Versuch 206

Die Wärmepumpe

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Durchführung: 15.11.2016
Abgabe: 22.11.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Im folgendem Versuch geht es um den Transport von Wärmeenergie zwischen zwei Wärmereservoiren. Im Gegensatz zu der allgemein gültigen Regel, wird hier nun mithilfe einer Wärmepumpe Wärmeenergie von einem Reservoir mit kaltem Wasser in ein Reservoir mit warmen Wasser transponiert. Während des Versuchs werden verschiedene Messwerte aufgenommen, um hinterher das Verhältniss von Temperatur, Druck sowie aufgewandter Arbeit zu beurteilen.

2 Theorie

Damit nun in dem folgendem Versuch der Wärmefluss von dem kälteren Reservoir zu dem wärmeren Reservoir realisiert werden kann, muss zusätzliche Arbeit aufgewandt werden. Für diesen Prozess wird eine Wärmepumpe benutzt, deren Aufbau später noch in Kapitel 3 erläutet wird und deren Bedingungen zur Vereinfachung der Berechnungen als idealisiert betrachtet werden.

Um das Verhältnis von transponierter Wärmemenge zu aufgewandter Arbeit anzugeben, wird die Güteziffer ν eingeführt. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (**??**) gilt für den Wärmenergietransport zwischen zwei Medien:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \tag{1}$$

$$Q_1 = Q_2 + A \tag{2}$$

Die in unserem Fall geltende 2. Formel (**??**) sagt, dass die vom Transportmedium am Reservoir 2 abgegebene Wärmeenergie Q_1, der Summe der aus Reservoir 1 entnommenen Wärmeenergie Q_2 und der aufgewandten Arbeit A entsprechen muss. Die Güteziffer der Wärmepumpe kann somit über folgende Formel errechnet werden:

$$\nu = \frac{Q1}{A} \tag{3}$$

Nach dem 2.HS der Thermodynamik lässt sich zudem die Beziehung zwischend den Wärmemengen und Temperaturen der beiden Reservoire durch folgende Formel ausdrücken:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \tag{4}$$

Für die Gültigkeit dieser Formel muss jedoch gelten, dass der stattfindende Übertragungsprozess reversibel sei. Somit müsste die aufgewandte mechanische Energie jederzeit vollständig zurückgewonnen werden können. Da es sich dabei um eine idealisierte Annahme handelt, die in der Realität nie zutrifft, muss (**??**) umformuliert werden:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (1) bis (4) folgt somit:

$$\nu_{id} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \tag{6}$$

$$\nu_{real} = \frac{Q_1}{A} < \frac{T_1}{T_1 - T_2} \tag{7}$$

Die Gleichungen (**??**) und (**??**) zeigen, dass eine Wärmepumpe umso effektiver eingestuft werden kann, je kleiner die Differenz zwischen T_1 und T_2 ist.

2.1 Bestimmung der realen Güteziffer ν

Mit dem Werten von T_1 kann nun die pro Zeiteinheit gewonnene Wärmemenge berechnet werden:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_W + m_k c_k)\frac{\Delta T_1}{\Delta t} \tag{8}$$

$$\nu = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N} \tag{9}$$

$m_1 c_w$ und $m_k c_k$ entsprechen dabei den Wärmekapazitäten der Kupferschlange und des Eimers. Für die Güteziffer wird noch N als die zeitlich gemittelte Leistung benötigt.

2.2 Bestimmung des Massendurchsatzes

Mit den Werten von T_2 und der Verdampfungswärme L kann nun der Massendurchsatz Δm berechnet werden:

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_W + m_k c_k)\frac{\Delta T_2}{\Delta t} \tag{10}$$

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = L\frac{\Delta m}{\Delta t} \tag{11}$$

2.3 Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung N_{mech}

Um die mechnanische Kompressorleistung N_{mech} zu bestimmen muss vorher die vom Kompressor aufgebrachte Arbeit zur Komprimierung des Volumens V_a auf das Volumen V_b berechnet werden:

$$A_m = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a\right) V_a \tag{12}$$

Für den Kompressor wird nun näherungsweise angenommen, dass es sich um eine adiabatische Komprimierung handelt, sodass die Poisson-Gleichung als Zusammenhang zwischen Druck und Volumen gilt:

$$p_a V_a^\kappa = p_b V_b^\kappa = pV^\kappa. \tag{13}$$

Mit der Dichte ρ im gasförmigen Zustand, also beim Druck p_a, kann nun N_{mech} berechnet werden:

$$N_{mech} = \frac{\Delta A_m}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a\right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \tag{14}$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Die verwendte Wärmepumpe besteht aus mehreren Komponenten. Grundlegend sind zwei thermisch isolierte Reservoire mit einer festgelegten Wassermenge. Durch beide Reservoire läuft eine Kupferrohr, in dem sich das Gas Dichlodifluormethan befindet. Der Kompressor erzeugt mithilfe der eingebrachten Leistung L in beiden Hälften unterschiedliche Drücke, indem er das Gas "adiabatisch" komprimiert. Das anfangs kondensierte Gas durchströmt zuerst das Kupferrohr in Reservoir 2 und verdampft unter dem dort herrschenden Druck p_a bei der Temperatur T_2. Dabei entzieht es dem Reservoir die Verdampfungswärme und wird danach weiter zum Kompressor geleitet. Dort wird es solange komprimiert, bis der Druck p_b im Reservoir 1 hoch genug ist, um das Gas bei der Temperatur T_1 kondensieren zu lassen. Die entstehende Kondensationswärme wird dort ans Wasser abgegeben, sodass dieses sich erhitzt. In einem nachgeschalteten Reiniger wird die Flüssigkeit von Gasresten getrennt, um eine blasenfreie Flüssigkeitzufuhr zu dem Drosselventil zu gewährleisten. Damit in den Kompressor keine Flüssigkeitsreste gelangen, wird eine Steuervorrichtung angebracht. Die über Temperaturdifferenzen zwischen Ausgang und Eingang des Kompressors die Flüssigkeitzufuhr steuert, sodass eine eventuell zu niedrige Verdampfungsrate in Reservoir 2 ausgeglichen werden kann.

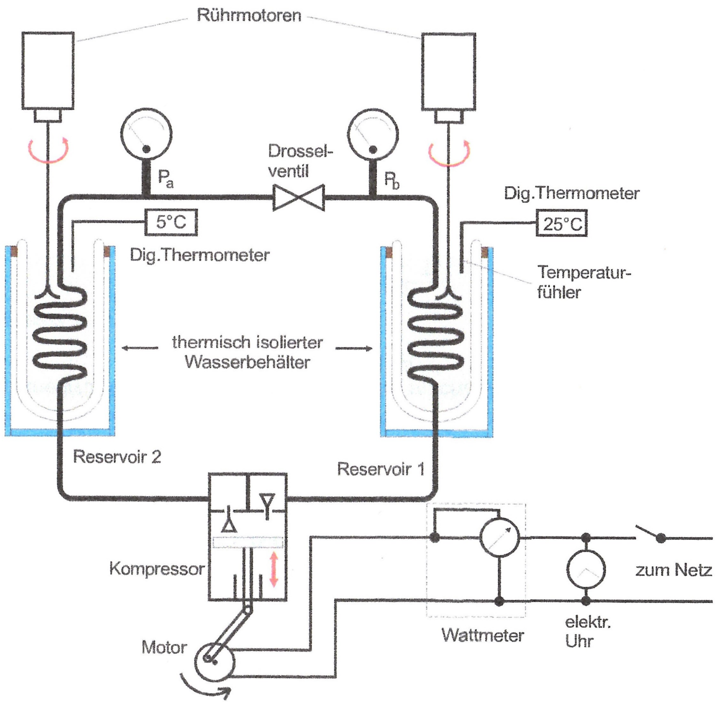


Abbildung 1: Versuchsaufbau

3.2 Durchführung

Am Anfang des Experimentes werden die beiden Reservoire mithilfe eines Messkolben mit 4l Wasser befüllt. Nach Einbau der beiden Reservoire in die Apparatur werden Rührstabe und Kompressor eingeschaltet. Um die beiden Reservoire optimal abzudichten, werden unter die beiden Behälter noch Holzkeile geschoben. Nun werden im Abstand von einer Minute die verschiedenen Drücke und Temperaturen von Reservoir 2 $[p_a, T_2]$ und Reservoir 1 $[p_b, T_1]$, sowie die durch den Kompressor eingebrachte Leistung L gemessen und notiert. Bei dem Druck wird dabei die innere schwarze Skala abgelesen und am Ende wird bei allen Werten noch $1bar$ hinzuaddiert. Sobald die Temperatur im Reservoir 2 die $50°C$ Marke erreicht, wird der Kompressor wieder ausgeschaltet.

4 Auswertung

In der Auswertung werden die gemessenen Temperaturen, Drücke und Leistungen als fehlerfrei angenommen.

4.1 Temperaturverläufe

Die während des Versuches gemessenen Temperaturen von Reservoir 1 und Reservoir 2 sind in dem Diagramm **??** dargestellt. Die Temperatur in K wurde gegenüber der Zeit in s aufgetragen.

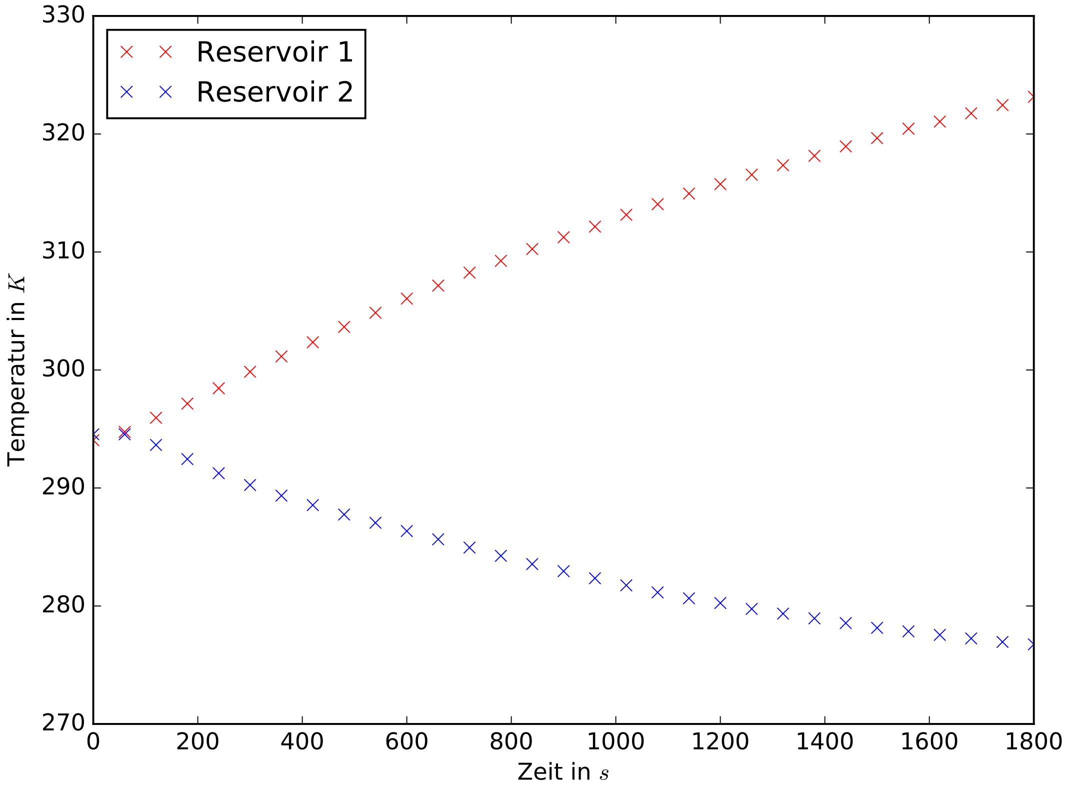
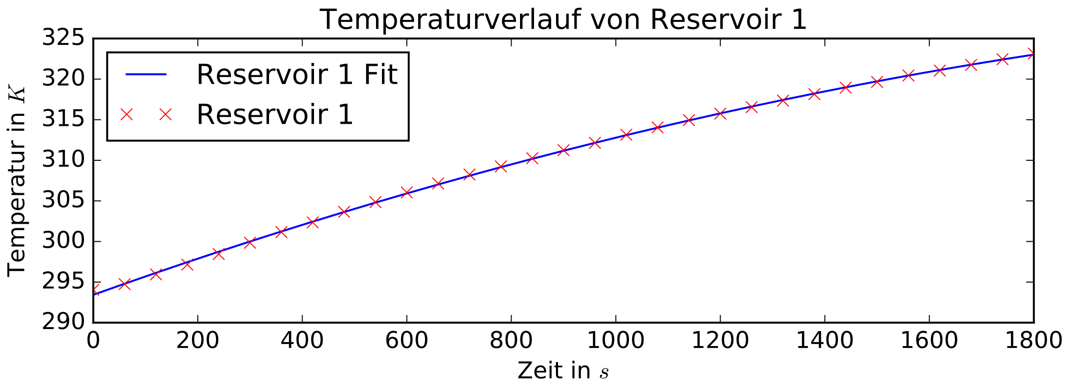


Abbildung 2: Temperaturverlauf

4.1.1 Ausgleichsfunktion

Der Temperaturverlauf der beiden Reservoire wurde darüberhinaus durch eine nichtlineare Ausgleichsrechnung dargestellt. Hierfür wurde die quadratische Funktion $T(t) =$

$A \cdot t^2 + B \cdot t + C$ verwendet. Der Fit wurde mit Hilfe von *curve_fit* erstellt, wobei die Fehler aus der Kovarianz-Matrix von *curve_fit* entstammen. An der Ausgleichskurve wird deutlich, dass sich die Temperaturveläufe relativ präzise approximieren lassen. Die Fehler sind in der selben Einheit, wie der zugehörige Parameterwerte.



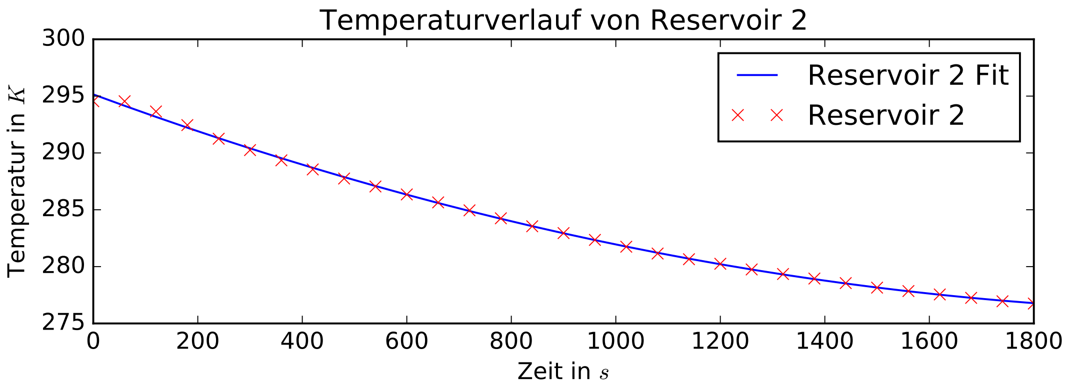


Tabelle 1: Parameter der Ausgleichsrechnung

Reservoir	Parameter A in $\mu\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2}$	*Fehler*	Parameter B in $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$	*Fehler*	Parameter C in K	*Fehler*
1	$-3{,}643$	0,116	0,023	0,000 22	29,343	0,0842
2	3,748	0,127	$-0{,}017$	0,000 24	29,515	0,0923

4.2 Differentialquotient der nicht-linearen Ausgleichsrechnung

Der Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)$ der Ausgleichskurve ergibt sich aus:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \cdot t^2 + b \cdot t + C) = 2A \cdot t + B$$

Der Differentialquotient wurde für die Zeiten 360s, 720s, 1080s und 1440s berechnet. Daraus ergeben sich die Werte:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_1(360) = (0,0204 \pm 0,00023)\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_2(360) = (-0,0143 \pm 0,00025)\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_1(720) = (0,0177 \pm 0,00027)\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_2(720) = (0,0177 \pm 0,00030)\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_1(1080) = (0,151 \pm 0,00033)\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_2(1080) = (0,151 \pm 0,00036)\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_1(1440) = (0,0125 \pm 0,00040)\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_2(1440) = (0,0125 \pm 0,00044)\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$

Die Fehler werden nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt ermittelt:

$$\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2T(t)}{\mathrm{d}tA}\cdot\Delta A\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2T(t)}{\mathrm{d}tB}\cdot\Delta B\right)^2}$$

Dabei ist Δx jeweils der Fehler des hinterstehenden Parameters.

4.3 Bestimmung der Güteziffer ν

In dem folgendem Abschnitt wird die Güteziffer ν der verwendeten Wärmepumpe bestimmt. Diese ergibt sich aus der Formel (**??**). Für die Wärmekapazität der Apparatur wurde der Wert $750\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ verwendet. Dieser war an dem Versuchsaufbaus angegeben. Die Wärmekapazität des Wassers ist für einen Liter mit $4182\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ zu bemessen. In dem Versuch wurden die Reservoire mit 4l Wasser befüllt. Mit der Ausgleichgeraden ergibt sich für ν die Formel:

$$\nu = \frac{1}{N}(m_1 c_\omega + m_k c_k)(2A\cdot t + B) \tag{15}$$

In der Formel (**??**) sind die Parameter A und B die einzigen fehlerbehafteten Größen. Die Fehler wurden mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

Tabelle 2: Güteziffer

Zeit in s	ν_{real}	*Fehler*	ν_{ideal}
360	2,826	0,0322	25,521
720	2,564	0,0395	13,230
1080	2,115	0,0464	9,546
1440	1,748	0,0557	7,895

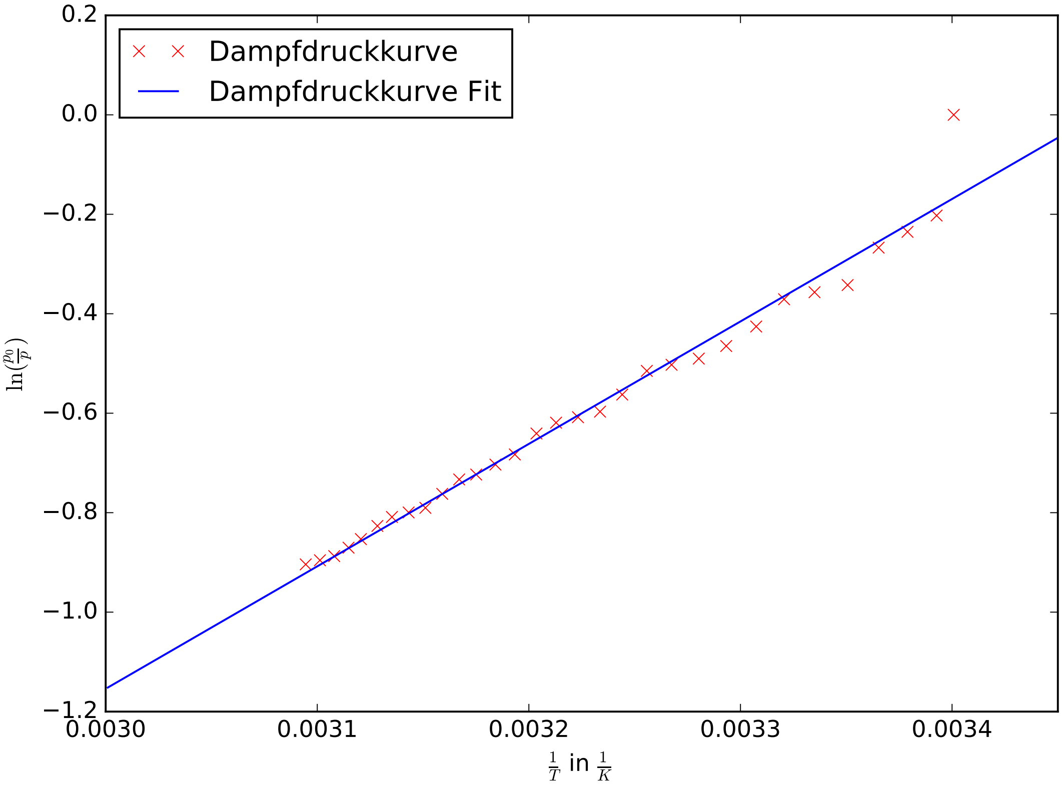
Da nur A und B mit Fehlern behaftet sind ergibt sich die folgende Fehlerformel.

$$\Delta\nu = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{dA}}\Delta A\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{dB}}\Delta B\right)^2}$$

Die ideale Güteziffer ist fehlerfrei, da sie über die Temperaturen errechnet wurde. Diese ergibt sich aus Formel (**??**).

4.4 Bestimmung des Massendurchsatzes

Damit der Massedurchsatz bestimmt werden kann, muss zunächst die Verdampfungswärme L ermittelt werden. Die Verdampfungswärme ist über $L = R \cdot T \log(\frac{p_0}{p})$ zu berechnen. Dabei ist R die allgemeine Gaskonstante, T die momentane Temperatur, p_0 der Anfangswert des Druckes und p der momentane Druck ist. In dem folgendem Diagramm sind die $\log(\frac{p_0}{p})$ gegenüber den reziproken Temperaturen aufgetragen.



(a) Graph zur Bestimmung der Verdampfungswärme

Die Ausgleichsgerade ergibt sich aus der Steigung $m = 2462,019$ und dem Achsenabschnitt $n = -8,540$. Die Ausgleichsrechnung wurde mit Hilfe von *curve_fit* bewerkstelligt. Die Parameter m und n sind mit den Fehlern $\Delta m = 68,222$ und $\Delta n = 0.220$ behaftet. Aus der Steigung m und der allgemeinen Gaskonstanten R lässt sich die Verdampfungswärne über $L = mR$ errechnen. Somit ergibt sich für die Verdampfungswärme schließlich

$L = (20470,715 \pm 567,230)\frac{\mathrm{Js}}{\mathrm{molK}}$. Mit L lässt sich nun auch der Massendurchsatz nach (**??**) berechnen.

Tabelle 3: Massendurchsatz

Zeit in s	$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ in $\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{s}}$	*Fehler*
360	1,217	0,043
720	0,99	0,042
1080	0,76	0,044
1440	0,53	0,046

Die Fehler ergeben sich mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt.

$$\Delta\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}tA}\cdot\Delta A\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}tB}\cdot\Delta B\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}tL}\cdot\Delta L\right)^2}$$

4.5 Bestimmung der mechanische Kompressorleistung N_{mech}

Wie in der Theorie erwähnt wurde, wird der natürliche Wärmeenergiefluss mit Hilfe von mechanischer Arbeit umgekehrt. Die dafür benötigte Leistung N_{mech} lässt sich über (**??**) berechnen. Vorerst muss der Massendurchsatz von $\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{s}}$ in die Einheiten $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol\,s}}$ umgerechnet werden, sodass die mechanische Leistung in W errechnet wird. Das verwendete Gas Dichlordiflourmethan (Cl_2F_2C)hat eine Molare Masse von $120,91\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$. Die Dichte ρ lässt sich unter der Annahme, dass der Kompressor adiabatisch arbeitet über die ideale Gasgleichung festlegen.

$$pV = nRT \quad\Longleftrightarrow\quad nR = \frac{pV}{T}$$

Darausfolgt für $n_0R = n_2R$, mit $V = \frac{m}{\rho}$:

$$\frac{p_0m}{\rho_0T_0} = \frac{p_2m}{\rho T_2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{p_0}{\rho_0T_0} = \frac{p_2}{\rho T_2} \quad\Longleftrightarrow\quad \rho = \frac{p_2\rho_0T_0}{p_0T_2}$$

Als Werte waren $\rho_0 = 5,51\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}$ bei $T = 273,15\mathrm{K}$, $p_0 = 1\mathrm{bar}$ und $\kappa = 1,14$ vorgegeben. Durch (**??**) ergeben sich die in Tabelle **??** visualisierten Werte. Der Fehler für die mechanische Leistung N_{mech} ergibt sich aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt.

$$\Delta N_{mech} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}N_{mech}}{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}\cdot\Delta\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

Tabelle 4: Mechanische Kompressorleistung N_{mech} und Dichte ρ

Zeit in s	*Dichte* ρ in $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}$	*Leistung* N_{mech} in W	*Fehler*
360	24,447	10,29	0,356
720	21,655	10,27	0,430
1080	20,342	9,11	0,510
1440	19,451	7,05	0,603

5 Diskussion

Im Folgendem werden die Versuchsergebnisse diskutiert. Dabei wird besonders auf den Vergleich zwischen der idealen Güteziffer ν_{ideal} und der empirisch gefundenen Güteziffer ν_{real} eingegangen. In dem Versuch wird deutlich, dass sich die Temperaturverläufe geeignet durch ein quadratisches Polynom approximieren lassen. Anhand der Ausgleichsrechnung wurde dies deutlich. Die Messwerte weichen lediglich minimal von dem Graphen der Ausgleichskurve ab. Die beiden Güteziffern unterscheiden sich deutlich. Gründe dafür könnte die idealisierte Annahme sein, dass der Kompressor adiabatisch arbeitet. Zudem waren die Reservoire nicht optimal isoliert, sodass ein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattgefunden hat. Dadurch wird die Güte der Wärmepumpe vermindert, weil mehr Arbeit aufgewendet werde muss, um den Wärmeenergieverlust auszugleichen. Desweiteren waren die Skalierungen an den Messapperaturen nicht fein genug dargestellt, um die zweite Nachkommastelle bei den Manometern genau ablesen zukönnen. Daher wurden alle verwendeten Drücke auf die zweite Nachkommastelle gerundet und sind so in Tabelle **??** dargestellt. Ebenso grob war die Skalierung auf dem Generator des Kompressors, sodass die abgelesene Leistung ohne Nachkommastellen angegeben wurde. Die Thermometer, mit denen die Temperatur in den Reservoiren gemessen wurde, waren digital und erlaubten eine genaue Messung bis auf die zweite Nachkommastelle. Es wird deutlich, dass die Messbedingungen nicht optimal waren, sodass die Güte der Wärmepumpe bereits dadurch gemindert wurde. Die gemachten Messfehler und die nicht erfüllbaren idealisierten Annahmen führen somit dazu, dass die realen Werte deutlich von den theoretischen Werten Abweichen.

6 Messdaten

Tabelle 5: Messdaten

Zeit in s	T_1 in K	T_2 in K	p_1 in bar	p_2 in bar	*Leistung* in W
0	294,05	294,55	4,9	5,0	0
60	294,75	294,55	6,0	4,3	115
120	295,95	293,65	6,2	4,6	120
180	297,15	292,45	6,4	4,7	125
240	298,45	291,25	6,9	4,8	125
300	299,85	290,25	7,0	4,8	127
360	301,15	289,35	7,1	4,7	126
420	302,35	288,55	7,5	4,6	125
480	303,65	287,75	7,8	4,5	124
540	304,85	287,05	8,0	4,4	123
600	306,05	286,35	8,1	4,3	123
660	307,15	285,65	8,2	4,2	122
720	308,25	284,95	8,6	4,1	121
780	309,25	284,25	8,9	4,0	121
840	310,25	283,55	9,0	4,0	122
900	311,25	282,95	9,1	3,9	122
960	312,15	282,35	9,3	3,8	123
1020	313,15	281,75	9,7	3,8	124
1080	314,05	281,15	9,9	3,8	125
1140	314,95	280,65	10,1	3,7	125
1200	315,75	280,25	10,2	3,7	125
1260	316,55	279,75	10,5	3,6	125
1320	317,35	279,35	10,8	3,6	125
1380	318,15	278,95	10,9	3,6	125
1440	318,95	278,55	11,0	3,6	125
1500	319,65	278,15	11,2	3,6	125
1560	320,45	277,85	11,5	3,5	125
1620	321,05	277,55	11,7	3,5	125
1680	321,75	277,25	11,9	3,5	125
1740	322,45	276,95	12,0	3,5	125
1800	323,15	276,75	12,1	3,4	125

Mit T_1 der Temperatur aus Reservoir 1, T_2 der Temperatur aus Reservoir 2, p_1 dem Druck aus Reservoir 1 und p_2 dem Druck aus Reservoir 2.