LECTURE 14

강체를 회전시킬 수 있는 정도를 나타내는 토크는 고정된 축뿐만 아니라 고정된 점에 대해서도 정의될 수 있다. 또한, 그 고정점에 대해서 입자의 경로는 원일 필요도 없다. 선운동량의 개념과 선운동량 보존법칙은 물체의 충돌에서 대략적인 정보로 그 충돌결과를 예측하는데 매우 유용하다. 이 단원에서는 앞서 언급한 토크의 정의를 일반화한다. 또한, 닫힌 고립계에서 선운동량이 보존되는 것과 마찬가지로 각운동량도 보존되는지를 알아본다.

11.4 다시 살펴본 토크

학습목표

☞ 고정된 점에 대한 토크의 정의를 이해한다.

토크

- $\vec{r}$이 입자의 위치벡터일 때 $\vec{F}$가 입자에 작용하는 힘이면 원점에 대하여 입자에 작용하는 **토크** $\vec{\tau}$는 두 벡터 $\vec{r}$와 $\vec{F}$의 가위곱이다.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

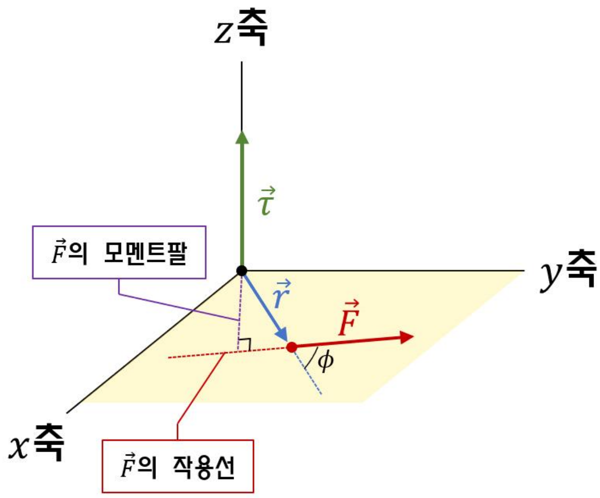
- ϕ가 $\vec{r}$과 $\vec{F}$ 사이의 내부각이면 토크의 크기 τ는 다음과 같다.

$$\tau = rF\sin\phi \text{ 또는 } rF_{\perp} \text{ 또는 } r_{\perp}F$$

- 여기서 $F_{\perp}$는 $\vec{r}$에 수직한 $\vec{F}$의 성분이고, $r_{\perp}$은 $\vec{F}$의 작용선과 원점 사이의 수직거리이다. ※이때 $r_{\perp}$을 $\vec{F}$의 **모멘트 팔**이라 한다.

$$F_{\perp} = F\sin\phi \quad \& \quad r_{\perp} = r\sin\phi$$

- 토크 $\vec{\tau}$의 방향은 오른손 규칙으로 말미암아 결정된다.
- 벡터 $\vec{r}$와 $\vec{F}$가 xy평면 위에 있으면 $\vec{\tau}$은 z축 위에 존재하게 된다.



11.5 각운동량

학습목표	☞ 고정된 점에 대한 각운동량을 정의한다.

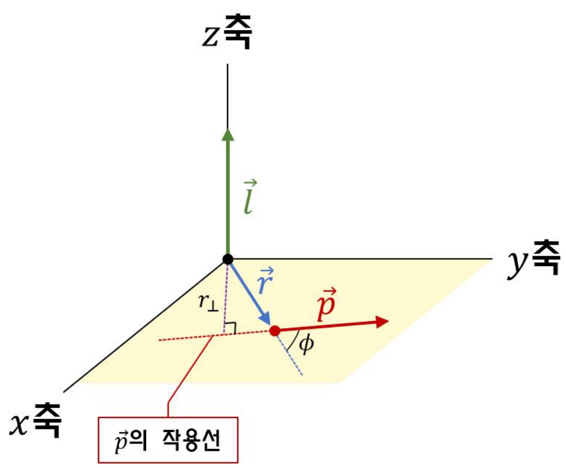
각운동량

- $\vec{r}$이 입자의 위치벡터일 때 $\vec{p}$가 입자의 선운동량이면 원점에 관한 입자의 **각운동량** $\vec{l}$는 두 벡터 $\vec{r}$와 $\vec{p}$의 가위곱이다.

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- 각운동량 $\vec{l}$은 선운동량 $\vec{p}$과 달리 정해진 원점(고정점)에 대해서만 의미가 있다.
- ϕ가 $\vec{r}$과 $\vec{p}$ 사이의 내부각이면 각운동량의 크기 l는 다음과 같다.

$$l = rp\sin\phi \text{ 또는 } rp_{\perp} \text{ 또는 } r_{\perp}p$$



- 여기서 $p_\perp$는 $\vec{r}$에 수직한 $\vec{p}$의 성분이고, $r_\perp$은 $\vec{p}$의 작용선과 원점 사이의 수직거리이다.

$$p_\perp = p\sin\phi \quad \& \quad r_\perp = r\sin\phi$$

- 각운동량 $\vec{l}$의 방향도 토크의 방향과 마찬가지로 오른손 규칙으로 말미암아 결정된다.
- 벡터 $\vec{r}$와 $\vec{p}$가 xy평면 위에 있으면 $\vec{l}$은 z축 위에 존재하게 된다.
- 각운동량의 SI 단위는 kg·m²/s 또는 J·s이다.

11.6 회전운동에 관한 Newton의 제2법칙

학습목표

☞ 회전운동을 하는 입자에 Newton의 제2법칙을 적용하여 입자에 작용하는 토크가 각운동량에 어떤 영향을 미치는지를 알아본다.

회전운동에 관한 Newton의 제2법칙

- $\vec{r}$이 입자의 위치벡터일 때 m와 $\vec{v}$가 각각 입자의 질량과 속도이면 원점에 관한 입자의 각운동량 $\vec{l}$은 다음처럼 표현될 수 있다.

$$\vec{l} = m(\vec{r}\times\vec{v})$$

- 위 식의 양변을 시간 t에 대해 미분하면 각운동량의 시간변화율 $d\vec{l}/dt$를 얻을 수 있다.

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = m\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}\right] = \left(\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}\right) + m(\vec{v}\times\vec{v}) = \left(\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

- Newton의 제2법칙로 말미암아 입자에 작용하는 알짜힘 $\vec{F}_{\text{net}}$과 선운동량 $\vec{p}$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \therefore\ \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}_{\text{net}}$$

- 그러므로 원점에 대한 알짜 토크 $\vec{\tau}_{\text{net}}(=\vec{r}\times\vec{F}_{\text{net}})$는 각운동량의 시간변화율 $d\vec{l}/dt$과 같다.

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

11.7 강체의 각운동량

학습목표

☞ 입자의 각운동량을 강체의 각운동량으로 확장한다.

입자계의 각운동량

입자들이 불연속적으로 분포된 계에서 원점에 대한 각운동량과 토크를 고려하자.

- 입자계의 **총 각운동량** $\vec{L}$은 각 입자의 각운동량 $\vec{l}_i$의 벡터합이다.

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \cdots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i$$

- 위 식의 양변을 시간 t에 대해 미분하면 총 각운동량의 시간변화율 $d\vec{L}/dt$가 각 입자에 작용하는 알짜 토크 $\vec{\tau}_{\mathrm{net},i}$의 벡터합과 같다는 것을 알 수 있다.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\mathrm{net},i}$$

- i번째 입자의 알짜 토크 $\vec{\tau}_{\mathrm{net},i}$는 내부 입자들 사이에 상호작용으로 인해 작용하는 **내부 토크** $\vec{\tau}_{\mathrm{in},i}$와 계의 외부에서 각각의 입자에 작용하는 **외부 토크** $\vec{\tau}_{\mathrm{out},i}$로 나눌 수 있다.

$$\vec{\tau}_{\mathrm{net},i} = \vec{\tau}_{\mathrm{in},i} + \vec{\tau}_{\mathrm{out},i}$$

- Newton의 제3법칙(작용-반작용의 법칙)으로 말미암아 모든 내부 토크의 벡터합은 0이다.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\mathrm{in},i} = 0$$

- 즉, 입자계의 알짜 토크 $\vec{\tau}_{\mathrm{net}}$는 모든 외부 토크의 벡터합이 된다.

$$\vec{\tau}_{\mathrm{net}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\mathrm{net},i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\mathrm{out},i}$$

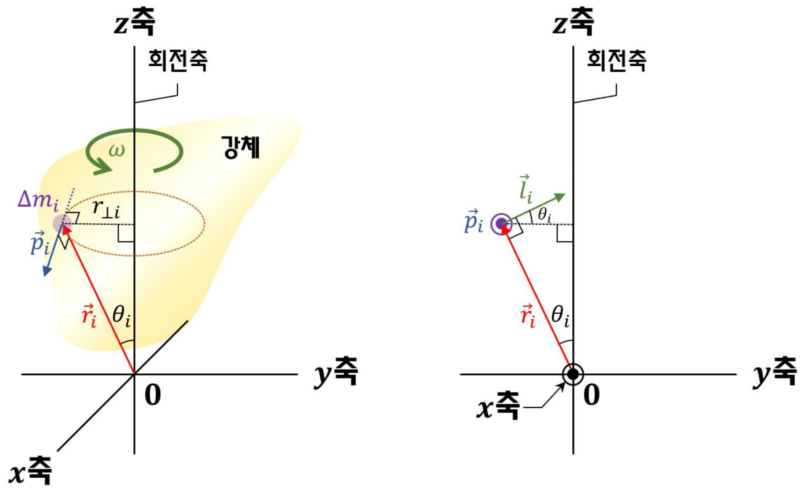
- 그러므로 입자계에 작용하는 **알짜 외부 토크** $\vec{\tau}_{\mathrm{out}} \left(= \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\mathrm{out},i}\right)$는 입자계의 전체 각운동량 $\vec{L}$의 시간변화율이다.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{\mathrm{out}}$$

고정된 축 주위로 회전하는 강체의 각운동량

아래와 같은 강체를 고려하자.

- ❖ 회전축은 z축으로 고정되어 있고 일정한 각속력 ω으로 회전한다.
- ❖ 질량요소 Δm_i는 원점에 대하여 $\vec{r}_i$인 위치에 있다.
- ❖ 위치벡터 $\vec{r}_i$는 z축과 θ_i의 각도를 이룬다.
- ❖ 질량요소 Δm_i의 각운동량은 $\vec{l}_i$이다.
- ❖ $\vec{l}_i$의 크기는 l_i이고 $\vec{l}_i$의 z축 성분은 l_{iz}이다. 즉, $l_{iz} = l_i \sin\theta_i$.
- ❖ 질량요소 Δm_i가 회전하면서 그리는 원의 반지름은 $r_{\perp i}$이다. 즉, $r_{\perp i} = r_i \sin\theta_i$.



- $\vec{L}$가 강체의 각운동량일 때 $\vec{L}$의 z성분 L_z은 모든 l_{iz}을 더한 것과 같다.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} l_{iz}$$

- 질량요소 Δm_i의 속도 $\vec{v}_i$는 위치벡터 $\vec{r}_i$와 수직이다.
- 즉, 선운동량 $\vec{p}_i$와 위치벡터 $\vec{r}_i$은 수직이다.

$$l_i = (r_i)(p_i) = (r_i)(\Delta m_i v_i)$$

$$\Downarrow$$

$$l_{iz} = l_i \sin\theta_i = (r_i \sin\theta_i)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i$$

- 그러므로 L_z은 회전축(z축)에 대한 강체의 각운동량 $I\omega$과 같다.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2\right) = I\omega$$

- 여기서 I는 고정된 회전축(z축)에 대한 강체의 회전관성이다.

11.8 각운동량의 보존

학습목표 ☞ 계에 작용하는 외부 알짜 토크가 없는 경우를 이해한다.

각운동량의 보존

- 닫힌계에 작용하는 알짜 외부 토크가 없다면($\vec{\tau}_{\text{net}} = 0$), 계의 총 각운동량 $\vec{L}$은 시간에 따라 변하지 않는다. (**각운동량 보존법칙**)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{상수} \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \vec{L}_{\text{i}} = \vec{L}_{\text{f}}$$

- $\vec{L}_{\rm i}$와 $\vec{L}_{\rm f}$은 각각 계의 초기 각운동량과 최종 각운동량이다.
- 다르게 말하자면, 어떤 입자도 계에 출입할 수 없고 외부에서 계에 작용하는 토크가 없다면 그 계의 총 각운동량은 계 내부의 변화와 무관하게 일정하다.
- 어떤 축(z축) 방향으로 닫힌계에 작용하는 알짜 외부 토크 $\tau_{{\rm net},z}$가 0이라면 그 축에 대한 각운동량 L_z은 변하지 않는다.

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0 \quad \Rightarrow \quad L_z = \text{상수} \quad \Rightarrow \quad \therefore \; L_{{\rm i}z} = L_{{\rm f}z}$$

- 회전축이 고정되어 있을 때 회전축에 대하여 질량이 재분포되어 그 축에 대한 회전관성이 변하면 그 축에 대한 각속력도 변한다.

$$I_{\rm i}\,\omega_{\rm i} = L_{\rm i} = L_{\rm f} = I_{\rm f}\,\omega_{\rm f}$$

예제 (pp. 358-360)

- 일상에는 각운동량 보존법칙으로 설명되는 회전 운동들이 다양하게 존재한다.

11.9 자이로스코프의 축돌기운동

학습목표

☞ 자전하는 자이로스코프의 운동을 이해한다.

자전하지 않는 자이로스코프

자전하지 않는 자이로스코프를 고려하자.

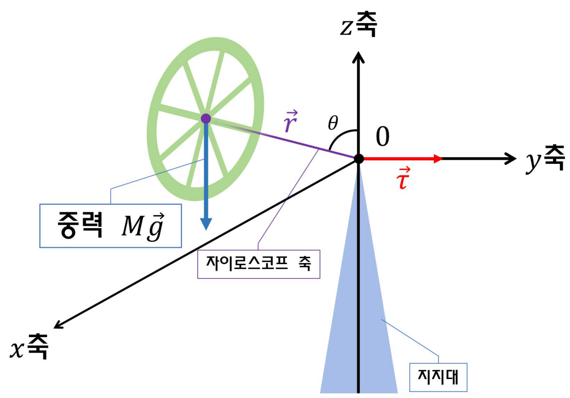
❖ 자이로스코프 축의 한쪽 끝이 지지대 꼭대기에 있다고 가정한다.

❖ 자이로스코프를 정지한 채로 놓는다.

❖ 자이로스코프의 질량을 M로 표기한다.

❖ 지지대 꼭대기(원점)에서 자이로스코프의 질량중심까지의 변위벡터를 $\vec{r}$로 표기한다. $\vec{r}$의 크기는 상수 r로 표기한다.

❖ 지면에서 지지대 꼭대기로 향하는 방향을 z축의 양의 방향으로 잡는다.



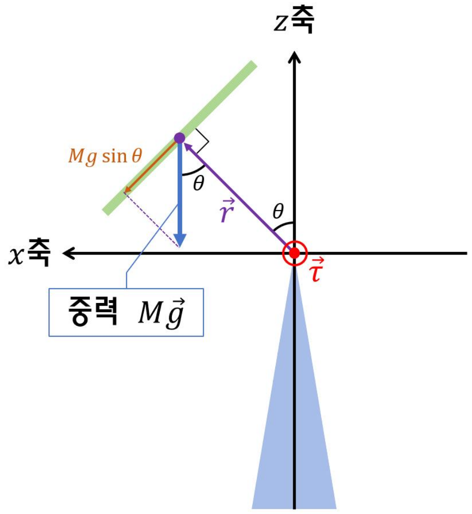
- 자이로스코프가 지면으로 떨어지는 운동은 고정된 회전축(y축) 또는 지지대의 꼭대기(원점)에 대한 회전운동으로 볼 수 있다.
- 자이로스코프에 작용하는 알짜 토크 $\vec{\tau}$는 자이로스코프의 질량중심에 작용하는 중력 $M\vec{g}$에 의하여 발생한다.

$$\vec{\tau} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \times m_i \vec{g}] = [\sum_i m_i \vec{r}_i] \times \vec{g} = M\vec{r} \times \vec{g} = \vec{r} \times M\vec{g}$$

- $m_i, \vec{r}_i, \vec{F}_i$은 자이로스코프를 구성하는 입자의 질량, 위치, 중력이다.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g} = Mgr\sin\theta\ \hat{\mathrm{j}}$$

- 여기서 θ는 z축과 $\vec{r}$ 사이의 각도이다.

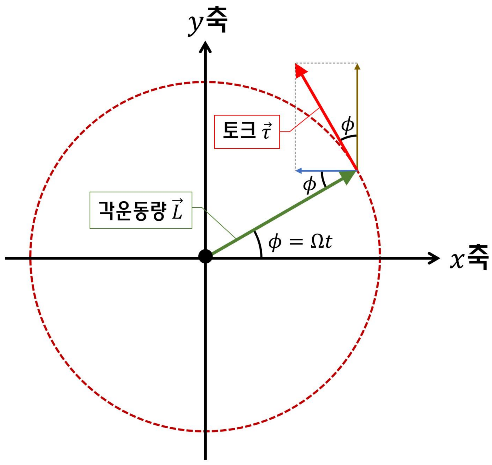


- 각운동량 $\vec{L}$의 크기는 시간 t 또는 각도 θ가 증가할수록 커진다.

자전하는 자이로스코프

다음과 같은 각운동량 $\vec{L}$을 지닌 강체를 고려하자.

$$\vec{L} = L_0\cos\phi\,\hat{\mathrm{i}} + L_0\sin\phi\,\hat{\mathrm{j}} + L_z\,\hat{\mathrm{k}} \quad \& \quad \phi = \Omega t$$



- ϕ는 x축과 $\vec{L}$ 사이의 각도이다.
- L_0와 L_z은 상수이지만 ϕ은 시간 t에 따라 변한다.
- Ω은 각도 ϕ의 시간변화율이다.
- 강체에 작용하는 알짜 토크 $\vec{\tau}$는 각운동량의 시간변화율이다.

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}=(-L_0\sin\phi)\frac{d\phi}{dt}\hat{\mathrm{i}}+(L_0\cos\phi)\frac{d\phi}{dt}\hat{\mathrm{j}}=L_0\Omega(-\sin\phi\,\hat{\mathrm{i}}+\cos\phi\,\hat{\mathrm{j}})$$

- 토크 $\vec{\tau}$의 크기 τ는 일정하지만 토크 $\vec{\tau}$의 방향 $\hat{\tau}$은 그렇지 않다.

$$\tau=L_0\Omega \quad \& \quad \hat{\tau}=-\sin\phi\,\hat{\mathrm{i}}+\cos\phi\,\hat{\mathrm{j}}$$

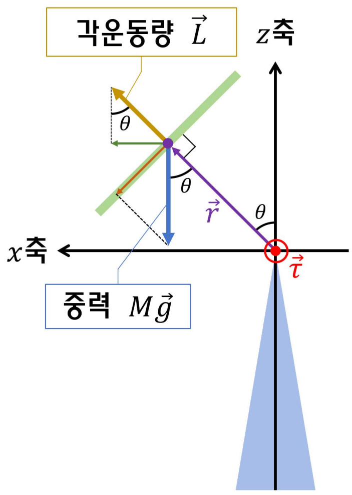
이 결과는 **자전하는** 자이로스코프에 적용할 수 있다.

❖ z축에 대한 자이로스코프의 초기 각속력을 Ω로 표기한다.
❖ 자이로스코프 축에 대한 초기 각운동량를 L로 표기한다
❖ 자이로스코프의 초기위치를 $\vec{r}=r\sin\theta\,\hat{\mathrm{i}}+r\cos\theta\,\hat{\mathrm{k}}$로 둔다.

- 다음 관계식이 성립하면 자이로스코프는 아래로 떨어지지 않고 z축 주위로 Ω의 각속력으로 회전한다. 이런 운동을 자이로스코프의 **축돌기 운동**이라고 하고 Ω을 **축돌기 운동의 각속도**라고 한다.

$$L\Omega\sin\theta=(L\sin\theta)(\Omega)=\tau=Mgr\sin\theta \text{ 또는 } \Omega=\frac{Mgr}{L}$$

- 이때 자이로스코프의 각운동량 $\vec{L}$은 z축에 대하여 Ω의 각속도로 회전한다.



- 만약 자이로스코프 축에 대한 회전관성이 I이고 자전의 각속력이 ω이면 축돌기 운동의 각속력 Ω은 다음처럼 표현될 수 있다.

$$L=I\omega \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \Omega=\frac{Mgr}{I\omega}$$

- 자전의 각속력 ω가 클수록 축돌기 운동을 위한 Ω의 값은 작다.