

1 Auswertung

Im Folgendem werden die Messergebnisse ausgewertet und auf geeignete Weise visualisiert. Die verwendete Schaltung hatte die folgenden Daten.

$$L = (3,53 \pm 0,03) \text{ mH}$$

$$C = (5,015 \pm 0,015) \text{ nF}$$

$$R_1 = (30,3 \pm 0,1) \Omega$$

$$R_2 = (271,6 \pm 0,3) \Omega$$

1.1 Einhüllende der Schwingungskurve

Die Wertepaare $(U_C(t_i), t_i)$ müssen für die Ausgleichsrechnung bestimmt werden. Die Werte $U_C(t_i)$ wurden mit dem Cursor des Oszilloskops gemessen. Hingegen wurden die Zeiten t_i aus dem Bild der Schwingungskurve mit Hilfe eines Lineals abgelesen. Ein Abbild der Schwingungskurve ist in Abb. 1 dargestellt.

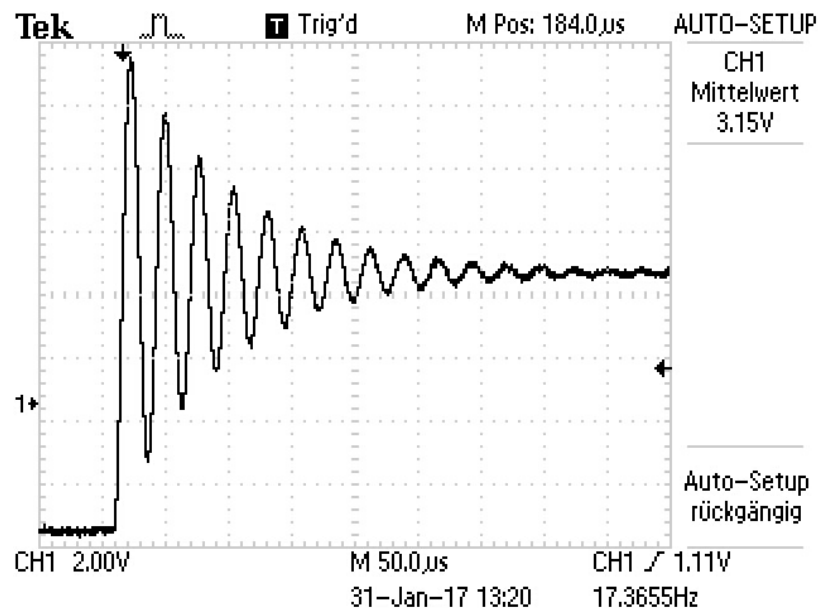


Abbildung 1: Gemessene Schwingungskurve.

Die Schwingungskurve in Abb. 1 wurde beim Widerstand R_1 und einer Generatorfrequenz 5,82 Hz erstellt.

Die diskreten Wertepaare $(U_C(t_i), t_i)$ sind in der Tabelle 1 dargestellt. Dabei wurden für $U_C(t_i)$ jeweils die Maxima der Schwingungskurve vermessen.

Zeit in μs	Maxima in V
0	15,08
27,5	13,2
55	11,92
82,5	10,96
112,5	10,24
142,5	9,68
172,5	9,36
202,5	9,04
235	8,88
267,5	8,76
302,5	8,64
337,5	8,52

Tabelle 1: Messdaten der Schwingungskurve.

Mit den Wertepaaren aus Tabelle 1 wurde mittels des *Python*-Paketes *curve_fit* eine Ausgleichsrechnung an eine exponential Funktion der Form

$$U_c(t) = a \cdot \exp^{-b \cdot t} + c \quad (1)$$

durchgeführt. Für die Parameter ergeben sich somit die Werte

$$\begin{aligned} a &= (6,62 \pm 0,03) \text{ V} \\ b &= (1,17 \pm 0,01) \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}} \\ c &= (8,44 \pm 0,02) \text{ V} \end{aligned}$$

Die Ausgleichfunktion ist mit den Daten aus Tabelle 1 in Abb. 2 dargestellt.

Der Exponent der Ausgleichsfunktion liefert über die Formeln (??) den effektiv Widerstand R_{eff} und die Abklingzeit T_{ex} . Damit ergeben sich die folgenden Werte.

$$\begin{aligned} R_{\text{eff}} &= (82,4 \pm 1,2) \Omega \\ T_{\text{ex}} &= (8,56 \pm 0,01) \cdot 10^{-5} \text{ s} \end{aligned}$$

Im Vergleich zu dem eingebauten, verwendeten Widerstand R_1 fällt auch, dass R_{eff} deutlich größer ist. Dies ist damit zu begründen, dass R_{eff} den Innenwiderstand des Generators mit einbezieht, welcher in R_1 nicht erfasst wird.

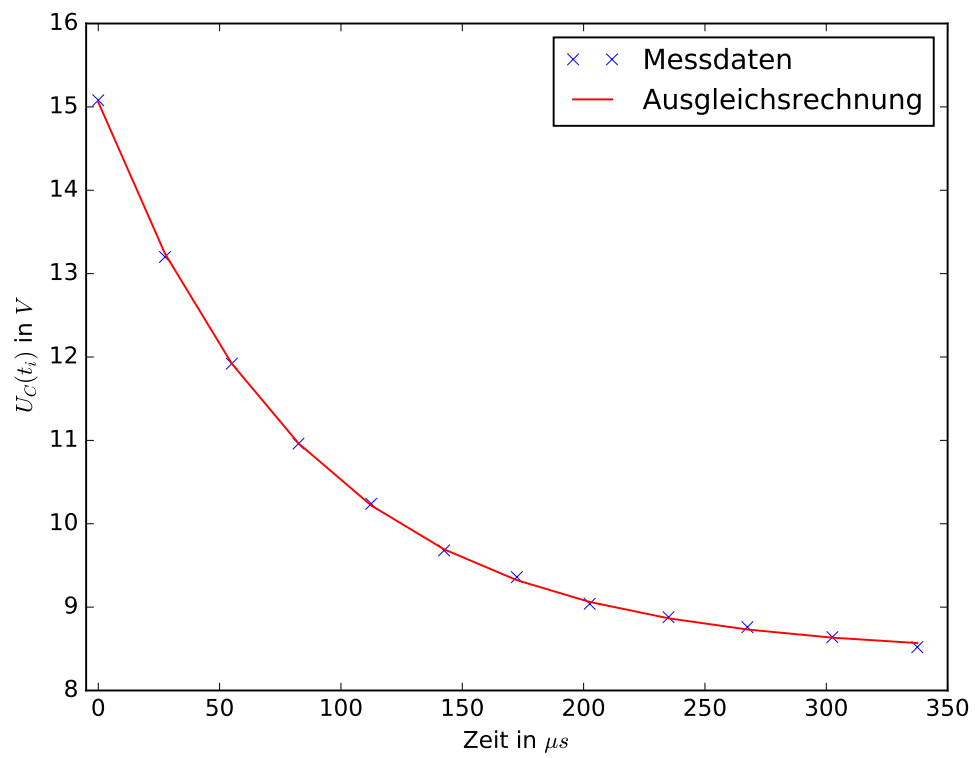


Abbildung 2: Darstellung der Ausgleichsfunktion.

1.2 Widerstand im aperiodischen Grenzfall

Aus den Daten L und C der Apparatur lässt sich über Formel (??) der Widerstand des aperiodischen Grenzfalles R_{ap} errechnen. Der Wert R_{ap} wurde auch experimentell bestimmt. Die Messung ergeben die folgenden Werte.

$$R_{\text{ap,theo}} = (1678 \pm 8) \Omega R_{\text{ap}} = 13\,500 \Omega$$

Die Messung wurde bei einer Frequenz von $\nu = 5,82 \text{ Hz}$ erhoben. Der Wert R_{ap} ist der experimentell bestimmte Wert. Dieser wurde an dem variablen Widerstand der Apparatur abgelesen und wird als fehlerfrei angenommen. Die gemessene Wert ist ca. acht mal größer als der theoretisch berechnete Wert. Dies hängt damit zusammen, dass der experimentelle Wert an der Apparatur nur ungenau abzulesen war. Zudem war nicht sichergestellt, dass der abgelesene Widerstand tatsächlich mit dem angelegten Widerstand übereinstimmt. Damit ist die Diskrepanz auf einen systematischen Fehler zurückzuführen.

1.3 Resonanzfrequenz

Die Resonanzfrequenz lässt sich mit den Apparaturdaten über die Formel (??) errechnen. Als Widerstand wurde der gemessene effektiv Widerstand R_{eff} verwendet. Die berechnete Resonanzfrequenz beträgt:

$$\nu_{\text{res}} = (3,774 \pm 0,017) \cdot 10^4 \text{ Hz.}$$

In dem Diagramm 3 ist die normierte Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Mit normiert ist gemeint, dass die Kondensatorspannung durch die Generatorspannung geteilt wird. Das Diagramm 3 wurde mit den Daten aus Tabelle 2 erstellt.

Der Maximalwert der Kondensatorspannung wird bei einer Frequenz von

$$\nu_{\text{res}} = 36 \text{ kHz} \tag{2}$$

gemessen. Die Halbwertsbreite der Kondensatorspannung ist durch die Differenz der Werte ν_+ und ν_- gegeben.

$$\nu_+ \approx 27 \text{ kHz}$$

$$\nu_- \approx 43 \text{ kHz}$$

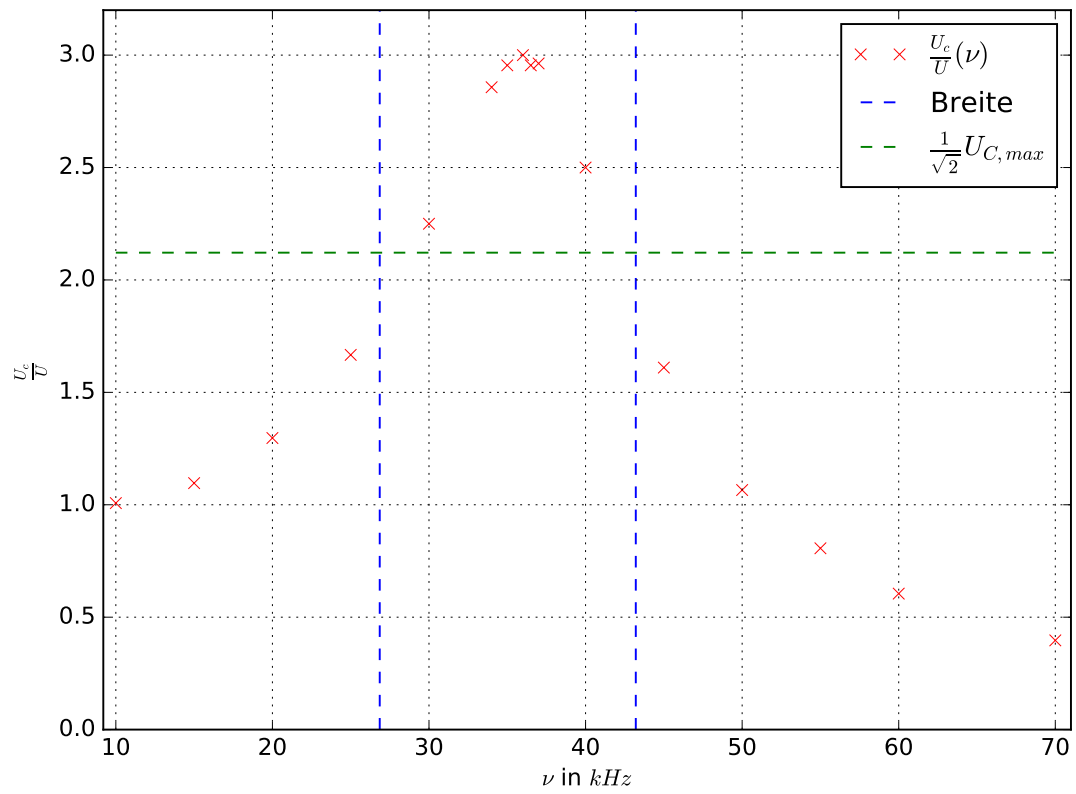


Abbildung 3: Normierte Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Damit ergibt sich die Breite zu $\approx 16\text{kHz}$.

Die dazugehörigen Theoriewerte lassen sich über (??) errechnen.

$$\nu_{+, \text{theo}} = (23,32 \pm 0,27) \text{ kHz}$$

$$\nu_{-, \text{theo}} = (46,7 \pm 0,5) \text{ kHz}$$

Die Werte weichen nur geringfügig voneinander ab. Die Güte q des Schwingkreises ist der Maximalwert des Verhältnisses von Kondensatorspannung zur Generatorspannung. In Abb. 3 ist das Maximalverhältnis bei der Resonanzfrequenz erreicht. An diesem Punkt beträgt das Verhältnis

$$q = 3.$$

Der errechnete Wert liegt bei $q_{\text{theo}} = 3,24$ und stimmt im Rahmen der Messungenauigkeiten mit dem gemessenen Wert überein.

1.3.1 Resonanzfrequenz aus der Phasenverschiebung

Aus der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz kann die Resonanzfrequenz ν_{res} bestimmt werden. Die Resonanzfrequenz ist der Wert an dem die Phase zwischen den Spannungen $\varphi_{\text{res}} = \frac{\pi}{2}$ entspricht. Der gemessene Wert wurde aus dem Diagramm 4 abgelesen.

Der abgelesene Wert bei einer Phase von φ_{res} ist:

$$\nu_{\text{res}} = 37 \text{ kHz}.$$

Dieser Wert stimmt mit dem berechneten und in (2) bestimmten Wert nahezu überein.

Die Frequenz ν_1 , bei der die Frequenz gerade $\frac{\pi}{4}$ ist, sowie die Frequenz ν_2 , bei der $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ist sind dem Diagramm 4 näherungsweise zu entnehmen.

$$\nu_1 \approx 30 \text{ kHz}$$

$$\nu_2 \approx 45 \text{ kHz}$$

Rechnerisch ergeben sich über die Formel (??) ν_1 und ν_2 zu:

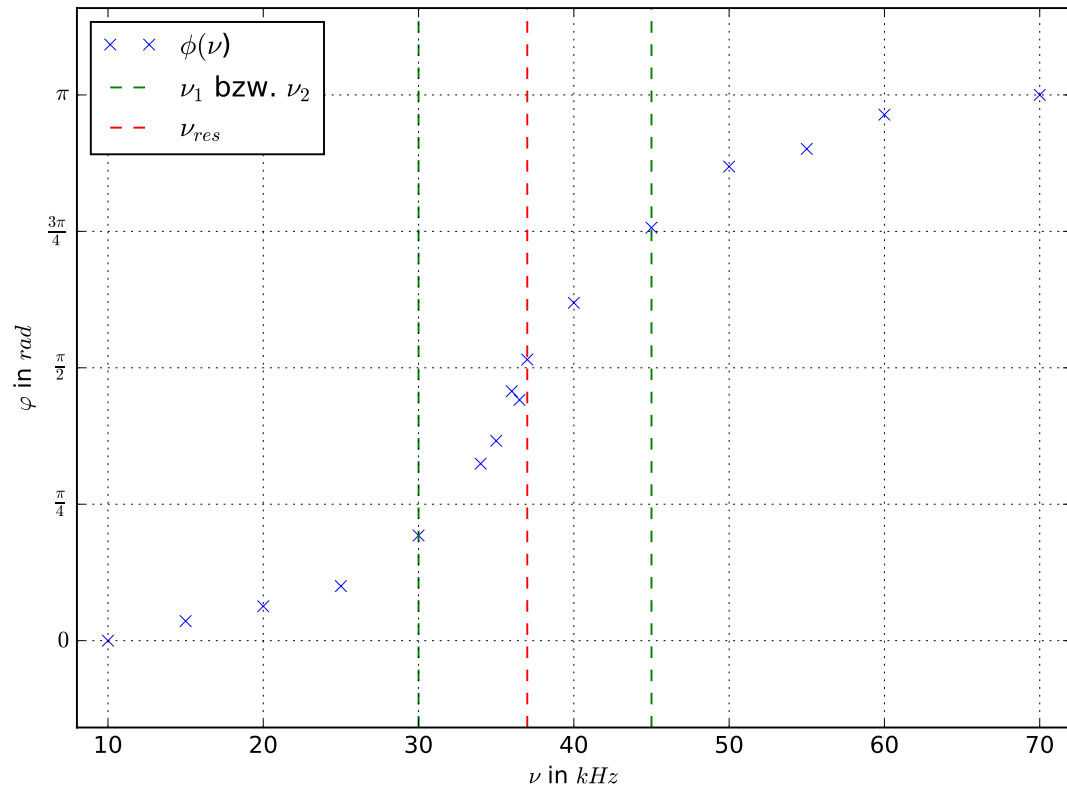


Abbildung 4: Phase zwischen Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

$$\nu_{1,\text{theo}} = (36,21 \pm 0,17) \text{ kHz}$$

$$\nu_{2,\text{theo}} = (38,55 \pm 0,17) \text{ kHz}$$

Die Werte weichen deutlich von den gemessenen Werten ab. Dies ist damit zu begründen, dass die gemessenen Werte nur Näherungen entsprechen. Damit eine höhere Sicherheit der Messdaten besteht, hätten mehr Messwerte um den Bereich einer Phasenverschiebung von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ genommen werden müssen. Es lässt sich aufgrund der mangelnden Anzahl an Messwerten keine präzise Begründung für die signifikanten Unterschiede zwischen den Theoriewerten und den gemessenen Werten machen.

2 Diskussion

Anhand der ausgewerteten Daten wird deutlich, dass lediglich der gemessene Widerstand des aperiodischen Grenzfalles enorm von dem theoretisch berechneten Wert abweicht. Die aufgetretene Abweichung wurde auf einen systematischen Fehler zurückgeführt. Zudem weichen die bestimmten Frequenzen ν_1 und ν_2 deutlich von den berechneten Werten ab. Dies wurde mit der geringfügigen Aussagekraft der wenigen Messdaten in den Bereich von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ begründet. Die sonstigen Werte entsprachen alle im Rahmen der Messungenauigkeiten den theoretisch berechneten Werten.

3 Messdaten

Die Daten der Messung zur Resonanzfrequenz sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

ν_G in kHz	λ in μs	φ in μs	U_G in V	U_C in V
10	98,0	0	5,4	5,4
15	67,0	1,2	5,4	5,9
20	50,8	1,6	5,1	6,6
25	40,0	2,0	5,0	8,4
30	33,2	3,2	4,8	10,8
34	29,6	4,8	4,5	12,8
35	28,4	5,2	4,4	13,0
36	28,0	6,4	4,4	13,2
36,5	27,2	6,0	4,4	13,0
37	26,4	6,8	4,3	12,8
40	25,2	7,8	4,5	11,2
45	22,2	8,4	4,7	7,6
50	19,8	8,6	4,9	5,2
55	18,2	8,2	5,0	4,0
60	16,6	8,0	5,0	3,0
70	14,0	7,0	5,0	2,0

Tabelle 2: Messdaten zur Resonanzfrequenz.