

Versuch 207

Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Durchführung: 22.11.2016

Abgabe: 29.11.2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Theorie	3
2.1	Innere Reibung	3
2.2	Temperaturabhängigkeit der Viskosität	4
2.3	Reynolds Zahl	4
3	Durchführung	4
3.1	Aufbau	5
4	Messwerte	6
5	Auswertung	8
5.1	Bestimmung der Apparatekonstante für die große Kugel	8
5.2	Bestimmung der Konstanten A/B für die zeitabhängige Viskosität $\eta(T)$.	9
5.3	Bestimmung der Reynoldszahl	10
6	Diskussion	11
	Literatur	12

1 Einführung

Der Versuch zielt darauf ab die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität von destilliertem Wasser, mit Hilfe der Kugelfallmethode zu bestimmen. Zunächst werden die theoretischen Grundlagen erklärt, danach wird die Durchführung und der Aufbau erläutert. Daraufhin folgt die Auswertung der Versuchsergebnisse mit abschließender Diskussion.

2 Theorie

2.1 Innere Reibung

Sobald ein Körper durch ein Medium bewegt wird, entsteht innere Reibung. Die Stärke dieser Reibung hängt von der Beschaffenheit des Umgebungsmediums ab und wird als dynamische Viskosität oder auch Zähigkeit bezeichnet. In dem Versuch wurde eine Kugel, mit Radius r durch destilliertes Wasser bewegt. Die Reibungskraft, die der Bewegung entgegengerichtet ist, lässt sich über das *Stokesche Gesetz* bestimmen.

$$F_R = 6\pi r \eta v \quad (1)$$

Dabei ist η die dynamische Viskosität und v die Geschwindigkeit der Kugel. Die *Stokes Gleichung* gilt nur für laminare Strömungen, was bedeutet, dass die Ausdehnung der Flüssigkeit hinreichend groß sein muss, wodurch Wirbelbildungen verhindert werden. Die Kugel wird in dem Versuch durch ein Rohr mit leicht größerem Durchmesser als dem der Kugel fallen gelassen. Die erreichten Fallgeschwindigkeit der Kugel durch das Medium sind darüberhinaus hinreichend gering, sodass alle Voraussetzungen für die Gültigkeit von Gleichung (1) gegeben sind. Wenn die Kugel in einer viskosen Flüssigkeit fällt, wirken zum einem ihre Gewichtskraft F_g , die Reibungskraft der Flüssigkeit F_R und der Auftrieb F_A . Die Auftriebskraft ist wie die Reibungskraft der Bewegungsrichtung entgegengerichtet. Die Reibungskraft nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit der Kugel zu. Dies bedeutet, dass sich ein Kräftegleichgewicht zwischen F_g und F_R einstellt, wodurch sich eine konstante Fallgeschwindigkeit ergibt. Die Zähigkeit der Flüssigkeit lässt sich über das empirische gefundene Gesetz (2) bestimmen.

$$\eta = K(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t \quad (2)$$

Wobei K eine Apparaturkonstante, ρ_K die Dichte der Kugel, ρ_{Fl} die Dichte der Umgebungsflüssigkeit und t die Fallzeit ist. Die Apparaturkonstante enthält sowohl Informationen über die Fallhöhe, als auch über die Kugelgeometrie.

2.2 Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität lässt sich mit Hilfe der *Andradeschen Gleichung* bestimmen, die da lautet

$$\eta(T) = A \exp\left(\frac{B}{T}\right). \quad (3)$$

A und B sind dabei Konstanten, die über eine Ausgleichsrechnung bestimmt werden können.

2.3 Reynolds Zahl

Die *Stokes Gleichung* ist nur für laminare Strömungen gültig. Das Strömungsverhalten einer laminaren Strömung charakterisiert sich dadurch, dass die Strömungslinien immer nebeneinander verlaufen und keine Wirbel ausbilden. Sobald eine bestimmte Strömungsgeschwindigkeit erreicht ist, ändert sich das Strömungsverhalten des Fluides hin zu einer turbulenten Strömung. Also einer Strömung, in der die Strömungslinien Wirbel ausbilden. Die *Reynolds Zahl* Re ist eine Kenngröße, anhand der das Strömungsverhalten von Flüssigkeiten charakterisiert werden kann. Sie ist definiert als,

$$Re = \frac{\rho_w \cdot v \cdot d}{\eta} \quad (4)$$

wobei ρ_w die Dichte der Flüssigkeit, v die Fließgeschwindigkeit und d der Kugeldurchmesser ist. Empirisch wurde gefunden, dass eine Flüssigkeit mit $Re < 2000$ ein laminares Strömungsverhalten aufweist. Sobald der kritische Wert von $Re < 3000$ überschritten wird, ist ein turbulentes Strömungsverhalten der Flüssigkeit vorzufinden. In dem Grenzbereich von 2000 bis 3000 ist das Verhalten der Flüssigkeit nicht klar definiert und kann zwischen den beiden Strömungsverhalten wechseln. [Wik16]

3 Durchführung

Im Folgendem wird die Durchführung des Versuches geschildert. Zu Beginn des Versuches müssen die Dichten der verwendeten Kugeln ermittelt werden. Die Masse der Kugeln wird mit Hilfe einer Waage und die Durchmesser mit Hilfe einer Schieblehre gemessen. Danach wird das Kugelfall-Viskosimeter mit Hilfe einer Libelle (siehe Abb. 1) justiert. Nun kann die zu untersuchende Flüssigkeit, in diesem Fall destilliertes Wasser und die Kugel in das Viskosimeter gegeben werden. Es ist darauf zu achten, dass keine Luftblasen an der Rohrrinnenseite und der Kugel haften, da durch diese die Fallzeit unvorhersehbar beeinflusst wird. Insgesamt werden zwei Kugeln mit unterschiedlichen Radien verwendet, wobei jeweils zehn Fallzeitmessungen bei Raumtemperatur für eine Kugel durchgeführt werden. Abschließend wird die Messung für die größere der beiden Kugeln mit variierender

Temperatur durchgeführt. Es werden für insgesamt zehn Temperaturen zwei Messungen gemacht. Die Temperaturen sollen zwischen der Raumtemperatur und ca. 70 °C liegen.

3.1 Aufbau

Zur Bestimmung der dynamischen Viskosität von destilliertem Wasser wurde das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler (Abb. 1) verwendet. Das Rohr, durch welches die Kugel fällt, ist leicht angewinkelt, sodass die Kugel nicht unkontrolliert hindurchfällt, sondern an der Rohrrinnenseite entlang gleitet. In die Apparatur kann die zu untersuchende Flüssigkeit, sowie die Kugel über zwei Stopfen eingeführt werden. Das Kugelfall-Viskosimeter ist an ein Thermostat gekoppelt, durch welches die Rohrumgebende Flüssigkeit temperiert werden kann. Darüberhinaus wird damit die Momentantemperatur der zu untersuchenden Flüssigkeit bestimmt. Die in Abb. 1 dargestellten Messmarken definieren die Fallstrecke der Kugel. Die obere Messmarke ist 0,1 m von der unteren entfernt. Durch ein Schanier kann das Viskosimeter um 180° gedreht werden, um eine weitere Fallgeschwindigkeitsmessung vornehmen zu können. Die Gewichtskraft der Kugel sollte vor Durchlaufen der ersten Messmarke im Gleichgewicht mit der Reibungskraft der Flüssigkeit sein, da die Zeitmessung bei konstanter Geschwindigkeit durchzuführen ist.

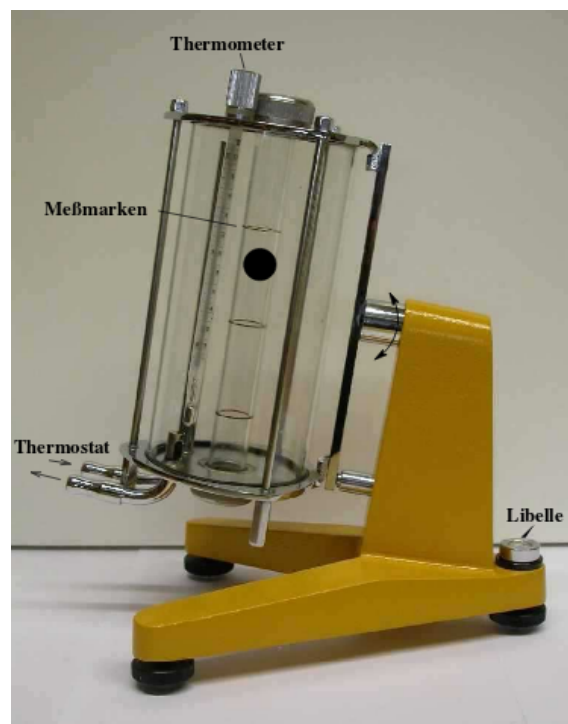


Abbildung 1: Kugelfall-Viskosimeter[TUD16]

4 Messwerte

Tabelle 1: gemessene Maßen der Kugeln

m_{gr} in g	m_{kl} in g	d_{gr} in cm	Δd_{gr} in cm	d_{kl} in cm	Δd_{kl} in cm
4.96	4.46	1.56	0.00	1.54	0.00

Die Werte der Tabelle 1 und aller folgenden Tabellen wurden dabei mit folgenden Formeln für Mittelwert, Fehler und Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5)$$

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{a}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (6)$$

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} f \cdot \Delta x_i)^2} \quad (7)$$

Tabelle 2: gemessene Werte für die Fallzeit der kleinen (t_2) und großen (t_1) Kugel

t_2 in s	t_1 in s
11.80	68.47
11.80	68.95
12.15	68.69
11.73	68.53
12.21	68.50
11.47	67.69
12.10	68.83
11.96	68.41
11.86	68.38
11.87	68.60

Tabelle 3: gemessene Werte für die große Kugel

<i>Temperatur in °C</i>	<i>Messung 1 in s</i>	<i>Messung 2 in s</i>
31.0	68.86	68.86
36.0	68.33	68.21
39.0	65.75	65.76
45.0	60.32	60.52
49.5	59.27	59.27
51.5	58.52	58.66
56.0	58.30	58.29
60.0	56.60	56.72
64.0	55.10	55.15
68.0	54.35	54.40

Tabelle 4: Mittelwerte der Fallzeiten für Teil 1 des Versuches

<i>Fallzeit Kugel 1 in s</i>	Δt_1 in s	<i>Fallzeit Kugel 2 in s</i>	Δt_2 in s
68.51	0.11	11.90	0.07

Tabelle 5: Mittelwerte der Messung bei verschiedenen Temperaturen für die große Kugel

<i>Temperatur in K</i>	304.15	309.15	312.15	318.15	322.65
<i>Fallzeit in s</i>	68.86	68.27	65.76	60.42	59.27
Δt_1 in s	0.00	0.06	0.01	0.10	0.00
<i>Temperatur in K</i>	324.65	329.15	333.15	337.15	341.15
<i>Fallzeit in s</i>	58.59	58.30	56.66	55.13	54.38
Δt_2 in s	0.07	0.01	0.06	0.03	0.03

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der Apparatekonstante für die große Kugel

In dem ersten Teil des Versuches soll die Apparatekonstante für die große Kugel (Kugel 1) bestimmt werden. Dafür wird mithilfe der bekannten Apparatekonstante für die kleine Kugel (Kugel 2) die Viskosität des Wassers bei Raumtemperatur bestimmt und in folgende Formel eingesetzt:

$$K_{kl} = 0.07640 \text{ mPa cm}^3/\text{g} \quad (8)$$

$$\eta = K_{gr} \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t \quad (9)$$

Bei ρ_K und ρ_{Fl} handelt es sich um die Dichten der Kugel und der betrachteten Flüssigkeit. Mithilfe der gemessenen Durchmesser und Gewichte der Kugeln kann die Dichte mit folgenden Formeln bestimmt werden:

$$r = \frac{d}{2} \quad (10)$$

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3} \quad (11)$$

$$\Delta\rho = \sqrt{(\partial_m \rho \cdot \Delta m)^2 + (\partial_r \rho \cdot \Delta r)^2} \quad (12)$$

$$r_{gr} = (0.78017 \pm 0.00017) \text{ cm} \quad r_{kl} = (0.77167 \pm 0.00017) \text{ cm} \quad (13)$$

$$\rho_{gr} = (2.4936 \pm 0.0016) \text{ g/cm}^3 \quad \rho_{kl} = (2.3120 \pm 0.0015) \text{ g/cm}^3 \quad (14)$$

$$\rho_W = 0.998 \text{ g/cm}^3 \quad (15)$$

Die Dichte für das Wasser wurde dabei [Koh96] entnommen. In Tabelle 4 sind die Mittelwerte und Fehler der gemessenen Fallzeiten für die kleine und große Kugel bei Raumtemperatur eingetragen. Die Werte wurden dabei mit den Formeln (5) bis (7) bestimmt. Somit ergibt sich für K_{gr} folgender Wert:

$$K_{gr} = \frac{K_{kl} \cdot (\rho_{kl} - \rho_w) \cdot t_{kl}}{(\rho_{gr} - \rho_w) \cdot t_{gr}} \quad (16)$$

$$= (0.01165 \pm 0.00007) \text{ mPa cm}^3/\text{g} \quad (17)$$

Der Fehler für K_{gr} ergeben sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta K_{gr} = \sqrt{\left(\partial_{t_{kl}} K_{gr} \cdot \Delta t_{kl}\right)^2 + \left(\partial_{t_{gr}} K_{gr} \cdot \Delta t_{gr}\right)^2 + \left(\partial_{\rho_{kl}} K_{gr} \cdot \Delta \rho_{kl}\right)^2 + \left(\partial_{\rho_{gr}} K_{gr} \cdot \Delta \rho_{gr}\right)^2} \quad (18)$$

Tabelle 6: Experimentell bestimmte Werte für die Viskosität

<i>Temperatur in K</i>	<i>η_{ex} in mPas</i>	<i>$\Delta\eta_{ex}$ in mPas</i>
304.15	1.202	0.007
309.15	1.193	0.007
312.15	1.151	0.007
318.15	1.059	0.007
322.65	1.040	0.006
324.65	1.021	0.006
329.15	1.024	0.006
333.15	0.997	0.006
337.15	0.972	0.006
341.15	0.961	0.006

Tabelle 7: Werte der Viskositäten für Literaturwerte

<i>Temperatur in K</i>	303.15	313.15	323.15	333.15	143.15
<i>η_{lit} in mPas</i>	0.7977	0.6531	0.5471	0.4668	0.4045

5.2 Bestimmung der Konstanten A/B für die zeitabhängige Viskosität $\eta(T)$

In der Abbildung 2 sieht man den Logarythmus von η aufgetragen gegen T. Die Werte für η wurden dabei mit Formel (9) berechnet und die Fehler ergeben sich mittels der Gaußschen Fehlerfortpflanzung.

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\partial_{K_{gr}} \cdot \Delta K_{gr}\right)^2 + \left(\partial_{\rho_K} \cdot \Delta \rho_K\right)^2 + \left(\partial_t \cdot \Delta t\right)^2} \quad (19)$$

Mithilfe einer linearen Regression mit der folgenden Formel können nun die Parameter der Andradeschen Gleichung bestimmt werden:

$$\eta(T) = A \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (20)$$

$$\ln(\eta) = \ln(A) + B \cdot \frac{1}{T} \quad (21)$$

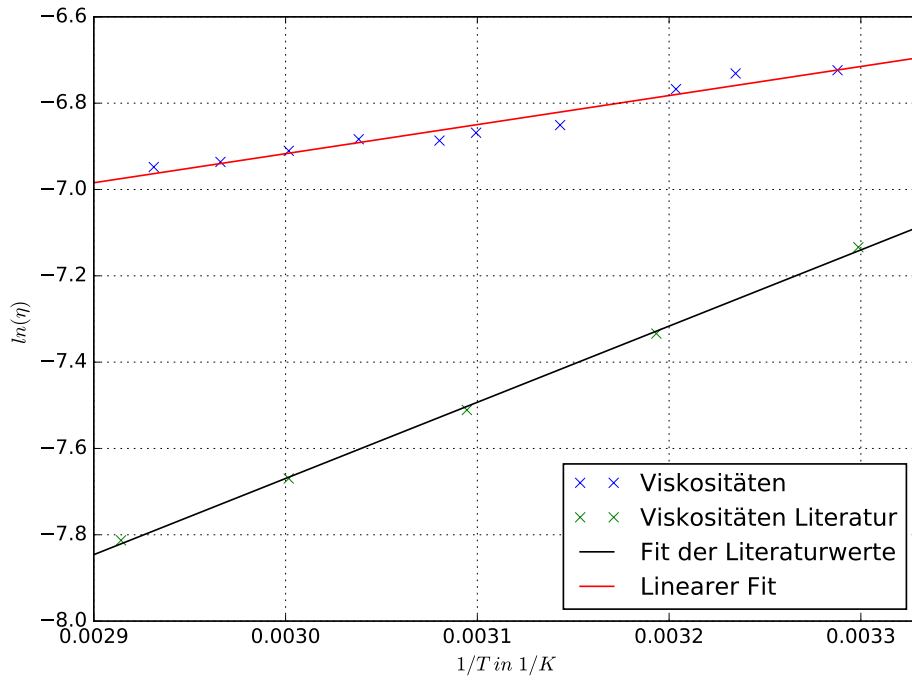


Abbildung 2: $\ln(\eta)$ gegen $1/T$, Daten aus Tabellen 6 und 7

Damit ergeben sich für die Parameter A und B folgende Werte

$$A = (0.131 \pm 0.022) \text{ mPas} \quad (22)$$

$$B = (673 \pm 55) \text{ K} \quad (23)$$

5.3 Bestimmung der Reynoldszahl

Mithilfe der Formel für die Reynoldszahl (4) kann bei dem vorliegenden Versuch beurteilt werden, ob es sich um eine laminare Strömung handelt. Als kritische Zahl für Rohrströmungen gilt normalerweise ein Faktor von ca. 2300. Da für das d in diesem Fall jedoch nicht der Querschnitt der Strömung, sondern der Durchmesser der umströmten Kugel verwendet wird, halbiert sich dieser Wert zu $Re_{krit} = 1150$. [Wik16]

Mit dem in (15) berechneten Radien der Kugeln und der Dichte von Wasser für die jeweiligen Temperaturen ergeben sich für die Reynoldszahlen nun folgende Werte:

Und mit der gleichen Berechnung ergibt sich für die kleine Kugel ein Wert von:

$$Re_{kl} = (108.4 \pm 1.3) \quad (24)$$

Tabelle 8: Reynoldszahlen der großen Kugel für die verschiedenen Temperaturen

<i>Temperatur in °C</i>	31	36	9	45	49.5	51.5	56	60	64	68
<i>Re</i>	18.8	19.0	20.5	24.2	25.0	26.0	25.8	27.1	28.6	29.2
ΔRe	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

6 Diskussion

Wie man in der Abbildung 2 erkennen kann, weichen die ermittelten Viskositäten für destilliertes Wasser deutlich von den Literaturwerten ab. Durch einen Fit der Literaturwerte an die Andradesche Gleichung ergeben sich die Parameter $A = 2.19 \cdot 10^{-6}$ und $B = 1.79 \cdot 10^3$. Im Durchschnitt weichen die Funktionen um ca. 0.000495 Pa s ab. Jedoch ist auch erkennbar, dass das Verhalten beider Funktionen sich ähnelt, somit kann ein systematischer Fehler als ziemlich wahrscheinlich angenommen werden.

Die ermittelten Reynoldszahlen lassen sich schlecht mit Literaturwerten vergleichen, da sie für jedes Experiment aufgrund der Abhängigkeiten von Apparaturwerten unterschiedlich sind. Allerdings sind die ermittelten Reynoldszahlen deutlich kleiner als der in Abschnitt 4.2 angegebene kritische Wert $R_{krit} = 1150$. Somit handelt es sich mit einer ziemlich großen Sicherheit bei dem beobachteten Experiment um laminare Strömungen.

Die entstandenen Abweichungen für die Viskositäten sind vermutlich auf statistischen Fehler zurückzuführen. Ein großer Faktor war vermutlich die Zeitmessung bei dem Experiment. Hier ist einerseits die menschliche Reaktionszeit mit einzubeziehen und andererseits ist die gemessenen Zeiten auch davon abhängen, ob man beim Start und Ende jeder Messung jeweils den selben Referenzpunkt der Kugel beobachtet, was in der Praxis schwer exakt zu realisieren ist.

Ein weiteres Problem bei der Messung der Fallzeiten können zudem Blasen sein, die beim Aufheizen des Viskosimeters oder beim Einfüllen des destillierten Wasser entstehen. Sie verfälschen die Fallzeiten und beeinträchtigen somit auch alle gemessenen Werte.

Literatur

- [Koh96] F. Kohlrausch. *Praktische Physik, Bd.3*. Teubner, 1996.
- [TUD16] TU-Dortmund. *Versuch V207: Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. 24. Nov. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Viskositaet.pdf>.
- [Wik16] Wikipedia. *Reynolds-Zahl*. 26. März 2016. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Reynolds-Zahl>.