

# **Versuch 101**

## **Das Trägheitsmoment**

Jonah Nitschke

Sebastian Pape

Durchführung: 08.11.2016

Abgabe: 15.11.2016

# 1 Auswertung

## 1.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße und des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse

Für die Bestimmung der Winkelrichtgröße wurde folgende Formel verwendet:

$$D = \frac{|F| \cdot |r|}{\phi} \quad (1)$$

Unsere Messergebnisse der Winkel und der jeweilig wirkenden Kraft sind in Tabelle 1 eingetragen.

Tabelle 1: Wirkende Kraft [N] in Abhängigkeit des Drehwinkels bei verschiedenen Abständen.

<i>Abstand[m]</i>	60°	120°	180°	240°
0.10	0.31	0.61	0.89	1.20
0.15	0.20	0.40	0.595	0.89
0.20	0.16	0.30	0.44	0.59

Mithilfe der Messdaten werden die jeweiligen Winkelrichtgrößen berechnet und gemittelt, sodass sich folgender Wert für die "statische" Winkelrichtgröße ergibt:

$$D_{stat} = (0.029088 \pm 0.000329)\text{Nm} \quad (2)$$

Die Winkelrichtgröße kann auch dynamisch bestimmt werden. Die Messergebnisse dazu befinden sich in Tabelle 2. Zur Bestimmung von  $D_{dyn}$  wird in einem Graphen  $T^2$  gegen  $a^2$  aufgetragen, wobei  $a$  dem jeweiligen Abstand zum Drillachsenmittelpunkt  $|r|$  entspricht und  $T$  der jeweilig gemessenen Schwingungsdauer. Mittels linearer Regression wird dann die Steigung  $m$  sowie der y-Achsenabschnitt  $b$  berechnet. Mithilfe dieser Werte wird dann ebenfalls die Winkelrichtgröße mit folgender Formel berechnet:

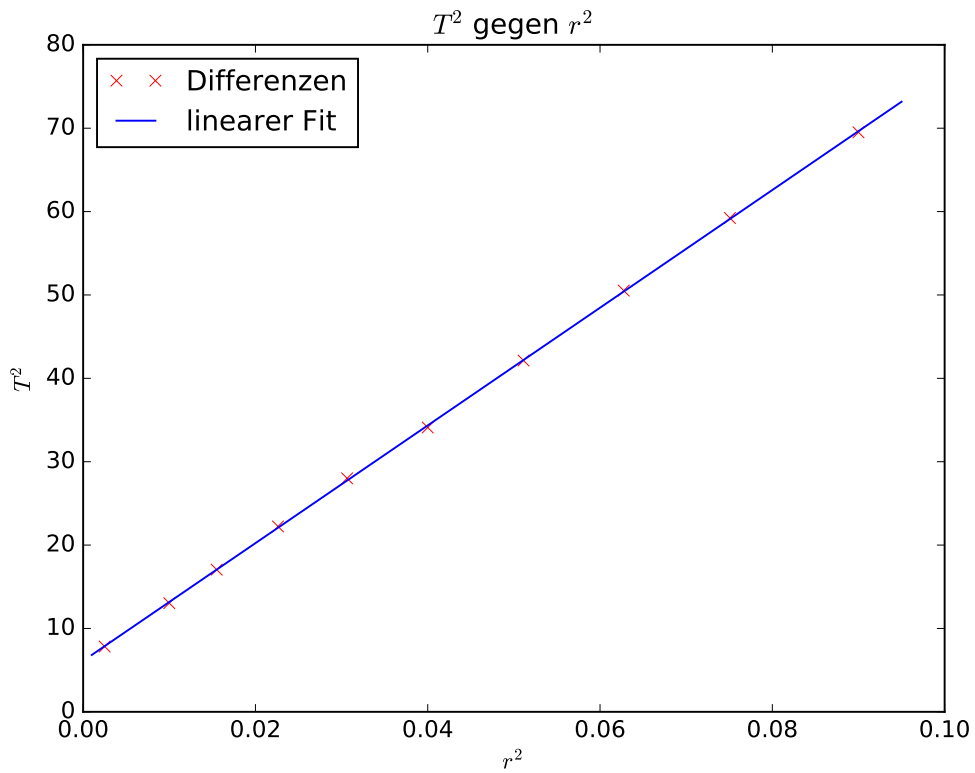
$$D_{dyn} = \frac{8\pi^2 \cdot m_{zyl}}{m} \quad (3)$$

Der Fehler ergibt sich dabei mithilfe Gauß'scher Fehlerrechnung aus folgender Formel:

$$\sigma_{D_{dyn}} = \frac{8\pi^2 \cdot m_{zyl}}{m^2} \cdot \sigma_m \quad (4)$$

Tabelle 2: Schwingungsdauern bei jeweiligen Abständen.

$a[m]$	$a^2[m^2]$	$T[s]$	$T^2[s^2]$
0.0500	0.0025	2.79867	7.8325
0.1000	0.0100	3.61067	13.037
0.1245	0.0155	4.12933	17.051
0.1504	0.0226	4.71533	22.234
0.1751	0.0306	5.29200	28.005
0.2000	0.0400	5.84000	34.106
0.2261	0.0511	6.49133	42.137
0.2505	0.0628	7.10800	50.524
0.2740	0.0751	7.69600	59.228
0.3000	0.0900	8.33733	69.511



Die Steigung der Regressionsgerade beträgt  $m = (705.90543 \pm 1.89267) \frac{s^2}{m^2}$  und der y-Achsenabschnitt hat einen Wert von  $b = (6.11521 \pm 0.09211)s^2$ . So ergibt sich für die "dynamische" Winkelrichtgröße folgender Wert:

$$D_{dyn} = (0.02925 \pm 0.00008)Nm \quad (5)$$

Zu sehen ist, dass  $D_{dyn}$  im Fehlerbereich von  $D_{stat}$  liegt, dies aber anders herum nicht gilt. Da  $D_{dyn}$  den geringeren Fehler hat, wird im folgenden mit diesem Wert weitergerechnet.

Mithilfe von  $D_{dyn}$  und des y-Achsenabschnittes von Abbildung 1 können nun mit folgenden Formeln auch das Trägheitsmoment der Drillachse und der Fehler bestimmt werden:

$$I_D = I_{ges} - 2 \cdot I_Z \quad (6)$$

$$= \frac{b \cdot D_{dyn}}{4\pi^2} - 2 \cdot I_Z \quad (7)$$

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{D_{dyn}}{4\pi^2} \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\frac{b}{4\pi^2} \cdot \sigma_{D_{dyn}}\right)^2} \quad (8)$$

Dabei wird das Trägheitsmoment der Stange vernachlässigt, da diese als Masselos angenommen werden soll. Das Trägheitsmoment der Zylinder muss vorher allerdings berechnet werden und hinterher abgezogen werden. Dabei ergibt sich für  $I_Z$  folgender Wert:

$$I_Z = m_{zylinder} \cdot \left(\frac{R_Z^2}{4} + \frac{H_Z^2}{12}\right)kgm^2 \quad (9)$$

Bei  $R_Z$  und  $H_Z$  handelt es sich dabei um Radius und Höhe des Zylinders. Da wir in unserer Formel den y-Achsenabschnitt verwenden, muss der Satz von Steiner nicht beachtet werden, da wir sozusagen mit einer Schwingungsdauer bei  $r = 0$  rechnen. Mit dem obigen y-Achsenabschnitt ergibt sich dann für das Trägheitsmoment der Drillachse folgender Wert:

$$I_D = (0.0045 \pm 0.0007)kgm^2 \quad (10)$$

## 1.2 Bestimmung der Trägheitsmomente zwei verschiedener Körper

Im folgenden Abschnitt wird das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel sowie einer homogenen Zylinders sowohl theoretisch über Abmessung und Masse sowie experimentell über die Schwingungsdauer bestimmt und danach verglichen.

### 1.2.1 Trägheitsmoment einer homogenen Kugel

Vor dem Start der Messungen wurden zuerst sowohl Masse als auch Durchmesser der Kugel ermittelt. Dabei wird beides als Fehlerfrei angenommen:

$$r_K = (0.06883 \pm 0.00000)\text{m} \quad (11)$$

$$m_K = (0.33821 \pm 0.00000)\text{kg} \quad (12)$$

Mit diesen Werten lässt sich das "theoretische" Trägheitsmoment wie folgt bestimmen:

$$I_{Kugel,theo} = \frac{2}{5} m_{Kugel} \cdot r_K^2 = (0.00154 \pm 0.0)\text{kgm}^2 \quad (13)$$

Als nächstes wird das Trägheitsmoment über die Schwingungsdauer bestimmt. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 3 eingetragen.

Tabelle 3: Schwingungsdauern der homogenen Kugel

<i>Messung</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Dauer[s]</i>	7.50	7.50	7.47	7.44	7.50	7.41	7.50	7.47	7.56	7.47

Für die Schwingungsdauer werden die Werte noch durch 5 geteilt und gemittelterhalten wir somit einen Wert von :

$$T_{Kugel} = (1.4964 \pm 0.0026)\text{s} \quad (14)$$

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment folgender Wert:

$$I_{Kugel,exp} = \frac{T^2 D_{dyn}}{4\pi^2} = (0.001659 \pm 0.0000034)\text{kgm}^2 \quad (15)$$

Der Fehler errechnet sich wie folgt mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_I = \sqrt{(2T \frac{D_{dyn}}{4\pi^2} \cdot \sigma_T)^2 + (\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \sigma_{D_{dyn}})^2} \quad (16)$$

Anschließend müsste eigentlich noch das Trägheitsmoment der Drillachse abgezogen werden. Da dieser Wert dann allerdings stark negativ sein würde und experimenteller und theoretischer Wert nur geringfügig abweichen, wird dies hier als physikalisch nicht sinnvoll angesehen. Somit ergibt sich eine Abweichung zwischen beiden Werten von ca. 7.2%. Näheres dazu findet sich in der Diskussion.

Verwendet wir dabei die dynamisch bestimmte Winkelrichtgröße, da dieser Größe der selbige Messprozess zugrunde liegt, den wir auch bei der Bestimmung der Trägheitsmomente über die Schwingungsdauer verwendet haben.

### 1.2.2 Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders

Die Messwerte für die Schwingungsdauern finden sich in Tabelle 4. Die Rechnungen sind dabei analog zu denen der homogenen Kugel.

$$r_Z = (0.04012 \pm 0.00000)\text{m} \quad (17)$$

$$h_Z = (0.13990 \pm 0.00000)\text{m} \quad (18)$$

$$m_Z = (1.00580 \pm 0.00000)\text{kg} \quad (19)$$

$$I_{Zylinder,theo} = \frac{1}{2}m_Z \cdot r_Z^2 = (0.000809 \pm 0.0)\text{kgm}^2 \quad (20)$$

Tabelle 4: Schwingungsdauern des homogenen Zylinder

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dauer[s]	5.22	5.28	5.28	5.25	5.28	5.22	5.28	5.22	5.25	5.25

Für die Schwingungsdauer erhalten wir somit einen Wert von:

$$T_{Zylinder} = (1.0506 \pm 0.0017)\text{s} \quad (21)$$

Damit errechnet sich für das Trägheitsmoment und dessen Fehler (16) folgender Wert:

$$I_{Zylinder,exp} = (0.0008179 \pm 0.0000034)\text{kgm}^2 \quad (22)$$

Auch hier müsste wir bei der homogenen Kugel eigentlich noch  $I_D$  abgezogen werden, analog zu Kapitel 3.2.1 wird jedoch darauf verzichtet. Es ergibt sich somit eine Abweichung von ca. 1% zwischen beiden Werten.

### 1.3 Das Trägheitsmoment einer Holzpuppe in zwei verschiedenen Positionen

Als letzte Teil der Messungen soll das Trägheitsmoment einer Holzpuppe in zwei verschiedenen Positionen bestimmt werden. In Position 1 sind die beiden Arme seitlich ausgestreckt und bei Position 2 sind der rechte Arm sowie das rechte Bein nach vorne ausgestreckt.

#### 1.3.1 Abschätzung des Trägheitsmomentes aus den Abmessungen

In der folgenden Tabelle sind alle Abmessungen der Puppe eingetragen. Die Indexe entsprechen dabei dem entsprechenden Körperteil [t = Torso, k = Kopf, a = Arm, b = Bein].

Tabelle 5: Abmessungen der Holzfigur in Metern

$r_t$	$h_t$	$r_k$	$h_k$	$r_a$	$h_a$	$r_b$	$h_b$
0.023034	0.13114	0.015805	0.071	0.1002	0.17864	0.01136	0.20042

Bei den Rechnungen werden die einzelnen Körperteile als Zylinder angenommen. Da die Körperteile allerdings teilweise erheblich von diesen Formen abweichen kann folgendes jedoch lediglich als Abschätzung betrachtet werden. Somit macht auch eine Fehlerrechnung in diesem Fall keinen Sinn und wird in diesem Abschnitt nicht durchgeführt.

Das Gesamtträgheitsmoment entspricht somit einer Summation der Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile. Um die Massen der einzelnen Körperteile zu ermitteln, wurde das Gesamtvolumen der Figur berechnet und damit die Dichte bestimmt. Mit dem Volumen der einzelnen Körperteile wurden dann die einzelnen Massen [Tabelle 6] bestimmt:

Tabelle 6: Volumen und Massen der einzelnen Körperteile

<i>Objekt</i>	<i>Volumen[cm<sup>3</sup>]</i>	<i>Masse[kg]</i>
Torso	0.0004373	0.134536
Kopf	0.0001110	0.034293
Arm	0.0001125	0.034679
Bein	0.0001625	0.050011

Für Position 1 gilt somit folgende Formel:

$$I_{ges} = I_T + I_K + 2 \cdot I_A + 2 \cdot I_B \quad (23)$$

$$= \frac{1}{2}m_t r_t^2 + \frac{1}{2}m_k r_k^2 + 2 \cdot (m_a(\frac{r_a^2}{4} + \frac{h_a^2}{12}) + m_a(r_t + \frac{h_a}{2})^2) \quad (24)$$

$$+ 2 \cdot (\frac{1}{2}m_b r_b^2 + m_b(\frac{r_b}{2})^2) \quad (25)$$

Position 2 wird analog berechnet, allerdings wird vorab noch der Abstand der Mittelpunkte von ausgestrecktem Arm und Bein zur Drehachse bestimmt:

$$\Delta_a = \sqrt{(r_t + r_a)^2 + \frac{h_a^2}{4}} \quad (26)$$

$$\Delta_b = \sqrt{(r_t + r_b)^2 + \frac{h_b^2}{4}} \quad (27)$$

$$I_{ges} = I_T + I_K + I_A + I_B \quad (28)$$

$$= \frac{1}{2}m_t r_t^2 + \frac{1}{2}m_k r_k^2 + (\frac{1}{2}m_a r_a^2 + m_a(r_a + r_t)^2) \quad (29)$$

$$+ (\frac{1}{2}m_b r_b^2 + m_b(\frac{r_t}{2})^2) + (m(\frac{r_b^2}{4} + \frac{h_b^2}{12}) + m_b \Delta_2^2) \quad (30)$$

$$+ (m(\frac{r_a^2}{4} + \frac{h_a^2}{12}) + m_a \Delta_1^2) \quad (31)$$

Somit ergeben sich folgende Trägheitsmomente:

$$I_{ges,pos1} = (0.001117 \pm 0.0)\text{kgm}^2 \quad (32)$$

$$I_{ges,pos2} = (0.001251 \pm 0.0)\text{kgm}^2 \quad (33)$$

### 1.3.2 Brechnung der Trägheitsmomente anhand der experimentellen Daten

Wie zuvor kann nun das Trägheitsmoment auch anhand der experimentell ermittelten Daten (Tabelle 7) bestimmt werden:

$$T_{pos1} = (1.1284 \pm 0.0029)\text{s} \quad (34)$$

$$T_{pos2} = (1.4096 \pm 0.0032)\text{s} \quad (35)$$



Der angegebenen Fehler für die Trägheitsmomente errechnet sich nach (16). Somit ergeben sich für die Trägheitsmomente folgende Werte:

$$I_{pos1} = (0.000944 \pm 0.000005)\text{kgm}^2 \quad (36)$$

$$I_{pos2} = (0.001472 \pm 0.000008)\text{kgm}^2 \quad (37)$$

Tabelle 7: Schwingungsdauer der beiden Positionen der Holzpuppe

$5T_{pos1}[s]$	$T_{pos1}[s]$	$5T_{pos2}[s]$	$T_{pos2}[s]$
5.63	1.126	6.07	1.394
5.62	1.124	7.06	1.412
5.59	1.118	7.06	1.412
5.63	1.126	7.04	1.408
5.60	1.120	7.10	1.420
5.72	1.144	7.03	1.406
5.62	1.124	7.13	1.426
5.63	1.126	7.00	1.400
5.72	1.144	7.09	1.418
5.66	1.132	7.00	1.400

## 2 Diskussion

Die Abweichung der dynamischen Winkelrichtgröße zur statischen Winkelrichtgröße beträgt lediglich ca. 0.6%, somit scheint hier kein systematischer Fehler vorzuliegen. Für die weiteren Berechnungen wurde in diesem Fall  $D_{dyn}$  verwendet, da dieser den kleineren Fehler hatte.

Die Abweichungen der experimentell und theoretisch berechneten Werte für den homogenen Zylinder und die homogene Kugel sind mit 7.2% bzw. 1.0% ziemlich gering. Allerdings kann davon ausgegangen werden, dass die theoretischen Werte für beide Objekte näher an den tatsächlichen Werten sind, da die Abmessungen relativ genau bestimmt werden können. Zudem wurde wie zuvor erwähnt bei den beiden experimentell bestimmten Werten das Eigenträgheitsmoment der Drillachse nicht abgezogen, da sich sonst negative Werte ergeben und dies als physikalisch nicht sinnvoll betrachtet werden kann. Da die Werte schon zuvor relativ nahe beieinander waren, kann von einem Fehler bei der Bestimmung von  $K_D$  ausgegangen werden. Ein möglicher Grund dafür könnte die Betrachtung der Stange als masselos sein, da ansonsten das Trägheitsmoment der Drillachse ziemlich gering wäre.

Den gleichen Effekt kann man auch bei den Trägheitsmomenten der beiden Figurenpositionen beachten. Mit Abzug von  $I_D$  wären  $I_{pos1}$  und  $I_{pos2}$  ebenfalls negativ, ohne Abzug von  $I_D$  liegt jedoch erneut eine Abweichung von lediglich ungefähr 16% in beiden Fällen vor. Diese Abweichungen können überraschend als ziemlich gering angesehen werden, da die Abmessungen der Figuren und die anschließende Abschätzung aufgrund der stark idealisierten Werte eher als ziemlich ungenau betrachtet werden müssen.

Ein weitere Fehlerquelle bei den Messungen ist zudem vermutlich das Messen mithilfe einer Stoppuhr, da hier Faktoren wie zum Beispiel die menschliche Reaktionszeit mit reinspielen.