Musterlösung: Navier-Stokes

a.)

$$\begin{aligned} v_x =& v_y = 0 \\ v_z =& v(r) \\ \Rightarrow \Delta V =& \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} v(r = R_1) =& u \\ v(r = R_2) =& 0 \end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{c_1}{r} \\ v(r) = c_1 \cdot \ln r + c_2 \end{aligned}$$

Jetzt in die Randedingungen einsetzen:

$$\begin{aligned} u = v(R_1) =& c_1 + \ln R_1 + c_2 \\ 0 = v(R_2) =& c_1 + \ln R_2 + c_2 \\ \Rightarrow c_1 = \frac{u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} & c_2 = -\frac{u \ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$v(r) = u \cdot \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

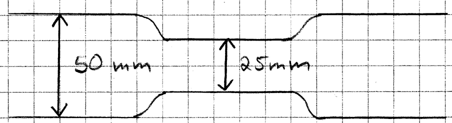
[redacted]

Musterlösung Aufgabe 1

Bernoulli-Gleichung: spezifische Energie der Fluidelemente entlang einer Stromlinie konstant:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const \underset{\rho\, const.}{\Leftrightarrow} \rho\frac{v^2}{2} + p + gz\rho = const$$

(nur bei stationärer Strömung inkompressibler Fluide)



a) $d_1 = 0{,}05\ m \quad \rightarrow A_1 = d^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0{,}001964\ m^2$

$d_2 = d_1/2 \quad \rightarrow A_2 = \frac{A_1}{4} \Rightarrow v_2 = 4 v_1$

$\dot{V} = 0{,}006\ m^3/s$

$\dot{V} = A_1 v_1 \Leftrightarrow v_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = 3{,}055\ m/s$

keine Höhenunterschiede hier:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho ((4v_1)^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho \cdot 15 v_1^2 = 0{,}6998\ bar$$

b) dünnes Rohr: $\rho \cdot g \cdot \Delta h = \Delta p \Leftrightarrow \Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g}$

$$\Delta h = \frac{0{,}6998 \cdot 10^5 \frac{kg}{ms^2}}{1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 7{,}13\ m$$

Aufgabe 3

a) nutze Gaußsches Gesetz:

$$\phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{eing}}{\varepsilon_0}$$

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} \; ; \; \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$$

$$\phi = \oint \vec{E} d\vec{A} = \int_{Mantelfläche} E \, dA = E(r) \cdot 2\pi r \cdot \ell = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}$$

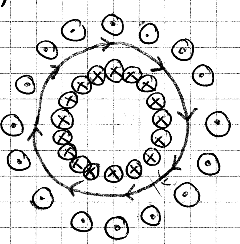
b) nutze Ampersches Durchflutungsgesetz

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I_{eing}$$

→ Kreis um den Draht

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{1}{2\pi r} \cdot \mu_0 I$$

c)



$\underline{r < r_1}$: $I_{eing} = 0$

$\underline{r > r_2}$: $I_{eing} = 0$

$\underline{r_1 < r < r_2}$: $I_{eing} = N \cdot I$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = B 2\pi r = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2\pi r} \cdot \mu_0 N I$$