

Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Durchführung: 01.02.2017

Abgabe: 08.02.2017

1 Theorie

In dem folgenden Versuch wird ein elektronischer Kreis, im Kern bestehend aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator betrachtet. Mit Hilfe dieser Schaltung kann eine gedämpfte Schwingung betrachtet werden, sowie durch Anschluss eines Generators eine erzwungene Schwingung. Im Laufe des Versuches sollen der Dämpfungswiderstand, die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung sowie die Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung betrachtet werden.

1.1 Der gedämpfte Schwingkreis

Der in diesem Experiment betrachtete gedämpfte Schwingkreis ist im Grunde nur eine Erweiterung des RC-Kreises mit einer Spule. Somit kommen in der Schaltung zwei Energiespeicher vor, zwischen denen die Energie hin und her schwint. Durch den eingebauten Widerstand geht bei der Schwingung Energie in Form von Wärme verloren und somit wird das ganze System gedämpft. Betrachtet man solch eine Schaltung, kann mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze eine Differentialgleichung für den Strom aufgestellt werden:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (1)$$

Durch Lösen der Differentialgleichung ergibt sich mit einem geeigneten Ansatz für die Frequenz ein Term, der von der Stärke der Dämpfung abhängig ist:

$$\tilde{\omega}_{1,2} = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2)$$

Je nachdem wie sich der unter der Wurzel stehende Term verhält, können für die gedämpfte Schwingung verschiedene Fälle betrachtet werden, von denen zwei im Folgendem erläutert werden.

1.Fall : $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

In diesem Fall ist der Term mit der Wurzel rein reell und es entsteht eine harmonische Schwingung, deren Amplitude mit zunehmender Zeit gegen Null geht. Die Einhüllende wird dabei durch eine Exponentialfunktion beschrieben, wie auch in Abbildung 1 anhand der rot gestrichelten Linie zu sehen ist. Mithilfe der Schwingungsdauer lässt sich dann errechnen, nach welcher Zeit die Amplitude auf den e -ten Teil ihrer Ursprungsamplitude abgesenkt ist:

$$T_{\text{ex}} := \frac{2L}{R} \text{ s}. \quad (3)$$

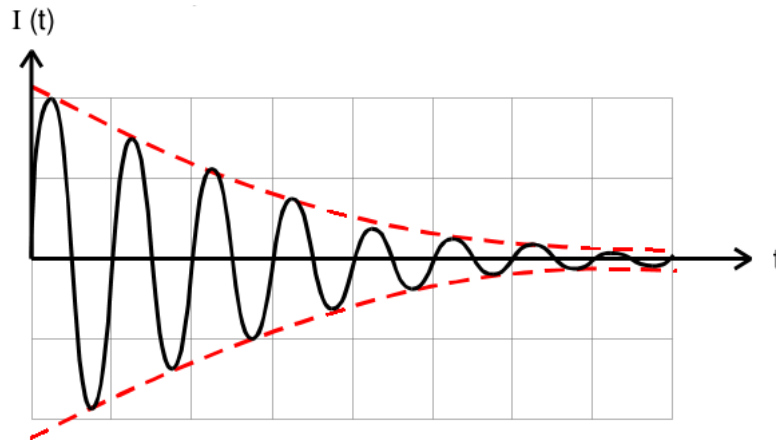


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf einer gedämpften Schwingung

2. Fall : $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Bei diesem Fall handelt es sich um eine aperiodische Dämpfung, bei der die Lösung keinen oszillatorischen Teil besitzt. In diesem Versuch wird dabei nur der als aperiodischer Grenzfall bezeichneter Spezialfall betrachtet, bei dem $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ gilt und der Strom ohne Überschwinger am schnellsten gegen Null geht (siehe schwarz gestrichelte Linie Abbildung 2).

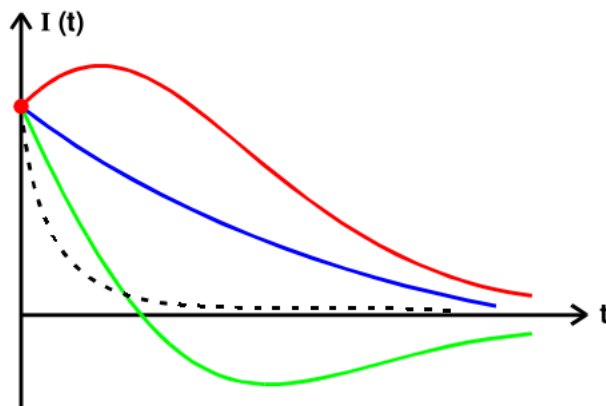


Abbildung 2: Möglicher Zeitverlauf des Stromes in einem Schwingkreis mit aperiodischer Dämpfung

1.2 Die erzwungene Schwingung

Wird bei dem vorher betrachteten Schaltkreis noch ein Generator kontinuierliche Spannungsquelle eingebaut, handelt es sich um eine erzwungene Schwingung. Mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze ergibt sich für die Kondensatorspannung U_C folgende Differentialgleichung:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 \exp^{j\omega t}. \quad (4)$$

Aus dieser Differentialgleichung können nun mit einem geeigneten Ansatz eine Funktion für die Kondensatorspannung U_C sowie eine Gleichung für die Phasenverschiebung φ zwischen Erreger- und Kondensatorspannung bestimmt werden:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \right) \quad (5)$$

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (6)$$

Die Kondensatorspannung kann bei der sogenannten Resonanzfrequenz ω_{res} auch einen Wert größer als U_0 annehmen:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (7)$$

Wird bei der Schaltung eine schwache Dämpfung betrachtet, für die $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$ gilt, nähert sich ω_{res} der Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung an. In diesem Fall übertrifft U_C die Erregerspannung U_0 um den Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$, welcher auch als Güte q des Schwingkreises bezeichnet wird.

Ein weiterer Faktor für die Güte eines Schwingkreises ist die Breite der Resonanzkurve, welche durch die beiden Frequenzen ω_+ und ω_- charakterisiert wird. Bei den beiden Frequenzen handelt es sich um die Werte, bei denen die Kondensatorspannung auf den Bruchteil $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ihres Maximalwertes absinkt. Für Güte und Breite folgt dabei folgende Beziehung:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (8)$$

2 Durchführung

Im ersten Teil des Experimentes wird die Zeitabhängigkeit der Amplitude untersucht, um daraus den effektiven Dämpfungswiderstand zu bestimmen. Dafür wird die Schaltung aus Abbildung 3 verwendet. Dabei wird auf dem Oszilloskop die abklingende Schwingung beobachtet. Mithilfe des Reglers wird die Zeitachseinstellung so angepasst, bis auf dem Bildschirm ein Intervall zu sehen ist, auf dem die Amplitude etwa um den Faktor 3 bis 8 abgenommen hat. Anschließend werden mit der Cursor sowohl Amplituden der Maxima sowie auch der zeitliche Abstand gemessen und ein Thermodruck angefertigt.

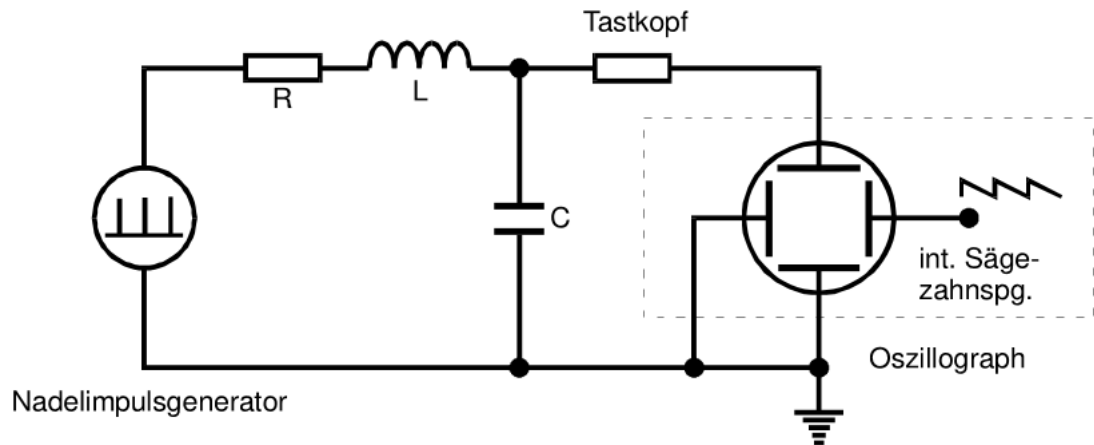


Abbildung 3: Schaltung zur Messung der Zeitabhängigkeit der Kondensatorsspannungsamplitude

Im zweiten Fall wird die Schaltung aus Abbildung 4 verwendet, bei der nun der veränderbare Widerstand in den Stromkreis angeschlossen wird. Der Widerstand wird zu erst auf seinen maximalen Wert eingestellt, sodass auf dem Bildschirm eine kritische Dämpfung beobachtbar ist. Dann wird der Widerstand so lange runter geregelt, bis auf dem Oszilloskop ein Überschwinger zu sehen ist. Der Dämpfungswiderstand ist dabei genau in dem Moment eingestellt, wo gerade noch kein Überschwinger zu erkennen ist.

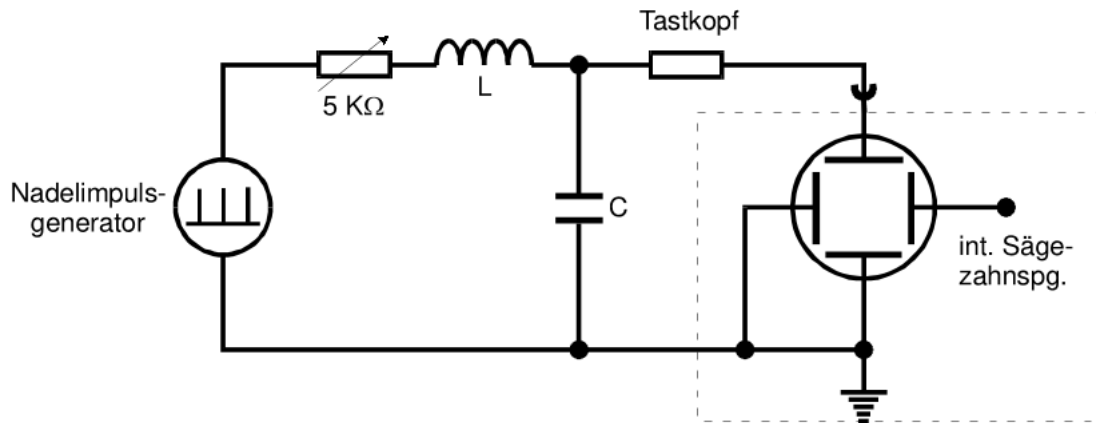


Abbildung 4: Schaltung zur Bestimmung des Dämpfungswiderstandes bei dem aperiodischen Grenzfall

Für die letzten beiden Teile der Messung wird der Schaltplan aus Abbildung 5 verwendet. Auf dem Oszilloskop werden dabei sowohl die Erreger- als auch die Kondensatorspannung sichtbar gemacht. Zuerst werden bei jeder Frequenzveränderung die Amplituden beider Spannungen notiert. Dann werden mithilfe des Cursors der zeitliche Abstand der beiden Nulldurchgänge beider Spannungsverläufe sowie die Wellenlänge der Kondensatorspannung gemessen, um daraus hinterher die Phasenverschiebung zu berechnen.

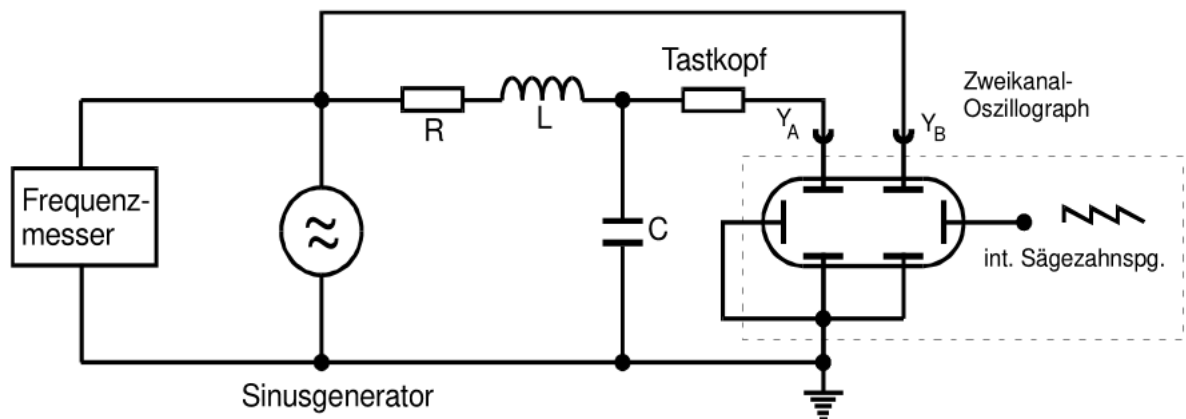


Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit sowie der Phasenverschiebung

3 Auswertung

Im Folgendem werden die Messergebnisse ausgewertet und auf geeignete Weise visualisiert. Die verwendete Schaltung hatte die folgenden Daten.

$$L = (3,53 \pm 0,03) \text{ mH}$$

$$C = (5,015 \pm 0,015) \text{ nF}$$

$$R_1 = (30,3 \pm 0,1) \Omega$$

$$R_2 = (271,6 \pm 0,3) \Omega$$

3.1 Einhüllende der Schwingungskurve

Die Wertepaare $(U_C(t_i), t_i)$ müssen für die Ausgleichsrechnung bestimmt werden. Die Werte $U_C(t_i)$ wurden mit dem Cursor des Oszilloskops gemessen. Hingegen wurden die Zeiten t_i aus dem Bild der Schwingungskurve mit Hilfe eines Lineals abgelesen. Ein Abbild der Schwingungskurve ist in Abb. 6 dargestellt.

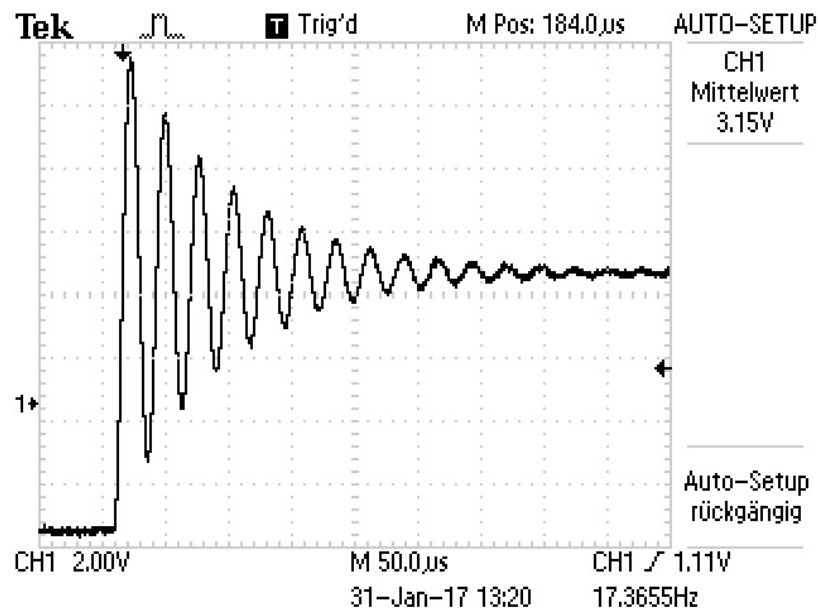


Abbildung 6: Gemessene Schwingungskurve.

Die Schwingungskurve in Abb. 6 wurde beim Widerstand R_1 und einer Generatorfrequenz von 5,82 Hz erstellt.

Die diskreten Wertepaare $(U_C(t_i), t_i)$ sind in der Tabelle 1 dargestellt. Dabei wurden für $U_C(t_i)$ jeweils die Maxima der Schwingungskurve vermessen.

Mit den Wertepaaren aus Tabelle 1 wurde mittels des *Python*-Paketes *curve_fit* eine Ausgleichsrechnung an eine exponentielle Funktion der Form

$$U_c(t) = a \cdot \exp^{-b \cdot t} + c \quad (9)$$

Zeit in μs	Maxima in V
0	15,08
27,5	13,2
55	11,92
82,5	10,96
112,5	10,24
142,5	9,68
172,5	9,36
202,5	9,04
235	8,88
267,5	8,76
302,5	8,64
337,5	8,52

Tabelle 1: Messdaten der Schwingungskurve.

durchgeführt. Für die Parameter ergeben sich somit die Werte

$$\begin{aligned}
 a &= (6,62 \pm 0,03) \text{ V} \\
 b &= (1,17 \pm 0,01) \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}} \\
 c &= (8,44 \pm 0,02) \text{ V}
 \end{aligned}$$

Die Ausgleichfunktion ist mit den Daten aus Tabelle 1 in Abb. 7 dargestellt.

Der Exponent der Ausgleichsfunktion b liefert über die Formeln (10) und (3) den effektiv Widerstand R_{eff} und die Abklingzeit T_{ex} .

$$R_{\text{eff}} = 2bL \quad (10)$$

Damit ergeben sich die folgenden Werte.

$$\begin{aligned}
 R_{\text{eff}} &= (82,4 \pm 1,2) \Omega \\
 T_{\text{ex}} &= (8,56 \pm 0,01) \cdot 10^{-5} \text{ s}
 \end{aligned}$$

Im Vergleich zu dem eingebauten, verwendeten Widerstand R_1 fällt auf, dass R_{eff} deutlich größer ist. Dies ist damit zu begründen, dass R_{eff} den Innenwiderstand des Generators mit einbezieht, welcher in R_1 nicht erfasst wird.

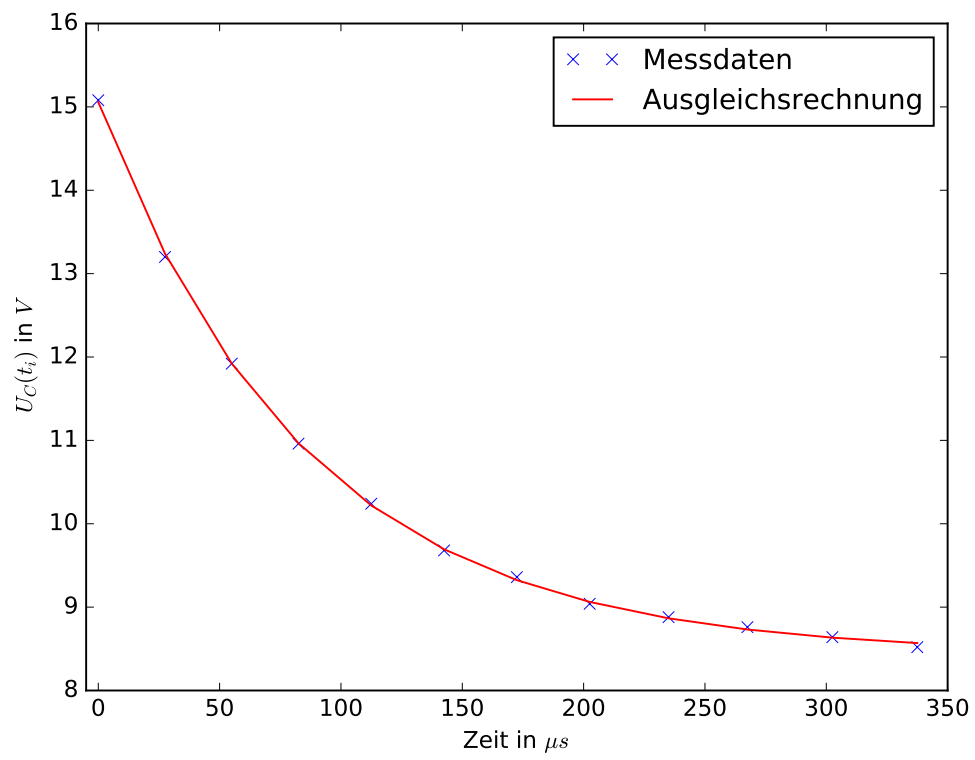


Abbildung 7: Darstellung der Ausgleichsfunktion.

3.2 Widerstand im aperiodischen Grenzfall

Aus den Daten L und C der Apparatur lässt sich über den Zusammenhang:

$$R_{\text{ap}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

der Widerstand des aperiodischen Grenzfalles R_{ap} errechnen. Der Wert R_{ap} wurde auch experimentell bestimmt. Die Messung ergeben die folgenden Werte.

$$\begin{aligned} R_{\text{ap,theo}} &= (1678 \pm 8) \, \Omega \\ R_{\text{ap}} &= 13\,500 \, \Omega \end{aligned}$$

Die Messung wurde bei einer Frequenz von $\nu = 5,82 \text{ Hz}$ erhoben. Der Wert R_{ap} ist der experimentell bestimmte Wert. Dieser wurde an dem variablen Widerstand der Apparatur abgelesen und wird als fehlerfrei angenommen. Die gemessene Wert ist ca. acht mal größer als der theoretisch berechnete Wert. Dies hängt damit zusammen, dass der experimentelle Wert an der Apparatur nur ungenau abzulesen war. Zudem war nicht sichergestellt, dass der abgelesene Widerstand tatsächlich mit dem angelegten Widerstand übereinstimmt. Damit ist die Diskrepanz auf einen systematischen Fehler zurückzuführen.

3.3 Resonanzfrequenz

Die Resonanzfrequenz lässt sich mit den Apparaturdaten über die Formel (7) errechnen. Aus der Kreisfrequenz lässt sich durch Multiplikation mit 2π direkt die Frequenz ν_{res} errechnen. Als Widerstand wurde der gemessene effektiv Widerstand R_{eff} verwendet. Die berechnete Resonanzfrequenz beträgt:

$$\nu_{\text{res}} = (3,774 \pm 0,017) \cdot 10^4 \text{ Hz.}$$

In dem Diagramm 8 ist die normierte Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Mit normiert ist gemeint, dass die Kondensatorspannung durch die Generatorspannung geteilt wird. Das Diagramm 8 wurde mit den Daten aus Tabelle 2 erstellt.

Der Maximalwert der Kondensatorspannung wird bei einer Frequenz von

$$\nu_{\text{res}} = 36 \text{ kHz} \tag{11}$$

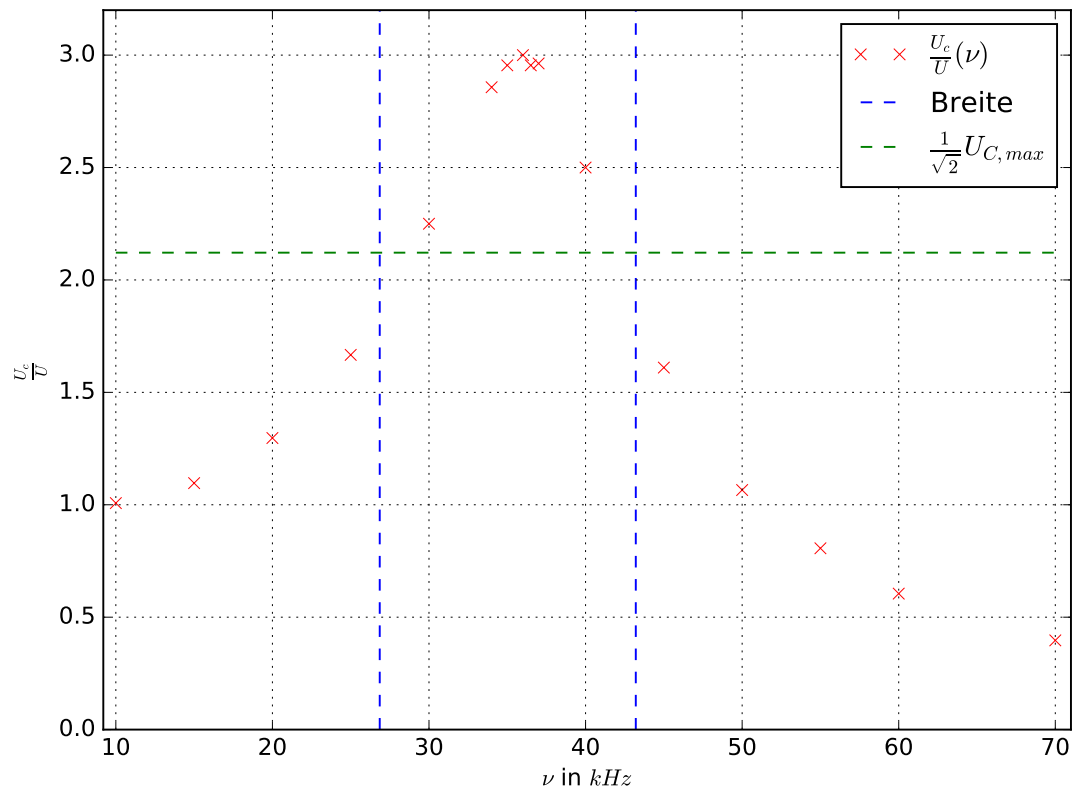


Abbildung 8: Normierte Kondensatorsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

gemessen. Die Halbwertsbreite der Kondensatorspannung ist durch die Differenz der Werte ν_+ und ν_- gegeben.

$$\nu_+ \approx 27 \text{ kHz}$$

$$\nu_- \approx 43 \text{ kHz}$$

Damit ergibt sich die Breite zu $\approx 16 \text{ kHz}$.

Die dazugehörigen Theoriewerte sind im Folgendem gegeben.

$$\nu_{+, \text{theo}} = (23,32 \pm 0,27) \text{ kHz}$$

$$\nu_{-, \text{theo}} = (46,7 \pm 0,5) \text{ kHz}$$

Die Werte weichen nur geringfügig voneinander ab. Die Güte q des Schwingkreises ist der Maximalwert des Verhältnisses von Kondensatorspannung zur Generatorspannung. In Abb. 8 ist das Maximalverhältnis bei der Resonanzfrequenz erreicht. An diesem Punkt beträgt das Verhältnis

$$q = 3.$$

Der errechnete Wert liegt bei $q_{\text{theo}} = 3,24$ und stimmt im Rahmen der Messungenauigkeiten mit dem gemessenen Wert überein.

3.3.1 Resonanzfrequenz aus der Phasenverschiebung

Aus der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz kann die Resonanzfrequenz ν_{res} bestimmt werden. Die Resonanzfrequenz ist der Wert, an dem die Phase zwischen den Spannungen $\varphi_{\text{res}} = \frac{\pi}{2}$ entspricht. Der gemessene Wert wurde aus dem Diagramm 9 abgelesen.

Das Diagramm 9 wurde mit Daten aus der Tabelle 2 erstellt. Der abgelesene Wert bei einer Phase von φ_{res} ist:

$$\nu_{\text{res}} = 37 \text{ kHz}.$$

Dieser Wert stimmt mit dem berechneten und in (11) bestimmten Wert nahezu überein.

Die Frequenz ν_1 , bei der die Frequenz gerade $\frac{\pi}{4}$ ist, sowie die Frequenz ν_2 , bei der $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ist sind dem Diagramm 9 näherungsweise zu entnehmen.

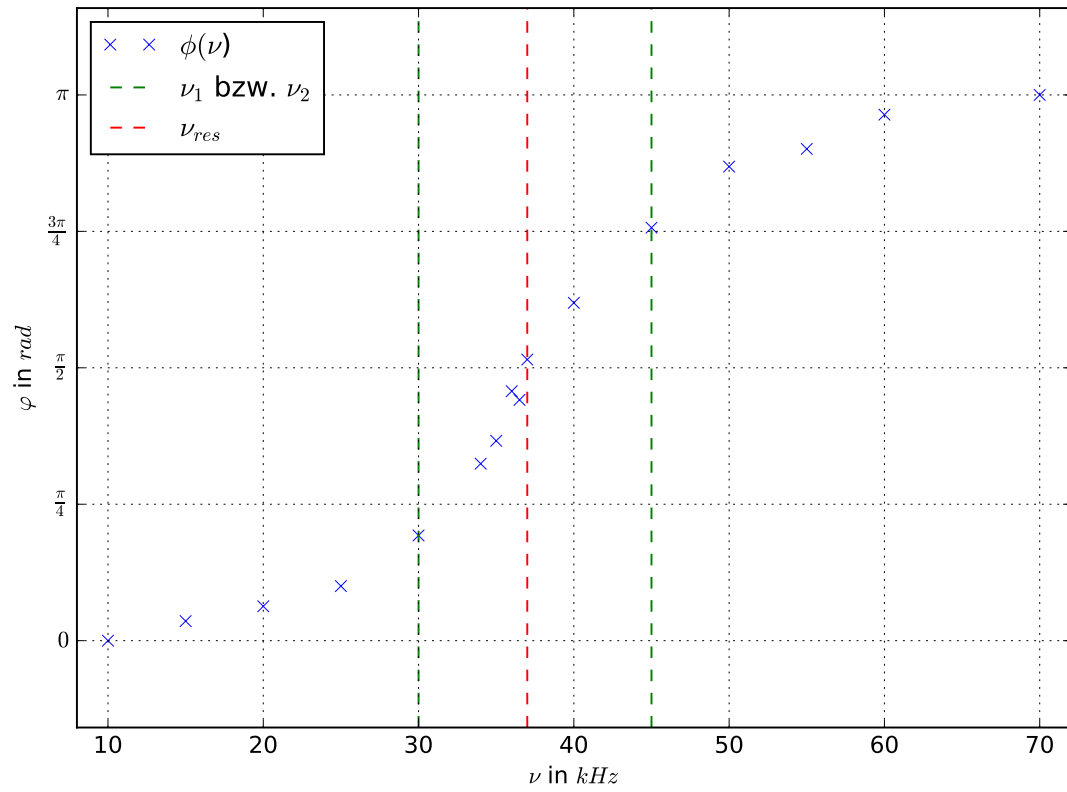


Abbildung 9: Phase zwischen Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

$$\nu_1 \approx 30 \text{ kHz}$$

$$\nu_2 \approx 45 \text{ kHz}$$

Rechnerisch ergeben sich ν_1 und ν_2 über den folgenden Zusammenhang.

$$\nu_1 = \left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \nu_2 = \left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \quad (12)$$

ν_1 und ν_2 ergeben sich zu:

$$\nu_{1,\text{theo}} = (36,21 \pm 0,17) \text{ kHz}$$

$$\nu_{2,\text{theo}} = (38,55 \pm 0,17) \text{ kHz}$$

Die Werte weichen deutlich von den gemessenen Werten ab. Dies ist damit zu begründen, dass die gemessenen Werte nur Näherungen entsprechen. Damit eine höhere Sicherheit der Messdaten besteht, hätten mehr Messwerte um den Bereich einer Phasenverschiebung von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ genommen werden müssen. Es lässt sich aufgrund der mangelnden Anzahl an Messwerten keine präzise Begründung für die signifikanten Unterschiede zwischen den Theoriewerten und den gemessenen Werten machen.

4 Diskussion

Anhand der ausgewerteten Daten wird deutlich, dass lediglich der gemessene Widerstand des aperiodischen Grenzfalles enorm von dem theoretisch berechneten Wert abweicht. Die aufgetretene Abweichung wurde auf einen systematischen Fehler zurückgeführt. Zudem weichen die bestimmten Frequenzen ν_1 und ν_2 deutlich von den berechneten Werten ab. Dies wurde mit der geringfügigen Aussagekraft der wenigen Messdaten in den Bereich von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ begründet. Die sonstigen Werte entsprachen alle im Rahmen der Messungenauigkeiten den theoretisch berechneten Werten.

5 Messdaten

Die Daten der Messung zur Resonanzfrequenz sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

ν_G in kHz	λ in μs	φ in μs	U_G in V	U_C in V
10	98,0	0	5,4	5,4
15	67,0	1,2	5,4	5,9
20	50,8	1,6	5,1	6,6
25	40,0	2,0	5,0	8,4
30	33,2	3,2	4,8	10,8
34	29,6	4,8	4,5	12,8
35	28,4	5,2	4,4	13,0
36	28,0	6,4	4,4	13,2
36,5	27,2	6,0	4,4	13,0
37	26,4	6,8	4,3	12,8
40	25,2	7,8	4,5	11,2
45	22,2	8,4	4,7	7,6
50	19,8	8,6	4,9	5,2
55	18,2	8,2	5,0	4,0
60	16,6	8,0	5,0	3,0
70	14,0	7,0	5,0	2,0

Tabelle 2: Messdaten zur Resonanzfrequenz.