8 장 연습문제 풀이

2006년 6월 5일

8 정적분의 응용

8.1 직교좌표계에서의 평면영역의 넓이

1. **직교좌표계에서의 평면영역의 넓이 I**

   함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속 일때, $y = f(x)$ 와 직선 $x = a$, $x = b$, x 축으로 둘러쌓인 영역의 넓이는 다음과 같이 주어진다.

$$A = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b ydx \right|$$

2. **직교좌표계에서의 평면영역의 넓이 II**

   함수가 매개변수 방정식 $x = g(t)$, $y = h(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ 주어진 경우의 넓이:

$$A = \left| \int_{t_1}^{t_2} h(t)g'(t)dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \frac{dx}{dt} dt \right|.$$

8.1 연습문제 풀이

1. $y=(x+1)(x-1)(x+2)$, $y=0$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이. (별지의 그림 참고)

$$\begin{aligned}A &= \int_{-2}^{-1}(x+1)(x-1)(x+2)dx - \int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)(x+2)dx\\&= \int_{-2}^{-1}(x^3+2x^2-x-2)dx - \int_{-1}^{1}(x^3+2x^2-x-2)dx\\&= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{1}\\&= (\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2)-(4-\frac{16}{3}-2+4)-(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-2)+(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2)\\&= \frac{37}{12}\end{aligned}$$

19. $y=\cosh x$, $y=\sinh 2x$, $x=0$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이. (별지의 그림 참고):

두 곡선 $y=\cosh x$, $y=\sinh 2x$ 의 교점을 구하면

$$\begin{aligned}\cosh x = \sinh 2x &\Longrightarrow \cosh x = 2\sinh x\cosh x\\&\Longrightarrow \sinh x = \frac{1}{2}\\&\Longrightarrow x = \sinh^{-1}(\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\sinh^{-1}(\frac{1}{2})}(\cosh x-\sinh 2x)dx\\&= \left[\sinh x-\frac{1}{2}\cosh 2x\right]_0^{\sinh^{-1}(\frac{1}{2})}\\&= \left[\sinh x-\frac{1}{2}(1+2\sinh^2 x)\right]_0^{\sinh^{-1}(\frac{1}{2})}\\&= \sinh(\sinh^{-1}(\frac{1}{2}))-\frac{1}{2}(1+\sinh^2(\sinh^{-1}(\frac{1}{2}))-\sinh 0+\frac{1}{2}+\sinh^2 0\\&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

35. 타원

$$\begin{cases} x = 3 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

로 둘러 쌓인 영역의 넓이 (별지의 그림 참고): 그림이 x-축 대칭이고

$$x = 2 \Longrightarrow t = \pi, \quad x = 4 \Longrightarrow t = 0$$

이므로

$$\begin{aligned} A &= 2\int_2^4 y dx \\ &= 2\int_\pi^0 y\frac{dx}{dt}dt = 2\int_\pi^0 4\sin t(-\sin t)dt \\ &= 8\int_0^\pi \sin^2 t dt = 8\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}dt \\ &= 4\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi = 4\pi \end{aligned}$$

37. 성망형 $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ 그림은 교재의 455 쪽 참고.

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a y dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3\theta(3a\cos^2\theta)(-\sin\theta)d\theta \\ &= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta. \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}\int \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta &= \int \sin^2\theta\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta\\ &= \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\frac{\sin^2 2\theta}{4}d\theta\\ &= \frac{1}{8}\int(\sin^2 2\theta - \cos 2\theta\sin^2 2\theta)d\theta\\ &= \frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta - \frac{1}{8}\int \cos 2\theta\sin^2 2\theta d\theta\\ &= \frac{1}{16}(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta) - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 2\theta + C\end{aligned}$$

39. 쌍곡선 $x = a\cosh u$, $y = b\sinh u$, $(a, b > 0)$ 와 x-축, 그리고 이 곡선 위의 한 점 $P(x, y)$ 와 원점 O 를 잇는 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이.(별지의 그림 참고):

구하려고 하는 부분의 면적은 원점과 $P(x, y)$ 이 만드는 직각 삼각형의 면적에서 쌍곡선

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$$

아래의 면적을 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}xy - \int_0^u y\frac{dx}{du}du\\ &= \frac{1}{2}xy - \int_0^u ab\sinh^2 u du = \frac{1}{2}xy - ab\int_0^u \frac{\cosh 2u - 1}{2}du\\ &= \frac{1}{2}xy - ab\left[-\frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2u\right]_0^u\\ &= \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}abu - \frac{1}{4}ab\sinh 2u\\ &= \frac{1}{2}ab\sinh u\cosh u + \frac{1}{2}abu - \frac{1}{2}ab\sinh u\cosh u = \frac{1}{2}abu\end{aligned}$$

40. 곡선 $x = t^2$, $y = 4t - t^3$ 의 환으로 둘러싸인 영역의 넓이.

곡선 $x = t^2$, $y = 4t - t^3$ 의 그림을 그리기 위하여 다음의 표를 참고하면

t	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
y	$\cdots$	15	0	3	0	3	0	-15	$\cdots$

주어진 곡선은 x-축 대칭임을 알 수있다. (그림은 별지 참고) 따라서, 두 곡선 으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\begin{aligned}
A &= 2\int_0^2 y\frac{dx}{dt}dt \\
&= 2\int_0^2 (4t - t^3)(2t)dt \\
&= 2\int_0^2 (8t^2 - 2t^4)dt \\
&= 2\left[\frac{8}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5\right]_0^2 \\
&= 2(\frac{8}{3}\cdot 8 - \frac{2}{5}\cdot 32) \\
&= 2(\frac{64}{3} - \frac{64}{5}) \\
&= 2\cdot\frac{128}{15} = \frac{256}{15}.
\end{aligned}$$

8.2 극좌표계에서의 평면영역의 넓이

극방정식으로 주어진 곡선 $r = f(\theta)$ 가 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속일때, 이 곡선과 두 동경벡터 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 로 둘러쌓인 영역의 넓이:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta.$$

8.2 연습문제 풀이

11. 극방정식 $r = 4\sin^2\theta\cos\theta$ 로 둘러싸인 여역의 넓이:

곡선 $r = 4\sin^2\theta\cos\theta$ 의 그림을 그리기 위하여 다음의 표를 참고한다. $r = 4\sin^2\theta\cos\theta$ 은 θ 에 $-\theta$ 를 대입해도 r 은 변하지 않으므로 x 축 대칭이다. 그림은 별지를 참고하시길..

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta(\frac{1}{4}\sin^2 2\theta) d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\sin^2 2\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\sin^2 2\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\sin^2 2\theta d\theta \\
&= \left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

19. $r = 3\cos\theta$, $r = 1+\cos\theta$ 의 공통인 영역의 넓이: (별지의 그림 참조) 그림은 x 축 대칭임을 참고할것. 우선 교점을 구하면

$$3\cos\theta = 1+\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

x 축 대칭이므로 x 축 위의 면적을 구한다. 그림에서 보듯이 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ 인구간에서는 심장형 $r = 1+\cos\theta$ 로 둘러싸여 있고 $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 에서는 원 $r = 3\cos\theta$ 의 면적이다. 따라서

$$\begin{aligned}
A &= 2\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta d\theta\right\} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta + 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= \left[\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 9\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}$$

21 $r = 1+\sin\theta$ 과 $r^2 = \frac{1}{2}\sin\theta$ 의 작은환 의 공통인 영역의 넓이: (별지의 그림 참조) 교점을 구하면, 여기서 두곡선 $r = 1+\sin\theta$ 과 $r^2 = \frac{1}{2}\sin\theta$ 의 교점은 없지만, $r^2 = \frac{1}{2}\sin\theta$ 과 동치인 식 $r - \frac{1}{2}\sin\theta$ 을 사용하면

$$\begin{aligned}
(1+\sin\theta)^2 = -\frac{1}{2}\sin\theta &\Longrightarrow 2\sin^2\theta + 5\sin\theta + 2 = 0 \\
&\Longrightarrow (2\sin\theta+1)(\sin\theta+2) = 0 \\
&\Longrightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow \theta = \frac{7\pi}{6},\quad \frac{11\pi}{6}.
\end{aligned}$$

두곡선의 공통 부분은 y 축 대칭이므로 별지그림의 왼쪽 부분의 면적을 구하여 2배한다. 두곡선의 공통 부분은 두 부분으로 나뉘어진다. $\pi \le \theta \le \frac{7\pi}{6}$ 인 부분은 $r^2 = \frac{1}{2}\sin\theta$ 의 면적이고 $\frac{7\pi}{6} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ 인 부분은 $r = 1+\sin\theta$ 의 면적이다. 따라서

$$
\begin{aligned}
A &= 2\left\{\frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\pi}\frac{1}{2}\sin\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}(1+\sin\theta)^2 d\theta\right\}\\
&= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\pi}\frac{1}{2}\sin\theta d\theta + \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}(1+2\sin\theta+\sin^2\theta\\
&= \theta\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\pi}\frac{1}{2}\sin\theta d\theta + \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2})d\theta\\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos\theta\right]_{\frac{7\pi}{6}}^{\pi} + \left[\frac{3\theta}{2} - 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}\\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}
$$

23. $r = 4\cos\theta$ 의 내부와 $r = 2$ 의 외부에 있는 영역의 넓이. 그림은 별지 참고. 먼저 교점을 구하면

$$4\cos\theta = 2 \Longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

두곡선은 x 축 대칭이므로

$$
\begin{aligned}
A &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\cos\theta)^2 d\theta - 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4d\theta\\
&= 16\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4d\theta\\
&= \left[8\theta - 4\sin 2\theta - 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&= \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

37. 두곡선 $r = \tan\theta$, $r = \cot\theta$ 로 둘러싸인 부분의 면적: 별지의 그림참조. 교점을 구하면

$$\tan\theta = \cot\theta \Longrightarrow \tan^2\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

그림은 원점 x 축, y 축 대칭이므로 1사분면에서 면적에 4배를 하여 구한다. 여기서 주의 할것은 $r = \cot\theta$ 의 그림은 무한대 로부터 극

점으로 가까이 접근하고 $r = \tan\theta$ 는 극점으로부터 멀어지는 그림이다. 또한, 공통영역은 두부분으로 나뉘어진다. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 에서는 $r = \tan\theta$ 로 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서는 $r = \cot\theta$ 의 면적이다. 따라서

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta + 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2\theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1) d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2\theta - 1) d\theta \\ &= \big[\tan\theta - \theta\big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \big[-\cot\theta - \theta\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 - \pi \end{aligned}$$

39. 삼등분 곡선 $r = a(1 - 2\cos\theta)$ 의 작은 환으로 둘러싸인 영역의 넓이: (별지의 그림참고) x 축 대칭이므로

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - 4\cos\theta + 4\cos^2\theta) d\theta \\ &= a^2 \big[\theta - 4\sin\theta + 2\theta + \sin 2\theta\big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= a^2 (\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}). \end{aligned}$$

41. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ 을 극방정식으로 변형하여 그 도형으로 둘러싸인 영역의 면적: (그림은 책 참조)

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 로 두면

$$r^6 = 4a^2 r^4 \cos^2\theta \sin^2\theta$$

따라서

$$r^2 = a^2 \sin^2 2\theta \Longrightarrow r = a \sin 2\theta.$$

그러므로 $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ 은 4엽장미이다. 면적을 구하면

$$\begin{aligned} A &= 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin^2 2\theta d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta \\ &= 2a^2 \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$