

Versuch 27

Der Zeeman-Effekt

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Durchführung: 25.10.2017

Abgabe: 14.11.2017

1 Theorie

In dem folgenden Versuch soll die bei Anlegen eines äußeren Magnetfeldes an einem Atom entstehende Aufspaltung und Polarisation von emittierten Spektrallinien untersucht werden. Dies geschieht anhand der blauen und roten Spektrallinien einer Cadmium Lampe.

Der Effekt ist benannt nach dem Holländer P. Zeeman (1865-1945), welcher diese Erscheinung 1896 erstmals am Licht einer Na-Lampe beobachtete.

1.1 Das magnetische Moment

Aufgrund der Quantenmechanik ist bekannt, dass jedes Hüllenelektron eines Atoms zwei verschiedene Drehimpulse besitzt, den Bahndrehimpuls \vec{l} sowie den Spin \vec{s} , welcher auch als Eigendrehimpuls bezeichnet wird. Beiden Impulsen wird eine für das Atom charakterisierende Quantenzahl zugewiesen mit der sich die Beträge errechnen lassen:

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad (s = \frac{1}{2}). \quad (2)$$

Aufgrund der Ladung des Elektrons lässt sich mit dem Bahndrehimpuls ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_l$ verknüpfen. Mithilfe des Stern-Gerlach-Experiments wurde zudem nachgewiesen, dass aufgrund des Spins ebenfalls ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_s$ definiert werden kann. Beide Momente sind neben dem Betrag der Impulse auch von \hbar sowie dem Bohrschen Magneton μ_B abhängig.

$$\mu_B := -\frac{1}{2}e_0 \frac{\hbar}{m_0} \quad (3)$$

$$\vec{\mu}_l = -\mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)} \vec{l}_e \quad (4)$$

$$\vec{\mu}_s = -g_s \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} = -g_s \mu_B \sqrt{s(s+1)} \vec{s}_e \quad (5)$$

Beide Momente besitzen zudem den Landé-Faktor g , welcher für ein freies Elektron beim Bahndrehimpuls 1 und beim Spin 2 ist. Aufgrund dessen ist bei $s=1$ $\vec{\mu}_s$ doppelt so groß wie $\vec{\mu}_l$, was auch als magnetomechanische Anomalie bezeichnet wird.

1.2 Wechselwirkungen im Atom

In einem Mehrelektronenatom treten die vorher eingeführten verschiedenen Größen aufgrund mehrerer Elektronen in Wechselwirkung zueinander, weswegen im Folgenden die zwei Grenzfälle betrachtet werden. Charakterisiert werden diese dabei mittels der Kernladungszahl Z .

Bei Atomen mit einer relativ geringen Kernladungszahl ist die Wechselwirkung der einzelnen \vec{l}_i untereinander so groß, dass sich ein Gesamtbahndrehimpuls \vec{L} definieren lässt:

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i \text{ mit } |\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar. \quad (6)$$

Da bei abgeschlossenen Schalen der Bahndrehimpuls stets Null ist, müssen hier nur Elektronen der äußeren Schalen betrachtet werden. Den Werten 0,1,2,3 der Quantenzahl L werden die Bezeichnungen S,P,D und F zugeordnet.

Besitzt das Atom ebenfalls eine im Grenzfall betrachtete nicht zu hohe Ordnungszahl, dann lässt sich zudem ein Gesamtspin \vec{S} definieren.

$$\vec{S} = \sum \vec{s}_i \text{ mit } |\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar \quad (7)$$

Somit ändert sich für beide Drehimpulse auch das magnetische Moment:

$$|\vec{\mu}_L| = \mu_L \sqrt{L(L+1)} \quad (8)$$

$$|\vec{\mu}_S| = g_S \mu_S \sqrt{S(S+1)}. \quad (9)$$

Aufgrund des in der relativistischen Betrachtung vom Proton erzeugten Kreiststromes kommt es zu einer **LS-Kopplung**, welche bei nicht zu hohen Feldstärken bestehen bleibt. Somit kann ein neuer Drehimpuls als Summe von Gesamtspin- und Gesamtbahnrehimpuls definiert werden:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (10)$$

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar. \quad (11)$$

Zur Beschreibung der Gesamtdrehimpulse wird folgende Nomenklatur verwendet:

$$^{2s+1}L_J. \quad (12)$$

Der zweite Grenzfall umfasst eine große Ordnungszahl und somit schwere Atome. Hier dominieren die Wechselwirkungen zwischen den \vec{l}_i und den \vec{s}_i , sodass sich kein Gesamtdreimpuls definieren lassen. Deshalb wird dieser Fall auch als **j-j-Kopplung** bezeichnet. Für den Gesamtdreimpuls ergibt sich daher Folgendes:

$$\vec{J} = \sum \vec{j}_i = \sum \vec{l}_i + \vec{s}_i. \quad (13)$$

Zwischen beiden Fällen besteht ein fließender Übergang, welcher bei mittleren Kernladungszahlen eintritt.

1.3 Aufspaltung im homogenen Magnetfeld

Das zu J gehörende magnetische Moment ist die Summe der magnetischen Momente von Spin- und Bahndreimpuls. Im Allgemeinen fallen $\vec{\mu}_J$ und \vec{J} nicht aufeinander, sodass sich eine zu \vec{J} senkrechte sowie eine parallele Komponente von $\vec{\mu}$ definieren lässt. Im klassischen Sinne führt μ dabei eine Präzessionsbewegung um die Gesamtdreimpulsachse aus, weswegen der Erwartungswert von μ_{\perp} verschwindet. Für $|\vec{\mu}_J|$ ergibt sich somit folgende Formel:

$$|\vec{\mu}_J| = \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)} \quad (14)$$

$$g_J = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (15)$$

g_J ist dabei der Landé-Faktor des entsprechenden Atoms. Aufgrund der Quantenmechanik muss im Folgenden die sogenannte Richtungsquantelung beachtet werden. Sie besagt, dass die in Feldrichtung zeigende Komponente von $|\vec{\mu}_J|$ ein ganzzahliges Vielfaches von $g_J \mu_B$ darstellt. Verknüpft wird dies mit dem Faktor m , welche auch Orientierungsquantenzahl genannt wird:

$$\mu_{J_z} = -m g_J \mu_B \quad \text{mit } m \in [-J, -J+1, \dots, 0, 1, \dots, J]. \quad (16)$$

Somit existieren $2J+1$ Einstellmöglichkeiten für $\vec{\mu}$ relativ zu \vec{B} . Die Zusatzenergie aufgrund des äußeren Feldes ergibt sich somit zu folgendem Wert:

$$E_{\text{mag}} = m g_J \mu_B B. \quad (17)$$

In Abbildung 1 ist die Aufspaltung der Energieniveaus für $J = 2$ dargestellt. Da diese Aufspaltung auch bei angeregten Zuständen auftritt, wird bei dem Einschalten des Magnetfeldes auch eine Aufspaltung der emittierten Spektrallinien erwartet. Die Anzahl der aufgespalteten Linien wird dabei durch Auswahlregeln festgelegt, da Übergänge nicht zwischen allen Energieniveaus möglich sind.

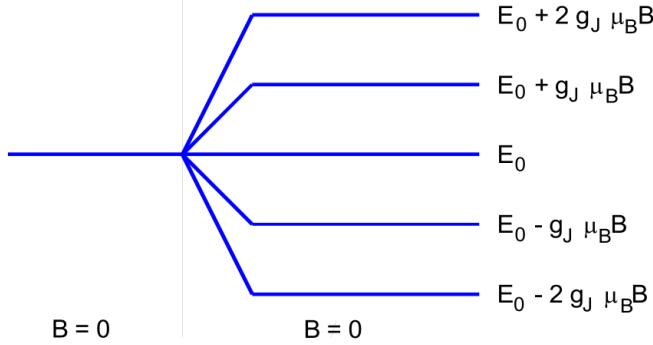


Abbildung 1: Aufspaltung der Energieniveaus bei einem Atom mit $J=2$. [1]

1.4 Auswahlregeln für Energieübergänge

Die grundlegende Gleichung bei der Betrachtung mittels der Quantenmechanik ist die Schrödinger-Gleichung. Aufgrund ihrer Linearität können mehrere Lösungen superponiert werden. Um die Auswahlregeln zu bestimmen, wird von einer Lösung mit zwei verschiedenen Wellenfunktionen ausgegangen:

$$\Psi_{\text{ges}}(\vec{r}, t) = C_\alpha \psi_\alpha(\vec{r}) \exp -\frac{i}{\hbar} E_\alpha t + C_\beta \psi_\beta(\vec{r}) \exp -\frac{i}{\hbar} E_\beta t. \quad (18)$$

Im folgenden sollen nun die Energieübergänge zwischen diesen beiden Zuständen untersucht werden. Die Dichteverteilung dieser Wellenfunktion ist eine zeitabhängige Größe, welche ein Schwingung des Elektrons mit einer durch die Energiedifferenz festgelegten Frequenz $\nu_{\alpha,\beta}$ beschreibt.

$$\nu_{\alpha,\beta} := \frac{E_\alpha - E_\beta}{2} \quad (19)$$

Um die Intensität der emittierten Strahlung zu berechnen, muss das durch die Schwingung hervorgerufenen Dipolmoment des Elektrons betrachten werden. Der Beitrag des Volumenelements dV zu der X-Komponente des Dipols beträgt dabei

$$- e_0 x \psi^* \psi dV \quad (20)$$

wobei der Beitrag zu Y- und Z-Komponente analog ist. Um das gesamte Dipolmoment in diese Richtung zu berechnen, muss (20) über den gesamten Raum integriert werden. Durch verschiedene Rechenschritte lässt sich der Beitrag in X-Richtung zu folgender Form vereinfachen:

$$D_x = -e_0 \text{const} 2 \Re e \left(\int x \psi_\beta^* \psi_\alpha dV \exp 2\pi i \nu_{\alpha,\beta} t \right). \quad (21)$$

Der Term beschreibt einen mit der Frequenz $\nu_{\alpha,\beta}$ schwingenden Dipol der Quanten entsprechender Energie abstrahlt. Die Komponenten in die beiden anderen Raumrichtungen lassen sich analog berechnen. Um die Strahlungsemision zu berechnen wird der Poynting-Vektor mit den Matrixelementen $x_{\alpha,\beta}$, $y_{\alpha,\beta}$ und $z_{\alpha,\beta}$ bestimmt, wobei γ den Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung der Strahlung und Dipolmoment beschreibt.

$$x_{\alpha,\beta} := \int x \psi_{\alpha}^* \psi_{\beta} dV \quad (22)$$

$$y_{\alpha,\beta} := \int y \psi_{\alpha}^* \psi_{\beta} dV \quad (23)$$

$$z_{\alpha,\beta} := \int z \psi_{\alpha}^* \psi_{\beta} dV \quad (24)$$

$$|\vec{S}_{\alpha,\beta}| = (|x_{\alpha,\beta}|^2 + |y_{\alpha,\beta}|^2 + |z_{\alpha,\beta}|^2) \sin^2 \gamma \quad (25)$$

Als Wellenfunktion für ein Atom im Magnetfeld wird der Ansatz

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(r) \Theta(\vartheta) e^{im\varphi} \quad (26)$$

gewählt. Das Magnetfeld ist in Richtung der z-Achse ausgerichtet. Werden die einzelnen Komponenten des Dipols untersucht, ist erkenntlich, dass die z-Komponente nur dann nicht verschwindet, wenn $m_{\alpha} = m_{\beta}$ gilt. Somit ist die erste Auswahlregel, dass für eine nicht verschwindende Komponente in z-Richtung die beiden Orientierungsquantenzahlen der Zustände E_{α} und E_{β} gleich sein müssen.

Für die x- und y-Komponente ergeben sich analog zwei Auswahlregeln, bei denen die Dipolkomponenten nicht verschwinden. Es muss entweder $m_{\beta} = m_{\alpha} + 1$ ($\Delta m = -1$) oder $m_{\beta} = m_{\alpha} - 1$ ($\Delta m = +1$) gelten. Zusammengefasst tritt die Emission von Spektrallinien beim Zeeman-Effekt nur dann auf, wenn sich die Orientierungsquantenzahlen der beiden Zustände entweder gar nicht oder um ein Differenz von ± 1 unterscheiden.

Gilt nun $\Delta m = 0$, dann ist lediglich die z-Komponente des Dipols von Null verschieden. Der Dipol schwingt also parallel zur Magnetfeldrichtung und emittiert linear polarisierte Licht. Zudem strahlt der Dipol aufgrund der Winkelabhängigkeit in (25) nicht in Feldrichtung und besitzt seine stärkste Emission senkrecht zu dieser.

In den Fällen $\Delta m = \pm 1$ folgt beides mal $z_{\alpha,\beta} = 0$, wobei die x- und y-Komponenten folgenden Zusammenhang besitzen:

$$x_{\alpha,\beta} = -iy_{\alpha,\beta} \quad (\Delta m = -1) \quad (27)$$

$$x_{\alpha,\beta} = iy_{\alpha,\beta} \quad (\Delta m = +1). \quad (28)$$

In beiden Fällen ergibt sich somit ein Phasenverschub von $\frac{\pi}{2}$ zwischen x- und y-Komponente. Die emittierte Strahlung ist zirkular um die B-Feld-Achse polarisiert, wobei die beiden Fälle eine entgegengesetzte Drehrichtung besitzen.

1.5 Der normale Zeeman-Effekt

In den vorangegangenen Rechnungen wurde der Elektronenspin nicht berücksichtigt, so dass lediglich der Fall behandelt wird, bei dem für das Atom $S = 0$ und somit $g_J = 1$ gilt. Dieser Spezialfall wird historisch bedingt normaler Zeeman-Effekt genannt. Hier ist die Verschiebung der Energieniveaus somit unabhängig von den Quantenzahlen L und J, so dass die Verschiebung steht den Wert

$$\Delta E = m\mu_B B \quad \text{für} \quad -J \leq m \leq J \quad (29)$$

besitzt. In Abbildung 2 ist diese Aufspaltung für die Fälle $J = 1$ und $J = 2$ beispielhaft dargestellt.

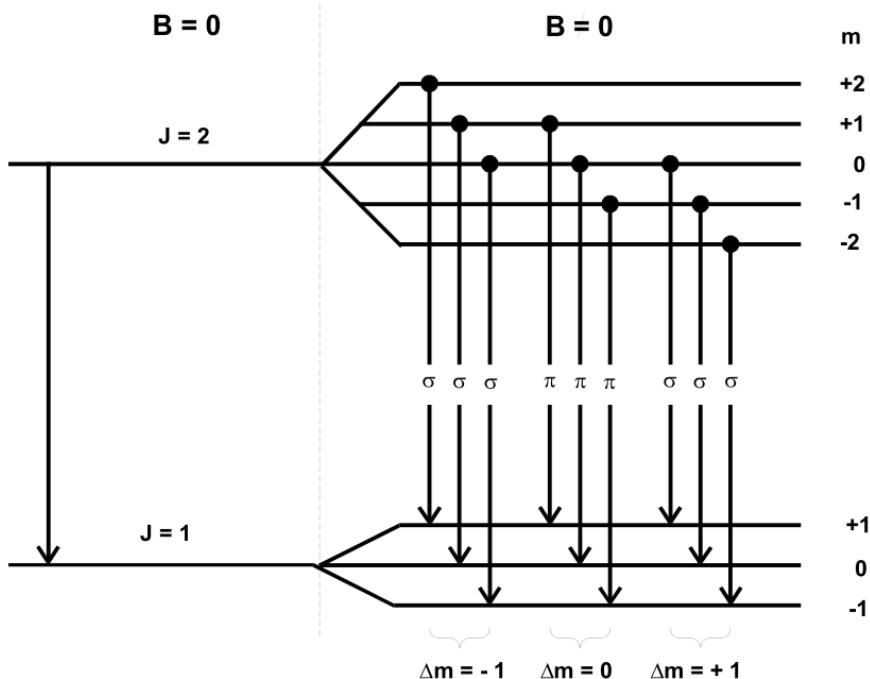


Abbildung 2: Aufspaltung und Polarisation der emittierten Spektrallinien beim normalen Zeeman-Effekt. [1]

Alle Übergänge mit gleichem Δm werden in eine Liniengruppe zusammengefasst, wobei innerhalb dieser Gruppen die Energiedifferenz konstant ist. Diese Aufspaltung in 3 Komponenten wird auch **"Zeeman-Triplett"** genannt. Da die aufgrund des Übergangs mit

$\Delta m = 0$ hervorgerufene Strahlung parallel zur Magnetfeldrichtung linear polarisiert ist, lässt sie sich in voller Intensität nur senkrecht zur Feldrichtung (transversal) beobachten, während sie parallel zur Feldrichtung (longitudinal) nicht beobachtbar ist. Gemäß Formel (29) ist ihre Energie gegenüber dem feldfreien Fall nicht verändert. Sie wird als π -Komponente bezeichnet.

Die beiden zirkular polarisierten Linien mit $\Delta m = \pm 1$ erscheinen bei der transversalen Betrachtung linear polarisiert (senkrecht zu \vec{B}) und können deswegen nicht unterschieden werden. Die Linien besitzen immer eine Energiedifferenz von $\mu_B B$ bezogen auf die unverschobenen Linien und werden als σ -Komponente bezeichnet. Die beobachtbare Aufspaltung bei den zwei verschiedenen Betrachtungswinkeln ist in Abbildung 3 noch einmal grob dargestellt.

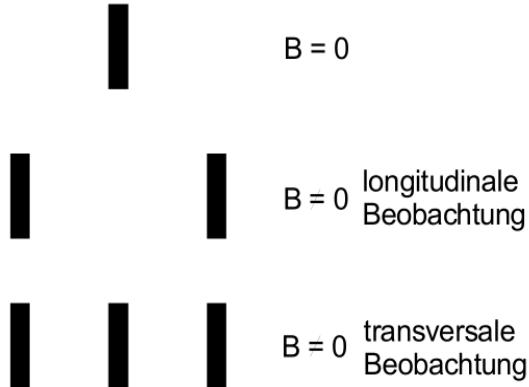


Abbildung 3: Sichtbare Aufspaltung bei transversaler und longitudinaler Betrachtung der emittierten Spektrallinien. [1]

1.6 Der anomale Zeeman-Effekt

Der anomale Zeeman-Effekt beschreibt nun den in der Natur viel häufiger auftretenden Fall von Atomen mit $S \neq 0$. Die vorher hergeleiteten Auswahlregeln sind auch in diesem Fall noch gültig, jedoch ist die Verschiebung der Energieniveaus nicht mehr äquidistant. Für die Energie der aufgespalteten Spektrallinien ergibt sich nun folgende Formel:

$$E = \{m_1 g(L_1, S_1, J_1) - m_2 g(L_2, S_2, J_2)\} \mu_B + E_0. \quad (30)$$

Hier ist der Landé-Faktor abhängig von den Quantenzahlen J, L und S , weswegen die Auspaltung linienreicher wird. In Abbildung 4 ist diese Aufspaltung anhand eines Alkali-Dubletts dargestellt.

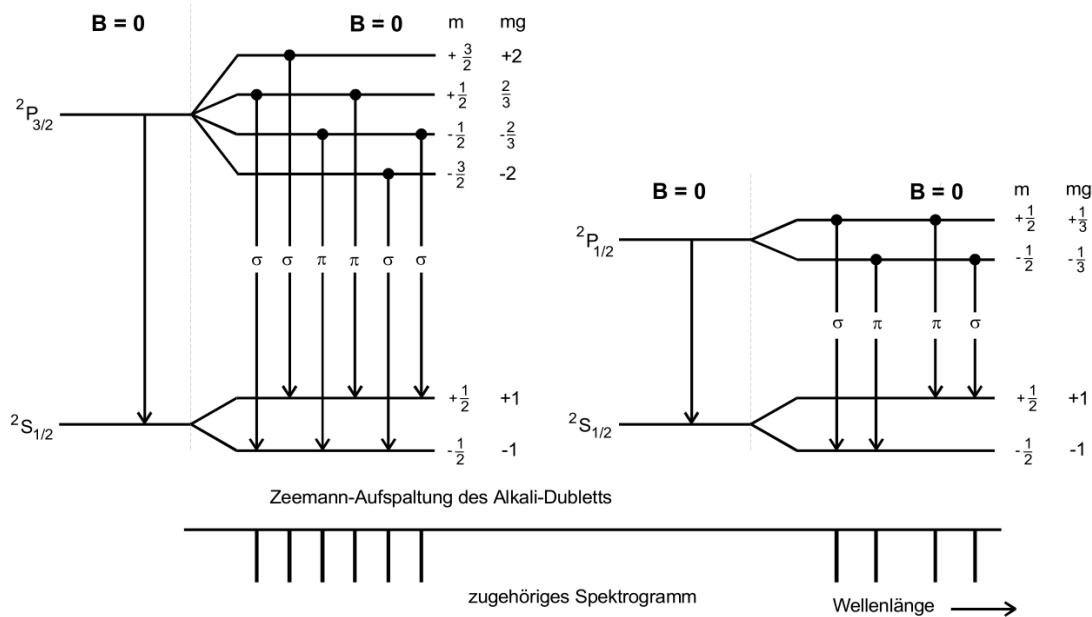


Abbildung 4: Aufspaltung beim anomalen Zeeman-Effekt anhand eines Alkali-Dubletts.
[1]

1.7 Die Lummer-Gehrke-Platte

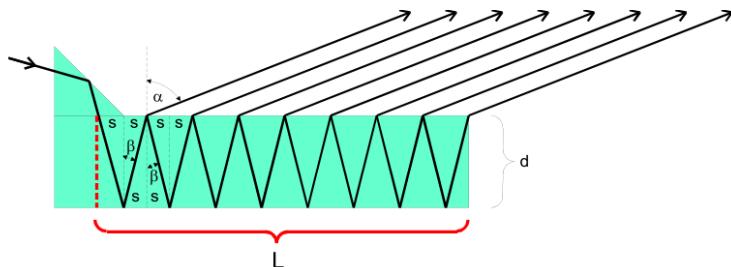


Abbildung 5: Aufbau der Lummer-Gehrke-Platte. [1]

Der Aufbau der Lummer-Gehrke-Platte ist in Abbildung 5 dargestellt. Sie nutzt die Interferenz an planparallelen Platten. Das einfallende Licht wird mittels eines Prismas in die Platte gelenkt und innerhalb dieser mehrfach totalreflektiert. Jedoch transmittiert jedes Mal etwas Licht, da die Platte keine perfekte Oberfläche besitzt. Die austretenden Strahlenbündel können dann miteinander interferieren und konstruktive Interferenz erzeugen. Dafür muss jedoch die Bragg-Bedingung erfüllt sein, welche die Plattendicke d und die Wellenlänge λ enthält. Bei monochromatischem Licht werden damit nur Interferenzstreifen erzeugt, die ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge als Gangunterschied besitzen. Bei Einschalten des Magnetfeldes verändert sich die Wellenlänge jedoch um $\delta\lambda$, sodass auch die Interferenzstreifen um δs verschoben werden. Um eine Überlagerung

zweier Wellenlängen zu vermeiden, muss die Differenz kleiner als

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda^2}{2 \cdot d} \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2 - 1}} \quad (31)$$

sein (Dispersionsgebiet). Für die Lummer-Gehrke-Platte kann zudem abhängig vom Brechungsindex n , der Länge L und der Wellenlänge des verwendeten Lichts ein Auflösungsvermögen definiert werden:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{L}{\lambda} (n^2 - 1). \quad (32)$$

2 Versuchsaufbau und Durchführung

2.1 Aufbau

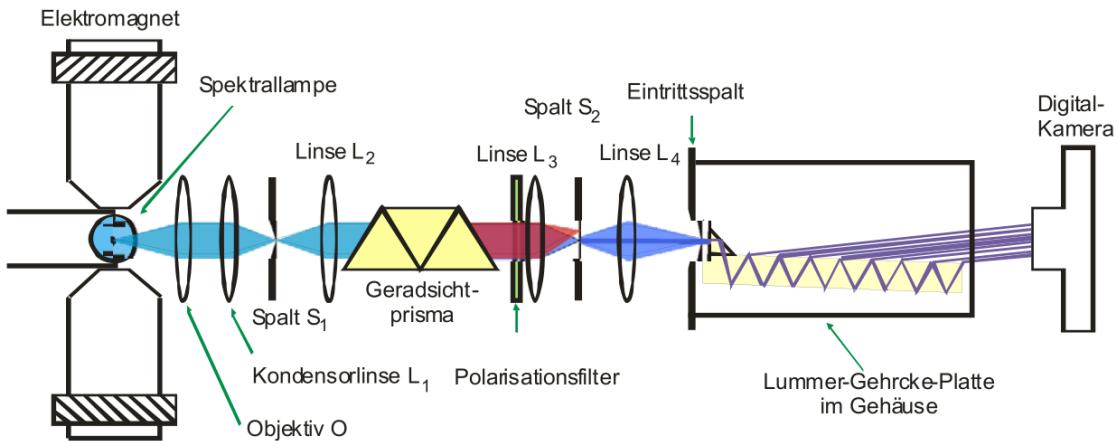


Abbildung 6: Experimenteller Aufbau zur Untersuchung des Zeeman-Effektes. [1]

Der experimentelle Aufbau ist in Abbildung 6 zu sehen. Zur Betrachtung des Zeeman-Effektes wird bei diesem Versuch eine Cadmium-Lampe verwendet. Mit der roten Spektrallinie soll der normale und mit der blauen der anomale Zeeman-Effekt untersucht werden. Die Cd-Lampe befindet sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten, welche von einem Generator versorgt wird. Durch ein Objektiv und ein Linsensystem aus zwei bündelnden Linsen und einem Spalt wird das in transversale Richtung emittierte Licht kollimiert und anschließend auf ein Gradsichtprisma gebracht. Hier wird das Licht nach der Wellenlänge separiert, sodass die zu untersuchende Spektrallinie anschließend mittels eines Spaltes abseparieren werden kann. Nach Durchlauf des Polarisationsfilters wird die Spektrallinie auf die Eintrittsfläche einer Lummer-Gehrke-Platte projiziert. Diese erzeugt dann ein Interferenzmuster, welches mit einer Digitalkamera aufgenommen wird.

2.2 Vorbereitende Berechnungen

Zur Vorbereitung des Versuches werden die Termschemata für die rote ($^1P_1 \leftrightarrow ^1D_2$) und die blaue ($^3S_1 \leftrightarrow ^3P_1$) Spektrallinie genauer untersucht. Das Termschema der roten Spektrallinie zur Betrachtung des normalen Zeeman-Effektes ist in Abbildung 7 dargestellt. Zudem werden die Landé-Faktoren der Übergänge mithilfe von Formel (15) berechnet (Tabelle 1). Unter der Annahme, dass $S=0$ und somit $J=L$ gilt, vereinfacht sich diese Formel zu einem konstanten Wert von $g_J = 1$. Der Landé-Faktor des Überganges ist durch die folgende Formel gegeben:

$$g_{12} = m_1 g_1 - m_2 g_2. \quad (33)$$

Bei der roten Spektrallinie vereinfacht sich dies zu $g_{12} = m_1 - m_2$.

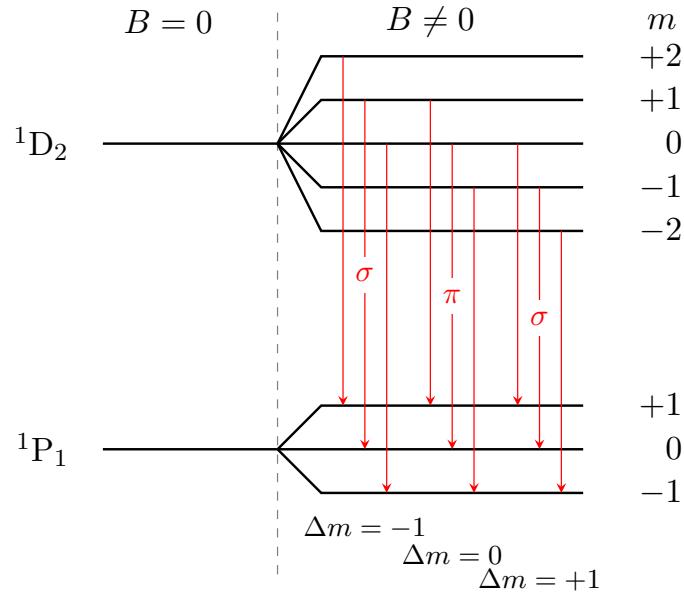


Abbildung 7: Termschema zum Übergang $^1\text{P}_1 \leftrightarrow ^1\text{D}_2$ [2].

Für die blaue Spektrallinie ($^3\text{S}_1 \leftrightarrow ^3\text{P}_1$) werden die Landé-Faktoren ebenfalls mit Formel (15) berechnet, jedoch wird bei dem anomalen Zeeman-Effekt der Spin beachtet, sodass sich diese Formel nicht weiter vereinfachen lässt (Tabelle 2). Das zugehörige Termschema ist in Abbildung 8 zu sehen. Der Landé-Faktor des Übergangs ergibt sich hier nach Formel (33).

Die Energiedifferenz der aufgespalteten Linien lässt sich mit $\Delta E = g_{12}\mu_B B$ berechnen.

Im letzten Teil der Vorbereitung wird das Auflösungsvermögen, sowie das Dispersionsgebiet beider Übergänge mit den Formeln (31) und (32) berechnet.

$$\begin{aligned} ^1\text{P}_1 \leftrightarrow ^1\text{D}_2 : \quad & \lambda = 643,8 \text{ nm} \\ A \approx 209128.6, \quad & \Delta\lambda \approx 4,98 \cdot 10^{-11} \text{ m} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} ^3\text{S}_1 \leftrightarrow ^3\text{P}_1 : \quad & \lambda = 480,0 \text{ nm} \\ A \approx 285458, \quad & \Delta\lambda \approx 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \end{aligned} \quad (35)$$

Tabelle 1: Landé-Faktoren für den Übergang ${}^1P_1 \leftrightarrow {}^1D_2$.

	1P_1		1D_2		${}^1P_1 \leftrightarrow {}^1D_2$
Übergang	m_1	g_1	m_2	g_2	g_{12}
σ	2	1	1	1	1
	1	1	0	1	1
	0	1	-1	1	1
π	1	1	1	1	0
	0	1	0	1	0
	-1	1	-1	1	0
σ	0	1	1	1	-1
	-1	1	0	1	-1
	-2	1	-1	1	-1

2.3 Durchführung

Zu Beginn des Experiments wird zuerst eine Hysterekurve des verwendeten Elektromagneten aufgenommen. Dafür wird das Magnetfeld für verschiedene Stromstärken in einem Bereich von 0 bis 20 A gemessen, mit einer Differenz von 1 A der verschiedenen Messwerte. Es wird eine Messreihe beim Aufdrehen und eine beim Runterregeln des Stromes aufgenommen.

Danach wird die Apparatur für die Messungen justiert. Zuerst werden das Objektiv und die Kondensorlinse L_1 so verschoben, dass die Cd-Lampe scharf auf den Spalt S_1 abgebildet wird. Danach wird mittels der Linse L_2 ein paralleles Lichtbündel auf das Gradsichtprisma geworfen. Dabei soll möglichst wenig Strahlung verloren gehen, indem der Durchmesser des Bündels nicht größer als die Eintrittsfläche des Prismas eingestellt wird. Anschließend wird mit der Linse L_3 das Licht erneut gebündelt und auf den anschließende Spalt S_2 projiziert. Dieser wird so eingestellt, dass die rote Spektrallinie rausgefiltert wird. Nach Durchlaufen einer weiteren Sammellinse L_4 und des Polarisationsfilters wird die separierte Spektrallinie auf das Eintrittsprisma der Lummer-Gehrke-Platte geworfen. Dabei wird die Platte so verschoben, dass kein Licht direkt auf die Platte fällt oder am Eintrittsprisma vorbeigeht. Mit der Kamera kann das entstehende Interferenzmuster mittels einiger Einstellungen bezüglich des Fokus und der Belichtungszeit aufgenommen werden.

Zuerst wird das Interferenzmuster bei ausgeschaltetem Magnetfeld und einer Belichtungszeit von 8 Sekunden aufgenommen. Anschließend wird der Polarisationsfilter so eingestellt, dass der Fall $\Delta m = \pm 1$ beobachtet werden kann. Das Magnetfeld wird solange aufgedreht, bis eine Aufspaltung der Spektrallinien beobachtbar ist. Anschließend wird der Polarisationsfilter um $\frac{\pi}{2}$ gedreht, sodass die Spektrallinie für $\Delta m = 0$ aufgenommen werden kann.

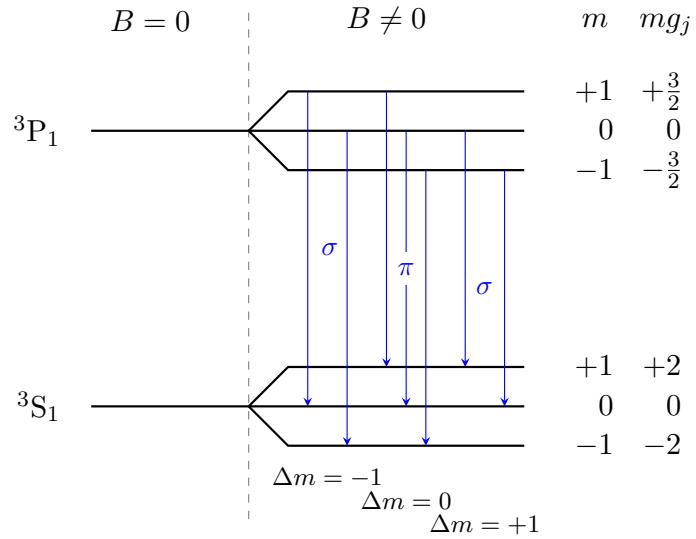


Abbildung 8: Termschema für den Übergang ${}^3\text{S}_1 \leftrightarrow {}^3\text{P}_1$ [2].

Um den anomalen Zeeman-Effekt beobachten zu können, wird der Spalt S_2 so verschoben, dass die hellblaue Spektrallinie herausgefiltert wird. Danach wird wie im vorherigen Verlauf die Lummer-Gehrke-Platte justiert. Zuerst wird eine Aufnahme des Interferenzmusters bei ausgeschaltetem Magnetfeld angefertigt. Durch Aufdrehen des Magnetfeldes und geeigneter Einstellung des Polarisationsfilters kann dann die Aufspaltung für den Fall $\Delta m = \pm 1$ beobachtet werden. Zuletzt wird der Polarisationsfilter wieder gedreht und die Stromstärke so lange erhöht, bis auch die Aufspaltung im Fall $\Delta m = 0$ sichtbar ist. Alle Aufnahmen werden ebenfalls mit einer Belichtungszeit von 8 Sekunden angefertigt.

Tabelle 2: Landé-Faktoren für den Übergang ${}^3S_1 \leftrightarrow {}^3P_1$.

	3S_1		3P_2		
Übergang	m_1	g_1	m_2	g_2	g_{12}
σ	+1	2	0	$\frac{3}{2}$	2
	0	2	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
π	+1	2	+1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	2	0	$\frac{3}{2}$	0
	-1	2	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
σ	0	2	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
	-1	2	0	$\frac{3}{2}$	-2

3 Auswertung

Im Folgenden werden die erhobenen Messdaten ausgewertet, mit dem Ziel die Landé-Faktoren der aufgespalteten roten und blauen Spektrallinie bei verschiedener Polarisation zu bestimmen.

3.1 Hysterese

Der aufsteigenden Hysteresekurve wurde eine Polynomgleichung dritten Grades zugesprochen, welche die folgenden Einträge hat.

$$A_1 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x + A_4 \quad (36)$$

$$A_1 \ (-0,082 \pm 0,007) \text{ mT/A}^3$$

$$A_2 \ (1,757 \pm 0,236) \text{ mT/A}^2$$

$$A_3 \ (49,121 \pm 2,104) \text{ mT/A}$$

$$A_4 \ (14,152 \pm 4,984) \text{ mT}$$

Für die absteigende Hysteresekurve wurde ebenfalls eine Augleichsrechnung an die Gleichung (36) betrieben.

$$A_1 \ (-0,067 \pm 0,006) \text{ mT/A}^3$$

$$A_2 \ (1,217 \pm 0,191) \text{ mT/A}^2$$

$$A_3 \ (54,665 \pm 1,703) \text{ mT/A}$$

$$A_4 \ (6,666 \pm 4,033) \text{ mT}$$

Die Ausgleichsrechnungen wurden mit Hilfe des *Python*-Paketes *SciPy-curve_fit* durchgeführt.

Die Ausgleichsfunktionen sind im Folgenden graphisch dargestellt.

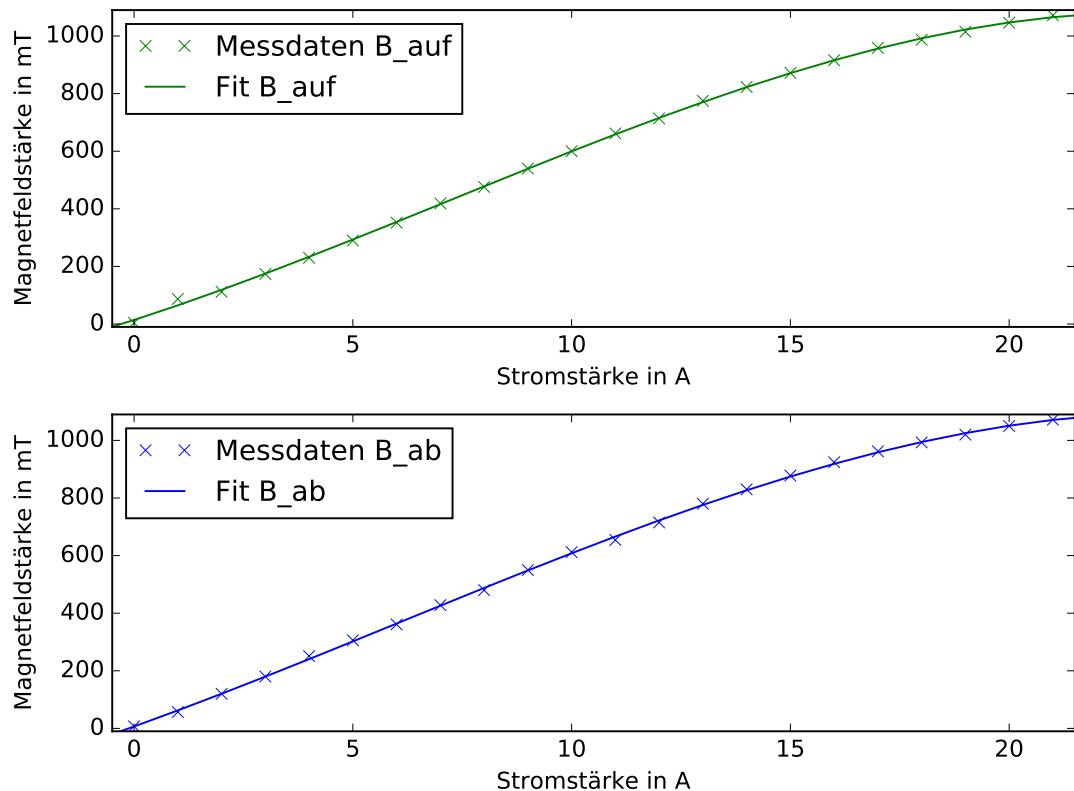


Abbildung 9: Messdaten der Hysteresekurve mit eingetragenen Ausgleichsfunktionen.
Dabei wurde die gemessene B-Feldstärke in mT gegenüber dem Strom I in A aufgetragen.

Die in den Grafiken verwendeten Daten sind in Tabelle 9 dargestellt.

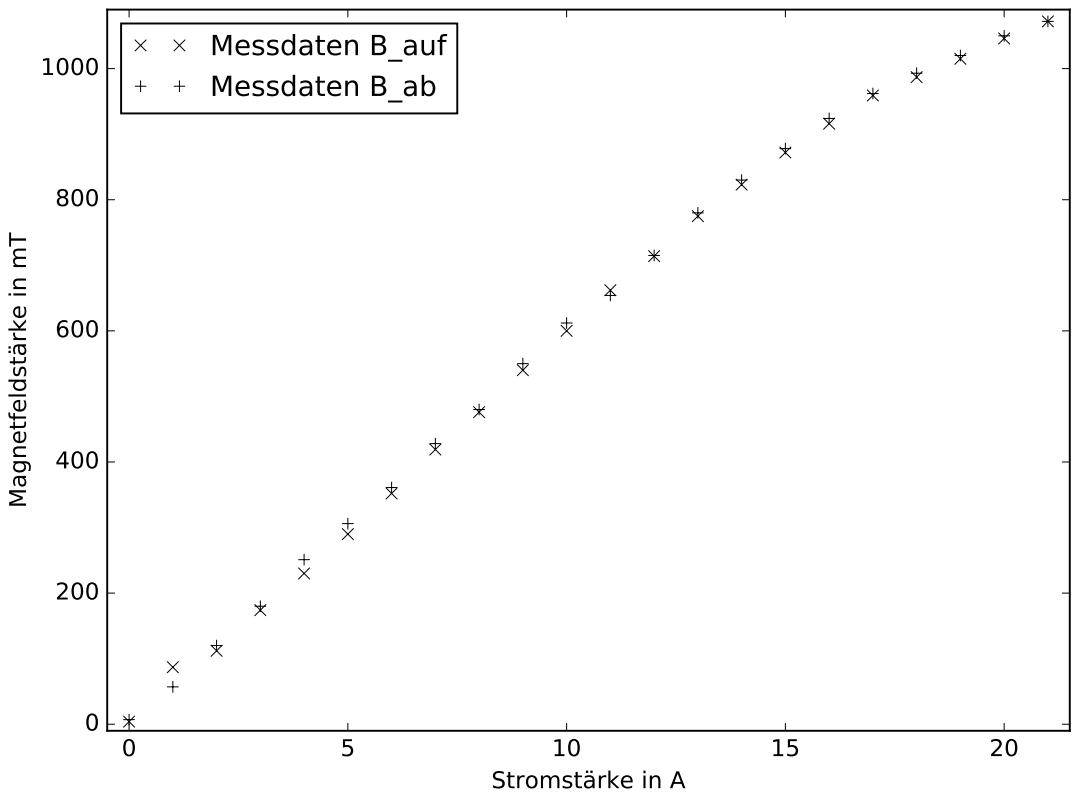


Abbildung 10: Messdaten der gemessenen B-Feldstärke in Abhängigkeit von der Stromstärke.

3.2 Vorgehensweise zur Auswertung der Spektrallinien

Die Auswertung wird gemäß der in [1] beschriebenen Vorgehensweise durchgeführt. Prinzipiell werden die Landé-Faktoren der Spektrallinien über die Formel (30) bestimmt. Dafür werden Bilder der aufgespalteten Linien aufgenommen, um die Distanz der Aufspaltung (δS) in Pixeln zu bestimmen. Danach wird aus den Bildern bei $B = 0 \text{ mT}$ der Abstand der unaufgespaltenen Linien ΔS in Pixeln bestimmt. Aus diesen Daten wird die Wellenlängenveränderung $\delta\lambda$ über die Gleichung (37) ermittelt.

$$\delta\lambda = \frac{1}{2} \frac{\delta S}{\Delta S} \cdot \Delta\lambda_D \quad (37)$$

Dabei ist $\Delta\lambda_D$ über den Zusammenhang (31) gegeben.

Die Verschiebung in der Wellenlänge $\Delta\lambda$ entspricht der Verschiebung in der Frequenz $\Delta\nu$, sodass der Zusammenhang (38) aufgestellt werden kann.

$$\Delta E = h \cdot \Delta\nu = \frac{h \cdot c}{\lambda^2} \cdot \delta\lambda \quad (38)$$

Der Landé-Faktor bestimmt sich durch die Gleichung (39).

$$g = \frac{\Delta E}{\mu_B \cdot B(I)} \quad (39)$$

Dabei ist $B(I)$ die B-Feldstärke in Abhängigkeit von dem anliegenden Strom I .

3.3 Auswertung der roten Spektrallinie

Von der Cadmium Spektrallampe wird die rote Spektrallinie untersucht. Die Kenngrößen der Lummer-Gehrcke-Platte für rotes Licht, sowie die Wellenlänge λ_r vom roten Licht sind in Tabelle 3.

Tabelle 3: Kenngrößen für die rote Spektrallinie[1]

Brechungsindex n_r	Dicke $\frac{d}{\text{mm}}$	Wellenlänge $\frac{\lambda_r}{\text{nm}}$
1,4567	4	643,2

In Abbildung 11 sind die aufgenommenen Bilder der untersuchten Interferenzmuster der roten Spektrallinie gezeigt.

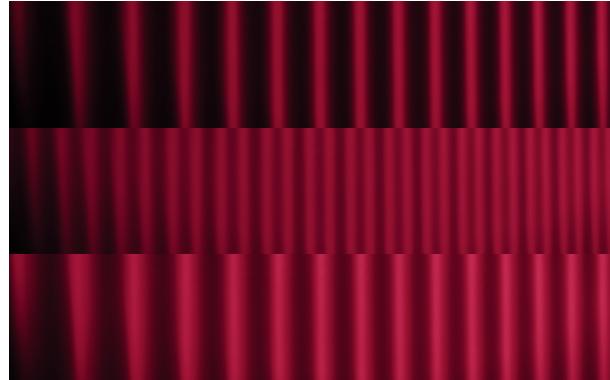


Abbildung 11: Untersuchte Aufnahmen der roten Spektrallinie. Das obere Bild wurde bei $B = 14,15 \text{ mT}$ aufgenommen. Das mittlere Bild wurde bei $B = 551,29 \text{ mT}$ aufgenommen und zeigt die σ -Aufspaltung. Das untere Bild wurde ebenfalls bei $B = 551,29 \text{ mT}$ aufgenommen und zeigt den π -Übergang, bei dem aufgrund von $\Delta m = 0$ nicht aufgespaltet wird.

3.3.1 Sigma–Komponente der roten Spektrallinie

Die Abstände der Intensitätsmaxima des mittleren Bildes von Abbildung 11 sind in Tabelle 4 dargestellt.

Mit den erhobenen Messdaten ergibt sich über (39) der Landé-Faktor zu $g_{r,\sigma} = 1,14 \pm 0,04$.

Tabelle 4: Messdaten der roten σ -Aufspaltung

$\frac{\Delta S_{r,\sigma}}{\text{px}}$	$\frac{\delta S_{r,\sigma}}{\text{px}}$
281,0	142,0
253,5	132,0
237,5	110,5
226,5	108,0
209,5	103,0
197,5	98,5
192,5	95,5
186,0	92,5
175,5	90,0

3.3.2 Pi–Komponente der roten Spektrallinie

Die π -Komponente der roten Spektrallinie spaltet nicht auf. Dies ist in dem unteren Bild von Abb. 11 dargestellt. Somit ist der Landé-Faktor gleich $g_{r,\pi} = 0$.

3.4 Auswertung der blauen Spektrallinie

Methodisch gleich wie die rote Spektrallinie wird die blaue Spektrallinie der Cadmium Lampe ausgewertet. Die Wellenlänge und der Brechungsindex der Lummer-Gehrcke-Platte für blaues Licht sind in Tabelle 5 aufgeführt.

Tabelle 5: Kenngrößen für die rote Spektrallinie[1]

Brechungsindex n_b	Wellenlänge $\frac{\lambda_b}{\text{nm}}$
1,4635	480,0

3.4.1 Sigma–Komponente der blauen Spektrallinie

Die zur Auswertung der Aufspaltung der σ -Komponente verwendeten Bilder sind in Abb. 12 dargestellt.



Abbildung 12: Untersuchte Aufnahmen der blauen Spektrallinie. Das obere Bild wurde bei $B = 14,15$ mT aufgenommen. Das untere Bild wurde bei $B = 330,01$ mT aufgenommen und zeigt die σ -Aufspaltung.

Die erhobenen Messdaten zu den Intensitätsmaximaabständen sind in Tabelle 6 angegeben. Mit den Daten aus 5 und 6 ergibt sich der Landé-Faktor über (39) zu $g_{b,\sigma} = 1,82 \pm 0,19$.

Tabelle 6: Messdaten der blauen σ -Aufspaltung

$\frac{\Delta S_{b,\sigma}}{\text{px}}$	$\frac{\delta S_{b,\sigma}}{\text{px}}$
291,0	119,0
286,5	125,0
210,5	119,0
226,0	101,0
200,0	95,0
188,5	104,0
184,0	86,0
170,5	82,0
166,5	80,0

3.4.2 Pi-Komponente der blauen Spektrallinie

Die ausgewerteten Bilder der Aufspaltung der π -Komponente der blauen Spektrallinie sind in Abb. 13 abgebildet.

Die erhobenen Messdaten zu den Intensitätsmaximaabständen sind in Tabelle 7 dargestellt. Mit den Daten aus 5 und 7 ergibt sich der Landé-Faktor über (39) zu $g_{b,\sigma} = 0,56 \pm 0,04$.



Abbildung 13: Untersuchte Aufnahmen der blauen Spektrallinie. Das obere Bild wurde bei $B = 14,15 \text{ mT}$ aufgenommen. Das untere Bild wurde bei $B = 1065,42 \text{ mT}$ aufgenommen und zeigt die π -Aufspaltung.

Tabelle 7: Messdaten der blauen π -Aufspaltung

$\frac{\Delta S_{b,\pi}}{\text{px}}$	$\frac{\delta S_{b,\pi}}{\text{px}}$
337,5	177,0
288,5	144,0
255,0	117,5
219,0	102,5
224,0	92,0
183,0	91,0
184,5	84,0
177,5	83,5
164,0	77,5

4 Diskussion

Im Folgenden werden die ausgewerteten Messdaten und Ergebnisse mit den berechneten Werten verglichen und bezüglich ihrer Aussagekraft interpretiert. Die Ergebnisse und die berechneten Werte sind in Tab. 8 aufgeführt. Die Fehlerintervalle der Landé-Faktoren entstehen durch die Ausgleichsrechnung für die B-Feldstärke. Es wurden keine Ablesefehler bei der Aufnahme des Stromes angenommen, was im Hinblick auf den Versuch die Aussagekraft der Ergebnisse mindert. Zudem ist nicht berücksichtigt worden, dass das vermessene B-Feld leicht inhomogen ist und die Messung somit positionsabhängig ist.

Die Ausgleichsrechnung der Hysterese ergibt für $I = 0 \text{ A}$ ein B ungleich Null, welches durch die Restmagnetisierung des Elektromagneten erklärbar wird. $B(0)$ ist mit $14,15 \text{ mT}$ angegeben.

In Tabelle 8 ist für den Literaturwert der σ -Komponente des blauen Lichtes der Wert

1,75 angegeben. Dies entspricht dem gemittelten Wert der Landé-Faktoren g_{12} des σ -Überganges, welche aus Tabelle 2 entnommen werden können. Aufgrund begrenzter Auflösung lassen sich die beiden Linien nicht separiert beobachten.

Der Landé-Faktor der gemessenen σ -Komponente der blauen Spektrallinie liegt im Fehlerbereich des berechneten Wertes und ist somit experimentell bestätigt worden.

Der gemessenen Landé-Faktor der roten σ -Komponente liegt nahezu im Fehlerbereich und stellt unter Berücksichtigung des vernachlässigten Ablesefehlers des Stroms keine maßgebliche Abweichung dar. Die gemessene π -Komponente der blauen Spektrallinie ist lediglich $0,06 \pm 0,04$ von dem berechneten Wert verschieden, welches ebenso unter Berücksichtigung der vernachlässigten Ablesegenauigkeit des Stromes keine maßgebliche Abweichung darstellt.

Somit konnten in dem Versuch die theoretischen Werte der Landé-Faktoren der roten und blauen Spektrallinie der Cadmium Lampe nahezu bestätigt werden.

Es fällt auf, dass alle gemessenen Landé-Faktoren nach oben hin von den Literaturwerten abweichen. Dies deutet auf einen systematischen Fehler hin, der mit der Magnetfeldstärke zusammenhängt. Der angenommene systematische Fehler des B-Feldes pflanzt sich durch die Beziehung $g_{ij} = \frac{1}{B}$ auf die Landé-Faktoren fort.

Tabelle 8: Landé-Faktoren der roten und blauen Spektrallinie im Vergleich mit den theoretischen Werten,

	Landé-Faktor g_i	Literaturwert $g_{\text{theo},i}$	Abweichung Δg_i
σ_{rot}	$1,14 \pm 0,04$	1	$0,14 \pm 0,04$
σ_{blau}	$1,82 \pm 0,19$	1,75	$0,7 \pm 0,19$
Π_{blau}	$0,56 \pm 0,04$	0,5	$0,06 \pm 0,04$

5 Messdaten der Hysterese

Die gemessenen Daten zur Erstellung der Hysteresekurve sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Tabelle 9: Messdaten der Hysterese

Stromstärke in A	B-Feldstärke aufsteigend in mT	B-Feldstärke aufsteigend in mT
0	4	7
1	87	57
2	112	120
3	174	180
4	230	251
5	290	306
6	352	361
7	419	428
8	476	480
9	540	550
10	600	612
11	662	654
12	714	715
13	775	780
14	823	830
15	872	878
16	916	924
17	959	962
18	987	993
19	1015	1020
20	1046	1050
21	1072	1072

Literatur

- [1] TU-Dortmund. *V27:Der Zeeman-Effekt*. 31. Okt. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/V27.pdf>.
- [2] Joshua Luckey. *Der Zeeman-Effekt*. Version 28.10.2017. URL: <https://github.com/LuckyJosh/PhysikFP2015>.