

Versuch 356

Kettenschaltung mit LC-Gliedern

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Durchführung: 17.01.2017

Abgabe: 24.01.2017

1 Einleitung

In dem folgenden Versuch geht es um die Betrachtung von Wellen mithilfe eines Schwingkreises als Analogon zum verketteten harmonischen Oszillators in der Mechanik. Dabei werden verschiedene charakteristische Größen der entstehenden stehenden Wellen betrachtet, wie zum Beispiel Dispersionsrelation sowie Phasenverschub zwischen der eingehenden und ausgehenden Spannung.

2 Theorie

2.1 Die Dispersionsrelationen

Im allgemeinen gibt die Dispersionsrelation an, in wie weit verschiedene physikalische Größen Abhängigkeiten von der Frequenz aufweisen. Um diese Abhängigkeiten für eine LC-Kettenschaltung zu bestimmen, wird zunächst mithilfe der Kirchhoffschen Regeln die Schwingungsgleichung hergeleitet und auf n Kettenglieder verallgemeinert. Mit der Annahme, dass alle Kettenglieder mit der gleichen Frequenz ω schwingen und lediglich beim Durchlaufen einen Phasenverschub θ erfahren, lässt sich für die Kette folgende Dispersionsrelation herleiten:

$$\omega^2 = \frac{2}{LC}(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Aus dieser Formel lässt sich also die Phasenänderung pro Kettenglied in Abhängigkeit der angelegten Frequenz bestimmen.

Die bei Formel (1) bestimmte Dispersionsrelation lässt sich etwas verallgemeinern, indem eine Kettenschaltung mit alternierend eingebauten Kondensatoren C_1 und C_2 verwendet wird. Bei der Lösung der analog zu der obigen Schaltung bestimmten Schwingungsgleichung wird hierbei die Annahme getroffen, dass alle Kettenglieder immernoch mit der gleichen Frequenz schwingen, allerdings jedes zweite Kettenglied eine andere Amplitude aufweist. Somit ergibt sich für die LC_1C_2 -Kette folgende Dispersionsrelation:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{L} \left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} \right\} \pm \frac{1}{L} \sqrt{\left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} \right\}^2 - \frac{4 \cos(\theta)^2}{C_1 C_2}}. \quad (2)$$

Wie der Formel (2) entnommen werden kann, bilden sich bei dieser Dispersionsrelation zwei Äste, auch akustischer und optischer Ast genannt (siehe Abbildung ??). Zwischen den beiden Ästen existiert ein Bereich, welcher bei der Schwingung nicht auftretenden Frequenzen beinhaltet. Während ω_1 bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum besitzt, tritt dort für ω_2 ein Minimum auf (siehe Abbildung ??).

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L} \frac{2(C_1 + C_2)}{C_1 C_2}} \left\{ 1 - \theta^2 \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} \right\} \quad (3)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{L(C_1 + C_2)}} \theta \quad (4)$$

Aus den bestimmten Dispersionsrelationen lassen sich nun ebenfalls die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit herleiten. Da die Gruppengeschwindigkeit in dem Versuch jedoch nicht betrachtet wird, wird im folgenden nur auf die Phasengeschwindigkeit eingegangen:

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{\theta} = \frac{\omega}{\arccos(-\frac{1}{2}\omega^2 LC)} \quad (5)$$

Die Dispersion verschwindet in dem Bereich kleiner Frequenzen, also bei $\omega \ll 1/LC$. Beim Erreichen der Grenzfrequenz $\omega_G = 2/\sqrt{LC}$ erreicht die Phasengeschwindigkeit einen Minimalwert:

$$v_{\text{Ph}_{\min}} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6)$$

2.2 (Unendlich lange) LC-Ketten

Interessant für die Schaltungstechnik ist auch der am Eingang der Kette gemessene Eingangswiderstand, welcher als Quotient von der am Eingangskondensator anliegenden Spannung U_0 und dem in die Schaltung hineinfließenden Strom I_0 definiert ist:

$$Z(\omega) = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\omega^2 LC}}. \quad (7)$$

Der Eingangswiderstand einer (unendlich langen) Kette ist somit rein reell, obwohl in der Schaltung nur Komponenten mit imaginären Impedanzen verwendet wurden. Dieses Ergebnis ist auch zu erwarten gewesen, da in einer (unendlich langen) Kette keine Reflexion auftreten sollte. Somit sind Strom und Spannung an jedem Ort in Phase, elektrische Energie kann lediglich in die Kette hineinfließen und eine (unendlich lange) Kette kann also auch bei einer begrenzten mit dem Wellenwiderstand als Abschlusswiderstand simuliert werden.

Über den angeschlossenen Widerstand und den Wellenwiderstand lässt sich das Verhältnis zwischen eingehender und ausgehender Spannung über folgende Formel bestimmen:

Die Welle weißt nun für verschieden Abschlusswiderstände unterschiedliche Eigenschaften auf, die im folgenden aufgelistet sind:

- a) offenes Ende ($R = \infty$):
 $U_{\text{ref}} = U_{\text{E}} \implies$ vollständige Reflexion ohne Phasensprung.
- b) kurzgeschlossene Kette ($R = 0$):
 $U_{\text{ref}} = - U_{\text{E}} \implies$ vollständige Reflexion mit Phasensprung.
- c) Abschluss mit Wellenwiderstand ($R = Z$):
 $U_{\text{ref}} = 0 \implies$ keine Reflexion.
- d) in allen anderen Fällen tritt eine Teilreflexion auf und bei einem nicht reellen R zusätzlich eine Phasendrehung.

Bei den ersten beiden Fällen tritt also durch Überlagerung einer hinlaufenden Welle und der rücklaufenden Welle eine Überlagerung zu einer stehenden Welle statt. Dabei entstehen Schwingungsknoten, an denen die Amplitude für alle Zeiten verschwindet:

$$n_z \theta = z \frac{\pi}{2} \quad (z = 1, 3, 5, \dots) \quad (8)$$

$$n_z \theta = z \pi \quad (z = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

Dabei bezieht sich die Formel (8) auf ein offenes Ende und die Formel (9) auf ein geschlossenes Ende.

Im Fall $R = \infty$ kann sich allerdings nur dann eine stehende Welle ausbilden, wenn am Kettenende ($n=n_{\text{max}}$) ein Spannungsbauch befindet.

3 Versuchsdurchführung

3.1 Bestimmung der Durchlasskurve

In dem ersten Teil des Experimentes wird mithilfe eines Schreibers eine Durchlasskurve für beide Ketten angefertigt. Dabei wird an dem Generator ein Sweeo eingestellt, sodass der Schreiber die gemessenen Spannung am Ausgang der LC-Kette in Abhängigkeit der anliegenden Frequenz. Die Schaltung für diesen Teil der Messung ist in Abbildung ?? zu sehen.

3.2 Bestimmung der Dispersionsrelation

Mithilfe der in Abbildung ?? dargestellten Schaltung lässt sich die Phasenverschiebung pro Kettenglied betrachten. Dafür wird an einem Oszilloskop mithilfe von Lissajous-Figuren die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung betrachtet, wobei lediglich Frequenzen mit einer Phasenverschiebung eines Vielfachen von π notiert werden.

3.3 Nachweis von stehenden Wellen

Mit der Schaltung nach Abbildung ?? (ohne Schreiber und Wobbeleinrichtung) wird nun versucht, stehende Wellen nachzuweisen. Dafür wird mit einem Millivoltmeter anfangs die Ausgangsspannung gemessen, um eine Frequenz mit einem Spannungsmaximum am Kettenende zu finden. Danach wird an jedem Kettenglied die auftretende Spannung gemessen. Diese Messung wird für eine beiderseits offene Kette mit der 1. und 2. Eigenschwingung durchgeführt und danach für eine mit dem Wellenwiderstand als Abschlusswiderstand eingestellte Kette für eine beliebige Frequenz wiederholt.