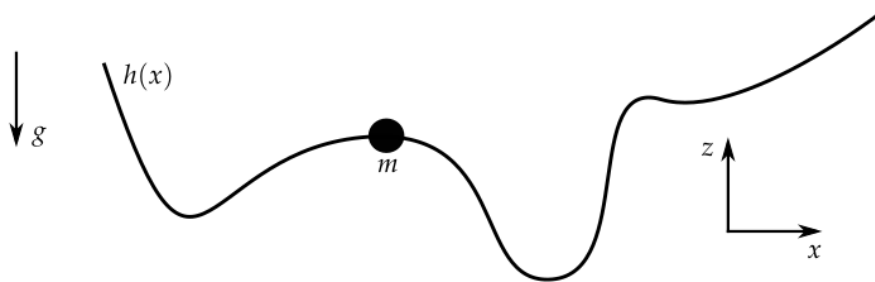


**Aufgabe 1: Perle auf Draht**

**(10 Punkte)**

Betrachten Sie eine Perle auf einem Draht. Die Perle besitzt die Masse  $m$  und gleitet reibungsfrei auf einem Draht, welcher durch die Funktion  $z = h(x)$  beschrieben wird.



- (a) Bestimmen Sie für einen beliebig geformten Draht  $h(x)$  die Lagrange-Funktion in der generalisierten Koordinate  $x$ .
- (b) Nutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung, um die Bewegungsgleichung des Massepunktes aufzustellen.
- (c) Setzen Sie nun die folgenden Funktionen  $h(x)$  in die Bewegungsgleichung ein:
  - (i) Welche Bewegung wird für  $h(x) = h_0$  angenommen?
  - (ii)  $h(x) = ax$ . Zeigen Sie anhand der Bewegungsgleichung, dass auf die Perle nur die konstante Hangabtriebskraft

$$|\vec{F}_H| = mg \sin(\alpha) \quad (1)$$

wirkt, wobei  $\alpha$  den Steigungswinkel der Funktion, d.h. den Winkel zwischen Funktionsgraph und der  $x$ -Achse, bezeichnet.

- (iii) Sei nun  $h(x) = \frac{b}{2}x^2$ . Die Bewegungsgleichung enthält neben der Hangabtriebskraft einen weiteren Term. Welche Kraft beschreibt dieser?

Welche Form nimmt die Bewegungsgleichung für  $b > 0$  an, wenn die Auslenkungen  $x$  und die Geschwindigkeiten  $\dot{x}$  so klein sind, dass nur die linearen Terme berücksichtigt werden müssen?

- (d) Berechnen Sie aus der Lagrange-Funktion, die Sie in Aufgabenteil (a) bestimmt haben, die Erhaltungsgröße

$$H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L. \quad (2)$$

Um welche Größe handelt es sich hierbei?