11. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 17/18**
Theoretische Physik I **Priv.-Doz. U. Löw**
Abgabe bis: 19.01.18
Webseite zur Vorlesung:
`https://moodle.tu-dortmund.de/course/view.php?id=9519`

Aufgabe 1: Verengtes Rohr **(10 Punkte)**

Ein Zylinderförmiges Rohr mit einem Durchmesser $d_1 = 50\text{mm}$ ist auf einem Zwischenstück verengt und besitzt dort nur noch einen Durchmesser von $d_2 = 25\text{mm}$. An der verengten Stelle ist von unten ein weiteres Rohr mit einem Durchmesser von $d_3 = 10\text{mm}$ angeschlossen, dessen Ende sich in einem Wasserbecken befindet. Durch das Rohr fließen 6 L Wasser pro Sekunde (siehe Abbildung 1). Vernachlässigen Sie dabei, dass von oben Wasser in das angeschlossene Rohr gelangen kann.

a) Wie großist die Druckdifferenz der beiden Stellen mit unterschiedlichem Durchmesser?

b) Wie hoch steigt das Wasser in dem angeschlossenen Rohr?

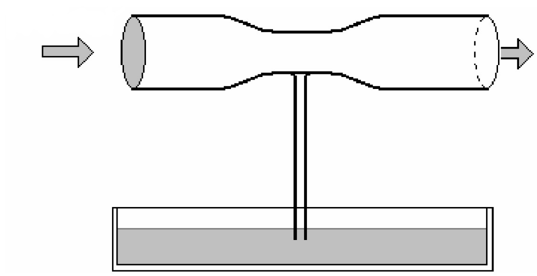


Abbildung 1: Verengtes Rohr

Aufgabe 2: Navier-Stokes **(10 Punkte)**

Ein zylinderförmiger Stab mit Radius R_1 bewegt sich mit der Geschwindigkeit u parallel zu seiner Achse in einem zu ihm koaxialen zylinderförmigen Rohr mit Radius R_2. Der Raum zwischen dem Stab und dem Rohr ist mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt. Die Strömung ist stationär.
Wählen Sie an das Problem angepasste Zylinderkoordinaten (r, θ, z). Sie können davon ausgehen, dass die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Flüssigkeit nur von dem radialen Abstand von der Symmetrieachse abhängt und immer in z-Richtung zeigt (siehe Abbildung 2).

(a) Welche Gleichung für v_z erhalten Sie ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung?

(b) Welche Randbedingungen gelten? D.h. geben Sie $v_z(r = R_1)$ und $v_z(r = R_2)$ an.

(c) Lösen Sie die Navier-Stokes-Gleichung für diesen Fall. D.h. berechnen Sie $v_z(r)$.

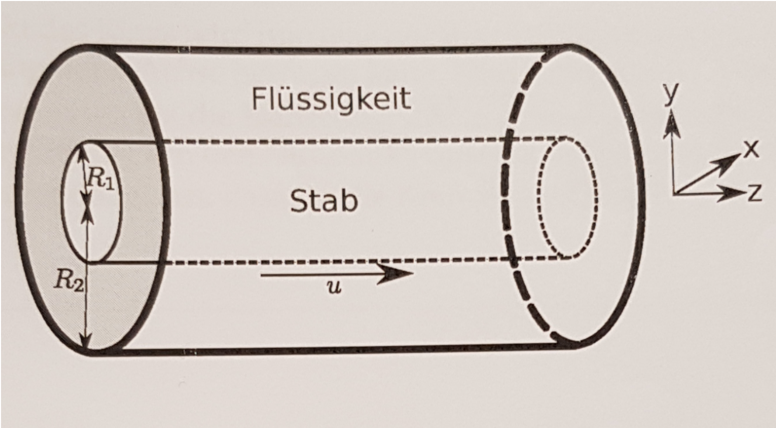


Abbildung 2: Navier-Stokes

Aufgabe 3: Zusatzaufgabe **(+10 Punkte)**

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld eines unendlich langen geladenen Drahtes mit der Linienladungsdichte λ.

b) Bestimmen Sie das magnetische Feld eines unendlich langen stromdurchflossenen Drahtes mit dem Radius r_0 und dem Strom I. Betrachten Sie dabei auch das Feld innerhalb des Leiters.

c) Bestimmen Sie das magnetische Feld einer stromdurchflossenen Toroidspule mit innerem Radius r_1 und äußerem Radius r_2. Die Spule hat N Windungen und wird vom Strom I durchflossen. Betrachten Sie dabei alle Bereiche (r<r_1,$r_1 \leq r \leq r_2$,r>r_2).

Musterlösung:Verengtes Rohr

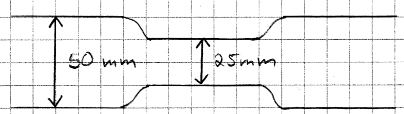
[redacted]

Musterlösung <u>Aufgabe 1</u>

Bernoulli-Gleichung: spezifische Energie der Fluidelemente entlang einer Stromlinie konstant:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const \underset{\rho\,const.}{\Leftrightarrow} \rho\frac{v^2}{2} + p + gz\rho = const$$

(nur bei stationärer Strömung inkompressibler Fluide)



a) $d_1 = 0{,}05\ m \quad \rightarrow A_1 = d^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0{,}001964\ m^2$

$d_2 = d_1/2 \quad \rightarrow A_2 = \frac{A_1}{4} \Rightarrow v_2 = 4v_1$

$\dot{V} = 0{,}006\ m^3/s$

$\dot{V} = A_1 v_1 \Leftrightarrow v_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = 3{,}055\ m/s$

keine Lageenergie hier:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho((4v_1)^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho \cdot 15 v_1^2 = 0{,}6998\ bar$$

b) dünnes Rohr: $\rho \cdot g \cdot \Delta h = \Delta p \Leftrightarrow \Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g}$

$$\Delta h = \frac{0{,}6998 \cdot 10^5\ \frac{kg}{ms^2}}{1000\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}} = 7{,}13\ m$$

Musterlösung: Navier-Stokes

a.)

$$v_x = v_y = 0$$
$$v_z = v(r)$$
$$\Rightarrow \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

b.)

$$
\begin{aligned}
v(r = R_1) =& u \\
v(r = R_2) =& 0
\end{aligned}
$$

c.)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} &= \frac{c_1}{r}
\end{aligned}
$$

$$
v(r) = c_1 \cdot \ln r + c_2
$$

Jetzt in die Randedingungen einsetzen:

$$
\begin{aligned}
u = v(R_1) = c_1 \cdot \ln R_1 + c_2 \\
0 = v(R_2) = c_1 \cdot \ln R_2 + c_2 \\
\Rightarrow c_1 = \frac{u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \qquad c_2 = -\frac{u \ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}}
\end{aligned}
$$

Ergebnis:

$$
v(r) = u \cdot \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}
$$

Musterlösung:Zusatzaufgabe

Aufgabe 3

a) nutze Gaußsches Gesetz:

$$\Phi = \oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{eing}}{\varepsilon_0}$$

$\lambda = \frac{Q}{l}$; $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{e}_r$

$$\Phi = \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \int_{Mantelfläche} E\, dA = E(r)\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r}$$

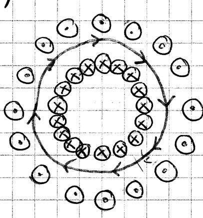
b) nutze Ampèresches Durchflutungsgesetz

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I_{eing}$$

$\rightarrow$ Kreis um den Draht

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{s} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2\pi r}\cdot\mu_0 I$$

c)



$\underline{r < r_1}$: $I_{eing} = 0$

$\underline{r > r_2}$: $I_{eing} = 0$

$\underline{r_1 < r < r_2}$: $I_{eing} = N\cdot I$

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{s} = B 2\pi r = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2\pi r}\cdot\mu_0 N I$$