000	2.000	0.410
3000	2.140	0.285
5000	2.180	0.175
10000	2.040	0.090
20000	1.660	0.060
30000	1.180	0.055

## 4 Auswertung

Die Mittelwerte und Fehler der errechneten Größen in den folgenden Abschnitten errechnen sich mit folgenden Formeln:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (16)$$

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (17)$$

### 4.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

Mit den gemessenen Werte aus Tabelle 1 und der Formel (7) lassen sich nun die gesuchten Widerstände berechnen. Dabei ergeben sich folgende Werte:

$$R_{x,10} = (243.1 \pm 0.4) \Omega \quad (18)$$

$$R_{x,12} = (395.4 \pm 0.7) \Omega \quad (19)$$

### 4.2 Kapazitätsmessbrücke

Mit den Werten aus Tabelle 2 für die Kapazitätsmessbrücke ohne zwischengeschaltete Widerstände und der Formel (9) ergeben sich für die gesuchten Kapazitäten die folgenden Werte:

$$C_{x,1} = (652.9 \pm 1.4) \text{ nF} \quad (20)$$

$$C_{x,3} = (415.7 \pm 0.7) \text{ nF} \quad (21)$$

Mit den Werten aus Tabelle 3 für die Kapazitätsmessbrücke mit Widerständen und den Formen (8) und (9) lassen sich ebenfalls die gesuchten Werte der R-C-Glieder bestimmen:

$$R_{x,8} = (571.8 \pm 0.6) \Omega \quad (22)$$

$$C_{x,8} = (291.3 \pm 0.7) \text{ nF} \quad (23)$$

$$R_{x,9} = (487.6 \pm 0.3) \Omega \quad (24)$$

$$C_{x,9} = (430.0 \pm 0.6) \text{ nF} \quad (25)$$

### 4.3 Induktivitätsmessbrücke

Mit den Formeln (10) und (11) und den Werten aus der Tabelle 4 ergeben sich für die gesuchten R-L-Glieder folgende Werte:

$$R_{x,16} = (442 \pm 27) \Omega \quad (26)$$

$$L_{x,16} = (147 \pm 6) \text{ mH} \quad (27)$$

$$R_{x,18} = (364 \pm 4) \Omega \quad (28)$$

$$L_{x,18} = (50.5 \pm 0.1) \text{ mH} \quad (29)$$

### 4.4 Maxwell-Brücke

Die gleichen R-L-Glieder wie bei der Induktivitätsmessbrücke wurden nochmal mithilfe der Maxwell-Brücke gemessen, bei der ein Kondensator mit der Kapazität  $C_4 = 399 \text{ nF}$  verwendet wurde. Mit den Werten aus der Tabelle 5 sowie den Formeln (12) und (13) ergeben sich für die beiden R-L-Glieder somit folgende Werte:

$$R_{x,16} = (417.5 \pm 1.3) \Omega \quad (30)$$

$$L_{x,16} = (138.1 \pm 0.4) \text{ mH} \quad (31)$$

$$R_{x,18} = (366.8 \pm 1.3) \Omega \quad (32)$$

$$L_{x,18} = (50.94 \pm 0.17) \text{ mH} \quad (33)$$

## 4.5 Robinson-Wien-Brücke

Bei der Messung die für Robinson-Wien-Schaltung wurden die folgenden Komponenten verwendet:

$$C = (415.7 \pm 0.7) \text{ nF} \quad (34)$$

$$R' = 332 \, \Omega \quad (35)$$

$$2R' = 664 \, \Omega \quad (36)$$

$$R = 1000 \, \Omega \quad (37)$$

In dieser Messreihe wurde die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung untersucht. Dazu wird in den Graphen 8 und 7 das Verhältnis der effektiven Brückenspannung  $U_{\text{Br,eff}}$  zur Speisespannung  $U_{\text{Sp}}$  gegen  $\Omega = \frac{\nu}{\nu_0}$  aufgetragen. Für  $U_{\text{Br,eff}}$  gilt dabei:

$$U_{\text{Br,eff}} = \frac{U_{\text{Br}}}{2\sqrt{2}}. \quad (38)$$

Als Frequenz, bei der die Brückenspannung verschwinden sollte, ergibt sich folgender Wert:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1000 \, \Omega \cdot (415.7 \pm 0.7) \cdot 10^{-9} \text{ F}} = (2406 \pm 4) \text{ Hz} \quad (39)$$

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = (382.9 \pm 0.6) \text{ Hz} \quad (40)$$

Für die Bestimmung des Klirrfaktors wird zunächst genähert, dass die Summe der Oberwellen nur von dem Term der zweiten Oberwelle bestimmt wird. Im Folgendem wird mit der Effektivspannung gerechnet, da diese bereits in Formel (38) bestimmt wurde.

Mit Formel (15) werden zu Berechnung noch die Werte für  $U_2$  und  $U_1$  bestimmt, wobei  $U_1$  die 1,65 V von  $U_{\text{Sp}}$  bei  $\nu_0$  sind. Mit (14) und  $\Omega = 2$  folgt dann:

$$U_2 = \frac{U_{\text{Br,eff}}}{f(2)} \quad (41)$$

$$= 4.269 \cdot 10^{-2} \text{ V}. \quad (42)$$

Der Klirrfaktor ergibt sich damit nun aus dem Quotienten von  $U_2$  und  $U_1$ :

$$k = \frac{U_2}{U_1} = 2.668 \cdot 10^{-2}. \quad (43)$$

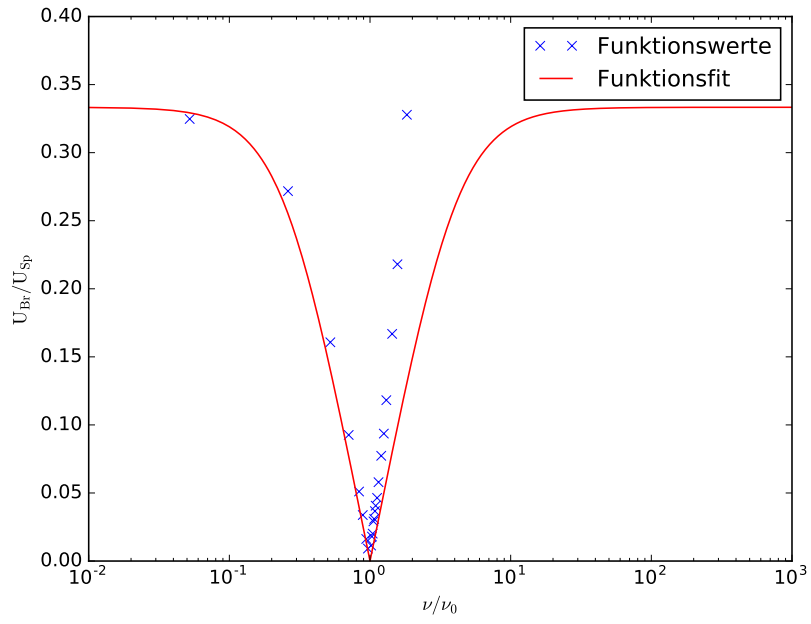


Abbildung 7: Vergleich der Messdaten mit einer Theoriekurve im kleineren Bildintervall

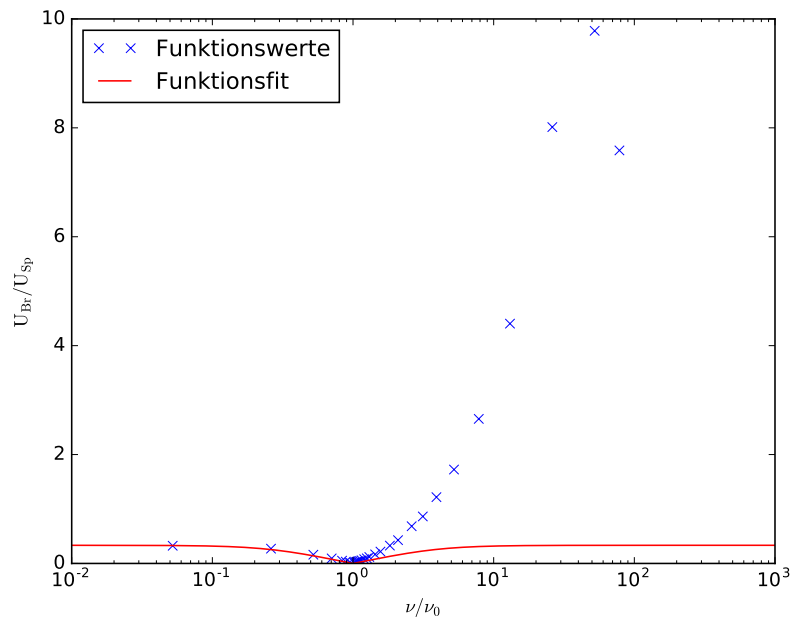


Abbildung 8: Vergleich der Messdaten mit einer Theoriekurve

## 5 Diskussion

Auffällig ist, dass bei eigentlich allen Messungen der Fehler der einzelnen Bauteile ziemlich gering ist. Dies lässt auf eine ziemlich gute Messung schließen, die nur durch das Anschaffen neuer Bauteile wirklich verbessert werden kann.

Vergleicht man bei den Messungen die Fehler der Induktivitätsmessbrücke und die der Maxwell-Brücke, sieht man, dass bei letzterem deutlich geringere Fehler auftreten. Dies könnte vor allem an der Annahme liegen, dass die verwendete Spule  $L_2$  bei der Induktivitätsmessbrücke keinen Innenwiderstand besitzt, was in der Messung nicht realisierbar ist. Zwar wurde auch bei der Maxwell-Brücke der Kondensator als verlustfrei angenommen, dies lässt sich jedoch weitaus besser realisieren. Dennoch sind die Abweichungen der gemessenen Werte beider Methoden nicht allzu groß, die Maxwell-Brücke scheint in dieser Messung lediglich genauer zu sein.

Bei der Bestimmung des Klirrfaktors sieht man, dass die gemessenen Werte besonders bei Frequenzen oberhalb des Minimums stark von der Theoriekurve abweichen. Da die Form der Kurve jedoch ähnlich ist, kann man auf einen systematischen Fehler schließen. Dies ist schon in den Messwerten zu erkennen, in denen die Speisespannung eigentlich relativ konstant bleiben sollte, jedoch zwischenzeitlich auf ca. 3 % des ursprünglichen Wertes absinkt. Somit kann der Klirrfaktor als Beurteilung der Güte des Sinusgenerators eigentlich nur bedingt verwendet werden. Dennoch ist der Wert trotz der Messungenauigkeiten ziemlich gering.