

Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Durchführung: 01.02.2017

Abgabe: 08.02.2017

1 Theorie

In dem folgenden Versuch wird ein elektronischer Kreis, im Kern bestehend aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator betrachtet. Mit Hilfe dieser Schaltung kann eine gedämpfte Schwingung betrachtet werden, sowie durch Anschluss eines Generators eine erzwungene Schwingung. Im Laufe des Versuches sollen der Dämpfungswiderstand, die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung sowie die Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung betrachtet werden.

1.1 Der gedämpfte Schwingkreis

Der in diesem Experiment betrachtete gedämpfte Schwingkreis ist im Grunde nur eine Erweiterung des RC-Kreises mit einer Spule. Somit kommen in der Schaltung zwei Energiespeicher vor, zwischen denen die Energie hin und her schwingt. Durch den eingebauten Widerstand geht bei der Schwingung Energie in Form von Wärme verloren und somit wird das ganze System gedämpft. Betrachtet man solch eine Schaltung, kann mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze eine Differentialgleichung für den Strom I mithilfe des Widerstandes R , der Spule L und dem Kondensator C aufgestellt werden:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (1)$$

Durch Lösen der Differentialgleichung ergibt sich mit einem geeigneten Ansatz für die Frequenz ein Term, der von der Stärke der Dämpfung abhängig ist:

$$\tilde{\omega}_{1,2} = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2)$$

Je nachdem wie sich der unter der Wurzel stehende Term verhält, können für die gedämpfte Schwingung verschiedene Fälle betrachtet werden, von denen zwei im Folgendem erläutert werden.

1. Fall : $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

In diesem Fall ist der Term mit der Wurzel rein reell und es entsteht eine harmonische Schwingung, deren Amplitude mit zunehmender Zeit gegen Null geht. Die Einhüllende wird dabei durch eine Exponentialfunktion beschrieben, wie auch in Abbildung 1 anhand der rot gestrichelten Linie zu sehen ist. Mithilfe der Schwingungsdauer lässt sich dann errechnen, nach welcher Zeit die Amplitude auf den e -ten Teil ihrer Ursprungsamplitude abgesenkt ist:

$$T_{\text{ex}} := \frac{2L}{R} \text{s}. \quad (3)$$

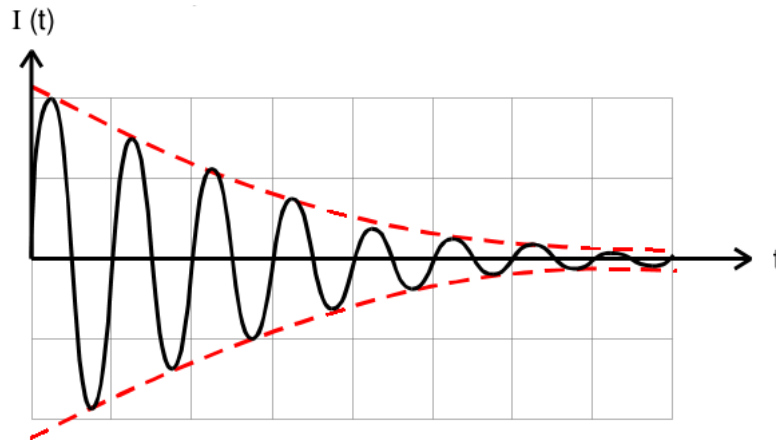


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf einer gedämpften Schwingung [TUD].

2. Fall : $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Bei diesem Fall handelt es sich um eine aperiodische Dämpfung, bei der die Lösung keinen oszillatorischen Teil besitzt. In diesem Versuch wird dabei nur der als aperiodischer Grenzfall bezeichneter Spezialfall betrachtet, bei dem $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ gilt und der Strom ohne Überschwinger am schnellsten gegen Null geht (siehe schwarz gestrichelte Linie Abbildung 2).

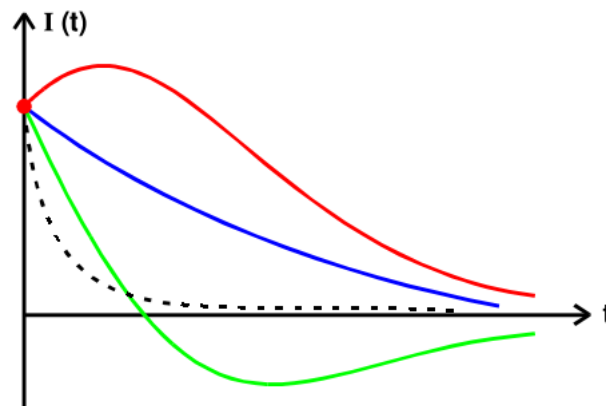


Abbildung 2: Möglicher Zeitverlauf des Stromes in einem Schwingkreis mit aperiodischer Dämpfung [TUD].

1.2 Die erzwungene Schwingung

Wird bei dem vorher betrachteten Schaltkreis noch ein Generator kontinuierliche Spannungsquelle eingebaut, handelt es sich um eine erzwungene Schwingung. Mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze ergibt sich für die Kondensatorspannung U_C folgende Differentialgleichung:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 \exp^{j\omega t}. \quad (4)$$

Aus dieser Differentialgleichung können nun mit einem geeigneten Ansatz eine Funktion für die Kondensatorspannung U_C sowie eine Gleichung für die Phasenverschiebung φ zwischen Erreger- und Kondensatorspannung bestimmt werden:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \right) \quad (5)$$

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (6)$$

Die Kondensatorspannung kann bei der sogenannten Resonanzfrequenz ω_{res} auch einen Wert größer als U_0 annehmen:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (7)$$

Wird bei der Schaltung eine schwache Dämpfung betrachtet, für die $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$ gilt, nähert sich ω_{res} der Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung an. In diesem Fall übertrifft U_C die Erregerspannung U_0 um den Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$, welcher auch als Güte q des Schwingkreises bezeichnet wird.

Ein weiterer Faktor für die Güte eines Schwingkreises ist die Breite der Resonanzkurve, welche durch die beiden Frequenzen ω_+ und ω_- charakterisiert wird. Bei den beiden Frequenzen handelt es sich um die Werte, bei denen die Kondensatorspannung auf den Bruchteil $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ihres Maximalwertes absinkt. Für Güte und Breite folgt dabei folgende Beziehung:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (8)$$

2 Durchführung

Im ersten Teil des Experimentes wird die Zeitabhängigkeit der Amplitude untersucht, um daraus den effektiven Dämpfungswiderstand zu bestimmen. Dafür wird die Schaltung aus Abbildung 3 verwendet. Die verwendete Schaltung besteht aus einem Stromkreis, in dem der Nadelimpulsgenerator, der Widerstand R_2 , eine Spule und ein Kondensator in Reihe geschaltet sind. Unter Verwendung eines Tastkopfes wird die an dem Kondensator abfallende Spannung auf ein Oszillographen gegeben, auf dem dann die abklingende Schwingung beobachtet wird.

Mithilfe des Reglers wird die Zeitachseinstellung so angepasst, bis auf dem Bildschirm ein Intervall zu sehen ist, auf dem die Amplitude etwa um den Faktor 3 bis 8 abgenommen hat. Anschließend werden mit der Cursor sowohl Amplituden der Maxima sowie auch der zeitliche Abstand gemessen und ein Thermodruck angefertigt.

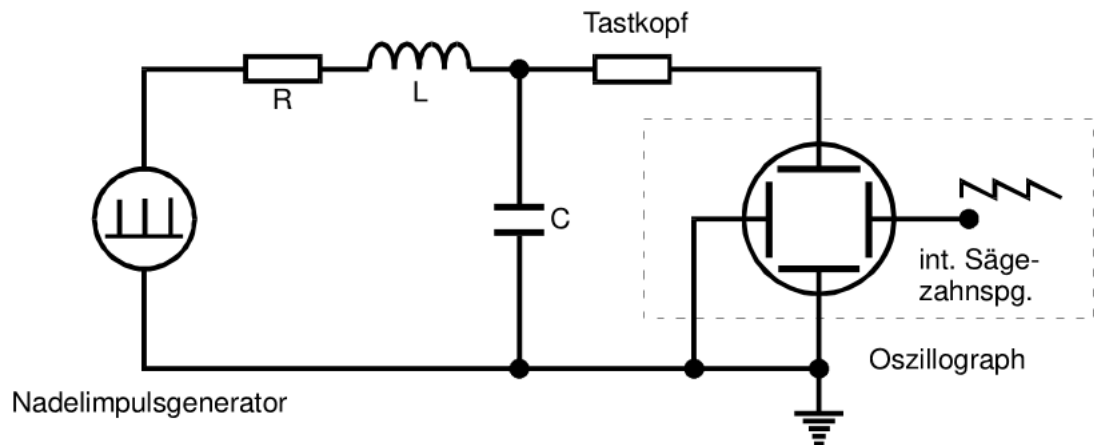


Abbildung 3: Schaltung zur Messung der Zeitabhängigkeit der Kondensatorspannungsamplitude [TUD].

Im zweiten Fall wird die Schaltung aus Abbildung 3 ebenfalls verwendet, jedoch wird nun anstatt des vorherigen Widerstandes ein variabler Widerstand mit einem maximalen Wert von $5\ \Omega$ eingebaut. Der Widerstand wird zuerst auf seinen maximalen Wert eingestellt, sodass auf dem Bildschirm eine kritische Dämpfung beobachtbar ist. Dann wird der Widerstand so lange runter geregelt, bis auf dem Oszilloskop ein Überschwinger zu sehen ist. Der Dämpfungswiderstand ist dabei genau in dem Moment eingestellt, wo gerade noch kein Überschwinger zu erkennen ist.

Für die letzten beiden Teile der Messung wird wieder der Schaltplan aus Abbildung 3 verwendet. Dabei wird der variable Widerstand wieder entfernt und ein fester Widerstand R_2 in die Schaltung eingebaut. Über den Generator wird nun eine Sinusspannung in den Stromkreis eingegeben, wobei die Eingangsspannung nun ebenfalls auf den zweiten Eingang des Oszillographen gegeben wird. Somit werden auf dem Oszilloskop sowohl die Erreger- als auch die Kondensatorspannung sichtbar gemacht. Zuerst werden bei jeder Frequenzveränderung die Amplituden beider Spannungen notiert, wobei die jeweilig eingestellte Frequenz direkt am Generator abgelesen wird. Dann werden mithilfe des Cursors der zeitliche Abstand der beiden Nulldurchgänge beider Spannungsverläufe sowie die Wellenlänge der Kondensatorspannung gemessen, um daraus hinterher die Phasenverschiebung zu berechnen.

3 Auswertung

Die verwendete Schaltung hatte die folgenden Daten.

$$L = (3,53 \pm 0,03) \text{ mH}$$

$$C = (5,015 \pm 0,015) \text{ nF}$$

$$R_1 = (30,3 \pm 0,1) \Omega$$

$$R_2 = (271,6 \pm 0,3) \Omega$$

3.1 Einhüllende der Schwingungskurve

Die Wertepaare $(U_C(t_i), t_i)$ müssen für die Ausgleichsrechnung an die Funktion (9) bestimmt werden. Die Werte $U_C(t_i)$ wurden mit dem Cursor des Oszilloskops gemessen. Hingegen wurden die Zeiten t_i aus dem Bild der Schwingungskurve mit Hilfe eines Lineals abgelesen. Ein Abbild der Schwingungskurve ist in Abb. 4 dargestellt.

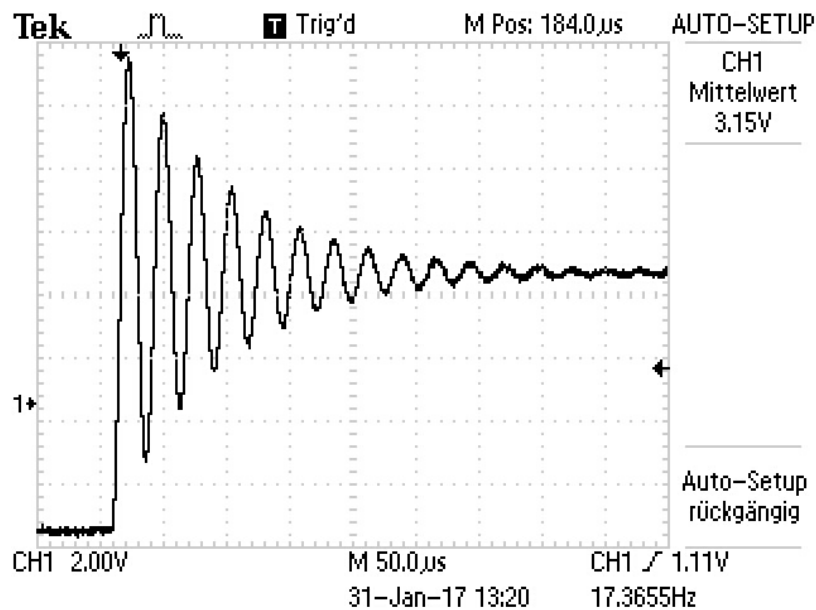


Abbildung 4: Gemessene Spannungsamplituden in Abhängigkeit der Zeit bei der Messung der gedämpften Schwingung in dem ersten Teil der Messung.

Die Schwingungskurve in Abb. 4 wurde beim Widerstand R_1 und einer Generatorfrequenz von 5,82 Hz erstellt.

Die diskreten Wertepaare $(U_C(t_i), t_i)$ sind in der Tabelle 1 dargestellt. Dabei wurden für $U_C(t_i)$ jeweils die Maxima der Schwingungskurve vermessen.

In der Abb. 4 ist die Referenzlinie bezüglich der die Maxima vermessen sind, die niedrigste Linie an der linken Seite.

Zeit in μs	Maxima in V
0,0	15,08
27,5	13,20
55,0	11,92
82,5	10,96
112,5	10,24
142,5	9,68
172,5	9,36
202,5	9,04
235,0	8,88
267,5	8,76
302,5	8,64
337,5	8,52

Tabelle 1: Messdaten der Schwingungskurve.

Mit den Wertepaaren aus Tabelle 1 wurde mittels des *Python*-Paketes *curve_fit* eine Ausgleichsrechnung an eine exponentielle Funktion der Form

$$U_c(t) = a \cdot \exp^{-b \cdot t} + c \quad (9)$$

durchgeführt. Für die Parameter ergeben sich somit die Werte

$$\begin{aligned} a &= (6,62 \pm 0,03) \text{ V} \\ b &= (1,17 \pm 0,01) \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}} \\ c &= (8,44 \pm 0,02) \text{ V} \end{aligned}$$

Die Ausgleichfunktion ist mit den Daten aus Tabelle 1 in Abb. 5 dargestellt.

Der Exponent der Ausgleichsfunktion b liefert über die Formeln (10) und (3) den effektiv Widerstand R_{eff} und die Abklingzeit T_{ex} .

$$R_{\text{eff}} = 2bL \quad (10)$$

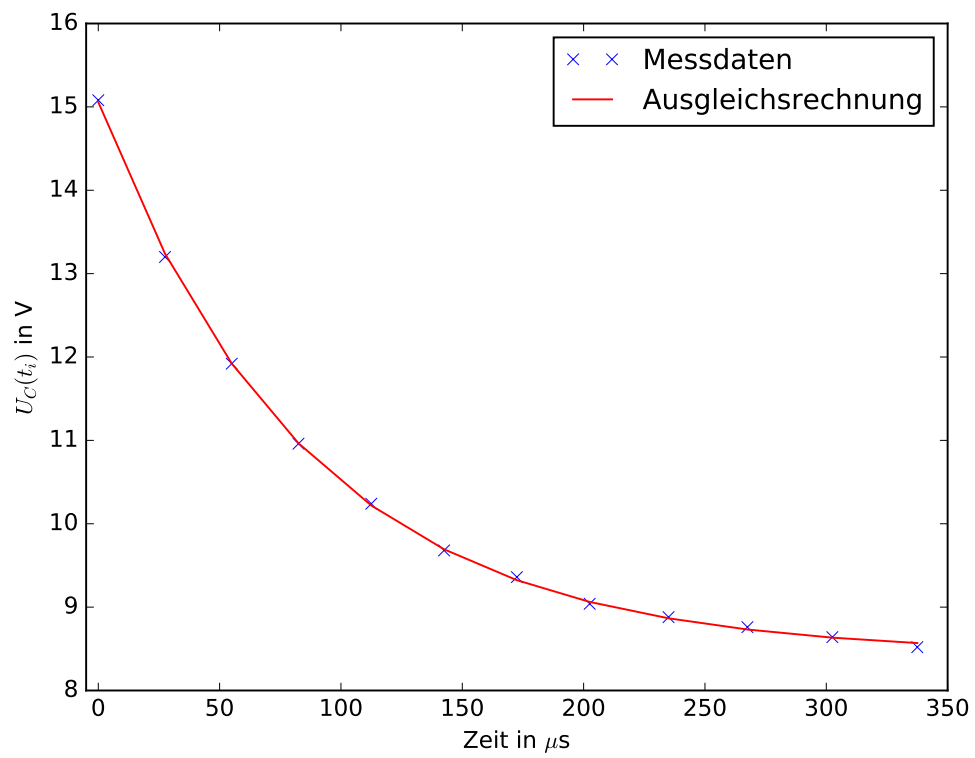


Abbildung 5: Darstellung der Ausgleichsfunktion.

Damit ergeben sich die folgenden Werte.

$$R_{\text{eff}} = (82,4 \pm 1,2) \, \Omega$$
$$T_{\text{ex}} = (8,56 \pm 0,01) \cdot 10^{-5} \, \text{s}$$

Im Vergleich zu dem eingebauten, verwendeten Widerstand R_1 fällt auf, dass R_{eff} deutlich größer ist. Dies ist damit zu begründen, dass R_{eff} den Innenwiderstand des Generators mit einbezieht, welcher in R_1 nicht erfasst wird.

3.2 Widerstand im aperiodischen Grenzfall

Aus den Daten L und C der Apparatur lässt sich über den Zusammenhang:

$$R_{\text{ap}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

der Widerstand des aperiodischen Grenzfalles R_{ap} errechnen. Der Wert R_{ap} wurde auch experimentell bestimmt. Die Messung ergeben die folgenden Werte.

$$R_{\text{ap,theo}} = (1678 \pm 8) \, \Omega$$
$$R_{\text{ap}} = 2700 \, \Omega$$

Die Messung wurde bei einer Frequenz von $\nu = 5,82 \, \text{Hz}$ erhoben. Der Wert R_{ap} ist der experimentell bestimmte Wert. Dieser wurde an dem variablen Widerstand der Apparatur abgelesen und wird als fehlerfrei angenommen.

3.3 Resonanzfrequenz

Die Resonanzfrequenz lässt sich mit den Apparaturdaten über die Formel (7) errechnen. Aus der Kreisfrequenz lässt sich durch Multiplikation mit 2π direkt die Frequenz ν_{res} errechnen. Als Widerstand wurde der gemessene effektiv Widerstand R_{eff} verwendet. Die berechnete Resonanzfrequenz beträgt:

$$\nu_{\text{res}} = (3,774 \pm 0,017) \cdot 10^4 \, \text{Hz}.$$

In dem Diagramm 6 ist die normierte Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Mit normiert ist gemeint, dass die Kondensatorspannung durch die Generatorspannung geteilt wird. Das Diagramm 6 wurde mit den Daten aus Tabelle 2 erstellt.

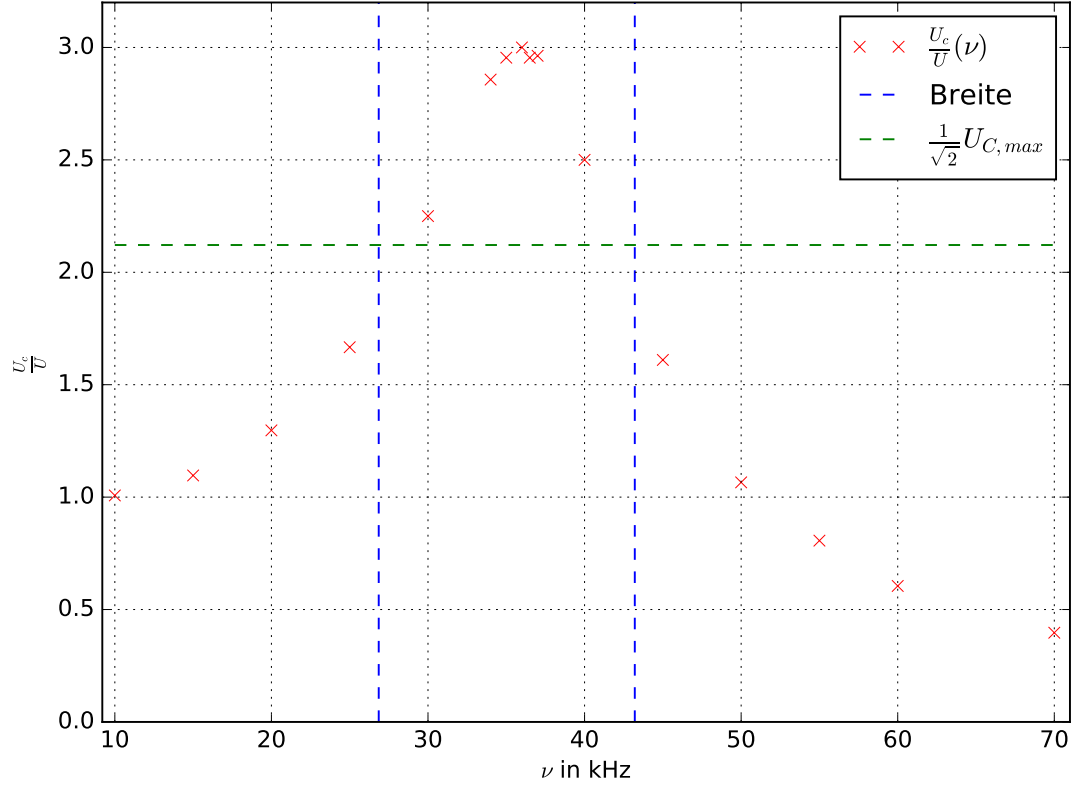


Abbildung 6: Normierte Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Der Maximalwert der Kondensatorspannung wird bei einer Frequenz von

$$\nu_{\text{res},1} = 36 \text{ kHz} \quad (11)$$

gemessen. Die Halbwertsbreite der Kondensatorspannung ist durch die Differenz der Werte ν_+ und ν_- gegeben.

$$\nu_+ \approx 27 \text{ kHz}$$

$$\nu_- \approx 43 \text{ kHz}$$

Damit ergibt sich die Breite zu $\approx 16 \text{ kHz}$.

Der dazugehörigen Theoriewerte kann durch die Formel (12) berechnet werden und ist im folgenden angegeben:

$$\text{Breite} \approx \frac{R_{\text{eff}}}{L} \quad (12)$$

$$\text{Breite}_{\text{theo}} = (27,53 \pm 0,27) \text{ kHz.}$$

Die Werte weichen nur geringfügig voneinander ab. Die Güte q des Schwingkreises ist der Maximalwert des Verhältnisses von Kondensatorspannung zur Generatorspannung. In Abb. 6 ist das Maximalverhältnis bei der Resonanzfrequenz erreicht. An diesem Punkt beträgt das Verhältnis

$$q = 3.$$

Der errechnete Wert liegt bei $q_{\text{theo}} = 3,24 \pm 0,04$.

3.3.1 Resonanzfrequenz aus der Phasenverschiebung

Aus der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz kann die Resonanzfrequenz ν_{res} bestimmt werden. Die Resonanzfrequenz ist der Wert, an dem die Phase zwischen den Spannungen $\varphi_{\text{res}} = \frac{\pi}{2}$ entspricht. Der gemessene Wert wurde aus dem Diagramm 7 abgelesen.

Die Daten der Messung zur Resonanzfrequenz sind in der Tabelle (2) dargestellt.

Das Diagramm 7 wurde mit Daten aus der Tabelle 2 erstellt. Der abgelesene Wert bei einer Phase von φ_{res} ist:

$$\nu_{\text{res},2} = 37 \text{ kHz.}$$

Dieser Wert stimmt mit dem berechneten und in (11) bestimmten Wert nahezu überein.

Die Frequenz ν_1 , bei der die Frequenz gerade $\frac{\pi}{4}$ ist, sowie die Frequenz ν_2 , bei der $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ist sind dem Diagramm 7 näherungsweise zu entnehmen.

$$\nu_1 \approx 30 \text{ kHz}$$

$$\nu_2 \approx 45 \text{ kHz}$$

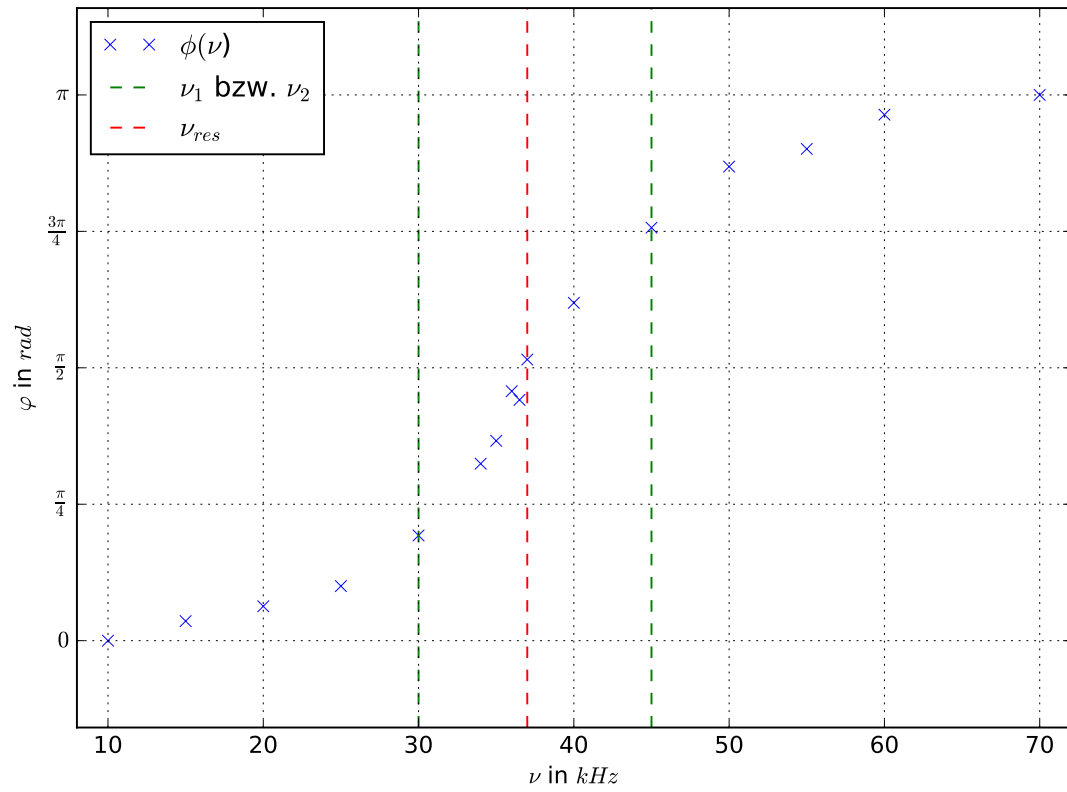


Abbildung 7: Phase zwischen Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

ν_G in kHz	λ in μs	φ in μs	U_G in V	U_C in V
10	98,0	0	5,4	5,4
15	67,0	1,2	5,4	5,9
20	50,8	1,6	5,1	6,6
25	40,0	2,0	5,0	8,4
30	33,2	3,2	4,8	10,8
34	29,6	4,8	4,5	12,8
35	28,4	5,2	4,4	13,0
36	28,0	6,4	4,4	13,2
36,5	27,2	6,0	4,4	13,0
37	26,4	6,8	4,3	12,8
40	25,2	7,8	4,5	11,2
45	22,2	8,4	4,7	7,6
50	19,8	8,6	4,9	5,2
55	18,2	8,2	5,0	4,0
60	16,6	8,0	5,0	3,0
70	14,0	7,0	5,0	2,0

Tabelle 2: Messdaten zur Resonanzfrequenz.

Rechnerisch ergeben sich ν_1 und ν_2 über den folgenden Zusammenhang.

$$\nu_1 = \left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \quad (13)$$

$$\nu_2 = \left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \quad (14)$$

ν_1 und ν_2 ergeben sich zu:

$$\nu_{1,\text{theo}} = (36,21 \pm 0,17) \text{ kHz}$$

$$\nu_{2,\text{theo}} = (38,55 \pm 0,17) \text{ kHz}$$

Die Werte weichen deutlich von den gemessenen Werten ab. Dies ist damit zu begründen, dass die gemessenen Werte nur Näherungen entsprechen. Damit eine höhere Sicherheit der Messdaten besteht, hätten mehr Messwerte um den Bereich einer Phasenverschiebung von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ genommen werden müssen. Es lässt sich aufgrund der mangelnden Anzahl an Messwerten keine präzise Begründung für die signifikanten Unterschiede zwischen den Theoriewerten und den gemessenen Werten machen.

4 Diskussion

Der effektiv Widerstand R_{eff} weicht von dem angelegtem Widerstand R_1 ab, weil bei R_1 der Innenwiderstand des Generators, sowie der Widerstand der verwendeten Kabel vernachlässigt worden ist.

Der gemessene Wert des Widerstandes im aperiodischen Grenzfall R_{ap} weicht um ca. $900\ \Omega$ von dem theoretisch berechneten Wert ab. Der Innenwiderstand ist bei dem theoretischem Wert vernachlässigt worden, weshalb der berechnete Widerstand niedriger sein muss als der gemessene. Zudem hängt die Diskrepanz damit zusammen, dass der experimentelle Wert an der Apparatur nur ungenau abgelesen werden konnte und vermutlich fehlerhaft ist. Es war somit nicht sichergestellt, dass der abgelesene Widerstand tatsächlich mit dem angelegten Widerstand übereinstimmt.

Darüberhinaus weichen die bestimmten Frequenzen ν_1 und ν_2 deutlich von den berechneten Werten ab. Dies ist mit der geringfügigen Aussagekraft der wenigen Messdaten in den Bereich von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ begründet. Im dem für ν_1 und ν_2 relevanten Messbereich wurde jeweils lediglich ein Messwert erhoben. Es ist also verständlich, dass dieser nicht mit dem berechneten Wert übereinstimmt.

Die Güte der Apparatur weicht um ca. 8% von dem berechneten Wert ab. Dies ist im Rahmen der Messung als nicht signifikanter Unterschied zu betrachten.

Messgrößen	Messdaten
Fitparameter a	$(6,62 \pm 0,03)\ \text{V}$
Fitparameter b	$(1,17 \pm 0,01) \cdot 10^4/\text{s}$
Fitparameter c	$(8,44 \pm 0,02)\ \text{V}$
R_{eff}	$(82,4 \pm 1,2)\ \Omega$
T_{ex}	$(8,56 \pm 0,01) \cdot 10^{-5}\ \text{s}$
R_{ap}	$2700\ \Omega$
$\nu_{\text{res},1}$	$36\ \text{kHz}$
ν_+	$27\ \text{kHz}$
ν_-	$43\ \text{kHz}$
q	3
$\nu_{\text{res},2}$	$36\ \text{kHz}$
ν_1	$30\ \text{kHz}$
ν_2	$45\ \text{kHz}$

Tabelle 3: Tabelle aller ermittelten Messgrößen.

Literatur

- [TUD] TU-Dortmund. *Versuch V354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.