

Versuch 408

Geometrische Optik

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Durchführung: 09.05.2017

Abgabe: 16.05.2017

1 Theorie

1.1 Zielsetzung

In dem folgenden Versuch sollen mehrere Gesetzmäßigkeiten der geometrischen Optik, wie zum Beispiel das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung, mit verschiedenen Versuchsaufbauten überprüft werden. Zudem sollen diese dann genutzt werden, um für verschiedene Linsen(-Systeme) die Brennweite zu bestimmen.

1.2 Grundlagen der geometrischen Optik

Grundlegend werden in der Optik Linsen aus verschiedenen Materialien betrachtet, die optisch dichter sind als Licht. Durch diese Eigenschaft werden Lichtstrahlen bei Durchgang solch eines Mediums nach dem Brechungsgesetz gebrochen. Da die auftretende Brechung auch Abhängig von der Geometrie des Körpers ist, werden die Linsen meist in zwei Kategorien eingeteilt. Ein Typus ist die Sammellinse, bei der parallel einfallende Lichtstrahlen zum Einfallslot hin gebrochen werden. Dadurch entsteht an dem Punkt, an dem sich die Lichtstrahlen bündeln ein reelles Bild in der Entfernung b (Bildweite) zur Hauptebene der Linse (siehe Abbildung 1).

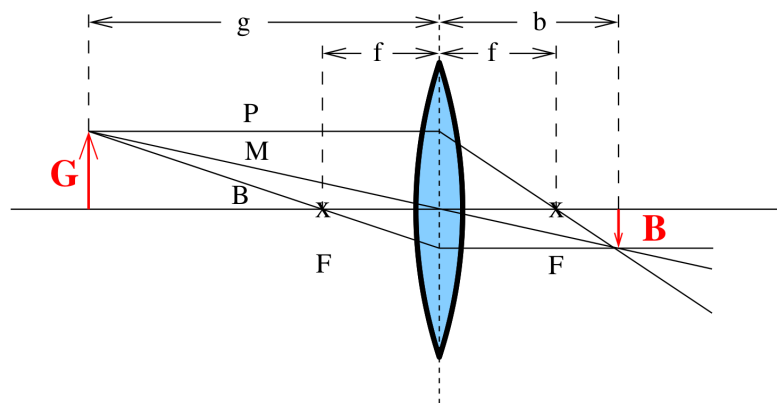


Abbildung 1: Bildrekonstruktion des Strahlenverlaufs bei einer Sammellinse.[1]

Ein weiterer Typus ist die Streulinse, bei der die Lichtstrahlen vom Einfallslot weg gebrochen werden. Dadurch entsteht lediglich ein virtuelles Bild, welches eine negative Bildweite besitzt (siehe Abbildung 2). Aufgrund dieser Eigenschaften wird bei Sammellinsen von einer positiven Brennweite und bei Streulinsen von einer negativen Brennweite gesprochen.

Während bei einer dünnen Linse die Brechung auf lediglich eine Mittelenbene reduziert werden kann, müssen bei dickeren Linsen zwei Hauptebenen betrachtet werden

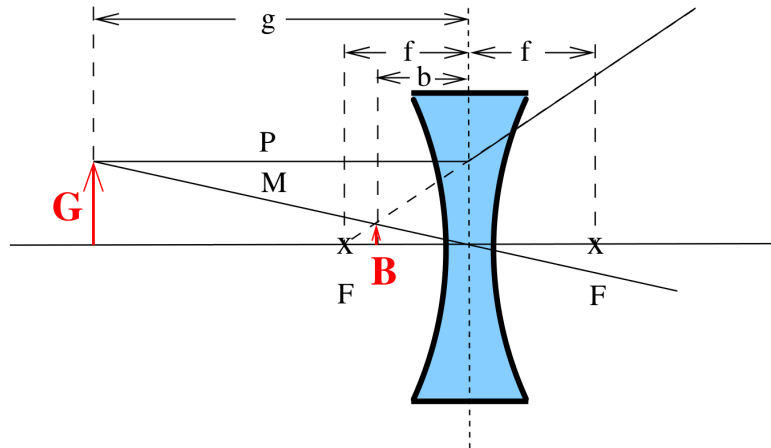


Abbildung 2: Bildrekonstruktion bei einer Streulinse. [1]

(siehe Abbildung 3). Um nun optische Bildrekonstruktionen durchzuführen, werden drei charakteristische Strahlen eingeführt.

- Parallelstrahl: Der Parallelstrahl läuft von der Gegenstand senkrecht auf die Mittel- bzw. Hauptebene zu, wird dort gebrochen und läuft dann durch den Brennpunkt.
- Mittelpunktsstrahl: Der Mittelpunktsstrahl läuft direkt durch die Mitte der Linse und läuft durchgehen in die selbe Richtung.
- Brennpunktstrahl: Der Brennpunktstrahl läuft durch den Brennpunkt auf die Mittel- bzw. Hauptebene zu, wird dort gebrochen und läuft dann senkrecht zur Mittel- bzw. Hauptebene bis zum Bild.

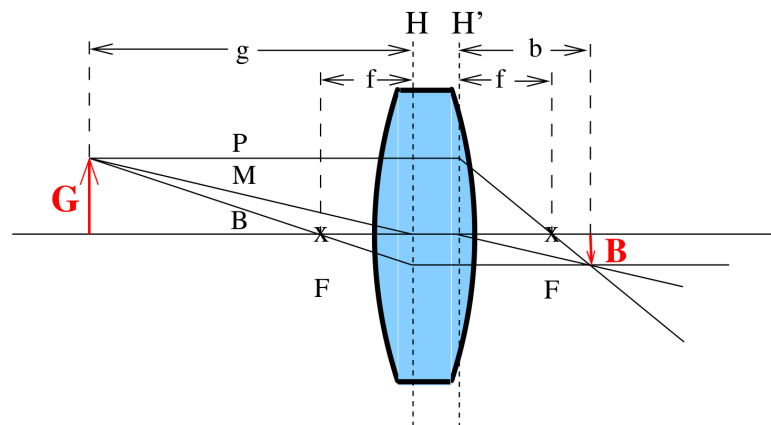


Abbildung 3: Darstellung der Bildrekonstruktion bei einer dicken Linse.[1]

Der Schnittpunkt aller drei Strahlen markiert dann das Abbild. Zwischen den, bei der Bildrekonstruktion betrachteten Größen besteht nach dem Abbildungsgesetz folgender

Zusammenhang:

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}, \quad (1)$$

wobei V den Abbildungsmaßstab, B und G Bild- bzw. Gegenstandsgröße und b und g die Bild- bzw. Gegenstandsweite beschreiben. Für dünne Linsen folgt zudem die Linsengleichung, welche einen Zusammenhang zwischen der Brennweite f sowie b und g herstellt (Formel (2)).

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (2)$$

Bei dickeren Linsen müssen zwei Hauptebenen betrachtet werden. Hier werden Brennweite und weitere Größen immer bezüglich einer Hauptebene angegeben, sodass die Linsengleichung auch hier ihre Gültigkeit behält.

Durch Linsen erzeugte Abbildungen können aufgrund der Gültigkeit der Formeln (1) und (2) für achsennahe Strahlen einen Abbildungsfehler bei der Betrachtung achsenferner Strahlen haben. Bei der sphärischen Aberration liegen die Brennpunkte beider Strahlentypen nicht aufeinander, sodass es zu einer Unschärfe kommt. Dieser Fehler kann allerdings durch eine Irisblende behoben werden. Bei der chromatischen Aberration kommt es aufgrund der unterschiedlichen Wellenlängen im Lichtspektrum zu einer Dispersion bei der Brechung verschiedener Farben.

Eine weitere Größe zur Beschreibung von Linsen ist die Brechkraft D , welche als reziproke Brennweite definiert ist. Bei einem System von mehreren dünnen Linsen können die einzelnen Brechkräfte einfach summiert werden:

$$D = \sum_i^N D_i = \sum_i^N \frac{1}{f_i}. \quad (3)$$

Zur Bestimmung der Brennweite einer Linse werden im Folgendem mehrere Methoden erläutert. Erstens kann die Brennweite durch Messung von Bild- und Gegenstandsweite bestimmt werden. Dafür wird die Linsengleichung (Formel (2)) genutzt, um aus Bild- und Gegenstandsweite die Brennweite zu bestimmen (siehe Abb. 1).

Eine weitere Möglichkeit bietet die Methode nach Bessel. Hier wird der Abstand zwischen Gegenstand und Bild konstant gehalten und es werden zwei verschiedene Positionen gesucht, bei denen das Bild scharf dargestellt wird (siehe Abbildung 4). Da es sich um eine symmetrische Linsenstellung handelt, gilt folgende Beziehung:

$$b_1 = g_2 \text{ und } b_2 = g_1. \quad (4)$$

Mit den Größen $e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2$ (Abstand zwischen Bild und Gegenstand) sowie $d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2$ (Abstand zwischen den beiden Linsenpositionen) lässt sich dann ein Formel für die Brennweite der Linse herleiten (Formel (5)).

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e} \quad (5)$$

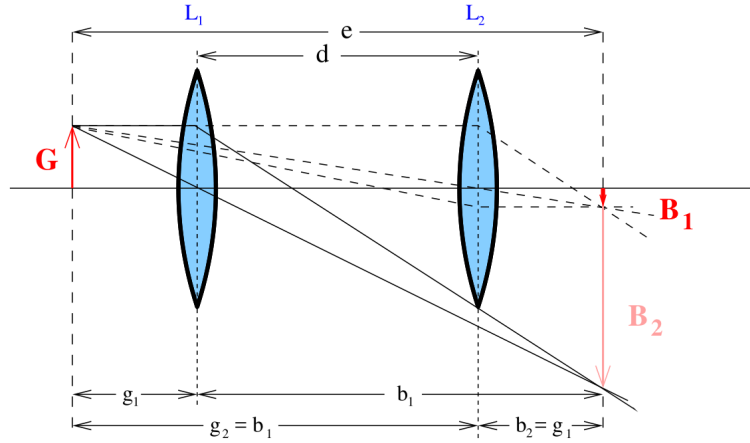


Abbildung 4: Linsenpositionen zur Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Bessel.[1]

Eine weitere Methode zur Bestimmung der Brennweite ist die Methode von Abbe. Bei dieser können Brennweite und Lage der Hauptebenen aus dem Abbildungsmaßstab hergeleitet werden. Dafür werden bei einer dicken Linse wieder Bild- und Gegenstandsweite in Bezug zu einem beliebigen Bezugspunkt A gemessen (siehe Abb. 5). Hierbei gelten folgende Beziehungen:

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{v}\right) + h \quad (6)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + v) + h'. \quad (7)$$

Der gewählte Referenzpunkt A muss dabei nicht innerhalb der Hauptebenen liegen.

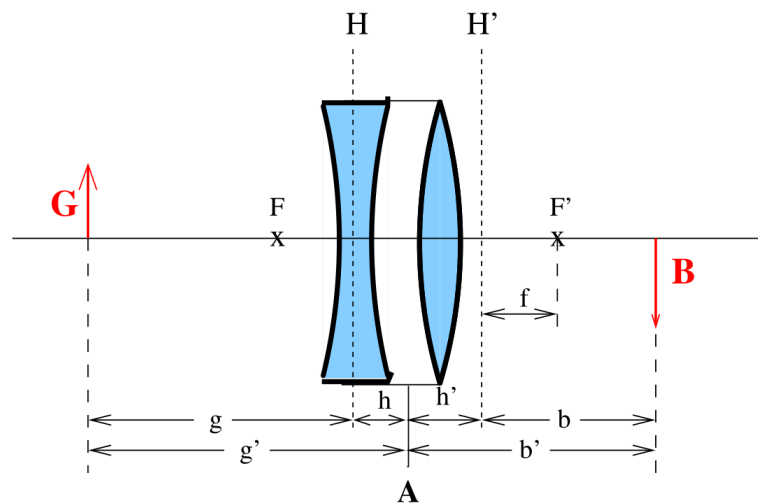


Abbildung 5: Aufbau des Linsensystems bei der Bestimmung der Brennweite mittels der Methode von Abbe.[1]

2 Versuchsaufbau und Durchführung

Es wird ein Aufbau nach Abbildung 6 verwendet. Auf einer Schiene werden die verwendete Blende mit L-förmig angeordneten punktförmigen Spalten (2), die verschiedenen Linsen (3) sowie der Schirm (4) montiert. Die als Lichtquelle verwendete Halogenlampe (1) wird vor der Schiene aufgestellt. Mit der auf der Schiene vorhandenen Längenskala werden die verschiedenen Abstände gemessen.

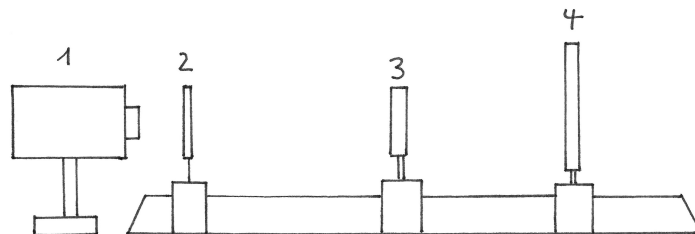


Abbildung 6: Schematische Darstellung des verwendeten Aufbaus bei den folgenden Messungen. [1]

2.1 Bestimmung der Brennweite durch Messung der Bild- und Gegenstandsweite

Zuerst wird eine Sammellinse mit bekannter Brennweite auf der Schiene montiert. Mit der Linse und der Längenskala werden dann verschiedene Gegenstandsweiten eingestellt. Durch Verschieben des Schirmes zu einem Punkt, auf dem das Bild scharf erscheint werden die entsprechenden Bildweiten gemessen. Diese Messung wird 10 mal für verschiedene Gegenstandsweiten durchgeführt. Bei den ersten fünf Messungen werden zudem Bild- und Gegenstandsgröße gemessen.

Anschließend wird eine dehnbare, mit Wasser gefüllte Linse auf der Schiene montiert. Während mit dem selben Verfahren wie bei der Sammellinse die Gegenstand- und Bildweite gemessen werden, wird mit einer Spritze ein konstanter Druck innerhalb der Linse aufrecht erhalten. Auch diese Messung wird 10 mal für verschiedene Gegenstandsweiten durchgeführt.

Danach wird mit der Linse noch einmal die Akkomodation des Auges betrachtet, indem bei konstanter Bild- und Gegenstandsweite der Druck in der Linse solange verändert wird, bis das Bild auf dem Schirm scharf erscheint.

2.2 Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Bessel

Zuerst werden Blende und Schirm auf einen konstanten Abstand gebracht. Nun wird die Sammellinse zwischen Schirm und Blende verschoben, bis auf dem Schirm ein scharfes Bild zu sehen ist. Das dadurch entstehende Wertepaar aus Bild- und Gegenstandsweite wird notiert. Danach wird die Linse bei konstantem Abstand zwischen Schirm und Blende noch weiter verschoben, bis das Bild erneut scharf dargestellt wird. Das zweite Wertepaar wird ebenfalls notiert. Die Messung wird 10 mal für verschiedene Abstände zwischen Blende und Schirm durchgeführt.

Um die chromatische Abberation betrachten zu können, werden anschließend nacheinander ein roter und ein blauer Filter vor die Blende montiert. Für beide Filter wird die Messung nach der Besselmethode fünf mal durchgeführt.

2.3 Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Abbe

Die Methode nach Abbe beschäftigt sich mit der Brennweitenbestimmung von Linsensystemen. Zuerst wird ein Linsensystem aus Streu- und Sammellinse auf dem Schirm montiert. Dabei werden die Reiter beider Linsen direkt aneinander geschoben und der Berührungspunkt wird als Referenzpunkt A gewählt. Nun wird mithilfe des Systems eine bestimmte Gegenstandsweite eingestellt. Der Schirm wird solange verschoben, bis das Bild scharf erscheint. Das entstehende Wertepaar aus Bild- und Gegenstandsweite, sowie die Bildgröße werden notiert und die Messung anschließend neun mal für verschiedene Gegenstandsweiten wiederholt.

3 Auswertung

Die Größenmessung der Gegenstands- und der Bildgröße wurde mit einem Geodreieck durchgeführt. Die weiteren Messwerte wurden an einem Lineal, welches an der Schiene integriert ist, abgelesen. Es wird ein Ablesefehler von 0,05 cm angenommen. Anhand der genommenen Messwerte wird die Linsengleichung (2) und das Abbildungsgesetz (1) überprüft.

Damit das Abbildungsgesetz überprüft werden kann, sind die Daten der Messung der Gegenstands- und der Bildweite verwendet worden. Die Messdaten sind in Tabelle 1 dargestellt. In den folgenden Gleichungen sind die Mittelwerte der Messung und die dazugehörige Standardabweichung dargestellt.

$$\frac{B}{G} = (56,9 \pm 0,9) \text{ cm} \quad (8)$$

$$\left\langle \frac{b}{g} \right\rangle = (54,30 \pm 0,09) \text{ cm} \quad (9)$$

Tabelle 1: Messdaten der ersten Messung. Brennweite der verwendeten Linse ist bekannt (10 cm).

g in cm	b in cm	Bildgröße B	Brennweite f	Δf
15	27,80	–	9,74	0,02
20	18,40	2,80	9,56	0,02
25	15,30	1,90	9,49	0,02
30	13,85	1,45	9,47	0,02
35	13,10	1,15	9,53	0,03
40	12,50	0,95	9,52	0,03
45	12,05	–	9,50	0,03
50	11,70	–	9,48	0,03
55	11,40	–	9,44	0,03
60	11,25	–	9,47	0,04

Die Fehler der Größen in 1 haben alle den Ablesefehler 0,05 cm.

Die Werte von g und b wurden in (2) eingesetzt und es wurde der Mittelwert der Brennweite bestimmt. Die Brennweite der Linse ist vom Hersteller mit 10 cm angegeben.

$$\langle f_1 \rangle_{\text{gemessen}} = (9,525 \pm 0,009) \text{ cm}$$

Die Verbindungsgereaden zu den Wertepaaren $(g_i | b_i)$ der Linse mit bekannter Brennweite sind in 7 dargestellt.

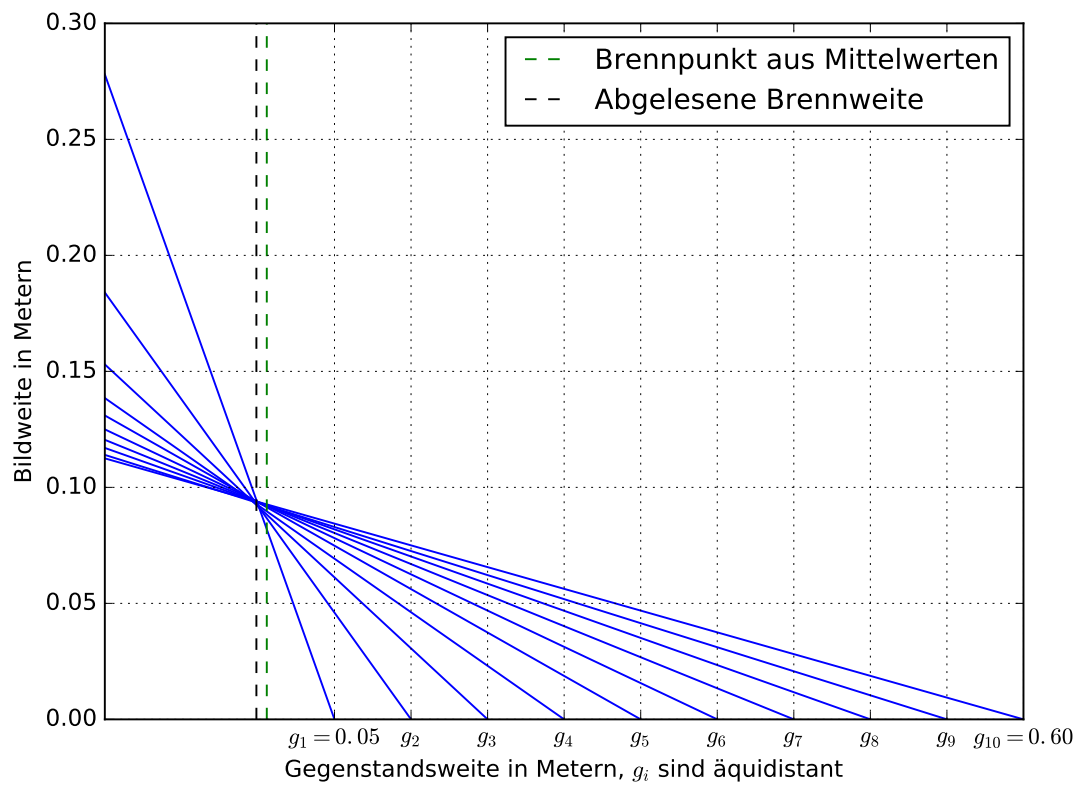


Abbildung 7: Wertepaare $(g_i|b_i)$ aufgetragen. Zudem ist der Mittelwert der gemessenen Brennweite sowie der abgelesene Schnittpunkt der Geraden eingetragen.

Der Schnittpunkt der Geraden im Diagramm 7 ist mit Hilfe des Mauscursors abgelesen worden. Der Ablesefehler wird mit 0,3 cm angegeben. Der Schnittpunkt hat einen Wert von $S_1 = (9,9 \pm 0,3 | 9,4 \pm 0,3)$. Die Angaben sind in Centimetern. Die Fehler wurden als Ablesefehler des Diagrammes angenommen.

Des Weiteren wurde die Brennweite einer unbekannten Linse bestimmt. Es wurde das gleiche Verfahren wie bei der Messung der Linse mit bekannter Brennweite verwendet. Die Messdaten sind in Tabelle 2 dargestellt.

$$\langle f_2 \rangle_{\text{gemessen}} = (8,383 \pm 0,009) \text{ cm}$$

Das Diagramm 8 zeigt die Verbindungsgeraden der gemessenen Wertepaare $(g_i | b_i)$.

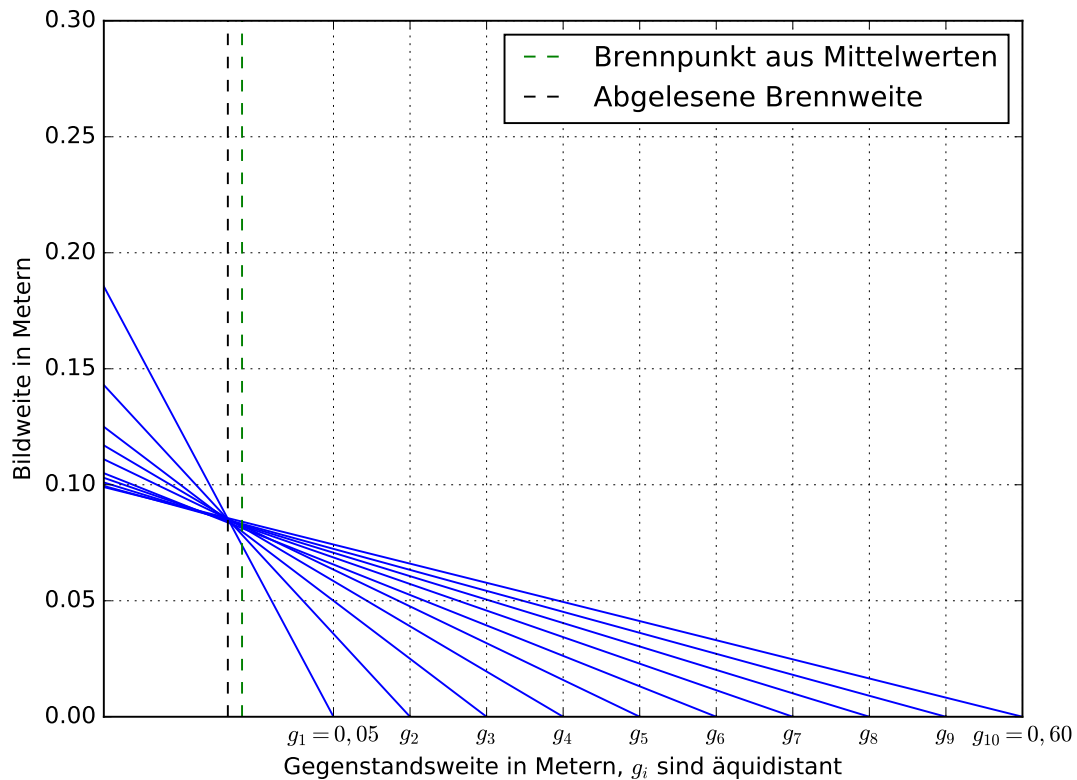


Abbildung 8: Wertepaare $(g_i | b_i)$ aufgetragen. Zudem ist der Mittelwert der gemessenen Brennweite, sowie der abgelesene Schnittpunkt der Geraden eingetragen.

Der abgelesene Schnittpunkt ist gegeben mit $S_2 = (8,1 \pm 0,3 | 8,4 \pm 0,3)$. Die Angaben sind in Centimetern. Es wird ein Ablesefehler von 0,03 cm angenommen.

Die Messgrößen in Tabelle 2 haben alle den Ablesefehler 0,05 cm.

Tabelle 2: Messdaten der Linse mit unbekannter Brennweite.

g in cm	b in cm	Brennweite f	Δf
15	18,55	8,29	0,02
20	14,30	8,34	0,02
25	12,50	8,33	0,02
30	11,70	8,42	0,03
35	11,10	8,43	0,03
40	10,50	8,32	0,03
45	10,30	8,38	0,03
50	10,10	8,40	0,04
55	9,95	8,43	0,04
60	9,90	8,45	0,04

3.1 Bestimmung der Brennweite nach Bessel

Die Messdaten der Messung sind in Tabelle 3 dargestellt. Damit der Datensatz größer ist, werden die Messdaten von b_1, g_1 und b_2, g_2 verwendet. Theoretisch sind $b_1 = g_2$ und $b_2 = g_1$ identisch.

Die Mittelwerte der Messdaten wurden in die Formel (5) eingetragen. Daraus ergibt sich die folgende Brennweite.

$$f_{\text{Bessel}} = 9,67 \text{ cm} \quad (10)$$

Der Fehler von (10) ist bezüglich der Messgenauigkeit vernachlässigbar klein und wird daher weggelassen.

Tabelle 3: Messdaten der Methode nach Bessel

e in cm	g_1 in cm	g_2 in cm
40	16,6	23,70
45	14,2	31,05
50	13,2	37,00
52	12,9	40,00
55	12,6	42,60
58	12,4	45,35
60	12,2	48,00
62	12,2	50,75
65	12,0	53,35
70	11,8	58,45

Tabelle 4: Brennweite nach der Methode von Bessel.

f_{Bessel} in cm	Δf_{Bessel}
9,71	0,01
9,70	0,01
9,72	0,02
9,73	0,02
9,71	0,02
9,73	0,02
9,72	0,02
9,82	0,03
9,78	0,03
9,81	0,03
9,66	0,01
9,63	0,03
9,62	0,03
9,52	0,03
9,60	0,04
9,58	0,04
9,60	0,04
9,54	0,04
9,56	0,04
9,64	0,04

Die Messgrößen in Tabelle 3 haben alle den Ablesefehler 0,05 cm. In Tabelle 4 sind die berechneten Brennweiten dargestellt.

Darüberhinaus wurde die chromatische Abberration untersucht. Die Messdaten sind in Tabelle 5 dargestellt.

$$f_{\text{rot}} = (9,67 \pm 0,01) \text{ cm} \quad (11)$$

$$f_{\text{blau}} = 9,66 \text{ cm} \quad (12)$$

Der Fehler bei (12) ist bezüglich der Messungenauigkeit zu vernachlässigen.

Tabelle 5: Messdaten zur chromatischen Abberration

e in cm	$g_{1,\text{rot}}$ in cm	$g_{2,\text{rot}}$ in cm	$g_{1,\text{blau}}$ in cm	$g_{2,\text{blau}}$ in cm
45	14,35	31,0	14,10	31,2
50	13,20	37,0	13,25	37,1
55	12,60	42,5	12,70	42,7
60	12,35	48,1	12,40	48,2
65	12,00	53,5	12,10	53,3

Die Fehler von e , $g_{1,\text{rot}}$, $g_{2,\text{rot}}$, $g_{1,\text{blau}}$ und $g_{2,\text{blau}}$ betragen jeweils 0,05 cm.

3.2 Bestimmung der Brennweite von Linsensystemen nach Abbe

Theoretisch lässt sich die Brennweite eines Linsensysteme durch die folgende Formel bestimmen.

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (13)$$

Dabei ist d der Abstand der Linsen zueinander und f_i ($i = 1, 2$) die Brennweite der Linsen. Die Brennweite der Sammellinse ist 10cm und die Brennweite der Streulinse ist -10cm . Die beiden Linsen waren $d = 6 \text{ cm}$ voneinander entfernt montiert. Der theoretische Wert beträgt $\approx 16,67 \text{ cm}$. Die Messdaten der Messung sind in Tabelle 6 dargestellt. Mit den Formeln (6) und (7) ergeben sich daraus die folgenden Werte.

$$f_{\text{g}} = (16,93 \pm 0,03) \text{ cm} \quad (14)$$

$$H = (-9,38 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (15)$$

$$f_{\text{b}} = (14,42 \pm 0,02) \text{ cm} \quad (16)$$

$$H' = (13,05 \pm 0,03) \text{ cm} \quad (17)$$

Dabei sind H und H' die Lagen der Hauptebene.

f_g und f_b ergeben im Mittel $f_{\text{Abbe}}(15,68 \pm 1,80) \text{ cm}$.

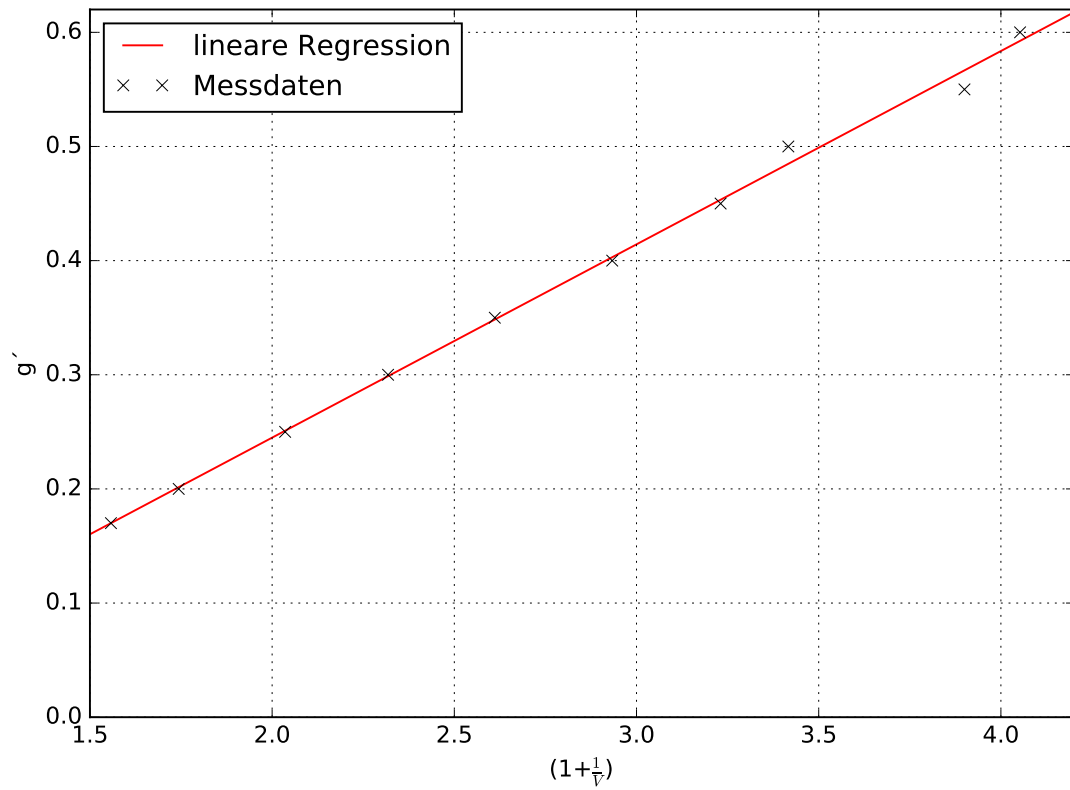


Abbildung 9: Wertepaare $(1 + \frac{1}{V_i} | g_i)$ mit linearer Regression.

Die Messgrößen in der Tabelle 6 haben alle den Ablesefehler von 0,05 cm

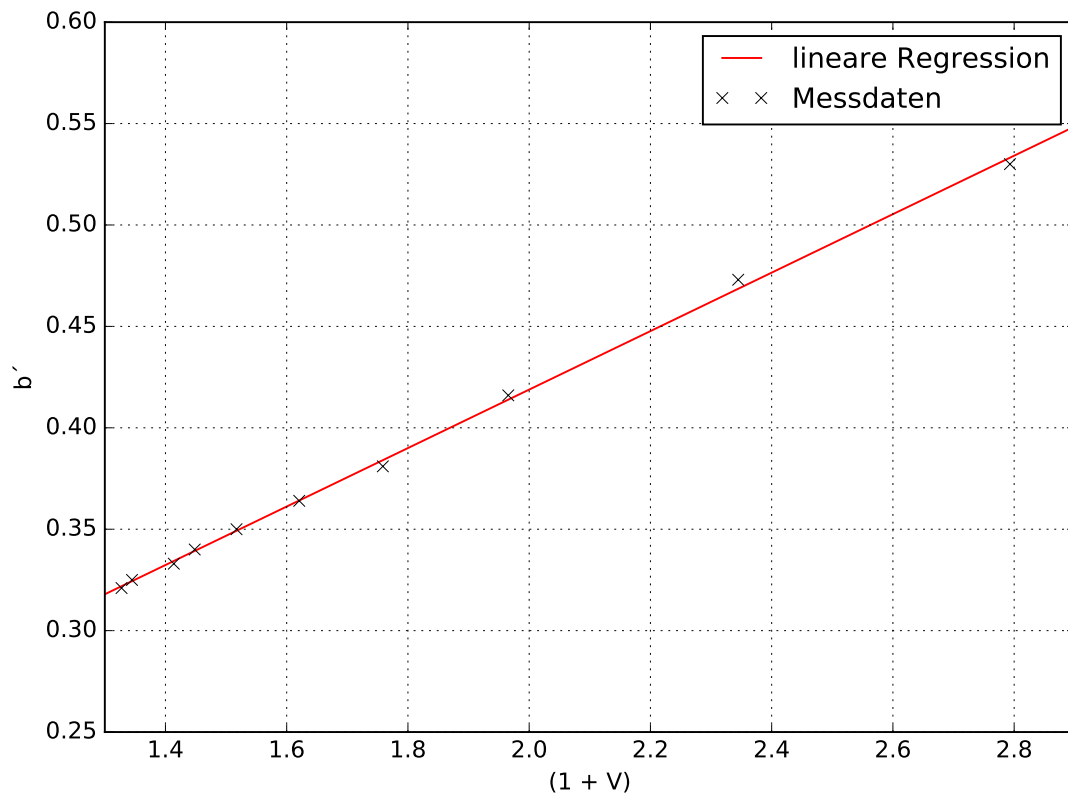


Abbildung 10: Wertepaare $(1 + V_i | b_i)$ mit linearer Regression.

Tabelle 6: Messdaten der Methode nach Abbe

Bildgröße B in cm	$b + g$ in cm	g in cm
5,2	70,0	17
3,9	67,3	20
2,8	66,6	25
2,2	68,1	30
1,8	71,4	35
1,5	75,0	40
1,3	79,0	45
1,2	83,3	50
1,0	87,5	55
0,9	92,1	60

4 Diskussion

Anfangs ist zu erwähnen, dass der Grad der Bildschärfe per Hand, und somit nur subjektiv bestimmt werden konnte. Damit ist anzunehmen, dass die Messergebnisse auf Grund des Messverfahrens fehlerbehaftet sind.

Die Messgenauigkeit der Brennweitenmessung ist in Diagramm 7 einzusehen. Bei einer hohen Messgenauigkeit haben die eingetragenen Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt. Dies ist unter Berücksichtigung der Messunsicherheit, erreicht worden. Die Messergebnisse sind als präzise einzustufen. Die Messergebnisse dieser Messung werden gemeinsam mit der Besselmethode weiter unten diskutiert.

Das Abbildungsgesetz nach (1) wurde ebenfalls untersucht. Die Messungen (8) und (9) ergaben Werte, die um ca. 2,6 cm voneinander abweichen. Die Werte sind nicht durch den statistischen Fehler zu erklären und beruhen auf der Messmethode. Die Bildgröße wurde mit einem Lineal vermessen und es ist anzunehmen, dass der Ablesefehler sogar größer ist als der angenommene Ablesefehler. Zudem trägt die anfangs erwähnte subjektive Einschätzung der Bildschärfe zu der Abweichung bei.

Als Linse mit unbekannter Brennweite wurde eine befüllbare Linse genommen. Über eine Spritze mit Wasser konnte die Befüllung der Linse reguliert werden. Damit in der Linse ein konstanter Druck gewährleistet wurde, musste die Spritze an einer definierten Position fixiert werden. Die Fixierung wurde per Hand bewerkstelligt. Da das Messintervall relativ lang war, konnte ein konstanter Druck über den gesamten Messzeitraum nicht garantiert werden. Dadurch könnte die Messung beeinflusst worden sein. Die Messung ergab eine Brennweite von $f_2 = (8,383 \pm 0,009)$ cm. Der in Diagramm 8 entstandene Schnittpunkt weißt hingegen auf eine hohe Messgenauigkeit hin. Der Schnittpunkt der Geraden liegt bei $S_2 = (8,1 \pm 0,3 | 8,4 \pm 0,3)$. Aus dem Mittelwerte der x - und der y -Koordinate ergibt sich eine Brennweite von $(8,25 \pm 0,30)$ cm. Die beiden Brennweiten aus den verschiedenen Methoden der Brennweitenbestimmung stimmen im Rahmen der Messungenauigkeit überein.

Die Messung der Linse mit unbekannter Brennweite ergab eine Brennweite von ca. 9,03 cm. Die Messgenauigkeit ist in Abbildung 8 einzusehen. Anhand des Schnittpunktes der Verbindungsgeraden ist die Messgenauigkeit im Rahmen der Messung als präzise zu bewerten.

Mit der Methode nach Bessel wurde eine Brennweite von $f_{\text{Bessel}} = 9,67$ cm festgestellt. Die Messung zur Überprüfung von (2) ergab eine Brennweite von $f_1 = (9,525 \pm 0,009)$ cm. Die Abweichung der beiden Werte ist hinsichtlich der Messgenauigkeit maginal. Die graphische Methode, die den Schnittpunkt der Abb. 7 als Brennweite angibt, ergab eine Brennweite von $\approx (9,65 \pm 0,03)$ cm. Dieser Wert ergibt sich aus dem Mittelwert der x - und y - Koordinate des Schnittpunktes. Dieser Wert stimmt ebenfalls im Rahmen der Messungenauigkeit mit den Brennweiten der vorigen Methoden überein. Die bestimmten Brennweiten der verwendeten Linse weichen nur um $\approx 0,5$ cm von der Herstellerangabe ab. Daher sind die Messungen als präzise zu bewerten.

Die chromatische Abberration ergab, dass die Brennweite bei blauer Lichtquelle minimal kleiner ist, als bei roter Lichtquelle. Die Werte weichen aber nicht signifikant voneinander ab, sodass keine Aussage über die chromatische Abberation gemacht werden kann.

Die Messung nach Abbe ergab eine Abweichung von ≈ 1 cm vom theoretischen Wert. Die Abweichung lässt sich nicht durch den statistischen Fehler erklären und ist vermutlich auf die Messmethode zurückführen. Zudem ist die Angabe des Herstellers zu hinterfragen, welche bei den Rechnungen des theoretischen Wertes als fehlerfrei angenommen wurde.

Literatur

- [1] TU-Dortmund. *Versuch V408: Geometrische Optik*. 9. Mai 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V408.pdf>.