

# **Versuch 355**

## **Gekoppelte Schwingkreise**

Sebastian Pape  
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke  
lejonah@web.de

Durchführung: 10.01.2017

Abgabe: 17.01.2017

# 1 Theorie

In dem Versuch V355 werden gekoppelte schwingfähige Systeme in Form von elektrischen Schaltungen betrachtet. Vom besonderem Interesse sind hierbei der stattfindende Energieaustausch zwischen den Systemen, sowie die Schwingungsfrequenzen. Es werden elektrische Schaltungen betrachtet, da die Amplituden und Frequenzen der Schwingungen besonders präzise gemessen und beobachtet werden können.

## 1.1 Gekoppelte Schwingungen

Als eine Schwingung wird ein Vorgang bezeichnet, bei dem ein System periodisch zwischen zwei Zuständen wechselt. Werden zwei schwingende Systeme gekoppelt, wechselwirken diese miteinander. Die Wechselwirkung wird in Form von einem Energieaustausch zwischen den Systeme vollzogen. In dem Versuch wurden zwei identische Schwingkreise über einen Kopplungskondensator  $C_K$  gekoppelt. Eine schematische Darstellung eines gekoppelten elektrischen Schwingkreises ist in der Abb. 1 dargestellt.

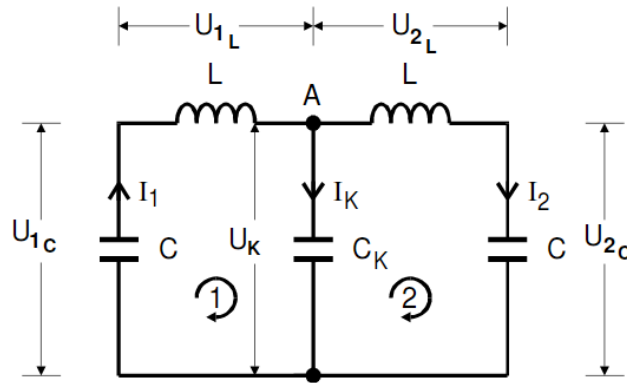


Abbildung 1: Gekoppelter elektrischer Schwingkreis.[1]

Über die Kirchhoffschen Regeln und Differentiation lassen sie die folgenden Schwingungsgleichungen aufstellen.

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (1)$$

$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C}I_2 - \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (2)$$

Über Addition und Subtraktion werden (1) und (2) zu:

$$L(\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (3)$$

$$L(\ddot{I}_1 - \ddot{I}_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)(I_1 - I_2) = 0. \quad (4)$$

Die Lösung von (3) ist eine Schwingungsgleichung mit der Frequenz

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_{Sp})}}. \quad (5)$$

Die DGL (4) ist ebenfalls lösbar durch eine Schwingungsgleichung. Die Lösung hat eine Frequenz von

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1} + C_{Sp}\right)}}. \quad (6)$$

Die Lösungen haben die Form:

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1,0} + I_{2,0}) \cos(2\pi\nu^+t) \quad (7)$$

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1,0} - I_{2,0}) \cos(2\pi\nu^-t). \quad (8)$$

Die ermittelten Frequenzen  $\nu^+$  und  $\nu^-$  heißen Fundamentalfrequenzen, da sie die Frequenzen der Fundamentalschwingungen sind. Als Fundamentalschwingungen werden die Spezialfälle der Schwingungen eines gekoppelten Systems bezeichnet. Der erste Spezialfall ist, wenn die beiden Oszillatoren mit der selben Amplitude und Frequenz schwingen. In diesem Fall ist die Kopplung minimal, da die Systeme nicht miteinander interagieren und es liegt die Frequenz  $\nu^+$  vor. Der andere Spezialfall beschreibt die gegenphasige Schwingung bei gleicher Frequenz aber entgegengesetzter Amplitude der Systeme. In diesem Fall ist die Kopplung maximal und es liegt die Frequenz  $\nu^-$  vor.

### 1.1.1 Schwebungen

Bei den Fundamentalschwingungen waren beide Oszillatoren bei Betrachtungsanfang gleich- bzw. gegenphasig. Es treten neben den Fundamentalschwingungen verschiedene Schwingverhalten auf, wenn einer der Oszillatoren bei Beobachtungsbeginn z.B. in Ruhe ist. Das dann auftretende Schwingverhalten wird als Schwebung bezeichnet. Dieses Schwingverhalten lässt sich durch die folgenden Gleichungen beschreiben.

$$I_1(t) = I_{1,0} \cos \left( \frac{1}{2} (\omega^+ + \omega^-) t \right) \cos \left( \frac{1}{2} (\omega^+ - \omega^-) t \right) \quad (9)$$

$$I_2(t) = I_{1,0} \sin \left( \frac{1}{2} (\omega^+ + \omega^-) t \right) \sin \left( \frac{1}{2} (\omega^+ - \omega^-) t \right) \quad (10)$$

Dabei ist  $\omega^+ = 2\pi\nu^+$  und  $\omega^- = 2\pi\nu^-$ . Unter der Annahme, dass die Fundamentalschwingungen  $\nu^+$  und  $\nu^-$  ungefähr gleich sind gilt:  $\frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-) \approx \omega^+$ , sowie  $\omega^- - \omega^+ \ll \omega^+$ . In den Gleichungen (9) und (10) wird ersichtlich, dass unter der getroffenen Annahme der erste Faktor in den Gleichungen ungefähr mit der Einzelschwingung eines entkoppelten Oszillators übereinstimmt. Der zweite Faktor beschreibt ebenfalls eine Schwingung mit einer Frequenz  $\ll \omega^+$ . Dies ist der Schwebungsanteil der Schwingung. Die Differenz der Fundamentalschwingungen wird als Schwebungsfrequenz bezeichnet. Die Abbildung 2 zeigt ein exemplarische Darstellung einer Schwebung.

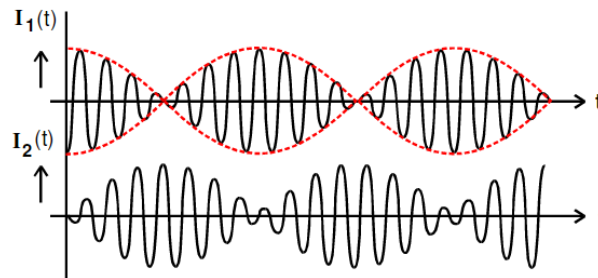


Abbildung 2: Beispiel einer Schwebung.[1]

## 2 Durchführung

### 2.1 Justierung der Schwingkreise

Bevor die ersten Messreihen für den Versuch notiert werden können, müssen die beiden Schwingkreise justiert werden. Für die Justierung wird die Schaltung aus Abbildung 1 verwendet, bei der der Kopplungskondensator überbrückt wird. Zuerst wird dabei grob der Bereich für die Resonanzfrequenz eingestellt, indem die Frequenz gesucht wird, bei der der Strom maximal wird. In einem weiteren Schritt wird die Messung noch einmal etwas genauer durchgeführt, indem an das Oszilloskop noch die Spannung des Sinus-Generators eingespeist wird. Auf dem Oszilloskop wird dann mithilfe des XY-Betriebes und der Betrachtung der Lissajous-Figuren die Resonanzfrequenz bestimmt, indem die Frequenz so lange verschoben wird, bis auf dem Bildschirm ein Kreis zu sehen ist.

Danach werden sowohl Sinus-Generator als auch Oszilloskop an den an den rechten Schwingkreis angeschlossen. Hier wird die bei dem linken Schwingkreis verwendete

Resonanzfrequenz an dem Generator eingestellt und der veränderliche Kondensator so lange angepasst, bis auch hier auf dem Oszilloskop ein Kreis zu sehen ist.

## 2.2 Beobachtung des Energieaustausches

Für den ersten Teil des Versuches wird die Abbildung 3 verwendet. Statt einem Sinus-Generator wird nun eine Rechteckspannung an den Schwingkreis angelegt und die Überbrückung des Kopplungskondensators entfernt. Als nächstes wird mit dem Oszilloskop der Spannungsabfall an dem  $48\,\Omega$  Widerstand gemessen. Die Frequenz wird dabei deutlich reduziert, um auf dem Oszilloskop die Schwebungen und die Schwingungen sichtbar zu machen. Dann wird für jede Kapazitätseinstellung die Anzahl an Maxima innerhalb einer Schwebung gemessen, um hinterher das Verhältniss der Frequenzen zu bestimmen.

## 2.3 Messung der Fundamentalfrequenzen

### 2.3.1 Methode über Phasenverschiebung

Damit die Fundamentalfrequenzen  $\nu_+$  und  $\nu_-$  gemessen werden können, muss ebenfalls der Aufbau aus Abb. 3 verwendet werden. Der Generator muss auf den Sinusspannungsbetrieb umgestellt werden. Die Fundamentalfrequenzen sind in Abhängigkeit von dem Kopplungskondensator  $C_K$  zu bestimmen. Die Generatorspannung wird an das Oszilloskop angeschlossen, sodass die aus dem Aufbau abgeleitete Spannung ihr gegenüber steht. Dadurch entstehen Lissajous-Figuren.  $\nu_+$  ist erreicht, wenn eine Phase von 0 auf dem Oszilloskop dargestellt ist.  $\nu_-$  ist dementsprechend bei einer Phase von  $\pi$  erreicht.

### 2.3.2 Methode über Sweepen

Eine weitere Möglichkeit für das Bestimmen der Fundamentalfrequenzen geht über die Sweepmethode. Sweepen kann an dem Generator eingestellt werden und bedeutet, dass ein voreingestelltes Frequenzintervalle zu einer einstellbaren Zeit von dem Generator durchlaufen wird. Es wird der selbe Aufbau wie bei der vorherigen Methode verwendet. Damit die Fundamentalfrequenzen bestimmt werden können muss die Zeit zwischen den auftretenden Peaks gemessen werden, sowie die Frequenzrate die pro Zeiteinheit von dem Generator widergegeben wird. Der Frequenzanstieg des Generators, um das Frequenzintervall zu durchlaufen ist linear.

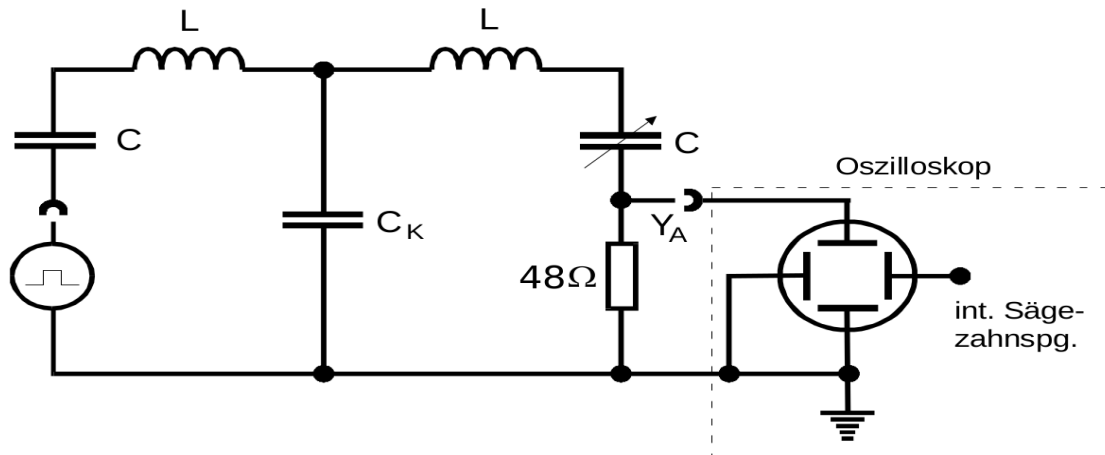


Abbildung 3: Schaltplan der Messungen 3.2 und 3.3.1

### 3 Auswertung

Bei den Messungen wurden folgende Komponenten verwendet, die bei den anschließenden Berechnungen als fehlerfrei betrachtet werden:

$$L = 32.51 \text{ mH} \quad (11)$$

$$C = 8.01 \cdot 10^{-10} \text{ F} \quad (12)$$

$$C_{\text{Sp}} = 3.7 \cdot 10^{-10} \text{ F} \quad (13)$$

$$R = 48 \Omega \quad (14)$$

Bei dem  $C_{\text{Sp}}$  handelt es sich dabei um die Kapazität, die jede Spule besitzt und die bei den Rechnungen ebenfalls beachtet werden muss.

#### 3.1 Justierung der Schwingkreise

Vor den Messungen wurden die beiden Schwingkreise so justiert, dass sie die selbe Resonanzfrequenz besitzen. Bei der Messung ergab sich als Resonanzfrequenz für den linken Schwingkreis folgender Wert:

$$\nu^+ = 31.10 \text{ kHz} \quad (15)$$

Mithilfe der Formel (5) kann der Wert für  $\nu_t^+$  ebenfalls bestimmt werden, sodass sich für die beiden Frequenzen eine Abweichung von ca. 2 % ergibt. Der berechnete Wert für  $\nu_t^+$  kann Tabelle 2 entnommen werden.

### 3.2 Bestimmung des Verhältnisses zwischen Schwingung und Schwebung

Mithilfe der Formeln (5) und (6) werden ebenfalls die theoretischen Frequenzen  $\nu_t^+$  und  $\nu_t^-$  aus den oben angegebenen Bauteilen bestimmt und mit folgender Formel das Verhältniss bestimmt:

$$n_t = \frac{\nu_t^+ + \nu_t^-}{2(\nu_t^- - \nu_t^+)}. \quad (16)$$

In Tabelle 1 sind die bestimmten Werte sowie die Abweichungen von experimentell bestimmten Werten zu den theoretisch berechneten Werten zu sehen. Die Abweichung berechnet sich dabei nach folgender Formel:

$$a = \frac{\Delta n}{n} = \frac{|n - n_t|}{n}. \quad (17)$$

$C_k$ in nF	$\sigma_{C_k}$ in nF	$n$	$\nu_t^+$ in kHz	$\nu_t^-$ in kHz	$\sigma_{\nu_t^-}$ in kHz	$n_t$	$a$ in %
9.99	0.03	14	30.492	32.730	0.006	14.1	0.8
8.00	0.02	12	30.492	33.259	0.008	11.5	4.0
6.47	0.02	10	30.492	33.87	0.01	9.5	5.0
5.02	0.02	8	30.492	34.78	0.01	7.6	5.0
4.00	0.01	6	30.492	35.77	0.01	6.3	5.0
3.00	0.009	5	30.492	37.33	0.02	5	0.8
2.03	0.006	4	30.492	40.09	0.03	3.7	8.0
1.01	0.003		30.492	47.40	0.04	2.3	

Tabelle 1: Bestimmte Werte für die Fundamentalfrequenzen und Vergleich der gemessenen und berechneten Verhältnisse

Da bei dem Bestimmen der Anzahl an Maxima der Schwingung in einem Schwebungsbauch vor allem an den äußeren Rändern die Maxima nicht klar erkennbar sind, wird bei den gemessenen Werten ein Fehler von  $\pm 1$  angegeben.

Für die letzte Kapazitätseinstellung konnte die Anzahl an Maxima nicht eindeutig bestimmt werden, deswegen kann hier kein Vergleich mit den theoretischen Werten erfolgen.

In der Tabelle ist jedoch deutlich zu sehen, dass mit sinkender Kopplungskapazität auch das Verhältnis der Schwingungs- und Schwebungsfrequenz immer geringer wird.

Die angegebenen Fehler berechnen sich dabei mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung und berechnen sich wie folgt:

Da bei allen Bauteilen, außer dem Kopplungskondensator, eine Fehlerfreiheit vorausgesetzt wurde, ergibt sich aufgrund der in Formel (??) erkenntlichen fehlenden Abhängigkeit für  $\nu_t^+$  kein Fehler und für  $\nu_t^-$  folgende Fehlerformel:

$$\Delta\nu_t^- = \sqrt{(\partial_{C_k} \nu_t^- \cdot \Delta C_k)^2} \quad (18)$$

$$= -2\pi \left[ L^3 \left[ \left( \frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right)^{-1} + C_{Sp} \right]^3 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{L}{\left( \frac{C_k}{C} + 2 \right)^2} \cdot \Delta C_k \quad (19)$$

### 3.3 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen mithilfe einer erzwungenen Schwingung

Mithilfe einer erzwungenen Schwingung und verschiedenen Einstellungen des Kopplungskondensators können die beiden Fundamentalfrequenzen experimentell bestimmt werden. In Tabelle 2 sind die gemessenen Frequenzen sowie deren Abweichungen zu den theoretisch bestimmten Werten zu sehen. Es handelt sich dabei um die in Tabelle 1 angegebenen Werte.

Die Abweichungen werden dabei analog zu Formel (17) bestimmt.

$C_k$ in nF	$\nu_+$ in kHz	$a_{\nu_+}$ in %	$\nu_-$ in kHz	$a_{\nu_-}$ in %
9.99	30.77	0.9	33.16	1.3
8.00	30.79	1.0	33.66	1.2
6.47	30.80	1.0	34.25	1.1
5.02	30.81	1.0	35.12	1.0
4.00	30.82	1.1	36.08	0.9
3.00	30.83	1.1	37.60	0.8
2.03	30.84	1.1	40.28	0.5
1.01	30.85	1.2	47.33	0.2

Tabelle 2: Gemessene Fundamentalfrequenzen und die Abweichungen zu den theoretisch berechneten Werten

Die bestimmten Fundamentalfrequenzen und die Theoriewerte sind in Abbildung 4 noch einmal grafisch dargestellt. Wie erwartet ist der Wert für  $\nu_+$  nahezu konstant und der Wert von  $\nu_-$  zeigt einen Abfall. Beide Werte liegen dabei nahe an den Theoriewerten.



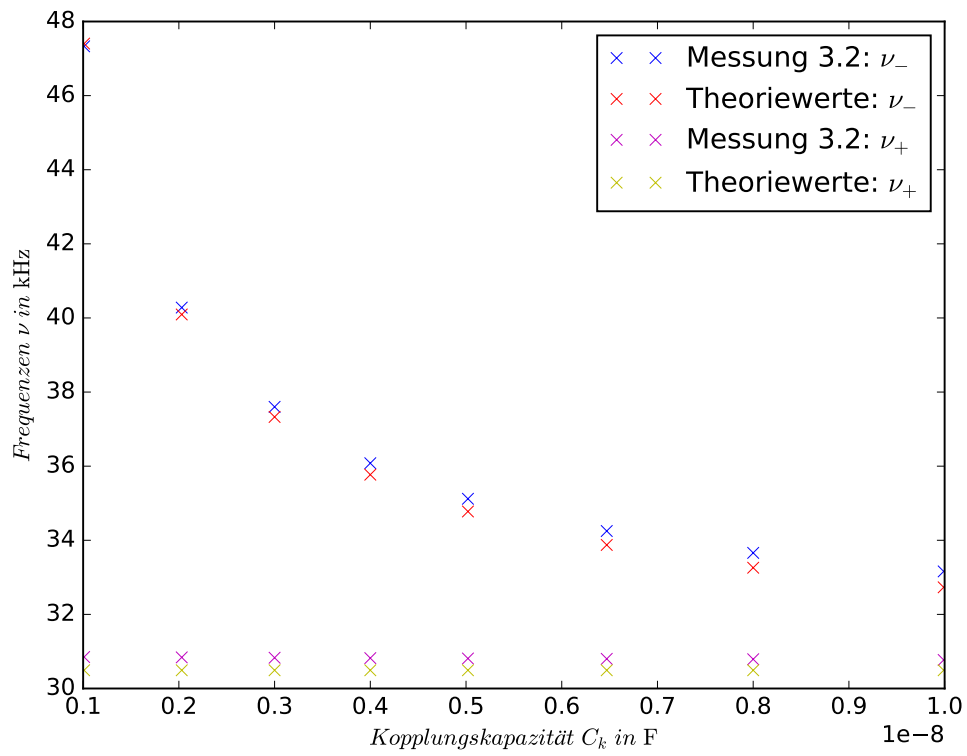


Abbildung 4: Vergleich der in Messung 3.2 bestimmten Werte mit den Theoriewerten

### 3.4 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen mittels eines Sweeps

In dem letzten Teil der Messung wurden mithilfe eines Sweeps erneut die beiden Fundamentalfrequenzen bestimmt. Dazu wurden sowohl Startwert, Endwert sowie auch Zeitspanne des Sweeps eingestellt. Um die Messungen zu vereinfachen wurden der Startwert  $\nu_S$  und Endwert  $\nu_E$  jedes Mal so angepasst, dass der Startwert mit den vorher bestimmten Werten für  $\nu_t^+$  übereinstimmt. Lediglich die Dauer des Sweeps wurde konstant bei  $t_S = 2$  Sekunden gelassen.

Am Oszilloskop wurde dann bei der Messung die Zeitspanne zwischen dem ersten Spannungsmaximum und dem zweiten Spannungsmaximum  $t_D$  gemessen. Mit folgender Formel kann dann der Frequenzwert für  $\nu_-$  bestimmt werden:

$$\nu_- = \nu_S + \frac{t_D}{t_S} \cdot (\nu_E - \nu_S). \quad (20)$$

In Tabelle 3 sind die verschiedenen bestimmten Werte eingetragen, sowie für die Fundamentalfrequenz  $\nu_-$  die Abweichungen zu den theoretischen Werten.

$C_k$ in nF	$\nu_+ (\nu_S)$ in kHz	$\nu_E$ in kHz	$t_D$ in s	$\nu_-$ in kHz	$\Delta\nu_-$ in kHz	$a_{\nu_-}$ in %
9.99	30.77	40.00	0.500	33.078	0.605	1.0
8.00	30.79	40.00	0.600	33.533	0.479	0.9
6.47	30.80	40.00	0.740	34.204	0.229	1.0
5.02	30.81	40.00	0.925	35.060	0.230	0.8
4.00	30.82	40.00	1.125	35.984	0.230	0.6
3.00	30.83	40.00	1.475	37.593	0.230	0.7
2.03	30.84	50.00	1.000	40.420	0.230	0.8
1.01	30.85	55.05	1.360	47.306	0.231	0.2

Tabelle 3: Mithilfe der Sweep-Methode bestimmte Werte für die Fundamentalfrequenzen und die Abweichungen zu den theoretisch bestimmten Werten

Da das Ablesen auf dem Oszilloskop nicht genau ist, wird für die gemessenen Zeiten ein Fehler von  $\pm 0.05$  Sekunden berücksichtigt, welcher in der Tabelle 3 nicht mit angegeben ist.

Auch hier wurden die Fehler mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta\nu_- = \sqrt{(\partial_{t_D} \nu_- \cdot \Delta t_D)^2} \quad (21)$$

$$= \frac{1}{t_S} \cdot (\nu_E - \nu_S) \cdot \Delta t_D. \quad (22)$$

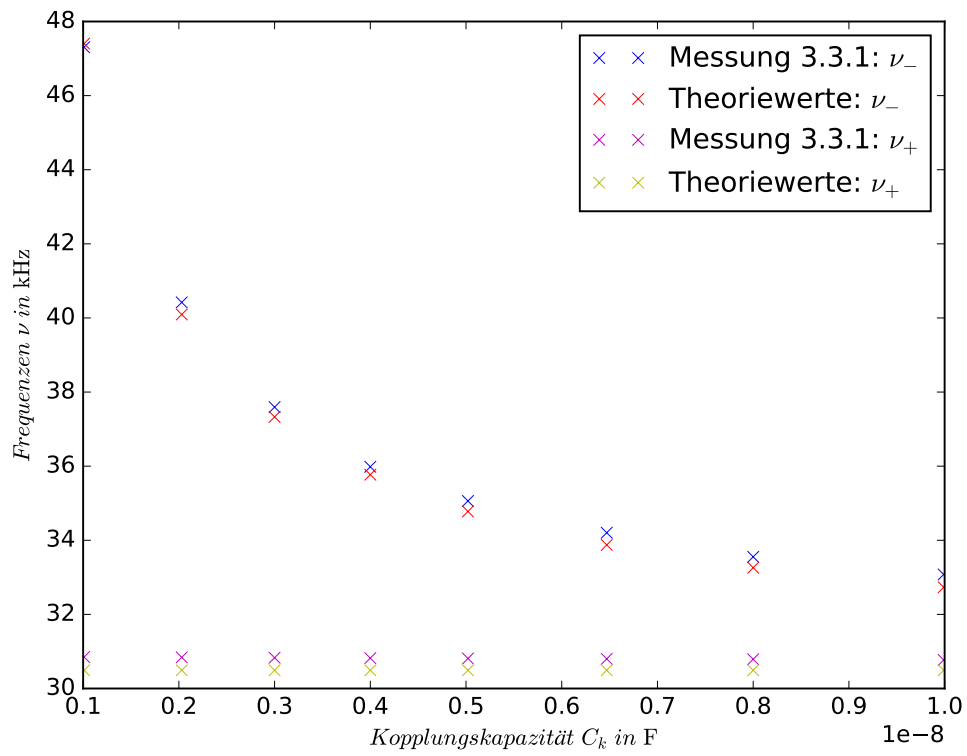


Abbildung 5: Vergleich der in Messung 3.3.1 bestimmten Werte mit den Theoriewerten

Auch hier sind die berechneten Frequenzen sowie die Theoriewerte noch einmal grafisch in Abbildung 5 dargestellt. Wie schon bei der vorherigen Messung kann man einen konstanten Wert für  $\nu_+$  sowie einen Abfall bei  $\nu_-$  beobachten, wobei erneut die Werte nicht bedeutend von den Theoriewerten abweichen, wie auch schon in der Tabelle 3 sichtbar.

## 4 Diskussion

In diesem Abschnitt geht es darum, die gewonnen Messdaten hinsichtlich der Messqualität zu bewerten.

In der ersten Messung des Versuches wurde das Verhältnis von Schwebungs- und Schwingungsfrequenz bestimmt. In Tabelle 1 ist erkennbar, dass die Abweichungen der experimentell bestimmten Werte zu den Theoriewerten relativ schwankend sind und von einem Fehler von 0.8 % ( $C_k = 3.00 \text{ nF}$ ) bis zu einem Fehler von 8.0 % ( $C_k = 2.03 \text{ nF}$ ) reichen.

Wie in den beiden Abbildungen 4 und 5 erkennbar ist, weichen die experimentell bestimmten Werte in den Messung 3.2 und 3.3.1 nur minimal von den Theoriewerten ab. Die Tabellen 2 und 3 zeigen beide, dass die Abweichungen der Werte von  $\nu_+$  und  $\nu_-$  lediglich im Bereich von ca. einem Prozent liegen. Zudem sind die Theoriewerte von  $\nu_t^-$  alle im Bereich der in Messung 3.3.1 bestimmten Fehler für  $\nu_-$ .

Die Abweichungen der Werte können jedoch auf getroffene Annahmen zurückgeführt werden. Zum einen werden die verwendeten Bauteile bei dem Versuch, mit Ausnahme des Kopplungskondensators, als fehlerfrei angenommen. Die bei Messung 3.2 verwendete Methode ist zudem ziemlich ungenau, was sich auch darin widerspiegelt, dass für die Einstellung  $C_k = 1.01 \text{ nF}$  kein Wert für die Anzahl an Maxima bestimmt werden konnte. Vor allem die Differenzierung der Maxima an den äußeren Rändern der Schwebung stellte sich als kompliziert heraus. Des Weiteren wird die abgelesene Frequenz bei dem Generator ebenfalls als fehlerfrei angenommen.

Zusammenfassend ist jedoch erkenntlich, dass sowohl die in Messung 3.3.1 als auch die in Messung 3.3.1 verwendeten Messmethoden geeignet sind, um die beiden Fundamentalfrequenzen bis auf eine Abweichung von ca. 1 % genau zu bestimmen. Lediglich die bei Messung 3.2 verwendete Methode scheint ziemlich ungenau zu sein und ist daher für die genauere Bestimmung des Frequenzverhältnisses nicht zu empfehlen.

## Literatur

- [1] TU-Dortmund. *Versuch V355: Gekoppelte Schwingkreise*. 15. Jan. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf>.