

# **Versuch 602**

## **Röntgenemission und -absorption**

Jonah Nitschke  
lejonah@web.de

Sebastian Pape  
sepa@gmx.de

Durchführung: 13.06.2017

Abgabe: 20.06.2017

# 1 Theorie

Der Versuch V602 untersucht das Emissionsspektrum einer Cu–Röntgenröhre und Absorptionsspektren verschiedener Absorber.

Röntgenstrahlen werden in einer Röntgenröhre erzeugt. Diese ist evakuiert und beinhaltet eine Glühkathode und eine Anode. Aufgrund des glühelektrischen Effektes werden Elektronen aus der Kathode gelöst und in Richtung der positiv geladenen Anode beschleunigt. Treffen die beschleunigten Elektronen auf das Anodenmaterial auf, entsteht Röntgenstrahlung, welche sich aus dem kontinuierlichen Bremsspektrum und der charakteristischen Röntgenstrahlung zusammensetzt. Die hier auftretende charakteristische Röntgenstrahlung ist dem Anodenmaterial Kupfer zugeordnet. Das Bremsspektrum wird wegen des Coulombfeldes des Atomkerns hervorgerufen. Beim Abbremsprozess wird ein Photon emittiert. Die Energie des Photons entspricht dem Energieverlust des abgebremsten Elektrons. Die Wellenlänge  $\lambda$  des emittierten Photons lässt sich aus der Energie  $E_{\text{kin}}$  über den folgenden Zusammenhang ermitteln.

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E_{\text{kin}}} \quad (1)$$

Dabei ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $h$  das *Planck'sche Wirkungsquantum*. Die Wellenlänge wird minimal für den maximalen Wert der Energie. Die kinetische Energie ist maximal für  $e_0 U$ , wodurch

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{h \cdot c}{e_0 U}. \quad (2)$$

In (2) wird die gesamte kinetische Energie in Strahlungsenergie umgewandelt.

Das charakteristische Spektrum entsteht aufgrund der Ionisierung des Anodenmaterials. Dabei wird ein Elektron aus einer inneren Schale herausgelöst. Die entstandene Leerstelle wird durch ein Elektron der äußeren Schale gefüllt. Aufgrund der Energiedifferenz der Elektronenschalen wird beim Wechsel eines äußeren Elektrons auf eine inner liegende Schale ein Röntgenquant mit der Energie  $h\nu = E_{\text{m}} - E_{\text{n}}$  emittiert. Die auftretenden Energien  $E_{\text{m}}$  und  $E_{\text{n}}$  stellen die Energien der verschiedenen Elektronenschalen dar. Das charakteristische Spektrum besteht aus diskreten, scharfen Linien, welche mit  $K_{\alpha}, K_{\beta}, L_{\alpha}, L_{\beta}, \dots$  gekennzeichnet werden. Die Buchstaben  $K, L, M$  stehen dabei für die Elektronenschalen des Atoms und die Indizes sagen aus, welches Elektron aus der Schale gewechselt ist. Die Bindungsenergie eines Elektrons aus der  $n$ -ten Schale ist geringer als die Bindungsenergie eines Elektrons aus der  $n - 1$ -ten Schale. Dies wird durch Abschirmungseffekte der Hüllenelektronen und Wechselwirkungen der Elektronen untereinander welche die Kernladung teilweise kompensieren können verstärkt. Das charakteristische Spektrum weißt für jedes Elektron spezifische Linien auf, welche als Feinstruktur bezeichnet werden.

Für die Bindungsenergie  $E_n$  eines Elektron der  $n$ -ten Schale gilt unter Berücksichtigung der Feinstruktur nach der Sommerfeldschen Feinstrukturformel:

$$E_{n,j} = -R_\infty \left( z_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \alpha \cdot z_{\text{eff}}^4 \cdot \frac{1}{n^3} \left( \frac{2}{2j+1} - \frac{3}{4n} \right) \right). \quad (3)$$

Dabei ist  $R_\infty = 13,6 \text{ eV}$  die Rydbergenergie,  $n$  die Hauptquantenzahl,  $j$  der Gesamtdrehimpuls,  $\alpha$  die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante und  $z_{\text{eff}}$  die effektive Kernladung. Diese setzt sich aus der Differenz  $z_{\text{eff}} = z - \sigma$  zusammen, wobei  $\sigma$  der Abschirmungskonstante ist.

Wird die Feinstruktur vernachlässigt vereinfacht sich die Bindungsenergie eines Elektrons der  $n$ -ten Schale zu:

$$E_n = -R_\infty z_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (4)$$

Insgesamt spielen bei der Absorption von Strahlung drei grundlegende Effekte eine Rolle. Zum einen der Photoeffekt, welcher bewirkt, dass einfallende Photonen Elektronen aus Metalloberflächen lösen können, der Comptoneffekt, welcher für eine meist unerwünschte Röntgenstrahlenstreuung führt und die Paarbildung. Paarbildung tritt jedoch nur bei Strahlungsenergien von  $> 1 \text{ MeV}$  auf. Diese werden im vorliegenden Versuch nicht erreicht. Damit sind die dominant auftretenden Phänomene der Photo- und der Comptoneffekt. Der Comptoneffekt tritt auf wenn Röntgenstrahlen an den Elektronen des Target gestreut werden. Die gestreute Röntgenstrahlen besitzen eine längere Wellenlänge als die eingehende Strahlung. Mit dem Streuwinkel  $\theta$  verhält sich der Comptoneffekt gemäß:

$$\lambda_{\text{einfallend}} - \lambda_{\text{gestreut}} = \frac{h}{m_e \cdot c} (1 - \cos \theta). \quad (5)$$

Die stattfindende Absorption nimmt mit zunehmender Energie der Elektronen ab und steigt sprunghaft an, sobald die Photonenenergie gerade größer ist als die Bindungsenergie eines Elektrons aus der nächsten tieferen Schale. Damit ergeben sich die Absorptionskanten zu  $h\nu_{\text{abs}} = E_n - E_\infty$ . Die Absorptionskante wird immer nach der Schale aus der das Elektron stammt als  $K$ -,  $L$ -,  $M$ -,... Kante bezeichnet. In der  $L$ -Schale lassen sich drei Absorptionskanten beobachten, wobei aufgrund der Auflösung nur zwei Kanten sichtbar werden. Die zugehörige Abschirmungskonstante  $\sigma_L$  ergibt sich damit zu:

$$\sigma_L = Z - \left( \frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta E_L}{R_\infty}} - \frac{5\Delta E_L}{R_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{19}{32} \alpha^2 \frac{\Delta E_L}{R_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

In dieser Formel ist  $\Delta E_L$  die Energie zwischen der  $L_{II}$ - und der  $L_{III}$ -Kante und  $Z$  die Ordnungszahl.

Die Energie bzw. die Wellenlänge lässt sich mittels der Bragg-Bedingung experimentell ermitteln. Die in der Röntgenröhre erzeugte Röntgenstrahlung wird auf eine Kristallgitter Struktur geschossen. Ein Winkel  $\Theta$  ist ausgezeichnet als Glanzwinkel. An diesem Winkel interferieren die Wellenlängen konstruktiv miteinander. Die Bragg-Bedingung ist gegeben durch:

$$2d \cdot \sin(\Theta) = k \cdot \lambda \quad (7)$$

mit der Gitterkonstante  $d$ , der gebeugten Wellenlänge  $\lambda$  sowie der Beugungsordnung  $k$ .

## 2 Durchführung

Der verwendete Aufbau ist in 1 dargestellt.

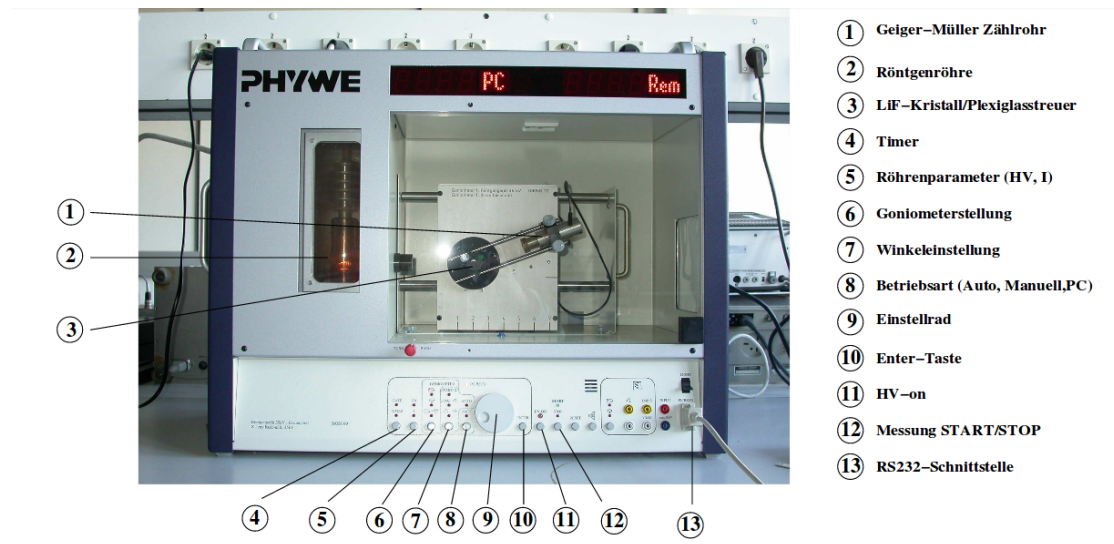


Abbildung 1: Aufbau zur Untersuchung der Röntgenemission und -absorption.[1]

In der Messapparatur ist im wesentlichen eine Röntgenröhre, ein Geiger-Müller-Zählrohr mit Drehmechanismus und ein LiF-Kristall integriert. Für die Bedienung der Apparatur und die Aufnahme der Messdaten wird ein Computer mit vorinstallierter Software verwendet. Die Beschleunigungsspannung und der Emissionsstrom bleiben während allen Messungen konstant.  $U_B$  liegt bei 35 kV und  $I$  bei 1 mA.

Zu Beginn des Versuches wird die Bragg-Bedingung überprüft. Dafür wird der Kristallwinkel konstant auf  $\Theta = 14^\circ$  eingestellt und das Geiger-Müller-Zählrohr läuft in einem Winkel von  $\alpha_{GM} = 26^\circ$  bis  $30^\circ$  mit einem Winkelzuwachs von  $\Delta\alpha_{GM}$  um den Kristall herum. Die Integrationszeit wird auf  $\Delta t = 10$  s eingestellt.

Danach wird das Emissionsspektrum auf das Programm 2:1 Koppelmodus eingestellt. Das Röntgenspektrum der Beugungsordnung  $k = 1$  wird im Winkelbereich  $\Theta = 4^\circ$  bis  $26^\circ$  in  $0,2^\circ$ -Schritten gemessen. Für  $\Delta t$  werden 5 s eingestellt.

Abschließend wird das Absorptionsspektrum von fünf leichten Absorbern und einem schweren Absorber bestimmt. Bei den leichten Absorbern handelt es sich um Zn, Ge, Br, Sr, Zr und bei dem schweren Absorber handelt es sich um Au. Die Braggwinkel zu dem Literaturwert der  $E_K$ -Kante werden vorher recherchiert, damit  $\Theta$  auf  $\pm 2^\circ$  des Literaturwertes eingestellt werden kann. Die Absorber werden vor dem Geiger-Müller-Zählrohr befestigt. Das Absorptionsspektrum wird in  $0,2^\circ$ -Schritten mit einer Integrationszeit von  $\Delta t = 20$  s gestellt.

Alle genommenen Messdaten werden als Grafik und als Tabelle in passendem Format exportiert.

### 3 Auswertung

Für die Berechnung der Wellenlängen und Energien werden die Formeln (1) und (7) verwendet. Dabei werden sie in folgende Form umgestellt, wobei  $n$  aus Formeln (8) das betrachtete Beugungsmaximum beschreibt (welches im Folgenden immer das 1. ist).

$$\lambda_{\min} = 2 \cdot d \cdot \sin \theta \cdot \frac{1}{n} \quad (8)$$

$$E_{\max} = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad (9)$$

$$(10)$$

#### 3.1 Überprüfung der Bragg-Bedingung

Bei der Überprüfung der Bragg-Bedingung werden in dem verwendeten Messprogramm folgende Einstellungen für den Kristallwinkel  $\vartheta$ , das Zählrohrwinkelintervall  $\alpha_{\text{GM}}$ , den Winkelzuwachs  $\Delta\alpha$  sowie die Integrationszeit  $\Delta t$  gewählt:

$$\begin{aligned} \vartheta &= 14^\circ \\ \Delta\alpha &= 0.1^\circ \\ \Delta t &= 10 \text{ s} \\ \alpha_{\text{GM}} &\in [26^\circ, 30^\circ]. \end{aligned}$$

Mithilfe von Python und der Daten aus Abbildung 2 sowie Tabelle 1 wird dann das Maximum der Impulsrate bestimmt. Der Winkel wird dann zuerst in die minimale Wellenlänge (Formel (8)) sowie anschließend in die maximale Energie (Formel (9)) umgerechnet, so dass sich folgende Werte ergeben:

$$\begin{aligned} \vartheta_{3.1,\max} &= 28,6^\circ \\ \lambda_{3.1,\min} &= 1,93 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ E_{3.1,\max} &= 6,43 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Im Vergleich mit dem Erwartungswert von  $\vartheta = 28^\circ$  ergibt sich für den gemessenen Wert eine Abweichung von  $\Delta\vartheta = 0.6^\circ$  sowie prozentual eine Abweichung von  $\Delta\vartheta = 2.1\%$ .

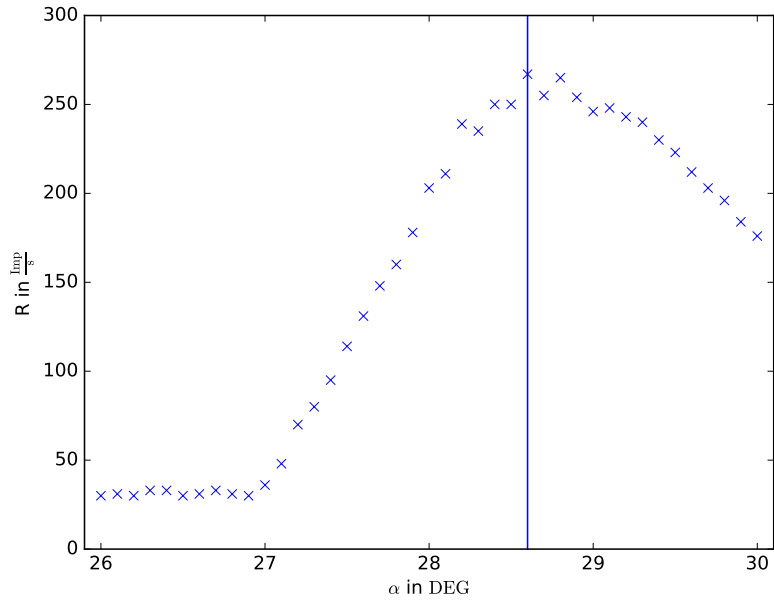


Abbildung 2: Gemessene Impulsrate bei Messung 3.1 .

Tabelle 1: Gemessene Impulsraten N bei Messung 3.1 .

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
26.0	30.0	27.4	95.0	28.8	265.0
26.1	31.0	27.5	114.0	28.9	254.0
26.2	30.0	27.6	131.0	29.0	246.0
26.3	33.0	27.7	148.0	29.1	248.0
26.4	33.0	27.8	160.0	29.2	243.0
26.5	30.0	27.9	178.0	29.3	240.0
26.6	31.0	28.0	203.0	29.4	230.0
26.7	33.0	28.1	211.0	29.5	223.0
26.8	31.0	28.2	239.0	29.6	212.0
26.9	30.0	28.3	235.0	29.7	203.0
27.0	36.0	28.4	250.0	29.8	196.0
27.1	48.0	28.5	250.0	29.9	184.0
27.2	70.0	28.6	267.0	30.0	176.0
27.3	80.0	28.7	255.0		

### 3.2 Das Emissionsspektrum einer Cu-Röntgenröhre

Für die Untersuchung des Emissionsspektrums einer Cu-Röntgenröhre wurden in dem 2:1 Koppelmodus die folgenden Einstellungen gewählt:

$$\begin{aligned}\vartheta &\in [4^\circ, 26^\circ] \\ \Delta\vartheta &= 0.2^\circ \\ \Delta t &= 5 \text{ s.}\end{aligned}$$

Die erhaltenen Daten sind in Abbildung 3 dargestellt. Zur Bestimmung der  $K_\alpha$ - und  $K_\beta$ -Linie wird zuerst der Untergrund aus den Daten herausgerechnet. Dafür wird an die Werte in Tabelle 2 ein Polynom 3.Ordnung gefittet, für das sich die folgenden Parameter ergeben:

$$\begin{aligned}U(x) &= A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D \\ A &= (0.27 \pm 0.02) \frac{\text{Imp}}{\text{s} \cdot \alpha^3} \\ B &= (-12.2 \pm -0.7) \frac{\text{Imp}}{\text{s} \cdot \alpha^2} \\ C &= (170 \pm 9) \frac{\text{Imp}}{\text{s} \cdot \alpha} \\ D &= (-525 \pm 31) \frac{\text{Imp}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Des weiteren wird an die Daten aus Tabelle 3 eine Gauß-Funktion der Form (11) gefittet. Dabei werden mithilfe der Werte des Untergrunds noch die Daten der Tabelle vor dem Fitten angepasst.

$$G(x) = A_{K_\alpha} \cdot \exp \frac{-(\vartheta - \vartheta_{K_\alpha})^2}{2 \cdot s_{K_\alpha}^2} + A_{K_\beta} \cdot \exp \frac{-(\vartheta - \vartheta_{K_\beta})^2}{2 \cdot s_{K_\beta}^2} \quad (11)$$

$\vartheta_K$  und  $s$  geben dabei die Lage der jeweiligen Linie sowie die Standardabweichung an. Damit ergeben sich für die  $K_\alpha$ -Linie die folgenden Parameter:



$$\begin{aligned}
A_{K_\alpha} &= (4.7 \pm 0.2) \cdot 10^3 \frac{\text{Imp}}{\text{s}} \\
\vartheta_{K_\alpha} &= \vartheta_0 = (22.568 \pm 0.008)^\circ \\
\lambda_{K_\alpha} &= (1.5459 \pm 0.0005) \cdot 10^{-10} \text{ m} \\
E_{K_\alpha} &= (8020 \pm 3) \text{ eV} \\
s_{K_\alpha} &= (0.39 \pm 0.02)^\circ.
\end{aligned}$$

Analog ergeben sich für die  $K_\beta$ -Linie die folgenden Werte :

$$\begin{aligned}
A_{K_\beta} &= (1.6 \pm 0.3) \cdot 10^3 \frac{\text{Imp}}{\text{s}} \\
\vartheta_{K_\beta} &= \vartheta_0 = (20.29 \pm 0.02)^\circ \\
\lambda_{K_\beta} &= (1.397 \pm 0.001) \cdot 10^{-10} \text{ m} \\
E_{K_\beta} &= (8877 \pm 8) \text{ eV} \\
s_{K_\beta} &= (0.28 \pm 0.05)^\circ.
\end{aligned}$$

$$E_{K_\alpha} = R_\infty(z - \sigma_1)^2 - R_\infty(z - \sigma_2)^2 \cdot \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Mithilfe der Formeln 12 können dann die Abschirmkonstanten der K-Kante und der L-Kante bestimmt werden, indem die Annahme getroffen wird, dass  $E_{K_\beta} = E_K$  gilt. Somit ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
\sigma_K &= (3.45 \pm 0.01) \\
\sigma_L &= (17.78 \pm 0.06)
\end{aligned}$$

Die beiden Halbwertsbreiten können nun ebenfalls in Energien umgerechnet werden, indem die Differenz der Energien von Maximum plus Standardabweichung und Maximum minus Standardabweichung gebildet wird. Theoretisch sollten die beiden Energien exakt gleich sein. Da dies in der Praxis jedoch nicht der Fall ist, kann mithilfe des Quotienten der beiden Energien eine Güte des Versuches angegeben werden, dessen Optimalwert bei 1 liegt. Des weiteren kann durch Betrachtung der bestimmten Halbwertsbreiten eine Aussage über das Auflösungsvermögen der Apparatur getroffen werden. Denn die aufgezeichneten Maxima sollten theoretisch nur Peaks infinitesimaler Ausbreitung sein. Somit können nur Linien differenziert werden, deren Energiedifferenz größer als das Auflösungsvermögen ist. Gemittelt ergeben die beiden Halbwertszeiten für die Güte und das Auflösungsvermögen die folgenden Werte:

$$E_{s_{K\alpha}} = (260 \pm 12) \text{ eV}$$

$$E_{s_{K\beta}} = (230 \pm 5) \text{ eV}$$

$$E_{s_K}^- = (246 \pm 14) \text{ eV}$$

$$\phi = \frac{E_{s_{K\beta}}}{E_{s_{K\alpha}}} = 0.9 \pm 0.2.$$

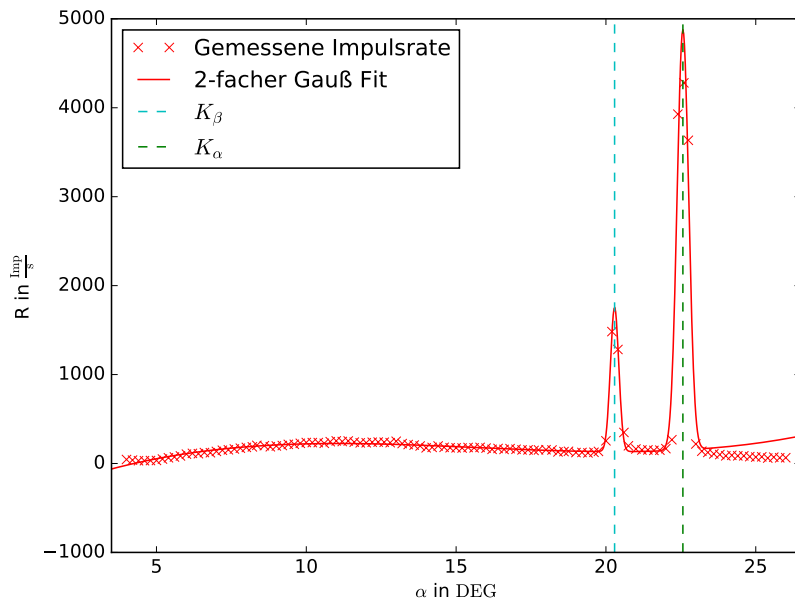


Abbildung 3: Gemessene Impulsrate einer Cu-Röntgenröhre.

Tabelle 2: Die für den Untergrund verwendeten Messdaten.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
8.0	45.0	21.2	227.0	34.4	153.0
8.4	38.0	21.6	245.0	34.8	153.0
8.8	31.0	22.0	254.0	35.2	147.0
9.2	31.0	22.4	247.0	35.5	153.0
9.6	33.0	22.8	253.0	36.0	155.0
10.0	34.0	23.2	240.0	36.4	152.0
10.4	50.0	23.6	232.0	36.8	130.0
10.8	64.0	24.0	233.0	37.2	134.0
11.2	73.0	24.4	239.0	37.5	137.0
11.6	85.0	24.8	241.0	38.0	123.0
12.0	105.0	25.2	239.0	38.4	124.0
12.4	114.0	25.6	234.0	38.8	119.0
12.8	110.0	26.0	250.0	39.2	126.0
13.2	123.0	26.4	224.0	39.5	136.0
13.6	121.0	26.8	213.0	42.4	152.0
14.0	136.0	27.2	207.0	42.8	153.0
14.4	149.0	27.6	197.0	43.2	147.0
14.8	154.0	28.0	176.0	43.6	150.0
15.2	163.0	28.4	181.0	44.0	167.0
15.6	172.0	28.8	197.0	46.8	124.0
16.0	181.0	29.2	182.0	47.2	108.0
16.4	187.0	29.6	177.0	47.6	100.0
16.7	204.0	30.0	176.0	48.0	86.0
17.2	200.0	30.4	174.0	48.4	92.0
17.6	188.0	30.8	180.0	48.8	86.0
18.0	197.0	31.2	176.0	49.2	86.0
18.4	202.0	31.6	181.0	49.6	77.0
18.8	215.0	32.0	173.0	50.0	72.0
19.2	216.0	32.4	159.0	50.4	75.0
19.6	227.0	32.8	169.0	50.8	61.0
20.0	236.0	33.2	158.0	51.2	71.0
20.4	235.0	33.6	167.0	51.6	64.0
20.8	235.0	34.0	160.0	52.0	65.0

Tabelle 3: Die für den Gauß-Fit vorgesehenen Messdaten.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
32.0	173.0	38.8	119.0	45.5	3634.0
32.4	159.0	39.2	126.0	46.0	219.0
32.8	169.0	39.5	136.0	46.4	138.0
33.2	158.0	40.0	255.0	46.8	124.0
33.6	167.0	40.4	1483.0	47.2	108.0
34.0	160.0	40.8	1282.0	47.6	100.0
34.4	153.0	41.2	349.0	48.0	86.0
34.8	153.0	41.5	199.0	48.4	92.0
35.2	147.0	42.0	163.0	48.8	86.0
35.5	153.0	42.4	152.0	49.2	86.0
36.0	155.0	42.8	153.0	49.6	77.0
36.4	152.0	43.2	147.0	50.0	72.0
36.8	130.0	43.6	150.0	50.4	75.0
37.2	134.0	44.0	167.0	50.8	61.0
37.5	137.0	44.4	267.0	51.2	71.0
38.0	123.0	44.8	3928.0	51.6	64.0
38.4	124.0	45.2	4280.0	52.0	65.0

Zuletzt kann mithilfe der Daten in einem Winkelbereich von  $\vartheta \in [4^\circ, 7^\circ]$  (Tabelle 4) noch die maximale Energie des Röntgenspektrums bestimmt werden. Dafür wird nur ein Teil der gemessenen Winkel ( $\vartheta \in [4,8^\circ, 6,2^\circ]$ ) verwendet, um einen linearen Fit gemäß Formel (13) durchzuführen. Der gesuchte Winkel ist der Anfang des Bremsberges. Das Ende des Bremsberges kann bei den gemessenen Daten nicht beobachtet werden. Die verwendeten Messdaten und die berechnete Nullstelle sind noch einmal in Abbildung 4 dargestellt.

$$\vartheta(x) = A \cdot x + B \quad (13)$$

Für die Parameter ergeben sich dabei die folgenden Werte:

$$A = (59 \pm 5) \frac{\text{Imp}}{\text{s} \cdot \alpha}$$

$$B = (-255 \pm 27) \frac{\text{Imp}}{\text{s}}$$

Aus den beiden Parametern kann dann der Winkel bestimmt werden, bei dem die Impulsrate den Wert 0 annimmt. Mithilfe von Formeln (8) und (9) kann dann die maximale Energie des verwendeten Röntgenspektrums bestimmt werden.

$$\vartheta_{E_{\max}} = -\frac{B}{A} = (4.3 \pm 0.6)^\circ$$

$$\lambda_{E_{\max}} = (3.1 \pm 0.4) \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$E_{\max} = (4.1 \pm 0.5) \cdot 10^4 \text{ eV}$$

Tabelle 4: Gemessene Impulsraten N bei Messung 3.2.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
8.0	45.0	11.2	73.0
8.4	38.0	11.6	85.0
8.8	31.0	12.0	105.0
9.2	31.0	12.4	114.0
9.6	33.0	12.8	110.0
10.0	34.0	13.2	123.0
10.4	50.0	13.6	121.0
10.8	64.0	14.0	136.0

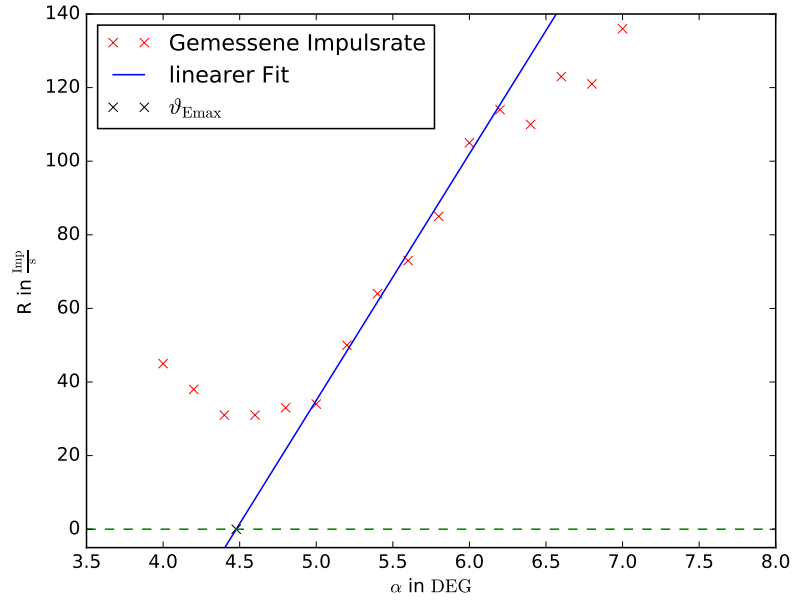


Abbildung 4: Messdaten zu Bestimmung der maximalen Energie

### 3.3 Das Absorptionsspektrum

Für die Untersuchung des Absorptionsspektrums verschiedener Materialien werden in dem 2:1 Koppelmodus die folgenden Einstellungen verwendet:

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta &= 0.1^\circ \\ \Delta t &= 20 \text{ s.}\end{aligned}$$

Das Messintervall wird dabei für jedes Material unabhängig gewählt. Für die Berechnung der Abschirmkonstante wird Formel (3) umgestellt, so dass sich die folgende Relation ergibt.  $\alpha$  beschreibt dabei die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante.

$$\sigma_K = Z - \sqrt{\frac{E_{\max}}{R_\infty} - \frac{\alpha^4 Z^4}{4}} \quad (14)$$

#### 3.3.1 Germanium

Für Germanium wird ein Messintervall von  $\vartheta \in [14^\circ, 18^\circ]$  verwendet. Mithilfe der Daten aus Tabelle 5 (grafisch siehe Abbildung 5) kann für Germanium nun die Absorptionsenergie (Formel (9)) der K-Kante bestimmt werden sowie die daraus resultierende Abschirmkonstante nach Formel (14). Die für die Berechnung der Werte verwendete Ordnungszahl ist 32.

$$\begin{aligned}\vartheta_{\text{GE}} &= 16.15^\circ \\ \lambda_{\text{GE,min}} &= 1.12 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ E_{\text{GE,max}} &= 11066 \text{ eV} \\ \sigma_{\text{GE}} &= 3.72\end{aligned}$$

Da die Berechnung der Werte für alle Materialien gleich erfolgt, werden im Folgenden lediglich die Tabellen, Graphen sowie Ergebniss für Zink, Zirkonium, Strontium und Brom vorgestellt.

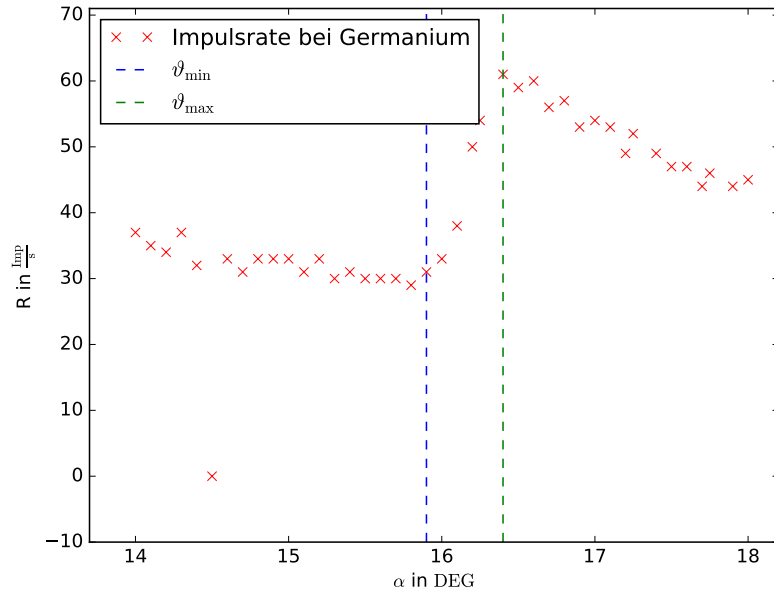


Abbildung 5: Gemessenes Absorptionsspektrum bei Germanium.

Tabelle 5: Gemessene Impulsrate N bei Germanium.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
28.0	37.0	30.8	31.0	33.6	57.0
28.2	35.0	31.0	30.0	33.8	53.0
28.4	34.0	31.2	30.0	34.0	54.0
28.6	37.0	31.4	30.0	34.2	53.0
28.8	32.0	31.6	29.0	34.4	49.0
29.0	0.0	31.8	31.0	34.5	52.0
29.2	33.0	32.0	33.0	34.8	49.0
29.4	31.0	32.2	38.0	35.0	47.0
29.6	33.0	32.4	50.0	35.2	47.0
29.8	33.0	32.5	54.0	35.4	44.0
30.0	33.0	32.8	61.0	35.5	46.0
30.2	31.0	33.0	59.0	35.8	44.0
30.4	33.0	33.2	60.0	36.0	45.0
30.6	30.0	33.4	56.0		

### 3.3.2 Brom

Für Brom wird ein Messintervall von  $\vartheta \in [11^\circ, 15^\circ]$  gewählt. Die Ordnungszahl ist 35. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 6 sowie grafisch in Abbildung 6 dargestellt.

$$\begin{aligned}\vartheta_{\text{BR}} &= 13.2^\circ \\ \lambda_{\text{BR},\text{min}} &= 9.20 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ E_{\text{BR},\text{max}} &= 13480 \text{ eV} \\ \sigma_{\text{BR}} &= 3.84\end{aligned}$$

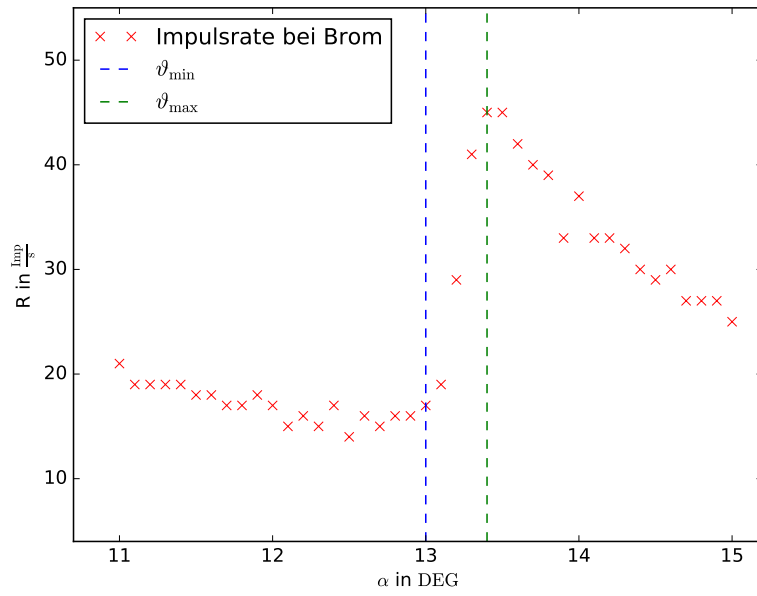


Abbildung 6: Gemessenes Absorptionsspektrum bei Brom.



Tabelle 6: Gemessene Impulsrate N bei Brom.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
22.0	21.0	24.8	17.0	27.6	39.0
22.2	19.0	25.0	14.0	27.8	33.0
22.4	19.0	25.2	16.0	28.0	37.0
22.6	19.0	25.4	15.0	28.2	33.0
22.8	19.0	25.6	16.0	28.4	33.0
23.0	18.0	25.8	16.0	28.6	32.0
23.2	18.0	26.0	17.0	28.8	30.0
23.4	17.0	26.2	19.0	29.0	29.0
23.6	17.0	26.4	29.0	29.2	30.0
23.8	18.0	26.6	41.0	29.4	27.0
24.0	17.0	26.8	45.0	29.6	27.0
24.2	15.0	27.0	45.0	29.8	27.0
24.4	16.0	27.2	42.0	30.0	25.0
24.6	15.0	27.4	40.0		

### 3.3.3 Zirkonium

Das gewählte Messintervall von Zirkonium ist  $\vartheta \in [8^\circ, 12^\circ]$ . Die Ordnungszahl von Zirkonium ist 40. Alle Daten sind in Tabelle 7 sowie Abbildung 7 dargestellt.

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{\text{ZR}} &= 9.85^\circ \\
 \lambda_{\text{ZR,min}} &= 6.89 \cdot 10^{-11} \text{ m} \\
 E_{\text{ZR,max}} &= 17993 \text{ eV} \\
 \sigma_{\text{ZR}} &= 4.10
 \end{aligned}$$

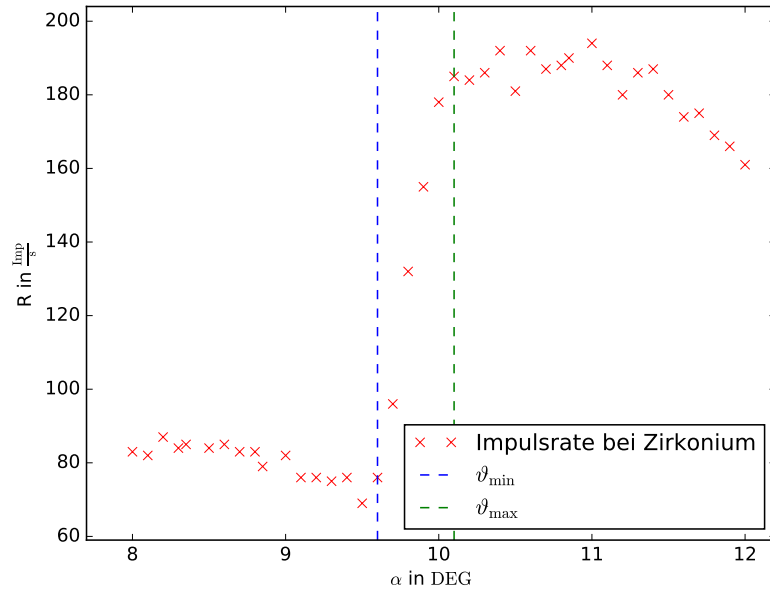


Abbildung 7: Gemessenes Absorptionsspektrum bei Zirkonium.

Tabelle 7: Gemessene Impulsrate N bei Zirkonium.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{Imp}{s}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{Imp}{s}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{Imp}{s}$
16.0	83.0	18.8	76.0	21.6	188.0
16.2	82.0	19.0	69.0	21.7	190.0
16.4	87.0	19.2	76.0	22.0	194.0
16.6	84.0	19.4	96.0	22.2	188.0
16.7	85.0	19.6	132.0	22.4	180.0
17.0	84.0	19.8	155.0	22.6	186.0
17.2	85.0	20.0	178.0	22.8	187.0
17.4	83.0	20.2	185.0	23.0	180.0
17.6	83.0	20.4	184.0	23.2	174.0
17.7	79.0	20.6	186.0	23.4	175.0
18.0	82.0	20.8	192.0	23.6	169.0
18.2	76.0	21.0	181.0	23.8	166.0
18.4	76.0	21.2	192.0	24.0	161.0
18.6	75.0	21.4	187.0		

### 3.3.4 Strontium

Strontium besitzt die Ordnungszahl 38. Für die Messung wird ein Intervalle von  $\vartheta \in [9^\circ, 13^\circ]$  betrachtet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8 und Abbildung 8 dargestellt.

$$\begin{aligned}\vartheta_{\text{SR}} &= 11.0^\circ \\ \lambda_{\text{SR},\text{min}} &= 7.69 \cdot 10^{-11} \text{ m} \\ E_{\text{SR},\text{max}} &= 16132 \text{ eV} \\ \sigma_{\text{SR}} &= 3.96\end{aligned}$$

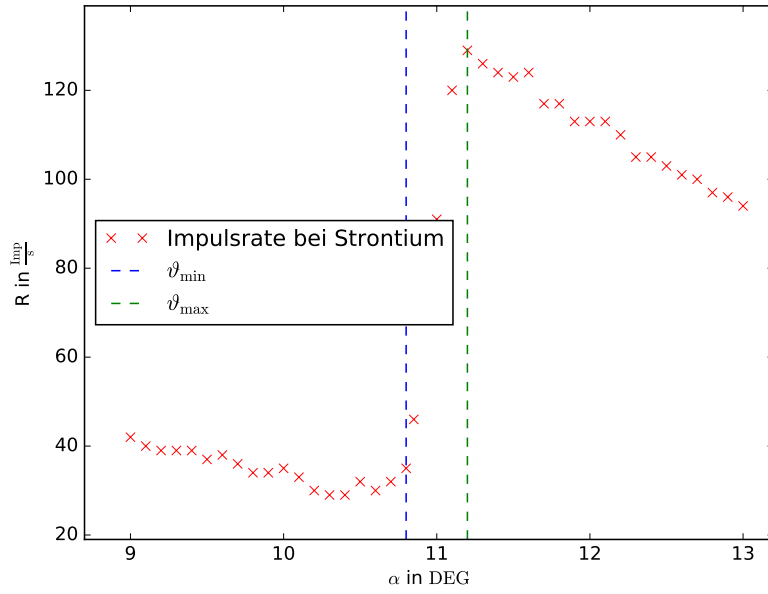


Abbildung 8: Gemessenes Absorptionsspektrum bei Strontium.

Tabelle 8: Gemessene Impulsrate N bei Strontium.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
18.0	42.0	20.8	29.0	23.6	117.0
18.2	40.0	21.0	32.0	23.8	113.0
18.4	39.0	21.2	30.0	24.0	113.0
18.6	39.0	21.4	32.0	24.2	113.0
18.8	39.0	21.6	35.0	24.4	110.0
19.0	37.0	21.7	46.0	24.6	105.0
19.2	38.0	22.0	91.0	24.8	105.0
19.4	36.0	22.2	120.0	25.0	103.0
19.6	34.0	22.4	129.0	25.2	101.0
19.8	34.0	22.6	126.0	25.4	100.0
20.0	35.0	22.8	124.0	25.6	97.0
20.2	33.0	23.0	123.0	25.8	96.0
20.4	30.0	23.2	124.0	26.0	94.0
20.6	29.0	23.4	117.0		

### 3.3.5 Zink

Für Zink wird ein Messintervall von  $\vartheta \in [17^\circ, 21^\circ]$  gewählt. Die Ordnungszahl von Zink ist 30. Alle verwerteten Daten sind in Tabelle 9 sowie grafisch in Abbildung 9 dargestellt.

$$\vartheta_{\text{SR}} = 18.58^\circ$$

$$\lambda_{\text{SR,min}} = 1.28 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$E_{\text{SR,max}} = 9663 \text{ eV}$$

$$\sigma_{\text{SR}} = 3.55$$

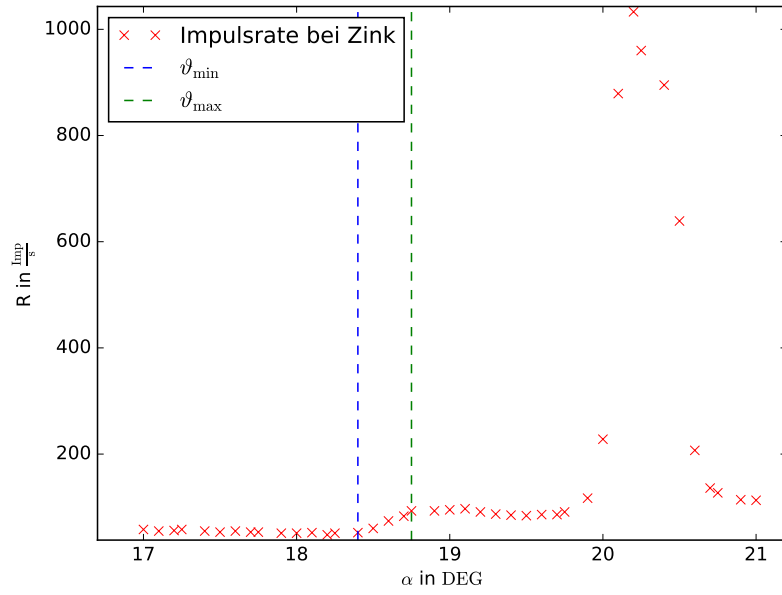


Abbildung 9: Gemessenes Absorptionsspektrum bei Zink.

Tabelle 9: Gemessene Impulsrate N bei Zink.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
34.0	58.0	36.8	52.0	39.5	91.0
34.2	55.0	37.0	60.0	39.8	117.0
34.4	56.0	37.2	74.0	40.0	228.0
34.5	58.0	37.4	83.0	40.2	879.0
34.8	55.0	37.5	93.0	40.4	1033.0
35.0	53.0	37.8	93.0	40.5	960.0
35.2	55.0	38.0	95.0	40.8	895.0
35.4	53.0	38.2	97.0	41.0	639.0
35.5	53.0	38.4	91.0	41.2	207.0
35.8	51.0	38.6	87.0	41.4	136.0
36.0	51.0	38.8	85.0	41.5	127.0
36.2	52.0	39.0	84.0	41.8	114.0
36.4	48.0	39.2	86.0	42.0	113.0
36.5	51.0	39.4	86.0		

### 3.3.6 Rydbergenergie

Mithilfe der bestimmten Bindungsenergie kann nun gemäß Formel (3) die Rydbergenergie bestimmt werden. Dafür wird die Energie  $\sqrt{E_n}$  gegen die Ordnungszahl  $Z$  ausgetragen und gemäß der nachfolgenden Formeln ((15) und (15)) eine lineare Regression durchgeführt. Dabei wird aufgrund der Betrachtung der K-Kante  $n = 1$  gewählt.

$$\sqrt{E_n} = \sqrt{R_\infty} \cdot Z \quad (15)$$

$$f(x) = A\hat{c} + B \quad (16)$$

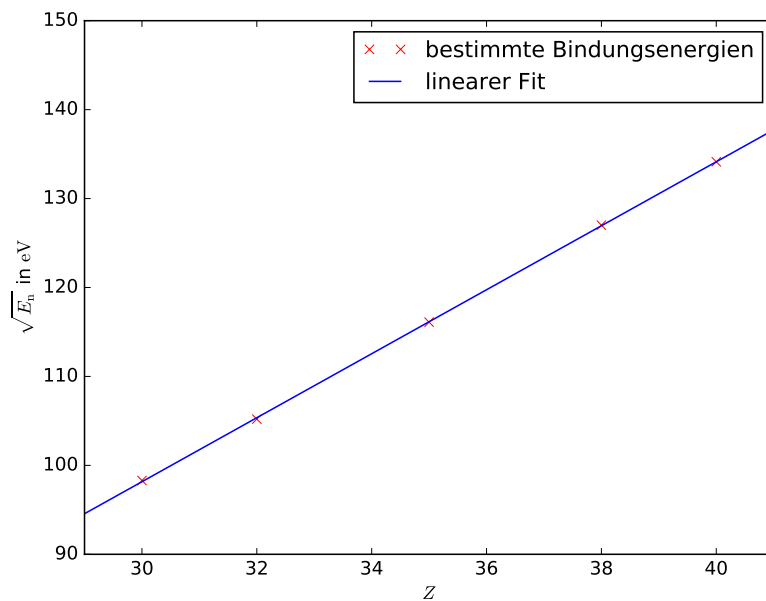


Abbildung 10: Abhängigkeit der Bindungsenergie von der Ordnungszahl

Die lineare Regression ist noch einmal grafisch in Abbildung 10 dargestellt. Dabei ergeben sich für die Parameter der linearen Regression folgende Werte:

$$A = (3.60 \pm 0.2) \sqrt{\text{eV}}$$

$$B = (-9.8 \pm 0.6) \text{eV}$$

$$Ryd_{\text{exp}} = A^2 = (12.94 \pm 0.11) \text{eV}$$

### 3.3.7 Betrachtung der L-Kanten von Gold

In dem letzten Teil des Experimentes werden noch einmal die  $L_{\text{II}}$  und  $L_{\text{III}}$  betrachtet. Zur Messung wird ein Intervall von  $\vartheta \in [11^\circ, 17^\circ]$  gewählt. In  $\Delta\vartheta = 0.1^\circ$  Schritten sowie mit einer Integrationszeit von  $\Delta t = 20$  s wird das Intervall abgelaufen. Die verwendeten Daten sind in Tabelle 10 sowie grafisch in Abbildung 11 dargestellt.

Tabelle 10: Gemessene Impulsrate N bei Gold.

$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$	$2\vartheta$ in deg	N in $\frac{\text{Imp}}{\text{s}}$
22.0	109.0	26.2	108.0	30.4	107.0
22.2	107.0	26.4	101.0	30.6	108.0
22.4	103.0	26.6	99.0	30.8	106.0
22.6	101.0	26.8	97.0	31.0	110.0
22.8	105.0	27.0	89.0	31.2	103.0
23.0	96.0	27.2	86.0	31.4	102.0
23.2	95.0	27.4	89.0	31.6	101.0
23.4	91.0	27.6	79.0	31.8	105.0
23.6	94.0	27.8	81.0	32.0	97.0
23.8	90.0	28.0	76.0	32.2	95.0
24.0	88.0	28.2	78.0	32.4	95.0
24.2	89.0	28.4	75.0	32.5	90.0
24.4	86.0	28.6	73.0	32.8	90.0
24.6	89.0	28.8	74.0	33.0	87.0
24.8	91.0	29.0	73.0	33.2	86.0
25.0	90.0	29.2	76.0	33.4	86.0
25.2	93.0	29.4	71.0	33.6	87.0
25.4	92.0	29.6	73.0	33.8	84.0
25.6	90.0	29.8	82.0	34.0	82.0
25.8	99.0	30.0	92.0		
26.0	107.0	30.2	101.0		

Für die beiden Kanten ergeben sich damit folgende Werte:

$$\vartheta_{\text{AU},L_{\text{II}}} = 12.95^\circ$$

$$\lambda_{\text{AU},L_{\text{II}}} = 9.027 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$E_{\text{AU},L_{\text{II}}} = 13735 \text{ eV}$$

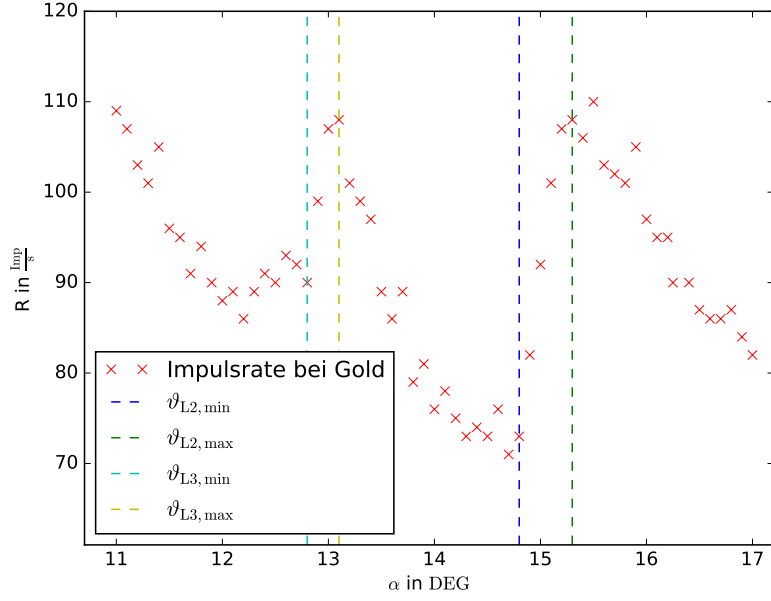


Abbildung 11: Gemessene Impulsrate bei Gold.

$$\begin{aligned}\vartheta_{\text{AU,LIII}} &= 15.05^\circ \\ \lambda_{\text{AU,LIII}} &= 1.046 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ E_{\text{AU,LIII}} &= 11854 \text{ eV}\end{aligned}$$

Aus den beiden Energiewerten bzw. der Energiedifferenz lässt sich nun gemäß Formel (6) die Abschirmkonstante der  $L$ -Kante bestimmen.

$$\sigma_L = (2.13 \pm 0.15) \quad (17)$$

Der angegebene Fehler entspringt dabei der hier verwendeten experimentell bestimmten Rydbergenergie (3.3.6) und wird durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung weitergegeben:

$$\Delta\sigma_L = \Delta_{\text{Ryd}_{\text{exp}}} \cdot \frac{\partial\sigma_L}{\partial\text{Ryd}_{\text{exp}}}. \quad (18)$$



## 4 Diskussion

In Tabelle 11 sind noch einmal alle bestimmten Energiewerte der verschiedenen Stoffe im Vergleich zum Literaturwert dargestellt. Dabei zeigt sich, dass die Abweichungen alle in einem relativ kleinen Bereich von maximal ca. 7 % liegen.

Tabelle 11: Vergleich der bestimmten Energie-Werte mit den Literaturwerten.[2]

Material	Linie	$E_{n,\text{lit}}$ in keV	$E_{n,\text{exp}}$ in keV	$\Delta E_n$ in %
Kupfer	$K_\alpha$	8.06	8.02	4.96
Kupfer	$K_\beta$	8.92	8.88	4.48
Zink	$K$	9.65	9.66	1.04
Germanium	$K$	11.10	11.07	2.73
Brom	$K$	13.47	13.48	7.42
Strontium	$K$	16.10	16.13	1.86
Zirkonium	$K$	17.99	17.99	0
Gold	$L_{\text{II}}$	13.75	13.75	0
Gold	$L_{\text{III}}$	11.93	11.85	6.71

In Abschnitt 3.2 wird das Auflösungsvermögen angesprochen. Die beiden K-Linien hier können aufgrund der Energiedifferenz ihrer Lagen noch differenziert dargestellt werden. Im Vergleich mit der Theorie wird jedoch erkenntlich, dass das Auflösungsvermögen nicht mehr ausreicht, um die  $L_{\text{I}}$  und  $L_{\text{II}}$  getrennt darzustellen.

In Abschnitt 3.2 wurde der Untergrund zudem nur durch ein Polynom 3. Grades genähert. Weitaus genauer wäre eine Berechnung mittels der Shirley- oder Tougaard-Näherung gewesen. Jedoch wurde aufgrund des hohen Aufwands auf die Anwendung dieser Methoden verzichtet. Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit für die Genauigkeit des Experimentes wäre das Aufnehmen von mehr Messwerten im Bereich um das Impulsmaximum gewesen.

Der bei dem Versuch auftretende Bremsberg wurde verwendet, um die maximale Energie des verwendeten Röntgenspektrums zu bestimmen. Da nur durch wenige Werte gefittet wurde, ist der Fehler im Vergleich zu den anderen bestimmten Werten relativ groß.

Der theoretische Wert für die maximale Energie wäre aufgrund der gewählten Beschleunigungsspannung  $E_{\text{max,lit}} = 3,5 \cdot 10^4 \text{ eV}$ . Dieser Wert liegt nicht in dem Fehlerintervall des experimentell bestimmten  $E_{\text{max}}$ . Die Abweichung ist einerseits statistischer bzw. systematischer Fehlernatur. Andererseits spielt jedoch auch die Fermi-Dirac-Verteilung eine kleine Rolle, da manche Elektronen nach dieser schon eine gewisse Anfangsenergie besitzen und anschließend noch beschleunigt werden.

Der Bremsberg beginnt wie beschrieben bei  $\vartheta_{E_{\text{max}}}$ , jedoch ist das Ende des Bremsberges auf dem Graphen 3 nicht mehr erkenntlich. Theoretisch wäre dies jedoch der Winkel, für den die Energie den Wert 0 eV annimmt.

Dier verschiedenen errechneten Abschirmkonstanten in Kapitel 3.3 können nun noch mit den vorher berechneten Werten verglichen werden Tabelle 12. Da diese Werte jedoch mit Formel (4) bestimmt wurden, sind die experimentell bestimmten Werte als genauer anzusehen, da hier die Formel (3) mit einer höheren Ordnung angewandt wurde. Bis auf die Werte von Zink zeigen sich starke Abweichungen, jedoch sind die bereits oben verglichenen Energien nahezu identisch, sodass diese Abweichungen auf die Rechenmethode zurückgeführt werden können.

Tabelle 12: Vergleich der bestimmten Abschirmkonstanten mit den Litaturwerten. [2]

Material	Linie	$\sigma_{\text{lit}}$	$\sigma_{\text{exp}}$
Zink	K	3.56	3.55
Germanium	K	3.42	3.72
Brom	K	3.52	3.84
Strontium	K	3.59	3.96
Zirkonium	K	3.63	4.10

Die in Abschnit 3.3.6 bestimmte Rydbergenergie weist eine Abweichung von lediglich ca. 5 % zum Literaturwert auf. Somit scheint auch hier die Messung ziemlich genaue Messergebnisse zu liefern.

Da in Abschnitt 3.1 bei der Untersuchung der Bragg-Bedingung schon eine Abweichung von 0.6 ° erkenntlich war, lassen sich der groöteil der Abweichungen vermutlich auf diese Ungenauigkeit (bzw. systematischen Fehler) zurückführen. Um bessere Ergebnisse zu erzielen, müsste hier vermutlich die Feinjustierung verbessert werden.

Abschließend lässt sich jedoch sagen, dass die verwendete Messapparatur alle signifikanten Charakteristika des untersuchten Themas aufzeigt und relativ kleine Fehler liefert.

## Literatur

- [1] TU-Dortmund. *V602: Röntgenemission und -absorption*. 13. Juni 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/RoentgenAbs.pdf>.
- [2] NPL - National Physical Laboratory. *X-ray absorption edges, characteristic X-ray lines and fluorescence yields*. 2017. URL: [http://www.kayelaby.npl.co.uk/atomic\\_and\\_nuclear\\_physics/4\\_2/4\\_2\\_1.html](http://www.kayelaby.npl.co.uk/atomic_and_nuclear_physics/4_2/4_2_1.html).