<공업수학1 : HW : week#4>

국방정보공학과 2학년 2020032306 송민경

2.7.4) $y'' - 9y = 18\cos\pi x$

위 방정식은 2계 비제차 선형 상미분 방정식으로 일반해 $y = y_h + y_p$를 갖는다.

먼저, 제차 상미분 방정식의 일반해 y_h를 구하면,

$y'' - 9y = 0$ 에서, 특성 다항식 $\lambda^2 - 9 = 0$을 얻는다.

$(\lambda+3)(\lambda-3) = 0$ $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$ 로 두 실근을 가지므로

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-3x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{3x} \end{cases}$$ 이고,

$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$ 이다.

다음으로, y_p를 구하면 미정계수법에 의해

$y_p = K_1 \cos\pi x + K_2 \sin\pi x$ 이고,

$(y_p)' = -\pi K_1 \sin\pi x + \pi K_2 \cos\pi x$

$(y_p)'' = -\pi^2 K_1 \cos\pi x - \pi^2 K_2 \sin\pi x$ 이다. 이를 원래의 방정식에 대입하면,

$-\pi^2(K_1\cos\pi x + K_2 \sin\pi x) - 9(K_1 \cos\pi x + K_2 \sin\pi x) = 18\cos\pi x$

$(-\pi^2 K_1 - 9K_1)\cos\pi x + (-\pi^2 K_2 - 9K_2)\sin\pi x = 18\cos\pi x$

양변은 항등식 이므로

$(-\pi^2 - 9)K_1 = 18$, $(-\pi^2 - 9)K_2 = 0$ 에서

$K_1 = -\frac{18}{\pi^2+9}$, $K_2 = 0$ 이고, $y_p = -\frac{18}{\pi^2+9}\cos\pi x$

$$\therefore y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} - \frac{18}{\pi^2+9}\cos\pi x$$

$$\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} - \frac{18}{\pi^2+9}\cos\pi x}$$

2.7.5) $y'' + 4y' + 4y = e^{-x}\cos x$

위 방정식은 2계 비제차 선형 상미분 방정식으로 일반해 $y = y_h + y_p$를 갖는다.

먼저, 제차 상미분 방정식의 일반해 y_h를 구하면,

$y'' + 4y' + 4y = 0$ 에서, 특성다항식 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$을 얻는다.

$(\lambda+2)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -2$ 로 중근을 가지므로

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-2x} \\ y_2 = x e^{\lambda_2 x} = x e^{-2x} \end{cases}$$ 이고,

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ 이다.

다음으로, y_p를 구하면, 미정 계수법에 의해

$y_p = e^{-x}(K_1\cos x + K_2 \sin x)$ 이고,

$$\begin{aligned}(y_p)' &= -e^{-x}(K_1\cos x + K_2\sin x) + e^{-x}(-K_1\sin x + K_2\cos x) \\ &= (-K_1 e^{-x} + K_2 e^{-x})\cos x + (-K_2 e^{-x} - K_1 e^{-x})\sin x \\ &= e^{-x}((-K_1+K_2)\cos x + (-K_2-K_1)\sin x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(y_p)'' &= -e^{-x}((-K_1+K_2)\cos x + (-K_2-K_1)\sin x) + e^{-x}((K_1-K_2)\sin x + (-K_2-K_1)\cos x) \\ &= e^{-x}((-2K_2)\cos x + (2K_2)\sin x)\end{aligned}$$ 이다.

이를 원래의 방정식에 대입하면,

$$\begin{aligned}(y_p)'' + 4(y_p)' + 4(y_p) &= e^{-x}((-2K_2 - \cancel{4K_1} + 4K_2 + \cancel{4K_1})\cos x + (2K_1 - \cancel{4K_2} - 4K_1 + \cancel{4K_2})\sin x) \\ &= e^{-x}\cos x\end{aligned}$$

위 식은 항등식 이므로

$2K_2 = 1$, $K_2 = \frac{1}{2}$, $-2K_1 = 0$, $K_1 = 0$ 이고,

$y_p = e^{-x}(\frac{1}{2}\cos x) = \frac{1}{2}e^{-x}\cos x$

$\therefore y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}\cos x$

$$\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}\cos x}$$

2.8. 4) $y'' + 2.5y' + 10y = -13.6\sin 4t$

$my'' + cy' + ky = r(t)$ 에서, $m=1$, $C=2.5$, $K=10$, $r(t) = -13.6\sin 4t$,

$F_0 = -13.6$, $w=4$ 이다.

$w_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ 이므로 위 방정식의 자연 주파수 w_0은 $\sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{10}{1}} = \sqrt{10}$ 이다.

이 때, 과도 상태는 동차해를, 정상상태는 비동차해를 가지므로

미정계수법을 y_p를 구해주면 된다.

$y_p = a\cos wt + b\sin wt$ 에서,

$(y_p)' = -wa\sin wt + wb\cos wt$,

$(y_p)'' = -w^2 a\cos wt - w^2 b\sin wt$ 이고 이를 원래 방정식에 대입하면,

$((k-mw^2)a + wcb)\cos wt + (-wca + (k-mw^2)b)\sin wt = F_0 \sin wt$

$$\begin{cases} (k-mw^2)a + wcb = 0 \\ -wca + (k-mw^2)b = F_0 \end{cases}$$ 가 되고, 이를 a와 b에 대해 정리하면,

$$a = F_0 \frac{-wC}{(k-mw^2)^2 + w^2C^2},$$

$$= F_0 \frac{-wC}{m^2(w_0^2 - w^2)^2 + w^2C^2}$$

$$= (-13.6)\frac{-4\times 2.5}{1(10-16)^2 + 16\times 2.5^2}$$

$$= 1$$

$$b = F_0 \frac{m(w_0^2 - w^2)}{(k-mw^2)^2 + w^2C^2}$$

$$= F_0 \frac{m(w_0^2 - w^2)}{m^2(w_0^2 - w^2)^2 + w^2C^2}$$

$$= (-13.6)\frac{1(10-4^2)}{1(10-16)^2 + 16\times 2.5^2}$$

$$= 0.6$$

따라서, 정상상태 해는 $y_p = \cos 4t + 0.6\sin 4t$ 이다.

$$\boxed{y_p = \cos 4t + 0.6\sin 4t}$$