Die Dirac'sche δ-Funktion

Jonah Elias Nitschke

[A] Zuerst: Die Heaviside-Funktion : $\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > +\varepsilon \\ 0 & \text{für } t < -\varepsilon \end{cases}$

↳ Definition in der Physik meist etwas vereinfacht: $\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

⇒ Hilfreich zur Erweiterung von Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{b} f(t)\,\Theta(t-a)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\Theta(t-a)\,\Theta(b-t)\,dt$$

wegen: $\Theta(t-a) = 0 \quad \forall\ t-a<0 \iff t<a$

$\Theta(b-t) = 0 \quad \forall\ b-t<0 \iff t>b$

[B] Definition der δ-Funktion: $\delta(t) := \frac{d\Theta}{dt}$

↳ Distributionsableitung (Höme IV)

$$\Rightarrow \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

wichtige Definitionen:

1. $\delta(t-t_0) = 0 \quad \forall\ t \neq t_0$ [Peak-Charakter]
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$ [Normierung]

   bzw. $\int_a^b \delta(t-t_0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a<t_0<b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,f(t)\,dt = f(0)$
4. $\int_a^b \delta(t-t_0)\,f(t) = \begin{cases} f(t_0) & \text{für } a<t_0<b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

   ↳ wichtige Filtereigenschaft

wichtige Eigenschaften: Jonah Elias Nitschke

$\delta(t) = \delta(-t)$; $t\,\delta(t) = 0$; $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\,\delta(t)$

$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta'(t)\,dt = -f'(0)$

! $\delta(g(t))$: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(t))\,f(t)\,dt$

Nullstellen von $g(t)$

$= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\delta(t-t_i)}{|g'(t_i)|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_i)}{|g'(t_i)|}$

C Die δ-Funktion im Ortsraum

Eigenschaften

1. $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) := \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$

   $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0 \quad \forall\, \vec{r} \neq \vec{r}_0$ [Peak bei $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$]

   ↳ mathematisch gesehen ist die δ-Fkt. eines Vektors nicht eindeutig definiert:

   besser: $\delta(|\vec{r}-\vec{r}_0|) = \begin{cases} 1, & \vec{r} = \vec{r}_0 \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_0 \end{cases}$

2. $\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV = 1$

3. $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV = f(\vec{r}_0)$

in anderen Koordinatensystemen:

a) Kugelkoordinaten: $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\vartheta-\vartheta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$

b) Zylinderkoordinaten: $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,\delta(z-z_0)$

c) Polarkoordinaten: $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$

Jonah Elias Nitschke

D Rechenbeispiele:

1. $\int_{-2}^{+5} (x^2 - 5x + 6)\ \delta(x-3) = 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 0$

2. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - f(a))\ \delta(x-a)\ dx = 0$

   $\hookrightarrow$ $\alpha < a < \beta$: $\ldots = f(a) - f(a) = 0$

   $a \notin [\alpha, \beta]$: $\ldots = 0$ [laut Definition]

3. $\int_{0}^{\infty} x^2\ \delta(\underbrace{x^2 - 3x + 2}_{g(x)})\ dx = \frac{1}{1} + \frac{4}{1} = 5$

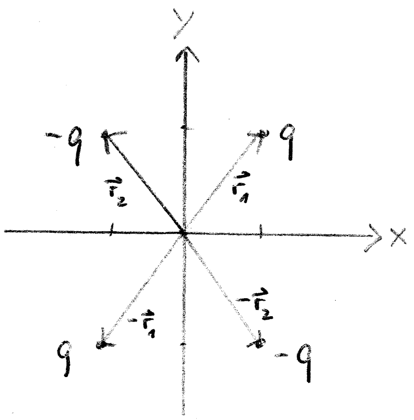
   NS von $g(x)$: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

   $g'(x) = 2x - 3 \quad \rightarrow \quad g'(1) = -1$; $g'(2) = 1$

4. $\int_{0}^{+\infty} \ln(x)\ \delta(x-a) = \begin{cases} -\frac{1}{a} & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$

E Anwendung im Raum:

Bsp.: Darstellung der Ladungsdichte diskreter Verteilungen:



$$\Rightarrow \rho(\vec{r}) = q\cdot(\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) + \delta(\vec{r}+\vec{r}_1)) - q\cdot(\delta(\vec{r}-\vec{r}_2) + \delta(\vec{r}+\vec{r}_2))$$