

## 4장 1절 연습문제 풀이

2006년 4월 10일

다음 직교방정식을 극방정식으로 나타내어라. (1-8)

1.  $x^2 + y^2 = a^2$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 = a^2 &\implies r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = a^2 \implies r^2 = a^2 \\&\implies r = a \text{ or } r = -a.\end{aligned}$$

2.  $x^2 + y^2 = x + y$

$$x^2 + y^2 = x + y \implies r^2 = r \cos \theta + r \sin \theta \implies r = \cos \theta + \sin \theta.$$

3.  $y = x$

$$y = x \implies r \sin \theta = r \cos \theta \implies \tan \theta = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}.$$

4.  $x \sin \alpha + y \cos \alpha = a$

$$\begin{aligned}x \sin \alpha + y \cos \alpha = a &\implies r \cos \theta \sin \alpha + r \sin \theta \cos \alpha = a \\&\implies r \sin(\theta + \alpha) = a \\&\implies r = \frac{a}{\sin(\theta + \alpha)}\end{aligned}$$

5.  $y^3 = ax^2$

$$\begin{aligned}y^3 = ax^2 &\implies r^3 \sin^3 \theta = ar^2 \cos^2 \theta \\&\implies r = \frac{a \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} = a \cot^2 \theta \csc \theta.\end{aligned}$$

6.  $(a^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

7.  $2xy = a^2$

$$2xy = a^2 \implies 2r^2 \cos \theta \sin \theta = a^2 \implies r^2 = a^2 \csc 2\theta.$$

8.  $x\sqrt{x^2 + y^2} = ay$

$$x\sqrt{x^2 + y^2} = ay \implies r \cos \theta \sqrt{r^2} = ar \sin \theta \implies r = a \tan \theta.$$

다음 극방정식을 직교방정식으로 나타내어라. (9-16)

9.  $r = a \sec \theta$

$$r = a \sec \theta \implies r \cos \theta = a \implies x = a.$$

10.  $r^2 = a^2 \cot \theta$

$$\begin{aligned} r^2 = a^2 \cot \theta &\implies r^2 \sin \theta = a^2 \cos \theta \\ &\implies rr^2 \sin \theta = a^2 r \cos \theta \\ &\implies r^2 y = a^2 x \\ &\implies y(x^2 + y^2) = a^2 x \end{aligned}$$

11.  $r = \tan \theta \sec \theta$

$$r = \tan \theta \sec \theta \implies r \cos \theta = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \implies x^2 = y.$$

12.  $r = a^2 \sin 2\theta$

$$\begin{aligned} r = a^2 \sin 2\theta &\implies r = 2a^2 \sin \theta \cos \theta \implies r^3 = 2a^2 r \sin \theta \cdot r \cos \theta \\ &\implies (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2a^2 xy. \end{aligned}$$

13.  $r^3 = a^3 \csc \theta$

$$\begin{aligned} r^3 = a^3 \csc \theta &\implies r^3 \sin \theta = a^3 \implies r^2 \cdot r \sin \theta = a^3 \\ &\implies (x^2 + y^2)y = a^3. \end{aligned}$$

14.  $r = a \tan^2 \theta$

$$r = a \tan^2 \theta \implies \sqrt{x^2 + y^2} = a \left( \frac{y}{x} \right)^2$$

15.  $r^2 = \theta$

$$r^2 = \theta \implies x^2 + y^2 = \tan^{-1} \frac{y}{x} \implies y = x \tan(x^2 + y^2).$$

16.  $\theta = \frac{1}{2}\pi \implies x = 0$

다음 극방정식과 동치인 극방정식을 모두 구하여라.

17.  $(-1)^n r = a$  이므로  $r = a$  와 동치인식은  $r = -a$ .

18.  $r = a \cos 3\theta$  와 동치인 식은  $(-1)^n r = \cos 3(\theta + n\pi)$  이므로,  $n = 1$  을 대입하면

$$-r = a \cos 3(\theta + \pi) = -a \cos 3\theta \implies r = a \cos 3\theta.$$

따라서,  $r = a \cos 3\theta$  와 동치인 식은 자기 자신 뿐이다.

19.  $r = \cos \frac{\theta}{2}$  와 동치인 식은  $(-1)^n r = \cos \frac{1}{2}(\theta + n\pi)$  이므로  $n = 1, 2, 3$  을 대입하면

$$\begin{aligned} (-1)r &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = -\sin \frac{\theta}{2} \implies r = \sin \frac{\theta}{2} \\ (-1)^2 r &= \cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) = -\cos \frac{\theta}{2} \implies r = \cos \frac{\theta}{2} \\ (-1)^3 r &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin \frac{\theta}{2} \implies r = -\sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

의 서로 다른 세 가지의 꼴로 표시 된다.

21.  $r = 1 + \sin \frac{\theta}{2}$  와 동치인 식은  $(-1)^n r = 1 + \sin \frac{1}{2}(\theta + n\pi)$  이므로  $n = 1, 2, 3$  을 대입하면

$$\begin{aligned} (-1)r &= 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 1 + \cos \frac{\theta}{2} \implies r = -1 - \cos \frac{\theta}{2} \\ (-1)^2 r &= 1 + \sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) = 1 - \sin \frac{\theta}{2} \implies r = 1 - \sin \frac{\theta}{2} \\ (-1)^3 r &= 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos \frac{\theta}{2} \implies r = -1 + \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

의 서로 다른 세 가지의 꼴로 표시 된다.