

# **Versuch 353**

## **Das Relaxationsverhalten eines LC-Kreises**

Sebastian Pape  
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke  
lejonah@web.de

Durchführung: 24.01.2017

Abgabe: 31.01.2017

# 1 Theorie

In dem Versuch V353 wurde das Relaxationsverhalten eines  $RC$ -Kreises untersucht. Relaxation bedeutet, dass ein System aus seinen Ruhezustand gebracht wird und nicht-oszillatorisch in diesen zurückkehrt. Mit einem  $RC$ -Kreis ist solch ein Relaxationsverhalten zu erreichen.

## 1.1 Ent- und Aufladevorgang

Bei dem Ladevorgang eines Kondensators mit der Kapazität  $C$  über einen Widerstand  $R$  lässt sich die Ladung auf dem Kondensator als Funktion der Zeit darstellen. Es ergibt sich unter der Randbedingung  $Q(\infty) = 0$  die folgende Formel.

$$Q(t) = Q(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (1)$$

Für den Aufladevorgang gelten die Randbedingungen  $Q(0) = 0$  und  $Q(\infty) = CU_0$ . Dabei ist  $U_0$  die Spannung der Spannungsquelle. Damit ergibt sich die folgende Formel des Aufladevorgangs eines Kondensators über einen Widerstand.

$$Q(t) = CU_0(1 - \exp(-\frac{t}{RC})) \quad (2)$$

$RC$  wird auch *spezifische Zeitkonstante* genannt, da dieser Ausdruck ein Maß der Geschwindigkeit des Entladevorgangs darstellt. Nach  $\tau = RC$  ändert sich die Ladung des Kondensators um den Faktor 0,368. Nach  $2,3\tau$  sind nur noch 10% des Ausgangswertes der Ladung auf dem Kondensator vorhanden.

## 1.2 Relaxationsverhalten bei periodischer Anregung

Wird nun an den  $RC$ -Kreis eine periodische Spannung  $U(t) = U_0 \cos \omega t$  anstelle einer einzelnen Erregung angelegt ändert sich das Relaxationsverhalten mit der Frequenz  $\omega$ . Ist  $\omega \ll \frac{1}{RC}$  sind die Spannungen des Generators und des Kondensators näherungsweise in Phase. Je hochfrequenter die Spannung wird, desto deutlicher wird die Phase zwischen den beiden Spannungen. Für  $\omega \rightarrow \infty$  nähert sich die Phasenverschiebung asymptotisch den Wert  $\frac{\pi}{2}$ .

### 1.3 Der RC-Kreis als Integrator

Mit Hilfe eines  $RC$ -Kreises lässt sich die angeschlossene Spannung  $U(t)$  unter der Voraussetzung  $\omega \ll \frac{1}{RC}$  integrieren. Dies hängt damit zusammen, dass die Kondensatorspannung  $U_C(t)$  proportional mit dem Integral von  $U(t)$  zusammenhängt. Unter der gestellten Bedingung gilt näherungsweise der Zusammenhang

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (3)$$

Daran ist erkenntlich, dass sich die Kondensatorspannung  $U_C(t)$  als Integrator der Generatorspannung  $U(t)$  eignet.

## 2 Durchführung

Zu Beginn des Versuches wurde der  $RC$ -Kreis aufgebaut. Eine Schaltplanskizze ist in Abb. 1 zu sehen. Mit dieser Schaltung konnte der Auf- und Entladevorgang des Kondensators über das Oszilloskop beobachtet werden. Dazu wurde der Generator auf den Rechteckspannungsbetrieb eingestellt und das Oszilloskop so geregelt, dass die Lage des Spannungsnullpunktes zu sehen ist. Während des Suchvorganges des Spannungsnullpunktes wurde die Periodendauer der Rechteckspannung möglichst groß gewählt. Sobald eine geeignete Kurve gefunden wurde, konnte diese als Bild gespeichert werden.

Danach wurde der Generator auf den Sinusspannungsbetrieb umgestellt, sodass der  $RC$ -Kreis bei variierender Frequenz untersucht werden konnte. Die Amplitude der Kondensatorspannung wurde bei insgesamt 15 verschiedenen Frequenzen beobachtet. Dabei wurden fünf Frequenzen aus dem niederfrequenten Bereich zwischen 10 bis 100 Hz betrachtet. Die anderen zehn Frequenzen wurden aus dem Frequenzbereich zwischen 200 bis 1100 Hz in hundert Schritten gewählt. Bei der Messung wurden neben der Frequenz und Kondensatorspannung auch die Generatorspannungen betrachtet.

Desweiteren wurde der Phasenunterschied zwischen Generator- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Dafür wurden die beiden Spannungen auf die Eingänge des Oszilloskops gelegt. Es wurde der Abstand der beiden Nulldurchgänge, sowie die Periodendauer der Generatorspannung mit Hilfe des digitalen Periodendauermessgerät, welches in dem Oszilloskop integriert ist gemessen.

Abschließend wurde die Eigenschaft der Kondensatorspannung als Integrator der Generatorspannung untersucht. Dafür wurde die Frequenz minimal geregelt, sodass sie der Bedingung  $\omega \ll \frac{1}{RC}$  genügt. Bei dem verwendeten Generator war die Minimalfrequenz bei ca. 4 Hz erreicht. Nun wurde die Generatorspannung parallel zu der Kondensatorspannung auf dem Oszilloskop ausgegeben und bei geeigneten Einstellungen als Bild gespeichert. Die Messung wurde mit einer Sinusspannung, einer Rechteckspannung und

einer Dreiecksspannung durchgeführt.

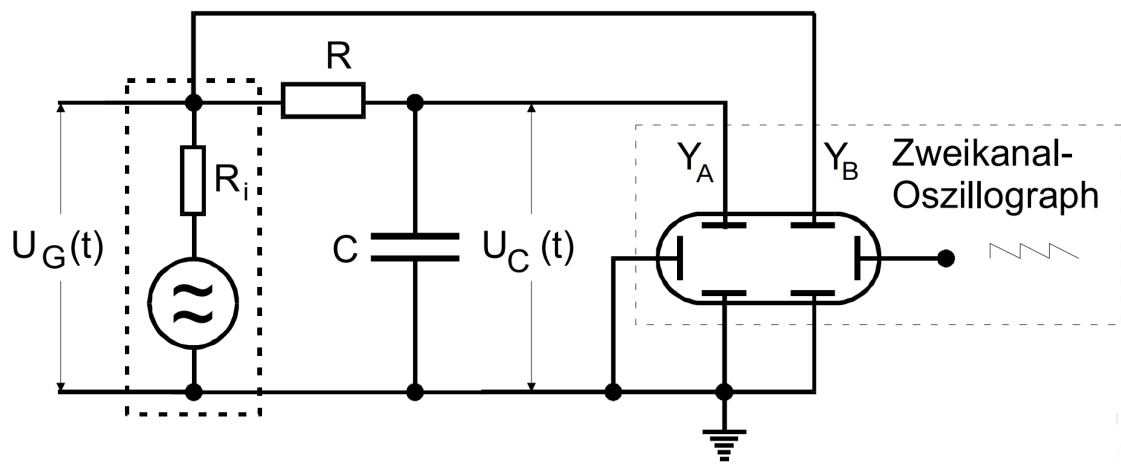


Abbildung 1: Schaltplanskizze des verwendeten RC-Kreises

### 3 Auswertung

#### 3.1 Messung der Zeitkonstanten mit einer Entladekurve

In dem ersten Teil des Versuches wird mit dem Oszilloskop die Entladekurve des sich im RC-Kreis befindenden Kondensators betrachtet. Dem in Abbildung 2 zu sehenden Thermodruck werden dabei 13 Wertepaare, bestehend aus der Zeit  $t$  und der Kondensatorspannung  $U_C$ , entnommen und in den Graphen (Abbildung 3) eingetragen. Mithilfe einer linearen Regression nach Formel (4) kann dann die Steigung ermittelt werden, deren Kehrwert im Betrag der Zeitkonstante  $RC$  entspricht.

$$\ln(U_C) = m \cdot t + b \quad (4)$$

$$m = -\frac{1}{RC} \quad (5)$$

Tabelle 1: Entnommene Wertepaare für die Spannungsamplituden zu verschiedenen Zeitpunkten des Entladevorgangs

$t$ in ms	$U_C$ in V	$t$ in ms	$U_C$ in V
0.00	12.4	1.75	3.4
0.25	10	2.00	2.8
0.50	8.2	2.25	2.4
0.75	6.6	2.50	2
1.00	5.8	2.75	1.8
1.25	4.6	3.00	1.6
1.50	4	-	-

Mithilfe der linearen Regression ergibt sich dabei für die Zeitkonstante  $RC$  ein Wert von  $RC = (0.00146 \pm 0.00003)$  s.

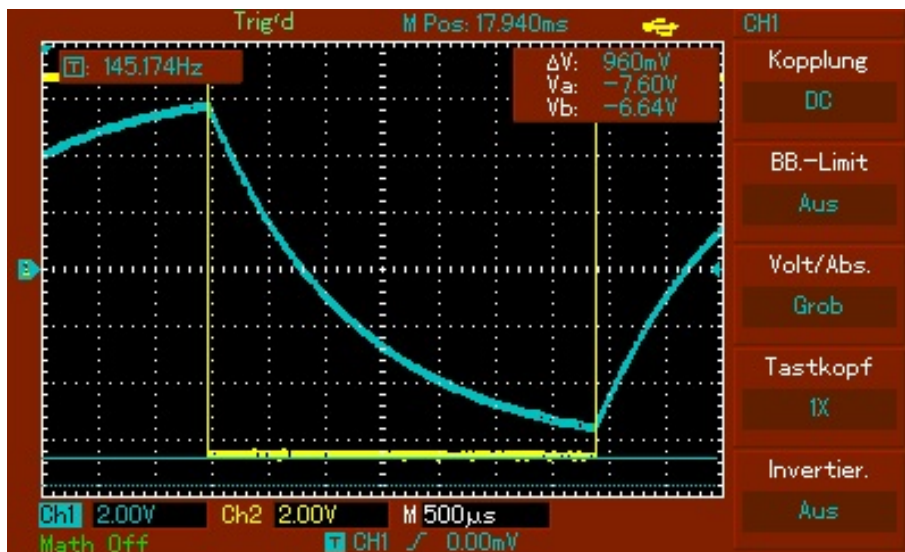


Abbildung 2: Thermodruck der in Messung 3.1 betrachteten Entladekurve

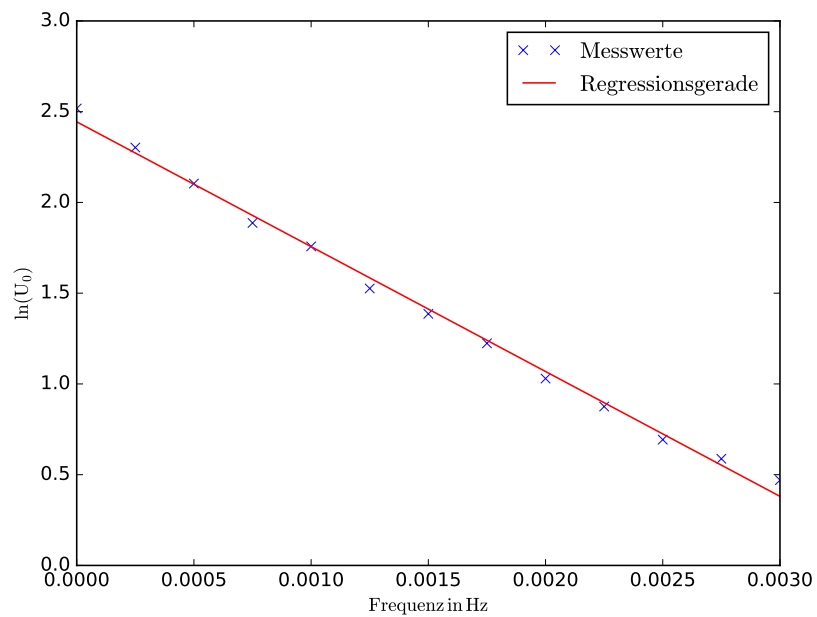


Abbildung 3: gemessene Werte für  $U_C$  aufgetragen gegen die Zeit  $t$

### 3.2 Bestimmung der Zeitkonstanten über Messung der zeitabhängigen Spannungsamplitude

In der zweiten Messung des Versuches wurde mithilfe des Oszilloskopes die Spannungsamplitude an dem Kondensator in Abhängigkeit der Frequenz gemessen, da auch diese eine Abhängigkeit von der Zeitkonstante aufweist. Das Verhältnis von gemessener Amplitude  $U_C$  und der anliegenden Ausgangsspannung wird  $U_G$  in dem Graphen 4 aufgetragen und mithilfe einer Regressionskurve nach Formel (6) kann dann die Zeitkonstante  $RC$  bestimmt werden, die in Formel (6) der Konstante  $a$  entspricht.

$$\frac{A(\nu)}{U_G} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot a^2}} \quad (6)$$

Aus der Abbildung 4 ergibt sich somit mit der Regressionskurve für die Zeitkonstante folgender Wert:

$$RC = a = (0.00130 \pm 0.00002) \text{ s}. \quad (7)$$

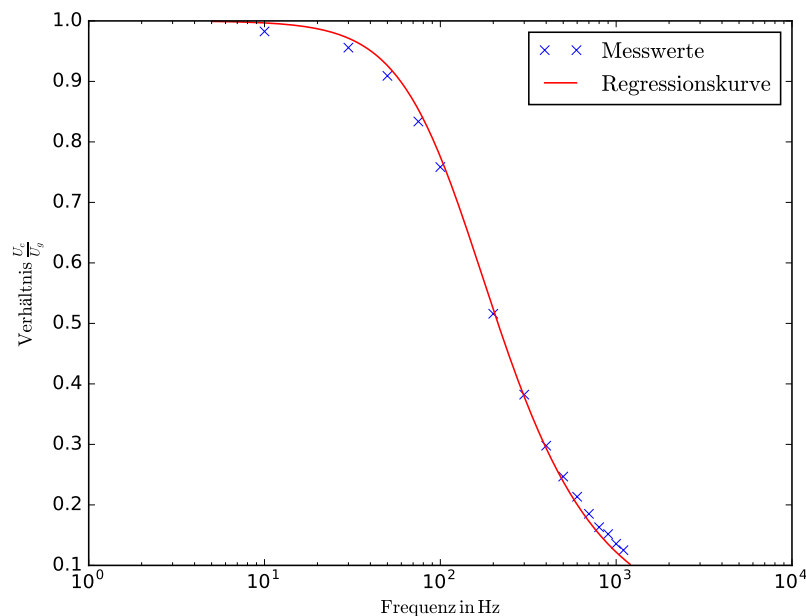


Abbildung 4: Verhältnis der gemessenen Spannungsamplituden  $U_C$  und der Ausgangsspannung  $U_0$  aus Tabelle 2 aufgetragen gegen die Frequenz  $\nu$

Tabelle 2: Gemessene Spannungsamplituden der Kondensatorspannung für verschiedene angelegte Frequenzen  $\nu$

$\nu$ in Hz	$U_C$ in V	$U_C$ in V	$\nu$ in Hz	$U_C$ in V	$U_C$ in V
10	14.1	14.35	500	3.48	14.1
30	13.62	14.25	600	3.01	14.1
50	12.91	14.20	700	2.61	14.1
75	11.88	14.25	800	2.30	14.1
100	10.77	14.2	900	2.14	14.1
200	7.29	14.13	1000	1.90	14.0
300	5.39	14.1	1100	1.74	13.9
400	4.20	14.1	-	-	-

### 3.3 Messung der Zeitkonstante über die Phasenverschiebung

In dem dritten Teil des Experimentes wird die Zeitkonstante noch einmal über den Phasenverschub bestimmt, der sowohl von der Frequenz als auch von der Zeitkonstante abhängig ist. Die gemessenen Werte für die zeitliche Verzögerung  $a$  sowie die Schwingungsdauer  $b$  und die daraus resultierende Phasenverschiebung  $\varphi$  sind in der folgenden Tabelle zu sehen und wurden mithilfe eines Oszilloskopes gemessen.

Tabelle 3: Gemessene Werte für die Parameter  $a$  und  $b$  sowie die resultierende Phasenverschiebung

$\nu$ in Hz	$a$ in ms	$b$ in ms	$\varphi$ in rad
10	99.2	100.1	0.055
30	32.0	33.3	0.253
50	18.4	20.0	0.506
75	12.0	13.3	0.631
100	8.80	10.0	0.754
200	4.20	5.00	1.005
300	2.68	3.33	1.226
400	2.00	2.50	1.257
500	1.60	2.00	1.257
600	1.32	1.67	1.317
700	1.12	1.43	1.362
800	1.00	1.25	1.257
900	0.88	1.11	1.302
1000	0.76	1.00	1.508
1100	0.66	0.91	1.726



Die gemessene Phasenverschiebung wird in Abbildung 5 gegen die eingestellte Frequenz aufgetragen. Über eine Regressionskurve nach Formel (8), in der der Parameter  $a$  der zu bestimmenden Zeitkonstante  $RC$  entspricht.

$$\varphi = \arctan(-2\pi\nu a) \quad (8)$$

Für  $RC$  ergibt sich somit der folgende Wert:

$$RC = (0.00139 \pm 0.00013) \text{ s.} \quad (9)$$

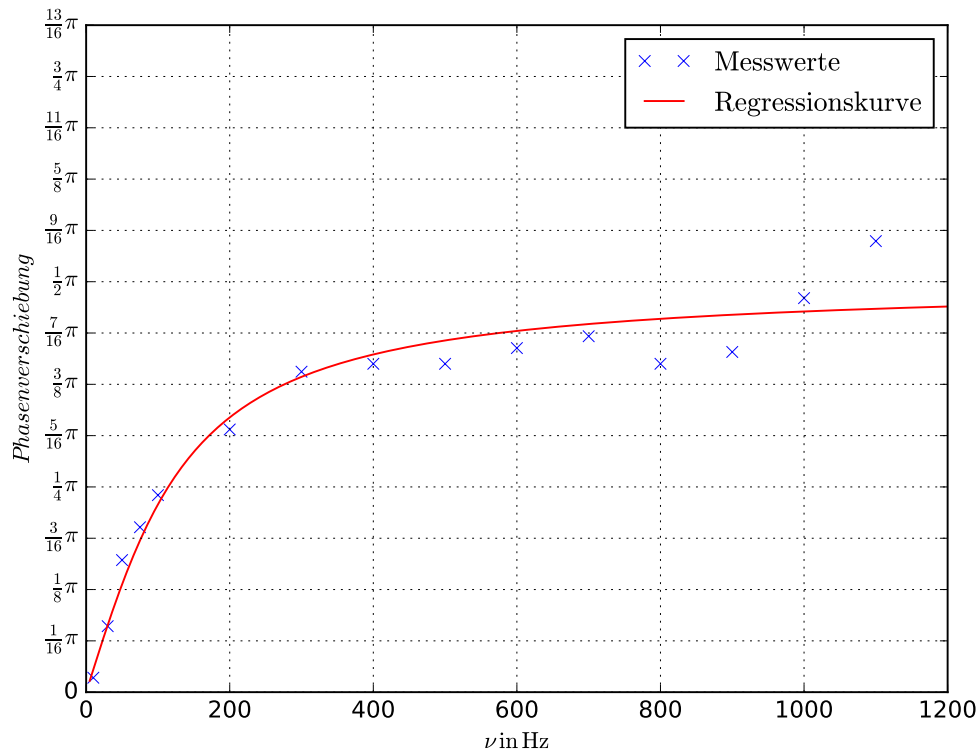


Abbildung 5: Abhängigkeit der Phasenverschiebung von der angelegten Frequenz

In Abbildung 5 zeigt sich, dass ein Wert der Phasenverschiebung über dem Wert  $\frac{\pi}{2}$  liegt, was laut der Theorie nicht möglich sein sollte. Deswegen wurde die Zeitkonstante noch einmal bestimmt, wobei der letzte Messwert bei der Regression nicht beachtet wurde. Als korrigierter Wert ergibt sich somit:

$$RC = (0.00136 \pm 0.00010) \text{ s.} \quad (10)$$

### 3.4 Phasenabhängigkeit der Generatorspannung

Um in diesem Abschnitt die Amplitude noch einmal als Funktion der Phasenverschiebung zu berechnen, wird als  $RC$  der vorher berechnete Wert von  $RC = (0.00136 \pm 0.00010) \text{ s}$  verwendet. Die berechneten Werte befinden sich in der folgenden Tabelle sichtbar und sind in Abbildung 6 nochmal in einem Polarplot dargestellt.

Tabelle 4: Berechnete Amplituden aus den Werten von Aufgabenteil 3.3

$\nu$ in Hz	$\varphi$ in rad	$\frac{A}{U_G}$
10	0.055	0.646
30	0.253	0.975
50	0.506	1.133
75	0.631	0.921
100	0.754	0.801
200	1.005	0.494
300	1.226	0.367
400	1.257	0.278
500	1.257	0.223
600	1.317	0.189
700	1.362	0.164
800	1.257	0.139
900	1.302	0.125
1000	1.508	0.117
1100	1.726	0.105

Dabei sind in Abbildung 6 die in Tabelle 4 stehenden Werte für die mit der Phasenverschiebung und der Frequenz berechneten Amplituden eingetragen sowie zudem auch die gemessenen Amplituden in Abhängigkeit der Frequenz aus Messung 3.2. Bei der roten Linie handelt es sich dabei um eine zum Vergleich der Werte herangezogene Theoriekurve.

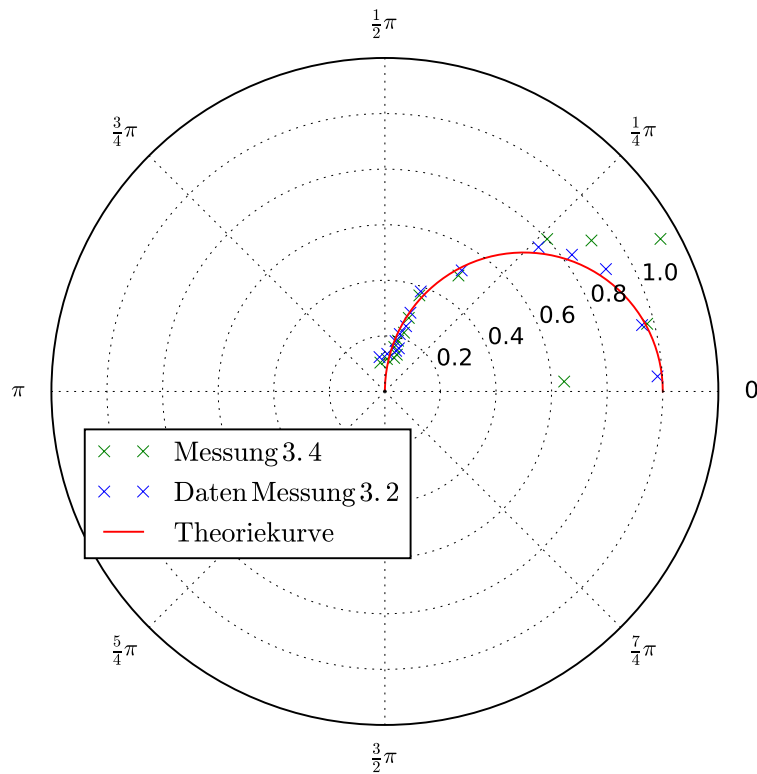


Abbildung 6: Amplitude in Abhängigkeit der Phase

### 3.5 Betrachten des RC-Kreises als Integrator

In dem letzten Teil des Experimentes sollte mithilfe eines Oszilloskopes und drei verschiedenen Spannungen noch einmal betrachtet werden, inwieweit der RC-Kreis die Eigenschaften eines Integrators besitzt. In den Abbildungen 7, 8 und 9 ist dabei die eingespeiste Generatorspannung (gelb) sowie die Kondensatorspannung (blau) zu erkennen.

Da bei dem ersten Thermindruck am Kreis eine Rechteckspannung anliegt, sollte bei in Abbildung 7 an dem Kondensator eine Dreiecksspannung, bzw. auf jedem Intervall eine Gerade zu erkennen sein:

$$\int c \, dx = cx + b \quad c, b \in \mathbb{R}.$$

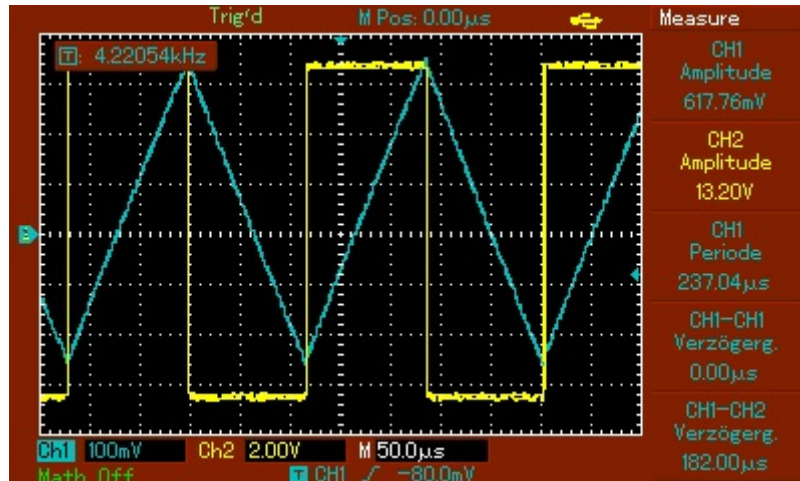


Abbildung 7: Anliegende Rechteckspannung bei dem RC-Kreis

Entsprechend der Integration einer Geraden sollte bei einspeisen einer Dreiecksspannung in den RC-Kreis an dem Kondensator ein Spannungsverlauf mit periodisch aneinander gereihten quadratischen Funktionen zu erkennen sein, was sich mit Abbildung 8 auch bestätigen lässt:

$$\int mx + b \, dx = \frac{1}{2}mx^2 + bx + c \quad m, b, c \in \mathbb{R}.$$

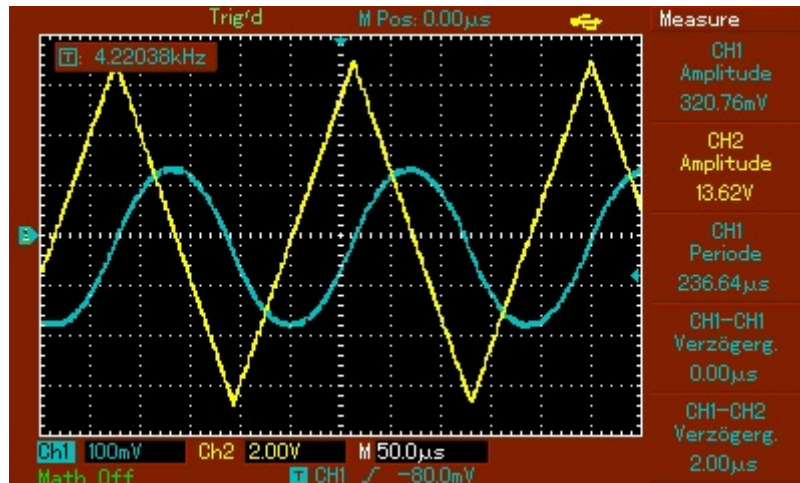


Abbildung 8: Anliegende Dreiecksspannung bei dem RC-Kreis

Bei einer anliegenden Sinusspannung sollte sich durch den RC-Kreis entsprechend der Integrationsregeln eine Cosinusspannung einstellen, was in Abbildung 9 auch beobachtbar ist:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

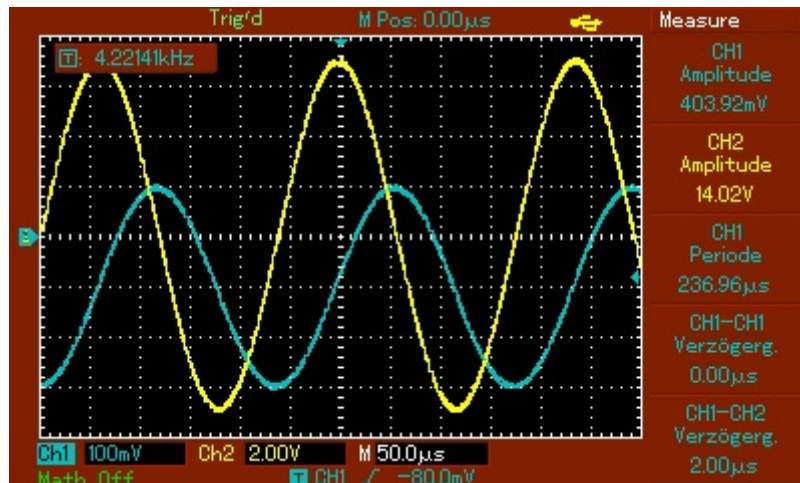


Abbildung 9: Anliegende Sinusspannung bei dem RC-Kreis

## 4 Diskussion

In diesem Versuch wurden zusammengefasst drei verschiedene Methoden betrachtet, die alle eine Bestimmung der Zeikonstante  $RC$  ermöglichen. Die verschiedenen Messergebnisse sind in der folgenden Tabelle noch einmal aufgelistet.

Tabelle 5: Bestimmte Werte für  $RC$  bei den verschiedenen Messungen

Messung	3.1	3.2	3.3	3.3 mit Korrektur
$RC \pm \Delta RC$	$0.00146 \pm 0.00003$	$0.00130 \pm 0.00002$	$0.00139 \pm 0.00013$	$0.00136 \pm 0.00010$

Wie man sieht, weichen die bestimmten Werte teilweise doch deutlich von einander ab, wobei auch die Fehlergrenzen so gering sind, dass kein Wert im Fehlerintervall eines anderen liegt.

Ein Grund für diese Abweichungen sind vermutlich die Messmethoden. Bei der Messung 3.1 wurden zum Beispiel die verwendeten Werte einfach aus dem Thermodruck abgelesen. Da dieser jedoch eine ziemlich geringe Auflösung besitzt, entstehen hier wahrscheinlich schon ziemlich hohe Abweichungen zu den eigentlich gemessenen Werten. Eine weitere

Ursache für die Abweichungen bei dieser Methode ist vermutlich, dass das sichtbare Zeitintervall für die Messung nicht groß genug ist, um die komplette Aufladung und Entladung des Kondensators darzustellen.

Bei der Messung 3.2 wurde über eine Messung der Ausgangsspannung sowie der frequenzabhängigen Amplitude die Zeitkonstante bestimmt. Vergleicht man diesen Wert mit dem im Abschnitt 3.1 bestimmten, so ist eine starke Abweichung erkenntlich. Betrachtet man die beiden Schaltpläne der Messungen, sieht man, dass vor allem der hohe Innenwiderstand des Generators bei den Messungen zu Abweichungen führen kann. Da die Amplituden mithilfe des Oszilloskopes gemessen wurden, ist eine Ungenauigkeit durch das Ablesen eher unwahrscheinlich, jedoch spielt die Genauigkeit des Oszilloskopes dafür eine Rolle bei den Entstehungen der Abweichungen.

Wie in Abschnitt 3.3 schon erwähnt, ist bei der Messung über die Phasenverschiebung ein systematischer Fehler zu vermuten, da als Ergebnisse Werte entstehen, die laut der Theorie nicht zulässig sind. Deswegen wurde nochmal ein Korrekturwert ermittelt, bei dem die nach Theorie nicht zulässigen Werte nicht beachtet wurden. Zudem ist die Entstehung der Abweichungen aufgrund eines Ablesefehlers ziemlich wahrscheinlich, da das genaue Bestimmen des Abstandes  $a$  besonders für kleine Werte ziemlich fehleranfällig ist.

In dem Polarplot in Abbildung 6 sind nochmal die bestimmten Amplituden mit den Werten aus den Messungen 3.2 und 3.3 eingetragen. Sichtbar ist, dass die Werte aus der Messung 3.2 deutlich näher an der Theoriekurve liegen als die bestimmten Amplituden mit den Werten aus Messung 3.3. Jedoch gilt das nur für die Werte oberhalb eines Phasenverschubes von  $\frac{\pi}{4}$ .

In Abschnitt 3.5 wurde der RC-Kreis noch einmal als Integrator betrachtet. Bei allen drei Spannungstypen zeigt sich, dass diese Beziehung bestätigt werden kann, da alle gemessenen Darstellungen sehr mit den theoretisch ermittelten Formen für die Spannungen übereinstimmen.