Versuch 356

Kettenschaltung mit LC-Gliedern

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Durchführung: 17.01.2017
Abgabe: 24.01.2017

1 Einleitung

In dem folgenden Versuch geht es um die Betrachtung von Wellen mithilfe eines Schwingkreises als Analogon zum verketteten harmonischen Oszillators in der Mechanik. Dabei werden verschiedene charakteristische Größen der entstehenden stehenden Wellen betrachtet, wie zum Beispiel Dispersionsrelation sowie Phasenverschub zwischen der eingehenden und ausgehenden Spannung.

2 Theorie

2.1 Die Dispersionsrelationen

Im allgemeinen gibt die Dispersionsrelation an, in wie weit verschiedene physikalische Größen Abhängigkeiten von der Frequenz aufweisen. Um diese Abhängigkeiten für eine LC-Kettenschaltung zu bestimmen, wird zunächst mithilfe der Kirchoffschen Regeln die Schwingungsgleichung hergeleitet und auf n Kettenglieder verallgemeinert. Mit der Annahme, dass alle Kettenglieder mit der gleichen Frequenz ω schwingen und lediglich beim Durchlaufen einen Phasenverschub θ erfahren, lässt sich für die Kette folgende Dispersionsrelation herleiten:

$$\omega^2 = \frac{2}{LC}(1 - \cos\theta). \tag{1}$$

Aus dieser Formel lässt sich also die Phasenänderung pro Kettenglied in Abhängigkeit der angelegten Frequenz bestimmen.

Die bei Formel (1) bestimmte Dispersionsrelation lässt sich etwas verallgemeinern, indem eine Kettenschaltung mit alternierend eingebauten Kondensatoren C_1 und C_2 verwendet wird. Bei der Lösung der analog zu der obigen Schaltung bestimmten Schwingungsgleichung wird hierbei die Annahme getroffen, dass alle Kettenglieder immernoch mit der gleichen Frequenz schwingen, allerdings jedes zweite Kettenglied eine andere Amplitude aufweist. Somit ergibt sich für die LC_1C_2-Kette folgende Dispersionsrelation:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{L}\left\{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right\} \pm \frac{1}{L}\sqrt{\left\{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right\}^2 - \frac{4\cos(\theta)^2}{C_1 C_2}}. \tag{2}$$

Wie der Formel (2) entnommen werden kann, bilden sich bei dieser Dispersionsrelation zwei Äste, auch akustischer und optische Ast genannt (siehe Abbildung ??). Zwischen den beiden Ästen existiert ein Bereich, welcher bei der Schwingung nicht auftretenden Frequenzen beinhält. Während ω_1 bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum besitzt, tritt dort für ω_2 ein Minimum auf (siehe Abbildung ??).

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L}\frac{2(C_1+C_2)}{C_1C_2}} \left\{1-\theta^2\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}\right\} \tag{3}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{L(C_1+C_2)}}\,\theta \tag{4}$$

Aus den bestimmten Dispersionsrelationen lassen sich nun ebenfalls die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit herleiten. Da die Gruppenheschwindigkeit in dem Versuch jedoch nicht betrachtet wird, wird im folgenden nur auf die Phasengeschwindigkeit eingegangen:

$$v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\omega}{\theta} = \frac{\omega}{\arccos(-\frac{1}{2}\omega^2 LC)} \tag{5}$$

Die Dispersion verschwindet in dem Bereich kleiner Frequenzen, also bei ω « 1/LC. Beim Erreichen der Grenzfrequenz $\omega_{\mathrm{G}} = 2/\sqrt{\mathrm{LC}}$ erreicht die Phasengeschwindigkeit einen Minimalwert:

$$v_{\mathrm{Ph}_{\mathrm{min}}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \tag{6}$$