

Kettenschaltungen mit LC-Gliedern

1. Problemstellung

Kettenschaltungen aus identischen Gliedern, von denen zwei Beispiele in Abb.1 dargestellt sind, kann man unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachten:

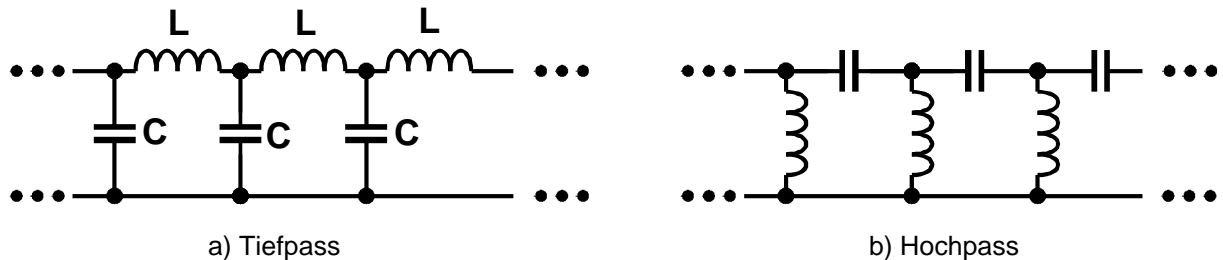


Abb. 1: Verschiedene Typen von Kettenschaltungen

a) Man erkennt unmittelbar, dass eine Schaltung nach Abb.1a einen Tiefpass und eine solche nach Abb.1b einen Hochpass darstellt. Gibt man also auf den Eingang der links abgebildeten Kette eine Wechselspannung variabler Frequenz, so wird man feststellen, dass ihre Amplitude am Ausgang oberhalb einer bestimmten Frequenz verschwindet. Für die Schaltung nach Abb.1b gilt das entsprechende, wenn die Frequenz gegen null geht. Man benutzt daher die oben abgebildeten Schaltungen in der Elektrotechnik, um Frequenzgemische voneinander zu trennen.

b) Andererseits kann man Schaltungen nach Abb.1 auch als gekoppelte Schwingungssysteme betrachten (siehe V355). Die Kopplung entsteht in Abb.1a dadurch, dass benachbarte Schwingkreise gemeinsame Kapazitäten besitzen. Man kann zeigen, dass ein solches System eine Vielzahl von Eigenschwingungen besitzt, obwohl alle Kettenglieder aus gleich dimensionierten Bauelementen bestehen.

c) Schließlich kann man eine Kettenschaltung auch als eine Transportvorrichtung für elektrische Energie auffassen: Verfeinert man die LC-Glieder immer weiter, dann gelangt man im Grenzübergang: Anzahl der Glieder $\rightarrow \infty$ bei endlicher Kettenlänge zum Ersatzschaltbild für eine (verlustlose¹) elektrische Leitung. Von Interesse ist hier die Frage, unter welchen Bedingungen elektrische Energie von einem Kettenende zum andern transportiert werden kann. Es zeigt sich, - dieses Ergebnis sei hier schon vorweggenommen - dass ein Energietransport nur in einem (oder mehreren) endlichen Frequenzbereich(en) möglich ist. Weiterhin ist die Frage zu klären, mit welcher Geschwindigkeit sich ein Signal durch die Kette (oder durch die Leitung) hindurch fortpflanzt. Auch hier erhält man das Ergebnis, dass diese Größe frequenzabhängig ist. Man bezeichnet diese Erscheinung allgemein als **Dispersion**. Gebräuchlich ist dieser Begriff auch in der Wellenoptik (siehe z.B. V402).

¹ Für eine verlustbehaftete Leitung müssten in Reihe mit den Induktivitäten ohmsche Widerstände in die Schaltung eingefügt werden.

- d) Es können leicht Analogien gesehen werden zwischen dem Verhalten einer LC-Kette und einem mechanischen Schwingungssystem, welches gemäß Abb.2 aus einer Reihe von Massepunkten M, die mit elastischen Federn verbunden sind, besteht. Es wird gezeigt, dass beide Schwingungssysteme durch denselben Bewegungsgleichungstypus beschrieben werden können. Die mechanischen Schwingerketten stellen ein eindimensionales Festkörpermodell dar, aus dem einerseits durch einen Grenzübergang die Theorie der elastischen Kontinua folgt und welches andererseits eine Verallgemeinerung zu zwei- und dreidimensionalen Systemen zulässt, sodass damit auch das Schwingungsverhalten eines Kristallgitters dargestellt werden kann.

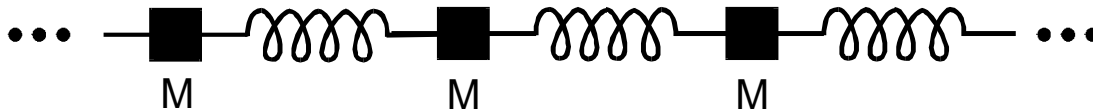


Abb. 2: Mechanisches Schwingungssystem bestehend aus n gleichen Schwingern

Im vorliegenden Experiment sollen nun die Ausgangsspannungen einer LC-Kette nach Abb.1a und die Phasendrehung pro Kettenglied in Abhängigkeit von der Frequenz (Durchlasskurve und Dispersionsverhalten) gemessen werden. Weiterhin stehen die Untersuchung der Eigenschwingungen sowie die Ausbreitung von Signalen auf dem Programm.

2. Ableitung und Lösung der Schwingungsgleichung für eine LC-Kette im stationären Fall

Die Schwingungsgleichung für eine LC-Kettenschaltung gemäß Abb.1a lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln (siehe z.B. V302) ableiten. Aus Abb.3 folgt am Knotenpunkt n für die ankommenden und abfließenden Ströme

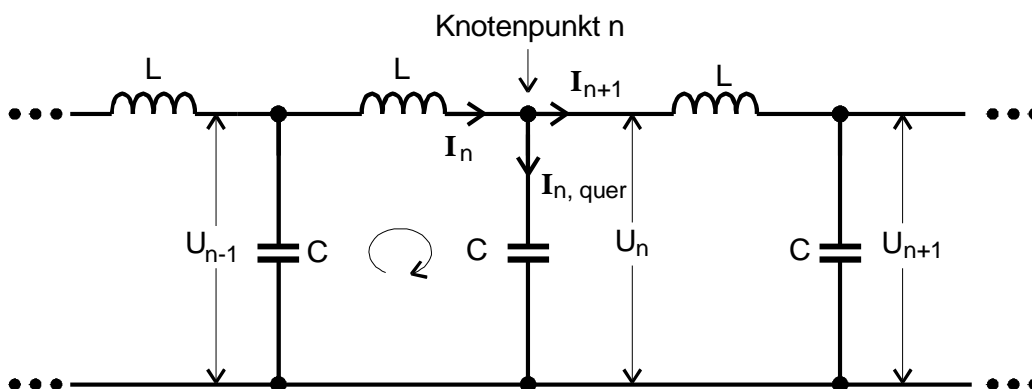


Abb.3: Ströme und Spannungen in einer LC-Kette

$$I_n - I_{n+1} - I_{n, \text{quer}} = 0 \quad .$$

Im eingeschwungenen Zustand ist

$$I_n = \frac{U_n - U_{n-1}}{j\omega L}$$

und

$$I_{n, \text{quer}} = U_n j\omega C \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{U_n - U_{n-1}}{j\omega L} - \frac{U_{n+1} - U_n}{j\omega L} - jU_n \omega C = 0$$

oder

$$(1) \quad -\omega^2 C U_n + \frac{1}{L}(-U_{n-1} + 2U_n - U_{n+1}) = 0 \quad .$$

Der Lösungsansatz für die Gleichung (1) hat die Gestalt

$$(2) \quad U_n(t) = U_0 \mathbf{e}^{j\omega t} \mathbf{e}^{-jn\theta} \quad .$$

Es wird also eine monochromatische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω angenommen, die beim Durchgang durch ein Kettenglied eine Phasenverschiebung von θ erleidet. Es folgt nach dem Einsetzen der Lösung in (1)

$$-\omega^2 L C \mathbf{e}^{-jn\theta} + \left(-\mathbf{e}^{-j(n-1)\theta} + 2\mathbf{e}^{-jn\theta} - \mathbf{e}^{-j(n+1)\theta} \right) = 0$$

oder

$$-\omega^2 L C + 2 - (\mathbf{e}^{j\theta} + \mathbf{e}^{-j\theta}) = 0 \quad ,$$

woraus sich schließlich ergibt

$$(3) \quad \omega^2 = \frac{2}{LC} (1 - \cos\theta) \quad .$$

Diese Gleichung bezeichnet man als **Dispersionsrelation**. Sie stellt die Phasenänderung pro Kettenglied in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz dar. Man erkennt sofort an (3), dass ω nur für ein endliches Intervall definiert ist. Es können sich daher auf einer LC-Kette gemäß Abb.1a nur Schwingungen mit den Kreisfrequenzen

$$0 \leq \omega < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}$$

ausbilden.

Man kann nun die Schaltung nach Abb.1a etwas verallgemeinern, indem man in je zwei benachbarte Kettenglieder zwei unterschiedliche Kondensatoren C_1 und C_2 einbaut so, wie es in Abb.4 dargestellt ist.

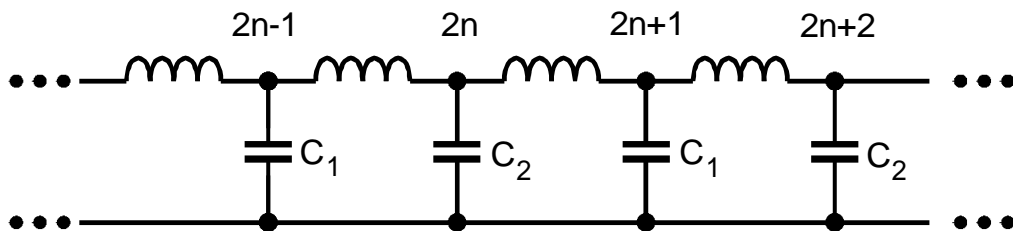


Abb.4: LC-Kette mit alternierenden Kettengliedern

Gleichung (1) muss dann abgeändert werden in

$$(4) \quad -\omega^2 C_1 U_{2n+1} + \frac{1}{L} \{-U_{2n} + 2U_{2n+1} - U_{2n+2}\} = 0$$

und

$$(5) \quad -\omega^2 C_2 U_{2n} + \frac{1}{L} \{-U_{2n-1} + 2U_{2n} - U_{2n+1}\} = 0 \quad .$$

Als Lösung werden analog zu (2) zwei laufende Wellen mit unterschiedlicher Amplitude für die jeweils geraden und ungeraden Kettenglieder angesetzt

$$U_{2n+1} = U_{0_1} e^{j(2n+1)\theta} e^{j\omega t}$$

und

$$U_{2n} = U_{0_2} e^{j2n\theta} e^{j\omega t} .$$

Geht man damit in die Schwingungsgleichungen (4) und (5) ein, dann folgt aus (4)

$$(6) \quad -\omega^2 C_1 U_{0_1} e^{j(2n+1)\theta} + \frac{1}{L} \left\{ -U_{0_2} e^{j2n\theta} + U_{0_1} e^{j(2n+1)\theta} - U_{0_2} e^{j(2n+2)\theta} \right\} = 0$$

und aus (5)

$$(7) \quad -\omega^2 C_1 U_{0_2} e^{j2n\theta} + \frac{1}{L} \left\{ -U_{0_1} e^{j(2n-1)\theta} + U_{0_2} e^{j2n\theta} - U_{0_1} e^{j(2n+1)\theta} \right\} = 0 .$$

Man dividiert nun (6) durch $e^{j(2n+1)\theta}$ sowie (7) durch $e^{j2n\theta}$ und erhält

$$(8) \quad U_{0_1} \left\{ -\omega^2 C_1 + \frac{2}{L} \right\} - U_{0_2} \frac{1}{L} \{ e^{-j\theta} + e^{j\theta} \} = 0$$

sowie

$$(9) \quad -U_{0_1} \frac{1}{L} \{ e^{-j\theta} + e^{j\theta} \} + U_{0_2} \left\{ -\omega^2 C_2 + \frac{2}{L} \right\} = 0 .$$

(8) und (9) stellen ein Gleichungssystem zur Bestimmung der noch unbekannten Amplituden U_{0_2} und U_{0_1} dar. Man bekommt nur dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese Forderung hat unter Berücksichtigung der Beziehung

$$2\cos\theta = e^{j\theta} + e^{-j\theta}$$

die Gestalt

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 C_1 + \frac{2}{L} & -\frac{2}{L} \cos\theta \\ -\frac{2}{L} \cos\theta & -\omega^2 C_2 + \frac{2}{L} \end{vmatrix} = 0 .$$

Damit hat man bereits die gesuchte Dispersionsrelation für die verallgemeinerte Kette gefunden. Sie lautet

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{2}{L} \left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right\} + \frac{4}{L^2 C_1 C_2} (1 - \cos^2\theta) = 0 .$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung für ω^2 ergibt

$$(10) \quad \omega_{1/2}^2 = \frac{1}{L} \left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right\} \pm \frac{1}{L} \sqrt{\left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right\}^2 - \frac{4 \sin^2\theta}{C_1 C_2}} .$$

Die Dispersionskurve hat hier eine kompliziertere Gestalt: Wegen des alternierenden Vorzeichens in (10) gibt es zwei Kurvenäste. Es werde zunächst die Lösung mit dem negativen Vorzeichen diskutiert. Hier ist für $\theta = 0$ auch $\omega = 0$. Für kleine C ($\sin\theta \approx \theta$) gilt die Näherung

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{2}{L(C_1 + C_2)}} \theta \quad .$$

Die Dispersionskurve beginnt also im Ursprung und wächst zunächst proportional zu θ . Sie erreicht ihr Maximum $\sqrt{2/LC_1}$ an der Stelle $\theta = \pi/2$. Bei dieser Frequenz ist die Spannung an zwei benachbarten Kondensatoren **gleicher** Kapazität in der Phase jeweils um π verschoben.

Im zweiten Kurvenast (positives Vorzeichen in (10)) bekommt man bei $\theta = 0$ für ω_1 den Wert

$$\omega_1(0) \approx \sqrt{\frac{1}{L} \frac{2(C_1 + C_2)}{C_1 C_2}} \quad .$$

Mit wachsendem θ nimmt ω_1 ab und zwar zunächst gemäß

$$\omega_1 \approx \omega_1(0) \left\{ 1 - \theta^2 \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} \right\} \quad .$$

Bei $\theta = \pi/2$ wird der Minimalwert der Kreisfrequenz erreicht; er hat den Betrag

$$\omega_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{LC_2}} \quad .$$

Da nach Voraussetzung $C_1 \neq C_2$ ist, fallen die Grenzfrequenzen der beiden Kurvenäste auseinander. Es existiert also ein endlicher Frequenzbereich, in welchem in der Kettenschaltung nach Abb.4 keine Schwingungen angeregt werden können. Ihre Dispersionskurve hat somit die in Abb.5 wiedergegebene Gestalt.

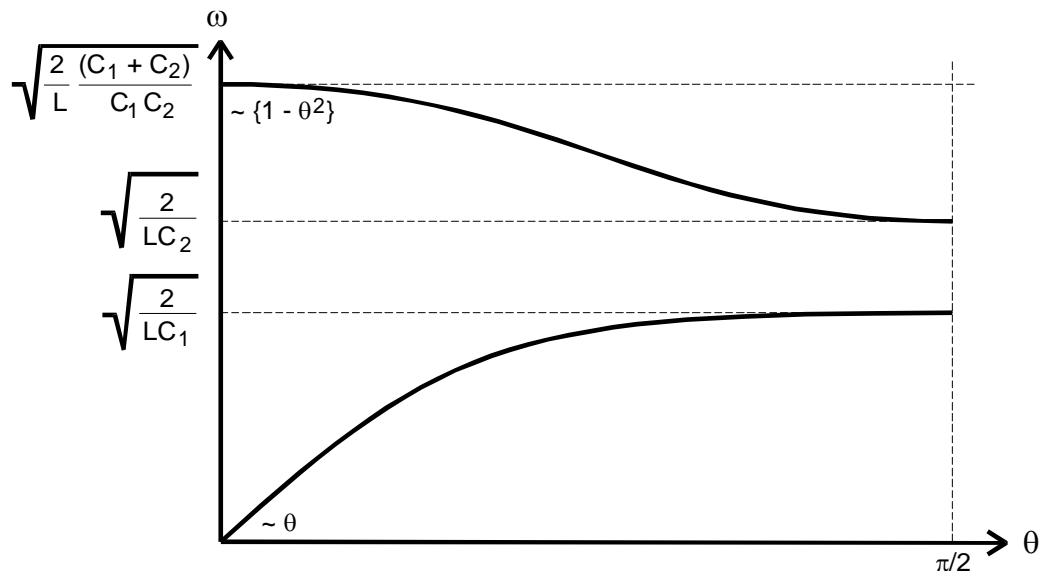


Abb.5: Dispersionskurve für eine alternierende LC-Kette

3. Analogien zur Mechanik

Das mechanische Analogon zu einer als Tiefpass geschalteten LC-Kette besteht aus einer Masse-Feder-Anordnung, wie sie in Abb.2 dargestellt ist. Es werde angenommen, dass für die Federn das Hookesche Gesetz gilt (Federkonstante η). Dann ergibt sich als

Bewegungsgleichung für das System, wenn mit $u_n(t)$ die Auslenkung der n -ten Masse aus ihrer Gleichgewichtslage bezeichnet wird und nur Kräfte zwischen nächsten Nachbarn berücksichtigt werden

$$(11) \quad M \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \eta \{u_{n-1}(t) - u_n(t)\} + \eta \{u_{n+1}(t) - u_n(t)\} .$$

Setzt man für $u_n(t)$ die Zeitabhängigkeit

$$u_n(t) = u_{n_0} e^{j\omega t}$$

an, so folgt aus (11)

$$(12) \quad -\omega^2 M u_n + \eta (-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}) = 0 .$$

Man erkennt an (1) und (12), dass sowohl die elektrische als auch die mechanische Schwingung durch denselben Bewegungsgleichungstypus beschrieben werden. Dabei entsprechen sich Masse und Kapazität sowie reziproke Induktivität und Federkonstante. Das mechanische System besitzt also ebenfalls eine der Gleichung (3) entsprechende Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \frac{2}{M/\eta} (1 - \cos \theta) \quad \text{mit der Grenzfrequenz} \quad \omega_G = \frac{2}{\sqrt{M/\eta}} .$$

Die Gleichung (12) hat eine wichtige Bedeutung für die Kristallphysik. Sie beschreibt die Ausbreitung einer elastischen Welle durch ein Kristallgitter, wo die Netzebenen (siehe z.B. V602, Kap.4) als Ganzes entweder parallel oder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt werden so, wie es in Abb.6 angedeutet ist.

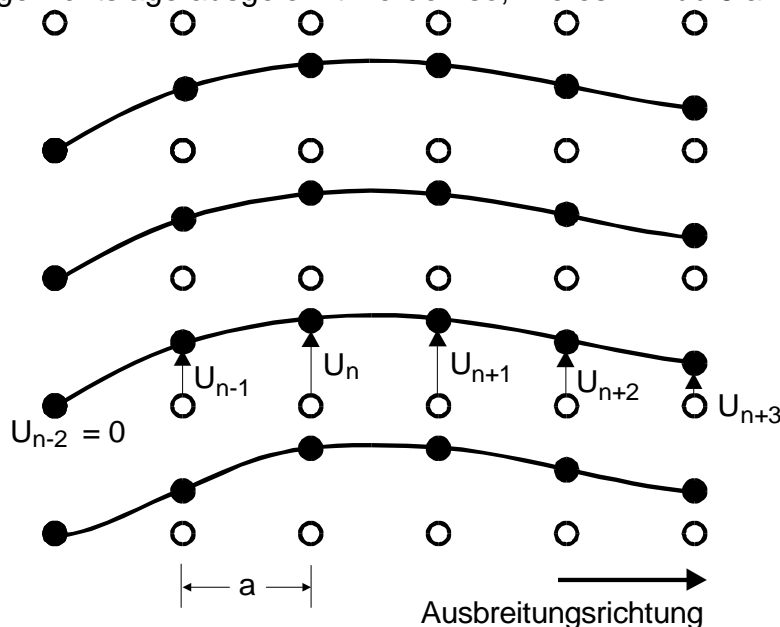


Abb. 6: Ausbreitung einer elastischen Schwingung in einem Kristallgitter

Auch zur Kettenschaltung mit zwei unterschiedlichen Kapazitäten (Abb.4) gibt es ein mechanisches Analogon. Dieses besteht aus einer elastischen Kette, in die alternierend zwei ungleiche Massen $m \neq M$ eingebaut sind. Die Bewegungsgleichungen lauten jetzt

$$-\omega^2 M u_{2n+1} + \eta (-u_{2n} + 2u_{2n+1} - u_{2n+2}) = 0$$

und

$$-\omega^2 m u_{2n} + \eta(-u_{2n-1} + 2u_{2n} - u_{2n+1}) = 0 \quad .$$

Mit einem Lösungsansatz, der analog zu den Überlegungen in Kap.2 gemacht wurde, ergeben sich für die Schwingungsamplituden u_{0_M} und u_{0_m} der beiden Massen die Bestimmungsgleichungen

$$(13) \quad -\omega^2 M u_{0_M} = \eta u_{0_m} \{e^{j\theta} + e^{-j\theta}\} - 2\eta u_{0_M}$$

und

$$(14) \quad -\omega^2 m u_{0_m} = \eta u_{0_M} \{e^{j\theta} + e^{-j\theta}\} - 2\eta u_{0_m} \quad .$$

Daraus folgt analog zu (10) die Dispersionsrelation

$$\omega_{\frac{1}{2}}^2 = \eta \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right\} \pm \eta \sqrt{\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right\}^2 - \frac{4 \sin^2 \theta}{m M}} \quad .$$

Man erhält auch hier zwei "Äste" in der Dispersionskurve (Abb.5), die durch eine Frequenzlücke, in der keine ungedämpften Schwingungen angeregt werden können, getrennt sind. Diese werden in der Kristallphysik als **akustischer** (unterer) und **optischer** (oberer) Zweig bezeichnet. Im optischen Zweig kann für $\theta = 0$ $\omega^2 \neq 0$ sein, was im akustischen nicht möglich ist. In diesen Falle folgt aus (13) und (14)

$$u_{0_M} = -\frac{m}{M} u_{0_m} \quad ;$$

das bedeutet, dass die Atome benachbarter Netzebenen hier gegeneinander schwingen, wobei ihr gemeinsamer Schwerpunkt jedoch in Ruhe bleibt. Eine solche Schwingung kann durch das elektromagnetische Feld einer Lichtwelle angeregt werden, wenn die benachbarten Gitterplätze mit Massen unterschiedlicher Ladung (z.B. Kationen und Anionen in einem Ionenkristall) besetzt sind. Aus diesem Grund bezeichnet man den oberen Ast in der Dispersionskurve als den optischen.

Für $\omega = 0$ folgt aus (13) und (14)

$$u_{0_M} = u_{0_m} \quad ;$$

Sämtliche Atome bewegen sich daher mit gleicher Amplitude, wie es bei akustischen Schwingungen mit großer Wellenlänge üblich ist. Damit findet die Bezeichnung "akustischer Ast" ihre Begründung. In Abb.7 sind je eine transversale² Schwingung im optischen und im akustischen Zweig dargestellt.

² Auslenkung u senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

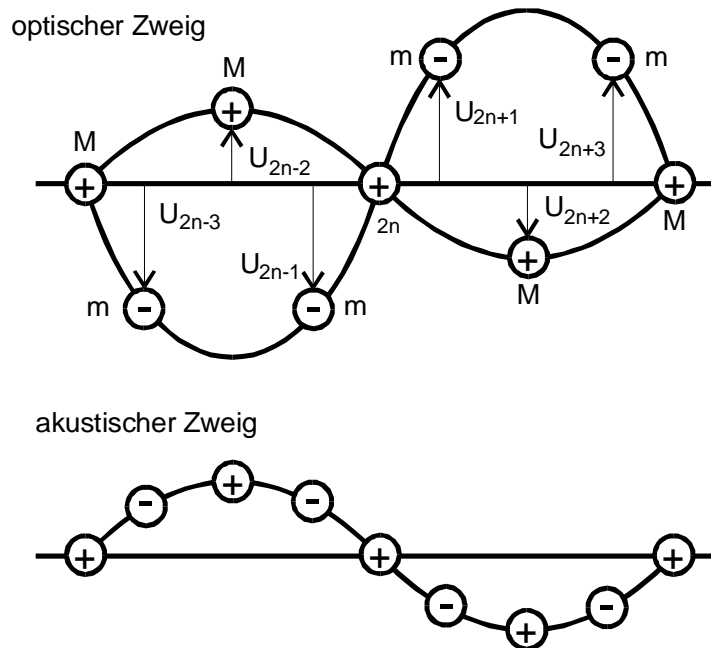


Abb.7: Eine transversal-optische und eine transversal-akustische Schwingung in einem Ionenkristall

4. Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen in einer Kettenschaltung

Als Lösungen für die Bewegungsgleichungen in LC-Ketten wurden laufende Wellen der Form

$$(2) \quad U(t, n) = U_0 e^{j(\omega t - n\theta)}$$

gefunden. Hierin bedeuten n die Nummer des Kettengliedes und θ die Phasenänderung der Welle beim Übergang vom n -ten auf das $(n+1)$ -te Glied. Wenn nun eine bestimmte Phase der Welle in der Zeit Δt um Δn Kettenglieder weiterwandert, dann beträgt ihre Phasengeschwindigkeit

$$(15) \quad v_{Ph} = \frac{\Delta n}{\Delta t} .$$

Gemäß (2) hat die Welle zum Zeitpunkt t die Phase

$$(16) \quad \Phi = \omega t - n\theta .$$

Wenn sich diese mit der Geschwindigkeit $\Delta n/\Delta t$ fortpflanzt, hat sie zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ im Kettenglied $n+\Delta n$ ebenfalls die Phase Φ . Es gilt also

$$(17) \quad \Phi = \omega(t + \Delta t) - (n + \Delta n)\theta .$$

Aus (15), (16) und (17) folgt dann für die **Phasengeschwindigkeit** einer Welle in einer Kettenschaltung

$$(18) \quad v_{Ph} = \frac{\omega}{\theta} .$$

Gleichung (18) beschreibt die Fortpflanzung einer harmonischen Welle, deren Zeitabhängigkeit für **alle** t durch $\sin \omega t$ mit $\omega = \text{const}$ gegeben ist. Eine solche Welle ist in Raum und Zeit unbegrenzt; sie kann daher für eine Signalübermittlung nicht verwendet werden. Hierfür ist eine sogenannte Wellengruppe notwendig, das ist eine Welle, die

einen Anfang und ein Ende besitzt. Ein Beispiel dafür ist in Abb.8 wiedergegeben. Nach dem Fourierschen Theorem (siehe z.B. V351) kann eine solche Welle nicht monochromatisch sein, sondern sie muss ein Frequenzspektrum besitzen. Solange die einzelnen Frequenzkomponenten sich mit einer einheitlichen Phasengeschwindigkeit fortpflanzen, wird sich auch die Wellengruppe mit v_{Ph} ausbreiten. Dieser Fall ist z.B. realisiert bei einer elektromagnetischen Welle im Vakuum. Bei der LC-Kette besteht jedoch ein **nicht-linearer** Zusammenhang zwischen θ und ω (siehe Gl. (3) und (10)),

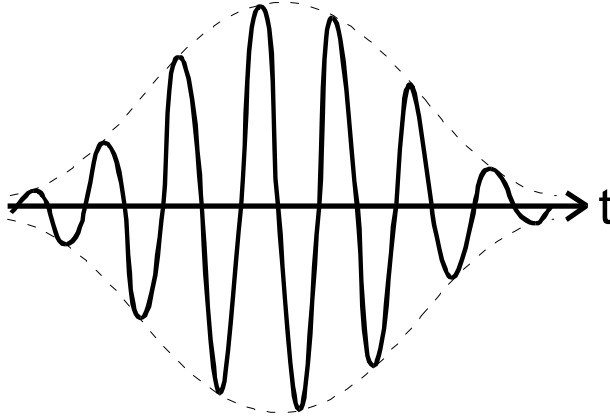


Abb. 8: Darstellung einer Wellengruppe

sodass v_{Ph} frequenzabhängig ist. Diesen Tatbestand bezeichnet man, wie schon zuvor erwähnt, als Dispersion. In einem dispersiven Medium hat demnach jede Fourier-Komponente ihre eigene Ausbreitungsgeschwindigkeit, was zur Folge hat, dass eine Wellengruppe im Laufe der Zeit ihre Gestalt verändern muss. Die Komponenten mit großer v_{Ph} eilen voraus, während diejenigen mit kleiner v_{Ph} zurückbleiben, sodass sich eine Wellengruppe in ihrer räumlichen und

zeitlichen Ausdehnung vergrößert. Von Interesse ist nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Maximums der Wellengruppe, welche man als **Gruppengeschwindigkeit** v_{gr} bezeichnet. Sie entspricht der Geschwindigkeit, mit der man in einem Medium ein Signal weiterleiten kann. Der Einfachheit halber sollen bei der Berechnung von v_{gr} zunächst nur zwei Frequenzen ω und ω' mit $|\omega - \omega'| \ll \omega$ betrachtet werden. Die Amplituden dieser beiden Fourier-Komponenten seien gleich. Es gelte also

$$A(t) = A_0 \{ \cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega' t - \theta') \} .$$

Wegen der Beziehung

$$(19) \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$$

folgt

$$A(t) = 2 A_0 \cos \frac{1}{2} \{ (\omega + \omega') t - (\theta + \theta') \} \cdot \cos \frac{1}{2} \{ (\omega - \omega') t - (\theta - \theta') \} .$$

Da $\omega' \approx \omega$ und $\theta' \approx \theta$ sind, werde

$$\frac{1}{2}(\omega + \omega') \approx \omega \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\theta + \theta') \approx \theta$$

gesetzt. Damit ist

$$A(t) = 2 A_0 \cos(\omega t - \theta) \cdot \cos \frac{1}{2} \{ (\omega - \omega') t - (\theta - \theta') \} .$$

Diese Gleichung beschreibt eine Welle mit der Zeitabhängigkeit ωt , deren Amplitude mit

$$(20) \quad \cos \frac{1}{2} \{ (\omega - \omega') t - (\theta - \theta') \}$$

moduliert ist. Ihre Zeitabhängigkeit ist in Abb.9 dargestellt.

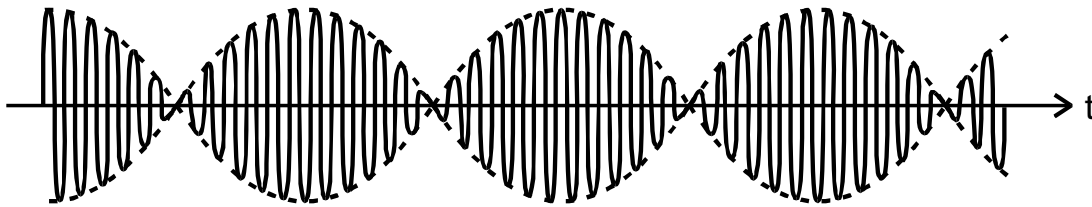


Abb. 9: Erzeugung einer Schwebung aus zwei Sinusschwingungen mit wenig verschiedener Frequenz

Man bezeichnet den in Abb.9 dargestellten Vorgang als **Schwebung** (siehe z.B. V355,Kap.2). Das Schwebungsmaximum, das dem Wellengruppenmaximum in Abb.8 entspricht, pflanzt sich gemäß (18) mit der Geschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{\omega - \omega'}{\theta - \theta'}$$

fort. Führt man nun den Grenzübergang $\omega \rightarrow \omega'$ und $\theta \rightarrow \theta'$ durch, dann ergibt sich die gesuchte Beziehung für die Gruppengeschwindigkeit zu

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\theta} \quad .$$

Im speziellen Fall der LC-Kette nach Abb.1a kann man jetzt die Frequenzabhängigkeit von v_{Ph} und v_{gr} mit Hilfe der Dispersionsrelation (3) berechnen. Es ergibt sich für

$$(21) \quad v_{Ph} = \frac{\omega}{\theta} = \frac{\omega}{\arccos\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC\right)}$$

und für

$$(22) \quad v_{gr} = \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}LC\omega^2} \quad .$$

Man erkennt, dass für $\omega \rightarrow 0$ beide Geschwindigkeiten sich dem Grenzwert

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} v_{Ph}(\omega) \stackrel{3}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} v_{gr}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

nähern. Im Bereich kleiner Frequenzen, das heißt, wenn $\omega^2 \ll 1/LC$ ist, verschwindet die Dispersion. Bei $\omega_G = 2/\sqrt{LC}$, der Grenzfrequenz der LC-Kette, erreicht v_{gr} den Wert null. Ein Signal, das mit $\omega \geq \omega_G$ gesendet wird, kann daher von der LC-Kette nicht mehr weitergeleitet werden. v_{Ph} bleibt bei $\omega = \omega_G$ jedoch endlich. Sie erreicht hier ihren Minimalwert

$$v_{Ph_{min}} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad .$$

5. Der Widerstand einer (unendlich langen) LC-Kette

In der Schaltungstechnik ist auch der Widerstand \mathfrak{Z} , der an den Eingangsklemmen einer LC-Kette gemessen wird, von großem Interesse. Unter dem Eingangswiderstand \mathfrak{Z} wird der Quotient aus der Spannung u_0 , die am Eingangskondensator mit der Kapazität

³ Hierzu ersetze man in (3) $\cos\theta$ durch $1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC$

$C/2$ liegt, und dem Strom i_0 , der in die Schaltung hineinfließt, verstanden (siehe Abb.10). Für den Verzweigungspunkt P_0 liefert die Kirchhoffsche Knotenregel die Gleichung

$$(23) \quad i_0 - j\omega \frac{C}{2} u_0 + \frac{u_1 - u_0}{j\omega L} = 0 \quad .$$

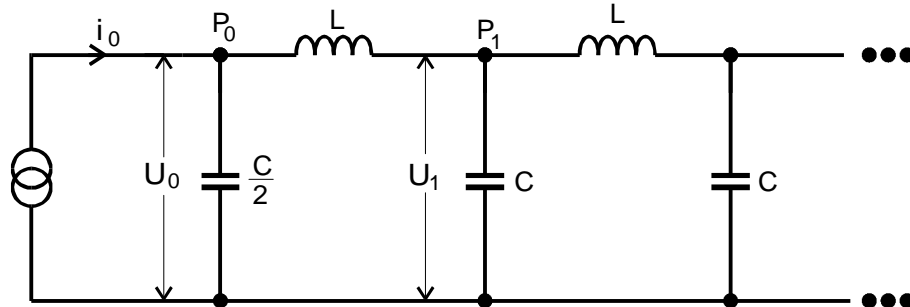


Abb.10: Skizze zur Berechnung der Eingangsimpedanz einer LC-Kette

Für die Spannung am Kettenglied n wurde der Lösungsansatz

$$(2) \quad u_n(\theta) = u_0 e^{-jn\theta} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

gemacht. Man setzt nun (2) für $n = 1$ in (23) ein und erhält nach Multiplikation mit $j\omega L$

$$j\omega L i_0 + \omega^2 \frac{1}{2} LC u_0 + u_0 \{e^{-j\theta} - 1\} = 0 \quad .$$

Hier wird jetzt ω^2 mit Hilfe der Dispersionsrelation (3) eliminiert und $e^{-j\theta}$ durch $\cos\theta - j\sin\theta$ ersetzt; es folgt

$$\mathfrak{Z} = \frac{u_0}{i_0} = \frac{\omega L}{\sin\theta} \quad .$$

Man ersetzt nun noch $\sin\theta$ mit Hilfe von (3) durch die Kreisfrequenz ω und bekommt schließlich das Resultat

$$(24) \quad \mathfrak{Z}(\omega) = Z(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\omega^2 LC}} \quad .$$

Es zeigt sich also, dass der Eingangswiderstand einer **unendlich langen** Kette rein **reell** ist, obwohl diese ausschließlich aus Bauteilen mit rein imaginären Impedanzen aufgebaut ist. Das bedeutet einmal, dass Strom und Spannung an jedem Ort in der Kette in Phase sind und zum andern, dass elektrische Energie nur in sie hineinfließen

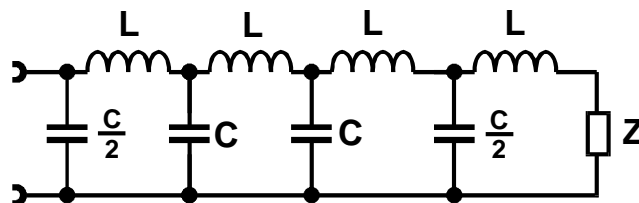


Abb.11: Simulation einer unendlich langen Kette aus endlich vielen Gliedern mit Hilfe eines geeigneten Abschlusswiderstandes

und nicht wieder (etwa durch Reflexion) zurückkommen kann. Man erkennt auch, wie man mit Hilfe einer Kette aus endlich vielen Gliedern eine unendliche Kette simulieren

kann: Die endliche Kette muss mit einem ohmschen Widerstand Z , welcher sich gemäß (24) errechnet, abgeschlossen werden so, wie es in Abb.11 dargestellt ist. An den Eingangsklemmen der Schaltung nach Abb.11 wird jedesmal die Impedanz Z gemessen unabhängig von der Anzahl der Kettenglieder. Man bezeichnet die Größe Z als **Wellenwiderstand** der Kettenschaltung oder auch als charakteristische Impedanz. Man liest aus (24) ab, dass sie für Frequenzen, die weit unterhalb der Grenzfrequenz liegen, praktisch den konstanten Wert $\sqrt{L/C}$ hat. Erst bei dichter Annäherung an ω_G steigt sie stark an und wächst bei ω_G über alle Grenzen (siehe Abb.12).

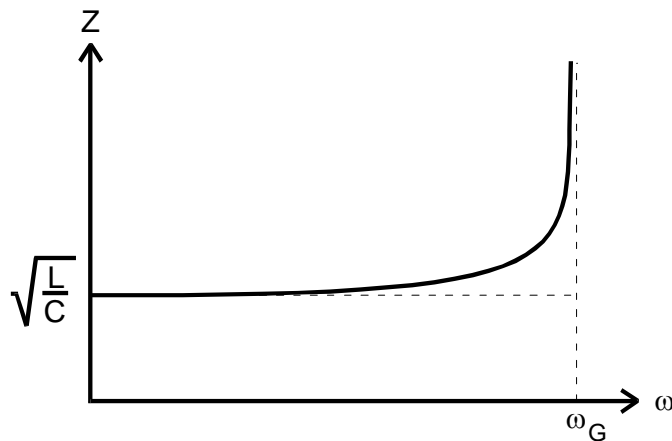


Abb.12: Frequenzabhängigkeit der charakteristischen Impedanz einer LC-Kette

6. Eigenschaften einer endlich langen Kette

Das Verhalten einer endlich langen LC-Kette kann man verstehen, wenn man annimmt, dass am Kettenende eine Reflexion der ankommenden Welle auftritt, wobei der Reflexionsfaktor stark von der Gestalt des Kettenendes abhängt. Die hin- und die rücklaufende Welle überlagern sich, sodass sich längs der Kette stehende Wellen ausbilden können. Es soll zunächst der Reflexionsfaktor, das heißt, der Quotient aus der Amplitude der hin- und der rücklaufenden Welle errechnet werden und zwar unter der Bedingung, dass am Kettenende ein komplexer Widerstand \mathfrak{r} anliegt (Abb.13). Für die am Abschlusswiderstand auftretende Spannung \mathfrak{u}_R gilt

$$(25) \quad \mathfrak{u}_R = \mathfrak{u}_E + \mathfrak{u}_{\text{ref}} ,$$

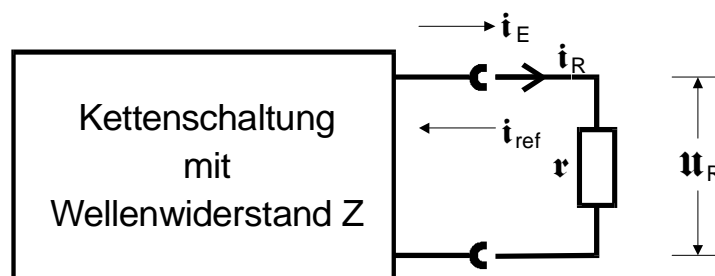


Abb. 13: Abschluss einer endlich langen LC-Kette mit einem (komplexen) Widerstand \mathfrak{r}

hierin bedeuten \mathfrak{u}_E die Amplitude der einfallenden und $\mathfrak{u}_{\text{ref}}$ die Amplitude der reflektierten Welle. Entsprechendes gilt für den durch \mathfrak{r} fließenden Strom i_R

$$(26) \quad i_R = i_E + i_{\text{ref}} ,$$

Weiterhin ist

$$(27) \quad \mathbf{u}_R = \mathbf{i}_R \mathbf{r} \quad .$$

Die Kettenschaltung möge nun den Wellenwiderstand Z besitzen, dann ist

$$(28) \quad \mathbf{i}_E = \frac{\mathbf{u}_E}{Z}$$

und

$$(29) \quad \mathbf{i}_{\text{ref}} = - \frac{\mathbf{u}_{\text{ref}}}{Z} \quad 4.$$

Man eliminiert mit Hilfe der Gleichungen (25) bis (29) die Ströme und bekommt für das gesuchte Spannungsverhältnis den Ausdruck

$$(30) \quad \frac{\mathbf{u}_{\text{ref}}}{\mathbf{u}_E} = \frac{\mathbf{r} - Z}{\mathbf{r} + Z} \quad .$$

Mit Hilfe von (30) sollen nun einige Spezialfälle diskutiert werden:

a) $\mathbf{r} = \infty$ (Die Kette besitzt ein offenes Ende)

Es folgt aus (30)

$$\mathbf{u}_{\text{ref}} = \mathbf{u}_E \quad ,$$

das heißt, die ankommende Spannungswelle wird am Kettenende ohne Phasensprung vollständig reflektiert.

b) $\mathbf{r} = 0$ (Die Kette ist kurzgeschlossen)

Es folgt aus (30)

$$\mathbf{u}_{\text{ref}} = - \mathbf{u}_E \quad .$$

Die ankommende Spannungswelle wird am Ende mit einem Phasensprung von π vollständig reflektiert.

c) $\mathbf{r} = Z$ (Abschluss mit dem Wellenwiderstand)

Es folgt aus (30)

$$\mathbf{u}_{\text{ref}} = 0 \quad .$$

Es tritt, wie schon zuvor erwähnt, keine reflektierte Welle auf. Die elektrische Energie fließt kontinuierlich vom Eingang zum Abschlusswiderstand.

d) In allen anderen Fällen tritt eine Teilreflexion am Abschlusswiderstand auf. Ist \mathbf{r} nicht reell, erfolgt zusätzlich eine Phasendrehung zwischen den beiden Wellen.

In den Fällen $\mathbf{r} = 0$ und $\mathbf{r} = \infty$ erfolgt also Totalreflexion am Ende der LC-Kette. Das bedeutet: Man beobachtet eine hinlaufende Welle beschrieben durch

$$A_{\text{hin}} = A_0 \cos(\omega t - n\theta)$$

und eine rücklaufende Welle

$$(31) \quad A_{\text{rü}} = \pm A_0 \cos(\omega t + n\theta) \quad .$$

⁴ Das Minuszeichen in (29) rührt daher, dass \mathbf{i}_{ref} entgegen der Zählrichtung verläuft.

Das Vorzeichen in (31) ist positiv für $\varphi = \infty$ und negativ für $\varphi = 0$. Die Superposition beider Wellen ergibt unter Verwendung von (19)

$$(32) \quad A_{\text{hin}} + A_{\text{r\ddot{u}}} = 2A_0 \cos \omega t \cos n\theta \quad \text{für } \varphi = \infty$$

$$(33) \quad A_{\text{hin}} + A_{\text{r\ddot{u}}} = 2A_0 \sin \omega t \sin n\theta \quad \text{für } \varphi = 0$$

Die Gleichungen (32) und (33) beschreiben stehende Wellen, da an den Stellen n_z mit

$$n_z \theta = z \frac{\pi}{2} \quad (z = 1, 3, 5, \dots)$$

bzw.

$$n_z \theta = z \pi \quad (z = 1, 2, 3, \dots)$$

die Schwingungsamplitude für alle Zeiten verschwindet. Im Falle $\varphi = \infty$ kann sich nur dann eine stehende Welle ausbilden, wenn am Kettenende ($n = n_{\text{MAX}}$) ein Spannungsbauch auftritt. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$(34) \quad n_{\text{max}} \theta_k = k\pi \quad k = 1, 2, \dots, n_{\text{max}}$$

gilt. Für $\varphi = 0$ muss am Kettenende ein Spannungsknoten auftreten. Das ist ebenfalls der Fall, wenn die Bedingung (34) erfüllt ist. Es sind somit insgesamt n_{MAX} stehende Wellen innerhalb einer Kette mit n_{MAX} Gliedern möglich. Über die Bedingung (34) und die Dispersionsrelation (3) kann man die zugehörigen Frequenzen ω_k ($k = 1, \dots, n_{\text{MAX}}$) berechnen. Die durch (34) festgelegten stehenden Wellen haben am Kettenanfang ($n = 0$) einen Spannungsbauch bzw. einen Spannungsknoten, wie aus (32) und (33) hervorgeht. Die einfachsten Schwingungsformen ($k = 1$) haben somit die in Abb.14 wiedergegebene Gestalt.

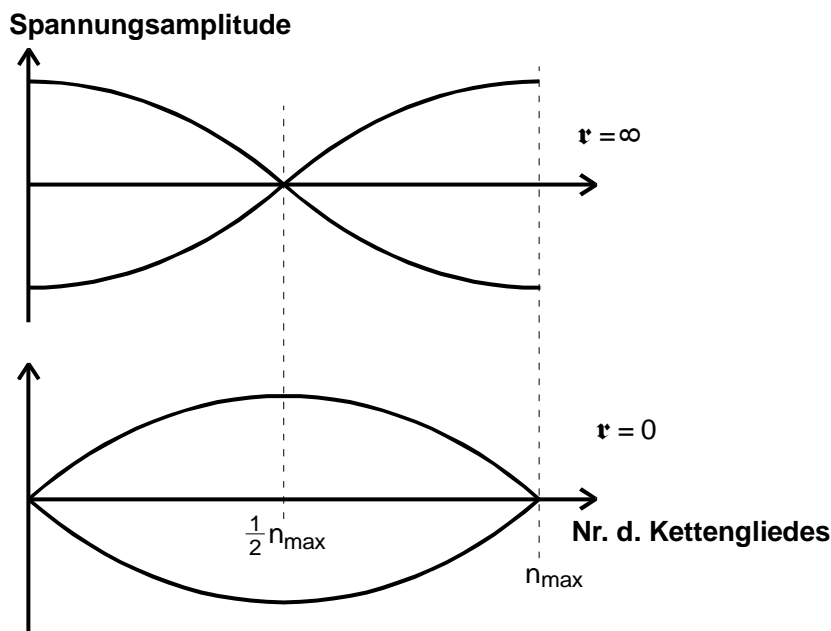


Abb.14: Spannungsamplitude einer stehenden Welle in Abhängigkeit von der Nummer des Kettengliedes

Es sind jedoch auch stehende Wellen möglich, bei denen am Anfang ein Spannungsbauch und am Ende ein Spannungsknoten oder umgekehrt vorliegen. Die Bedingungen für das Auftreten dieser Schwingungsformen lauten

$$n_{\max} \theta_{\ell} = \ell \frac{\pi}{2} \quad (\ell = 0, 1, 3, 5, \dots, 2n_{\max} - 1) \quad .$$

Damit erhält man weitere n_{\max} stehende Wellen in der Kette, sodass dort insgesamt $2n_{\max}$ Eigenschwingungen angeregt werden können.

7. Beschreibung einer Messapparatur zur Untersuchung einer LC-Kette

- a) Zur Aufnahme der **Durchlasskurve** einer LC-Kette kann man die Schaltung nach Abb.15 benutzen. Hiermit lässt sich die Spannung am Ausgang der Kette in Abhängigkeit von der Frequenz der Speisespannung bei konstantem⁵ Eingangsstrom aufzeichnen. Eingang und Ausgang der Kette müssen mit dem Wellenwiderstand Z abgeschlossen sein⁶.

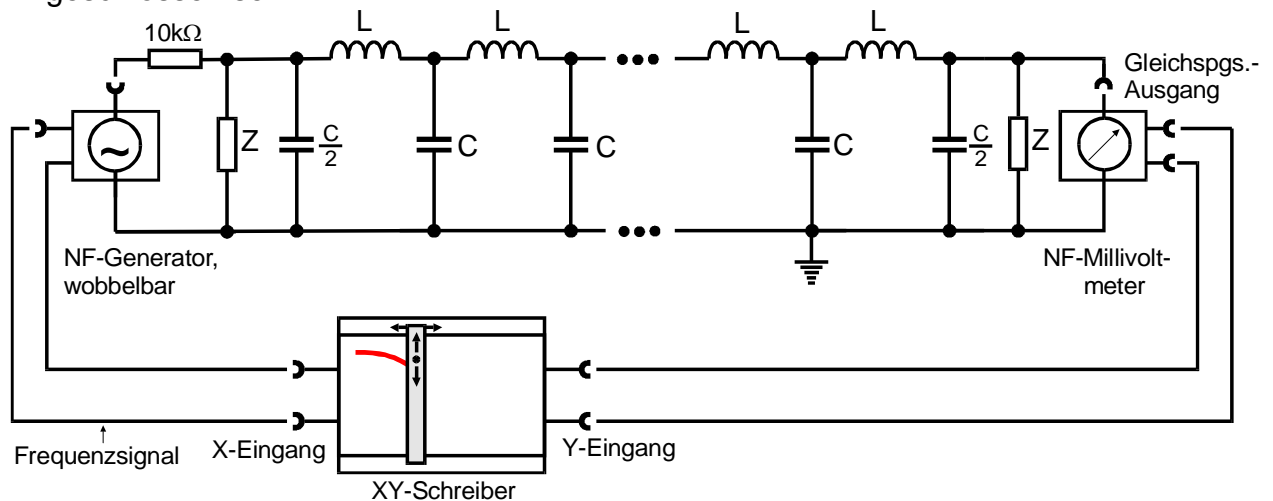


Abb. 15: Schaltung zur Aufnahme der Durchlasskurve

- b) Die **Dispersionsrelation** lässt sich mit einer leicht abgewandelten Schaltung ausmessen (Abb.16).

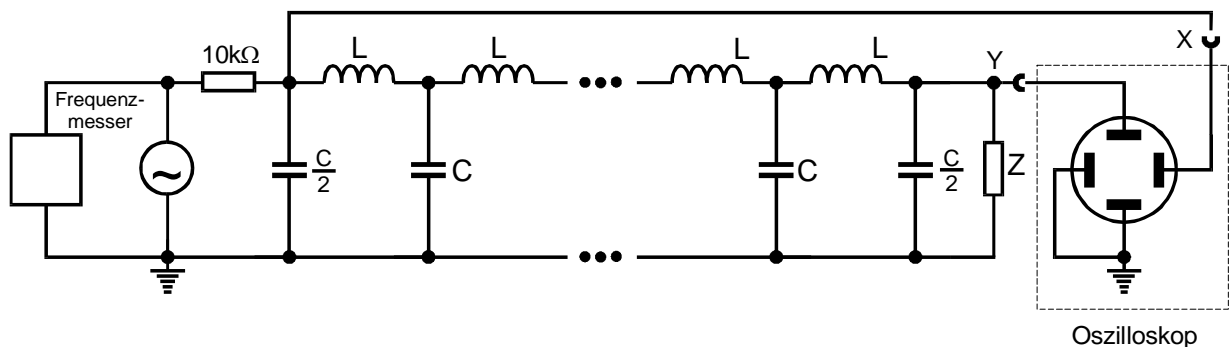


Abb. 16: Schaltung zur Aufnahme der Dispersionsrelation

Man bestimmt mit Hilfe von Lissajous-Figuren (siehe V351) die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz. Daraus lässt sich nach Division durch die Anzahl der Kettenglieder die gesuchte

⁵ angenähert realisiert durch den 10kΩ-Eingangswiderstand

⁶ Da Z eine Funktion der Frequenz ist, müsste Z entsprechend (25) mit wachsender Frequenz vergrößert werden, was sich in der Praxis nur schwer realisieren lässt. Daher sind bei höheren Frequenzen Abweichungen vom theoretischen Kurvenverlauf zu erwarten.

Phasenverschiebung θ pro Kettenglied errechnen. Es genügt, nur solche Phasenverschiebungen zu bestimmen, die Vielfache von π betragen. Man erhält dann $2n_{\text{MAX}}$ Messpunkte.

c) Zum **Nachweis von stehenden** Wellen auf der LC-Kette kann man die Schaltung nach Abb.15 benutzen (ohne den Schreiber und die Wobbeleinrichtung). Die Abschlusswiderstände Z müssen natürlich entfernt sein. Eine stehende Welle ist an der maximalen Spannung am Kettenende und auch am Kettenanfang⁷ zu erkennen. Hat man eine solche gefunden, kann man den Amplitudenverlauf längs der Kette untersuchen. Hierzu schaltet man ein Millivoltmeter mittels eines Stufenschalters der Reihe nach an jedes Kettenglied an und misst die dort herrschende Spannung. Wie schon in Kap.6 erwähnt, lassen sich stehende Wellen auch erzeugen, wenn man das Kettenende kurzschließt. Die Spannungsbäuche müssen dann an geeigneter Stelle in der Kette nachgewiesen werden.

d) Zur Messung der **Gruppengeschwindigkeit** lässt sich die Schaltung nach Abb.17 verwenden. Die Signalfrequenz, bei der v_{gr} bestimmt werden soll, wird am NF-Generator eingestellt. Die Länge der Wellengruppe, die je nach Frequenz zwischen 200 und 800 μs liegen sollte, lässt sich am Wellengruppengenerator einregeln. Man gibt nun, wie in Abb.17 angedeutet, die Wellengruppe vor und nach dem Durchlauf durch die Kette auf die beiden Eingänge eines Zweikanal-Oszillographen. Das Schirmbild hat etwa die in Abb.18 wiedergegebene Gestalt. Man erkennt dort zunächst das "Auseinanderlaufen" der Wellengruppe infolge der Dispersion und auch die Verschiebung T des Schwerpunktes des Wellenpaketes infolge der endlichen Gruppengeschwindigkeit. Die Zeit T kann aus der Ablenkgeschwindigkeit des Elektronenstrahls errechnet werden. Aus T und der Gesamtzahl der Kettenglieder erhält man schließlich die gesuchte Gruppengeschwindigkeit (Maßeinheit: s^{-1}).

Es ist empfehlenswert, das Oszilloskop extern zu triggern und den Speicherbetrieb einzuschalten. Durch einen Druck auf die „Single“-Taste erzeugt man ein stillstehendes und abspeicherbares Bild. Man sollte einen Thermodruck anfertigen und dort die Einhüllenden der Wellengruppen einzeichnen. Aus der Verschiebung ihrer Spitzen kann man T bestimmen.

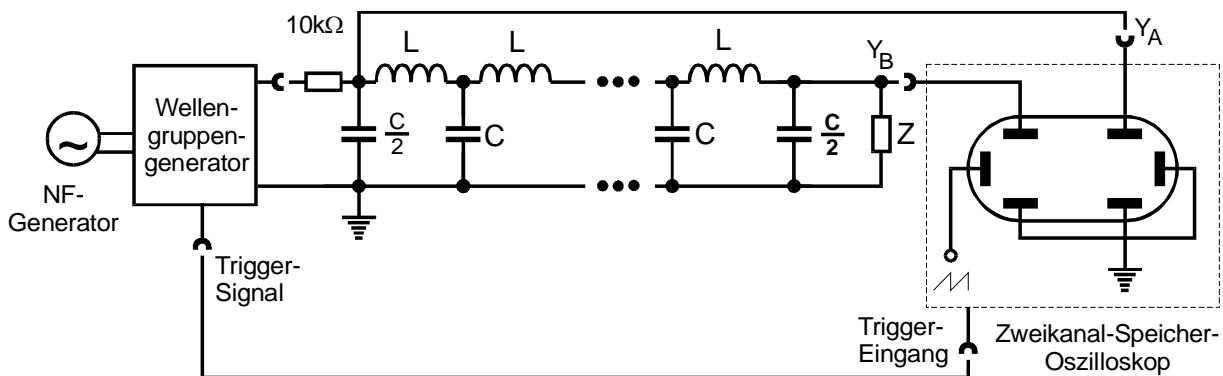


Abb. 17: Schaltung zur Bestimmung der Laufzeit T einer Wellengruppe durch die LC-Kette

⁷ Der Anschluss der Generators über $10\text{k}\Omega$ bedeutet praktisch einen offenen Eingang.

- e) Der Einfluss des Abschlusswiderstandes auf das Reflexionsverhalten der Kette kann mit einem Pulsgenerator und einem Oszillographen untersucht werden, welche beide an den Anfang der Kette angeschlossen werden. Der Spannungsimpuls muss oberwellenarm sein, da sonst die Dispersion die Gestalt des Pulses merklich verändern würde. Geeignet sind Pulse von trapezförmiger Gestalt. Es ist zu beachten, dass ein Impuls, der am Kettenende reflektiert wird, zum Kettenanfang zurückläuft und dort wiederum eine Reflexion erleidet. Es ist daher möglich, dass ein Impuls in der Kette mehrere Male hin- und herläuft, bis seine Energie durch Verlustwiderstände aufgezehrt ist. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, den Kettenanfang mit einem Abschlusswiderstand zu versehen.

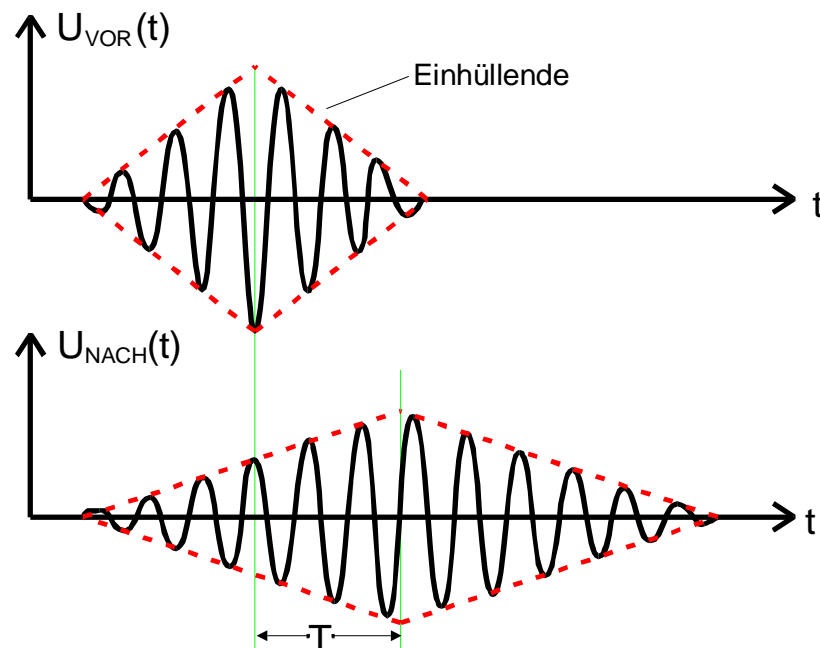


Abb.18: Gestalt der Wellengruppen vor und nach dem Durchlauf durch die LC-Kette. Die Sinusspannung aus dem NF-Generator wird im Wellengruppengenerator mit einer Dreiecksspannung moduliert.

8. Messprogramm

- Man nehme je eine Durchlasskurve für eine LC- und eine LC_1C_2 -Kette auf.
- Man bestimme mit Hilfe von Lissajous-Figuren die Dispersionskurven der unter a) genannten Ketten.
- Man bestimme die Eigenfrequenzen der beiderseits offenen LC-Kette.
- Man messe die Spannungsamplitude an den einzelnen Kettengliedern bei der 1. und 2. Eigenschwingung der offenen LC-Kette.
- Man wiederhole die Messung d), schließe die Kette jedoch mit dem Wellenwiderstand ab, den man aus (24) errechnen kann. Es genügt, bei einer Frequenz zu messen.
- Man messe die Gruppengeschwindigkeit in der LC-Kette in Abhängigkeit von der Signalfrequenz (insbesondere in der Nähe von ν_G).

9. Auswerteprogramm

- a) Man ermittle aus den Durchlasskurven die Grenzfrequenzen und vergleiche sie mit den gerechneten Werten.
- b) Man errechne aus den an der Apparatur angegebenen L- und C-Werten die Dispersionskurven und stelle diese in Diagrammen dar. Die aus der Messreihe 8b gewonnenen Daten trage man dort ein.
- c) Man ordne den in 8c gefundenen Eigenfrequenzen ν_i die entsprechenden Schwingungszustände und die Phasenverschiebung θ_i zu. Man berechne aus den (ν_i, θ_i) -Wertepaaren die Phasengeschwindigkeit in der LC-Kette und trage diese in einem Diagramm gegen ν auf. In dieses Diagramm zeichne man auch die durch (21) gegebenen Kurve $v_{ph} = f(\nu)$ ein.
- d) Man stelle die Messergebnisse von 8d und 8e in geeigneten Diagrammen dar und erkläre die Ergebnisse.
- e) Man stelle die gemessenen Wertepaare $\{\nu_{Gr_i}, \nu_i\}$ in einem Diagramm dar. Dort zeichne man auch die gemäß (22) errechnete Kurve $\nu_{gr} = f(\nu)$ ein.

Hinweis: Der Wellenwiderstand einer LC_1C_2 -Kette beträgt $Z = \sqrt{\frac{2L}{C_1 + C_2}}$ für $\nu \ll \nu_G$.

10. Literatur

LC-Kette als Analogon zu eindimensionalen, mechanischen Schwingern:

P.L.Scott, American Journal of Physics 40 (1972) 260

Eindimensionale Gitterschwingungen in der Festkörperphysik:

C.Kittel, Einführung in die Festkörperphysik

K.H.Hellwege, Einführung in die Festkörperphysik

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit:

Bergmann, Schäfer, Experimentalphysik, Bd.III

Alonso, Finn, Physics