

Versuch 27

Der Zeeman-Effekt

Jonah Nitschke
lejonah@web.de

Sebastian Pape
sepa@gmx.de

Durchführung: 25.06.2017

Abgabe: 31. Oktober 2017

1 Theorie

In dem Folgenden Versuch sollen die bei Einwirken eines Magnetfeldes auf ein Atom entstehende Aufspaltung und Polarisation von emittierten Spektrallinien untersucht werden. Dies geschieht anhand der blauen und roten Spektrallinien einer Cadmium Lampe.

1.1 Das magnetische Moment

Aufgrund der Quantenmechanik ist bekannt, dass jedes Hüllenelektron eines Atoms zwei verschiedene Drehimpulse besitzt, den Bahndrehimpuls \vec{l} sowie den Spin \vec{s} , welcher auch als Eigendrehimpuls bezeichnet wird. Beiden Impulsen wird eine für das Atom charakterisierende Quantenzahl zugewiesen mit der sich die Beträge errechnen lassen:

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad (s = \frac{1}{2}). \quad (2)$$

Aufgrund der Ladung des Elektrons lässt sich mit dem Bahndrehimpuls ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_l$ verknüpfen. Mithilfe des Stern-Gerlach-Experimentes wurde zudem nachgewiesen, dass aufgrund des Spins ebenfalls ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_s$ definiert werden kann. Beide Momente sind neben dem Betrag der Impulse auch Abhängig von \hbar sowie dem Bohrschen Magneton μ_B abhängig.

$$\mu_B := -\frac{1}{2}e_0\frac{\hbar}{m_0} \quad (3)$$

$$\vec{\mu}_l = -\mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}\vec{l}_e \quad (4)$$

$$\vec{\mu}_s = -g_s\mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} = -g_s\mu_B \sqrt{s(s+1)}\vec{s}_e \quad (5)$$

Beide Momente besitzen zudem den Landé-Faktor g, welcher beim Bahndrehimpuls 1 und beim Spin 2 ist. Aufgrund dessen ist bei s=1 $\vec{\mu}_s$ doppelt so groß wie $\vec{\mu}_l$, was auch als magnetomechanische Anomalie bezeichnet wird.

1.2 Wechselwirkungen im Atom

In einem Mehrelektronenatom treten die vorher eingeführten verschiedenen Größen aufgrund mehrerer Elektronen in Wechselwirkung zueinander, weswegen im folgenden die zwei in der Natur am häufigsten realisierten Grenzfälle betrachtet werden. Charakterisiert werden diese dabei mittel der Kernladungszahl Z .

Bei Atomen mit einer relativ geringen Kernladungszahl ist die Wechselwirkung der einzelnen \vec{l}_i untereinander so groß, dass sich ein Gesamtbahndrehimpuls \vec{L} definieren lässt:

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i \quad \text{mit} \quad |\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar. \quad (6)$$

Da bei abgeschlossenen Schalen der Bahndrehimpuls stets Null ist, müssen hier nur Elektronen der äußeren Schalen betrachtet werden. Für die Werte 0,1,2,3 der Quantenzahl L werden die Bezeichnungen S,P,D und F zugeordnet.

Besitzt das Atom ebenfalls eine nicht allzu hohe Ordnungszahl, dann lässt sich zudem ein Gesamtspin \vec{S} definieren.

$$\vec{S} = \sum \vec{s}_i \quad \text{mit} \quad |\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar \quad (7)$$

Somit ändert sich für beide auch das magnetische Moment:

$$|\vec{\mu}_B| = \mu_L \sqrt{L(L+1)} \quad (8)$$

$$|\vec{\mu}_B| = g_S \mu_S \sqrt{S(S+1)}. \quad (9)$$

Aufgrund des in der relativistischen Betrachtung vom Proton erzeugtem Kreistromes kommt es zu einer Spin-Bahn-Kopplung (**LS-Kopplung**), welche bei nicht allzu hohen Feldstärken auch bestehen bleibt. Somit kann ein neuer Drehimpuls als Summe von Spin- und Bahndrehimpuls definiert werden:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (10)$$

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar. \quad (11)$$

Um die verschiedenen Größen zu notieren verwendet man folgende Schreibweise:

$$^{2s+1}L_J. \quad (12)$$

Bei dem zweiten Grenzfall beobachtet man schwere Atome. Hier dominieren die Wechselwirkungen zwischen den \vec{l}_i und den \vec{s}_i , sodass sich kein Gesamtspin und Gesamtdrehimpuls mehr definieren lassen. Deshalb bezeichnet man diese Fall auch als **j-j-Kopplung**. Für den Gesamtdrehimpuls ergibt sich daher folgendes:

$$\vec{J} = \sum \vec{j}_i = \sum \vec{l}_i + \vec{s}_i. \quad (13)$$

Zwischen beiden Fällen besteht ein fließender Übergang bei mittleren Kernladungszahlen.

1.3 Aufspaltung im homogenen Magnetfeld

Das zu J gehörende magnetische Moment ist die Summe der magnetischen Momente von Spin- und Bahndrehimpuls. Da $\vec{\mu}_J$ und \vec{J} im Allgemeinen nicht aufeinander fallen, lassen sich eine zu \vec{J} senkrechte sowie eine parallele Komponente von $\vec{\mu}$ definieren. Im klassischen Sinne führt μ dabei eine Präzessionsbewegung um die Gesamtdrehimpulsachse aus, weswegen der Erwartungswert von $\vec{\mu}_\perp$ verschwindet. Für $|\vec{\mu}_J|$ ergibt sich somit folgende Formel:

$$|\vec{\mu}_J| = \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)} \quad (14)$$

$$g_J = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (15)$$

g_J ist dabei der Landé-Faktor des entsprechenden Atoms. Aufgrund der Quantenmechanik muss im Folgenden die sogenannte Richtungsquantelung beachtet werden. Sie besagt, dass die in Feldrichtung zeigende Komponente von $|\vec{\mu}_J|$ ein ganzzahliges Vielfaches von $g_J \mu_B$ darstellt. Verknüpft wird dies mit dem Faktor m , welche auch Orientierungsquantenzahl genannt wird:

$$\mu_{J_z} = -m g_J \mu_B \quad \text{mit } m \in [-J, -J+1, \dots, 0, 1, \dots, J]. \quad (16)$$

Somit existieren $2J+1$ Einstellmöglichkeiten für $\vec{\mu}$ relativ zu \vec{B} . Die Zusatzenergie aufgrund des äußeren Feldes ergibt sich somit zu folgendem Wert:

$$E_{\text{mag}} = m g_J \mu_B B. \quad (17)$$

Da diese Aufspaltung auch bei angeregten Zuständen auftritt, wird bei dem Einschalten des Magnetfeldes auch eine Aufspaltung der emittierten Spektrallinien erwartet. Die Anzahl der aufgespalteten Linien wird dabei durch Auswahlregeln festgelegt, da Übergänge nicht zwischen allen Energieniveaus möglich sind.

1.4 Auswahlregeln für Energieübergänge

Die grundlegende Gleichung bei der Betrachtung mittels der Quantenmechanik ist die Schrödingergleichung. Aufgrund ihrer Linearität können mehrer Lösungen superponiert werden. Um die Auswahlregeln zu bestimmen, geht man von einer Lösung mit zwei verschiedenen Wellenfunktionen aus:

$$\Psi_{\text{ges}}(\vec{r}, t) = C_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}) \exp -\frac{i}{\hbar} E_{\alpha} t + C_{\beta} \psi_{\beta}(\vec{r}) \exp -\frac{i}{\hbar} E_{\beta} t. \quad (18)$$

Im folgenden sollen nun die Energieübergänge zwischen diesen beiden Zuständen untersucht werden. Die Dichteverteilung dieser Wellenfunktion ist eine zeitabhängige Größe, welche ein Schwingung des Elektrons mit einer durch die Energiedifferenz festgelegten Frequenz $\nu_{\alpha,\beta}$ beschreibt.

$$\nu_{\alpha,\beta} := \frac{E_{\alpha} - E_{\beta}}{2} \quad (19)$$

Um die Intensität der emittierten Strahlung zu berechnen, muss man das durch die Schwingung hervorgerufenen Dipolmoment des Elektrons betrachten. Der Beitrag des Volumenelements dV zu der X-Komponente des Dipols beträgt dabei

$$-e_0 x \psi^* \psi dV \quad (20)$$

wobei der Beitrag zu Y- und Z-Komponente analog ist. Um das gesamte Dipolmoment in diese Richtung zu berechnen, muss (20) über den gesamten Raum integriert werden. Durch verschiedene Rechenschritte lässt sich der Beitrag in X-Richtung zu folgender Form vereinfachen:

$$D_x = -e_0 \text{const } 2 \Re \left(\int x \psi_{\beta}^* \psi_{\alpha} dV \exp 2\pi i \nu_{\alpha,\beta} t \right). \quad (21)$$

Der Term beschreibt einen mit der Frequenz $\nu_{\alpha,\beta}$ schwingenden Dipol der Quanten entsprechender Energie abstrahlt. Die Komponenten in die beiden anderen Raumrichtungen lassen sich analog berechnen. Um die Strahlungsemission zu berechnen wird der Poynting-Vektor mit den Matrixelementen $x_{\alpha,\beta}$, $y_{\alpha,\beta}$ und $z_{\alpha,\beta}$ bestimmt, wobei γ den Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung der Strahlung und Dipolmoment beschreibt.

$$x_{\alpha,\beta} := \int x \psi_{\alpha}^* \psi_{\beta} dV \quad (22)$$

$$y_{\alpha,\beta} := \int y \psi_{\alpha}^* \psi_{\beta} dV \quad (23)$$

$$z_{\alpha,\beta} := \int z \psi_{\alpha}^* \psi_{\beta} dV \quad (24)$$

$$|\vec{S}_{\alpha,\beta}| = (|x_{\alpha,\beta}|^2 + |y_{\alpha,\beta}|^2 + |z_{\alpha,\beta}|^2) \sin^2 \gamma \quad (25)$$

Als Wellenfunktion für ein Atom im Magnetfeld wird der Ansatz

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(r) \Theta(\vartheta) e^{im\varphi} \quad (26)$$

gewählt. Das Magnetfeld ist in Richtung der z-Achse ausgerichtet. Untersucht man nun die einzelnen Komponenten des Dipols, ist erkenntlich, dass die z-Komponente nur dann nicht verschwindet, wenn $m_{\alpha} = m_{\beta}$ gilt. Somit ist die erste Auswahlregel, dass für eine nicht verschwindende Komponente in z-Richtung die beiden Orientierungsquantenzahlen der Zustände E_{α} und E_{β} gleich sein müssen.

Für die x- und y-Komponente erhält man analog zwei Auswahlregeln, bei denen die Dipolkomponenten nicht verschwinden. Es muss entweder $m_{\beta} = m_{\alpha} + 1$ ($\Delta m = -1$) oder $m_{\beta} = m_{\alpha} - 1$ ($\Delta m = +1$) gelten. Zusammengefasst tritt die Emission von Spektrallinien beim Zeeman-Effekt nur dann auf, wenn sich die Orientierungsquantenzahlen der beiden Zustände entweder gar nicht oder um ein Differenz von ± 1 unterscheiden.

Gilt nun $\Delta m = 0$, dann ist lediglich die z-Komponente des Dipols von Null verschieden. Der Dipol schwingt also parallel zur Magnetfeldrichtung und emittiert linear polarisiertes Licht. Zudem strahlt der Dipol aufgrund der Winkelabhängigkeit in (25) nicht in Feldrichtung und besitzt seine stärkste Emission senkrecht zu dieser.

In den Fällen $\Delta m = \pm 1$ folgt beides mal $z_{\alpha,\beta} = 0$, wobei die x- und y-Komponenten folgenden Zusammenhang besitzen:

$$x_{\alpha,\beta} = -iy_{\alpha,\beta} \quad (\Delta m = -1) \quad (27)$$

$$x_{\alpha,\beta} = iy_{\alpha,\beta} \quad (\Delta m = +1). \quad (28)$$

In beiden Fällen ergibt sich somit ein Phasenverschub von $\frac{\pi}{2}$ zwischen x- und y-Komponente. Bei der emittierten Strahlung handelt es sich also um zirkular- polarisiertes Licht wobei die beiden Fälle eine entgegengesätzliche Drehrichtung besitzen.

1.5 Der normale Zeeman-Effekt

In den vorangegangenen Rechnungen wurde der Elektronenspin nicht berücksichtigt, so dass lediglich der Fall behandelt wird, bei dem für das Atom $S = 0$ und somit $g_J = 0$ gilt. Dieser Spezialfall wird historisch bedingt Zeeman-Effekt genannt. Hier ist die Verschiebung der Energieniveaus somit unabhängig von den Quantenzahlen L und J , so dass die Verschiebung stets den Wert

$$\Delta E = m\mu_B B \quad \text{für} \quad -J \leq m \leq J \quad (29)$$

besitzt. In Abbildung ?? ist diese Aufspaltung für die Fälle $J = 1$ und $J = 2$ beispielhaft dargestellt.

Abbildung 1: Aufspaltung und Polarisation der emittierten Spektrallinien beim normalen Zeeman-Effekt

Alle Übergänge mit gleichem Δm werden in eine Liniengruppe zusammengefasst, wobei innerhalb dieser Gruppen die Energiedifferenz konstant ist. Diese Aufspaltung in 3 Komponenten wird auch **”Zeeman-Triplett”** genannt. Da die aufgrund des Übergangs mit $\Delta m = 0$ hervorgerufene Strahlung parallel zur Magnetfeldrichtung linear polarisiert ist, lässt sie sich in voller Intensität nur senkrecht zur Feldrichtung beobachten, während sie parallel zur Feldrichtung nicht beobachtbar ist. Gemäß Formel (??) ist ihre Energie gegenüber dem feldfreien Fall nicht verändert. Sie wird als π -Komponente bezeichnet.

Die beiden zirkular polarisierten Linien mit $\Delta m = \pm 1$ erscheinen bei der transversalen Betrachtung linear polarisiert und können deswegen nicht unterschieden werden. Die Linien besitzen immer eine Energiedifferenz von $\mu_B B$ bezogen auf die unverschobenen Linien und werden als σ -Komponente bezeichnet. Die beobachtbare Aufspaltung bei den zwei verschiedenen Betrachtungswinkeln sind in Abbildung