LECTURE 13

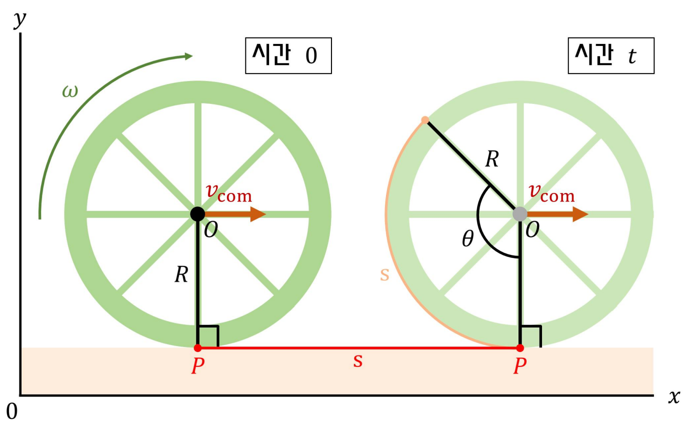
회전운동과 관련된 물리학은 바퀴처럼 둥근 물체의 굴림으로 이미 오래 전부터 응용되어 왔다. 그럼에도 불구하고 굴림운동과 관련된 물리학은 아직도 새롭고 놀라우면서도 매우 유용한 결과를 준다. 이 단원에서는 이러한 굴림운동을 알아본다.

11 굴림운동, 토크, 각운동량

11.1 병진운동과 회전운동이 결합한 굴림운동

학습목표 ☞ 병진운동과 회전운동이 결합하여 바퀴의 굴림운동을 이해한다.

바퀴의 굴림운동 아래 그림처럼 지면을 따라 유연하게(미끄러짐이나 튕김 없이) 굴러가는 반지름이 R인 균일한 바퀴를 고려하자. (유연한 **굴림운동**)



- 질량중심 O은 일정한 속력 v_{com}으로 앞을 향하여 움직인다.
- 지면과 접촉하는 바퀴의 점 P은 질량중심 O의 바로 밑에 있다.

- 점 P도 점 O과 마찬가지로 속력 $v_{\rm com}$으로 앞을 향하여 움직인다.
- 시간 t 동안 점 O와 점 P는 모두 거리 s만큼 앞으로 움직인다.
- 지면과 접촉했던 바퀴의 한 점은 원호 s만큼 이동한다.
- 바퀴가 바퀴중심에 대하여 각도 θ만큼 회전한다.
- 원호 s와 회전각도 θ는 다음과 같은 관계를 가진다.

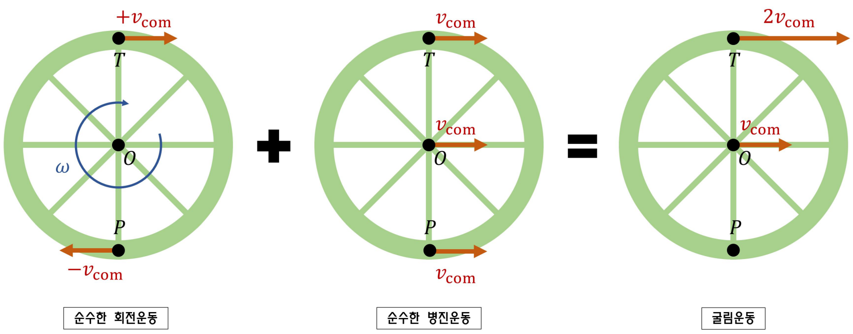
$$s = \theta R$$

- 바퀴중심 O의 선속도 $v_{\rm com}$는 원호의 시간변화율 ds/dt과 같다.
- 점 O을 지나는 회전축에 대한 바퀴의 각속도 ω는 $d\theta/dt$이다.

$$ds/dt = (d\theta/dt)R \quad \Rightarrow \quad \therefore \; v_{\rm com} = \omega R$$

병진운동과 회전운동의 결합

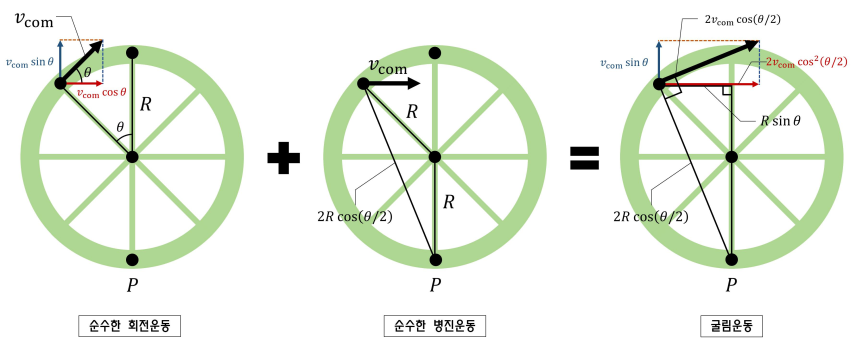
바퀴의 굴림운동은 아래 그림처럼 병진운동과 회전운동의 결합으로 이루어져 있다.



- 굴림운동에서 바퀴의 바닥에 있는 점 P는 정지상태에 있다.
- 굴림운동에서 바퀴의 맨 꼭대기에 있는 점 T는 바퀴에 어떤 부분보다 빠른 속력 $2v_{\rm com}$으로 움직인다.
- 점 P을 지나는 회전축에 대한 점 T의 각속력은 순수한 회전운동의 각속력 ω와 같다.

$$\frac{2v_{\rm com}}{2R} = \frac{v_{\rm com}}{R} = \omega$$

- 굴림운동은 점 P를 지나는 회전축에 대한 각속력이 ω인 순수한 회전운동으로 볼 수 있다.



$$\frac{2v_{\rm com}\cos(\theta/2)}{2R\cos(\theta/2)} = \frac{v_{\rm com}}{R} = \omega$$

11.2 힘과 굴림운동의 운동에너지

학습목표

☞ 굴림운동을 하는 바퀴의 운동에너지을 계산한다.

굴림운동의 운동에너지

유연한 굴림운동을 하는 바퀴를 고려하자.

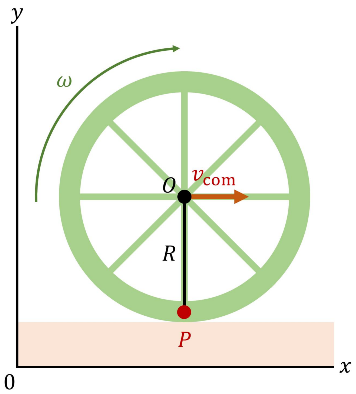
❖ 바퀴의 각속력과 각가속도 크기를 ω와 α라고 가정한다.

❖ 점 O을 지나는 축에 대한 바퀴의 회전관성을 $I_{\rm com}$이라 가정한다.

❖ 점 P을 지나는 축에 대한 바퀴의 회전관성을 I_P이라 가정한다.

❖ 바퀴의 밀도는 균일하다고 가정한다.
즉, 바퀴중심 O은 바퀴의 질량중심이다.

❖ 바퀴의 질량과 반지름은 각각 M와 R이다.



- 바퀴의 굴림운동은 점 P를 지나는 회전축에 대한 각속력이 ω인 순수한 회전운동으로 볼 수 있으므로 바퀴의 운동에너지 K는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$K = \frac{1}{2} I_P\, \omega^2$$

- 점 O과 점 P 사이의 거리는 R이므로 평행축 정리로 말미암아 회전관성 I_P은 회전관성 $I_{\rm com}$로 표현될 수 있다.

$$I_P = I_{\rm com} + MR^2$$

- 바퀴의 운동에너지 K는 회전 운동에너지($\frac{1}{2}I_{\rm com}\omega^2$)와 병진 운동에너지($\frac{1}{2}Mv_{\rm com}^2$)의 합과 같다.

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\rm com}\,\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\rm com}\,\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\rm com}^2$$

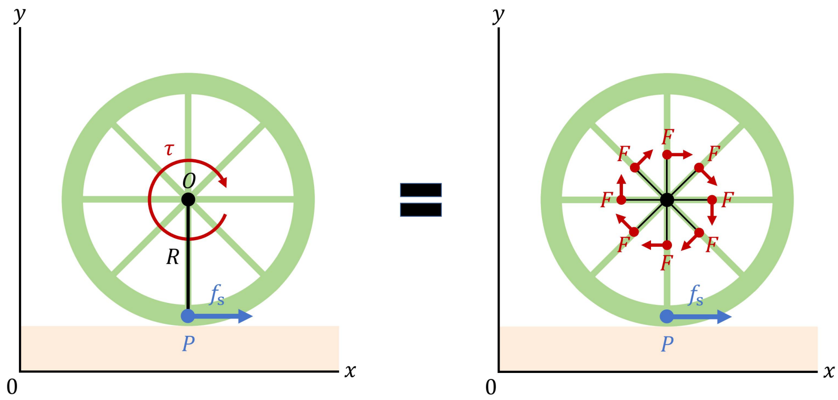
굴림운동의 힘

- 바퀴는 지면과의 접촉점 P에만 지면과 상호작용을 한다.
- 선가속도 크기 a_{com}와 각가속도 크기 α는 비례 관계에 있다.

$$v_{\mathrm{com}} = \omega R \quad \Rightarrow \quad \therefore \; a_{\mathrm{com}} = \frac{dv_{\mathrm{com}}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$$

외부 토크가 가해지는 경우

⊙ 자전거 바퀴를 페달로 돌리는 것처럼 바퀴에 토크 τ가 작용할 때 바퀴가 미끄러지지 않으면 점 P에서의 정지마찰력 $\vec{f}_{\mathrm{s}}$은 질량중심의 운동방향과 같은 방향으로 작용한다. 즉, $\vec{f}_{\mathrm{s}} = f_{\mathrm{s}}\hat{\mathrm{i}}$.



- 이때 병진운동과 회전운동에 대한 Newton의 제2법칙은 다음처럼 표현될 수 있다.

$$f_{\mathrm{s}} = Ma_{\mathrm{com}} \text{ (병진운동)} \quad \& \quad \tau - Rf_{\mathrm{s}} = I_{\mathrm{com}}\alpha \text{ (회전운동)}$$

- f_{s}와 α는 위 관계식들로부터 유도될 수 있다.

$$f_{\mathrm{s}} = \frac{MR\tau}{I_{\mathrm{com}} + MR^2} \quad \& \quad a_{\mathrm{com}} = \frac{R\tau}{I_{\mathrm{com}} + MR^2} \quad \& \quad \alpha = \frac{\tau}{I_{\mathrm{com}} + MR^2}$$

- τ가 일정할 때 바퀴가 수평으로 d만큼 이동하면 바퀴의 운동에너지 변화 ΔK은 외부 토크가 한 일 W과 같다.

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_{\mathrm{com}}d = \frac{2\tau dR}{I_{\mathrm{com}} + MR^2} \quad \& \quad \omega_1^2 - \omega_0^2 = \frac{2\alpha d}{R} = \frac{2\tau d}{R\left(I_{\mathrm{com}} + MR^2\right)}$$

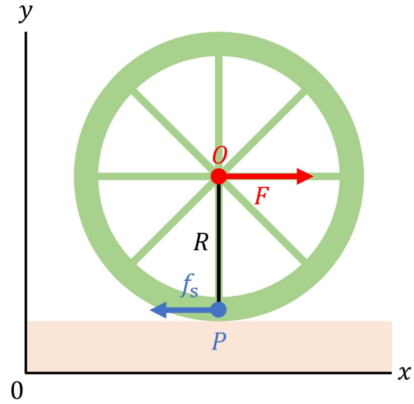
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta K &= \left[\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{com}}\omega_1^2\right] - \left[\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{com}}\omega_0^2\right] \\ &= \frac{\tau dMR}{I_{\mathrm{com}} + MR^2} + \frac{\tau dI_{\mathrm{com}}}{R\left(I_{\mathrm{com}} + MR^2\right)} = \frac{\tau d}{R} = W \end{aligned}$$

- 여기서 v_0와 v_1는 초기 선속력과 최종 선속력이고 ω_0와 ω_1은 초기 각속력과 최종 각속력이다.
- 외부 토크가 한 일은 모두 바퀴의 운동에너지로 전환된다.

외부 힘이 가해지는 경우

⊙ 바퀴의 질량중심에 F만큼의 힘이 작용할 때 바퀴가 미끄러지지 않으면 점 P에서의 정지마찰력 $\vec{f}_s$은 질량중심의 운동방향과 반대 방향으로 작용한다. 즉, $\vec{f}_s = -f_s\,\hat{\mathrm{i}}$.



- 이때 병진운동과 회전운동에 대한 Newton의 제2법칙은 다음처럼 표현될 수 있다.

$$F - f_s = Ma_{\text{com}} \text{ (병진운동)} \quad \& \quad Rf_s = I_{\text{com}}\alpha \text{ (회전운동)}$$

- 이 경우의 f_s와 α는 다음과 같다.

$$f_s = \frac{I_{\text{com}}F}{I_{\text{com}} + MR^2} \quad \& \quad a_{\text{com}} = \frac{R^2F}{I_{\text{com}} + MR^2} \quad \& \quad \alpha = \frac{RF}{I_{\text{com}} + MR^2}$$

- F가 일정할 때 바퀴가 수평으로 d만큼 이동하면 바퀴의 운동에너지 변화 ΔK은 외부 힘이 한 일 W과 같다.

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_{\text{com}}d = \frac{2FdR^2}{I_{\text{com}} + MR^2} \quad \& \quad \omega_1^2 - \omega_0^2 = \frac{2\alpha d}{R} = \frac{2Fd}{I_{\text{com}} + MR^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta K &= \left[\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega_1^2\right] - \left[\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega_0^2\right] \\ &= \frac{FdMR^2}{I_{\text{com}} + MR^2} + \frac{FdI_{\text{com}}}{I_{\text{com}} + MR^2} = Fd = W\end{aligned}$$

- 여기서 v_0와 v_1는 초기 선속력과 최종 선속력이고 ω_0와 ω_1은 초기 각속력과 최종 각속력이다.
- 외부 힘이 한 일은 모두 바퀴의 운동에너지로 전환된다.

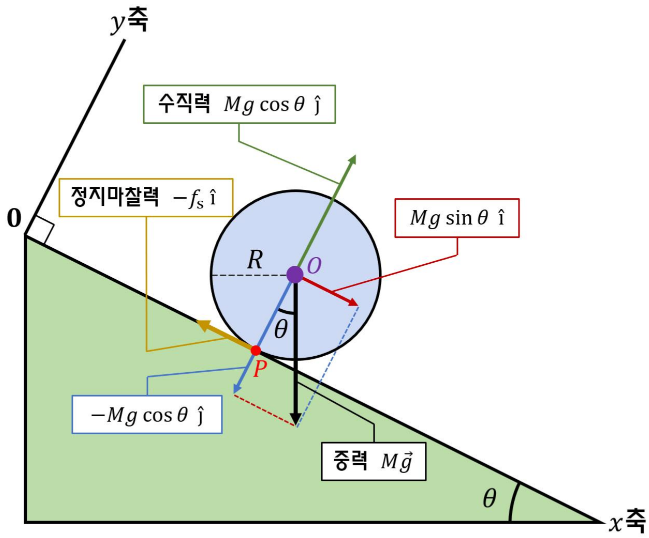
경사면을 유연하게 내려오는 물체

바퀴처럼 둥근 물체가 경사각이 θ인 경사면을 굴러 내려오는 경우를 고려하자.

❖ 물체의 반지름과 질량은 각각 R과 M로 표기한다.

❖ 물체의 밀도가 균일하다고 가정한다. 이때 물체의 중심 O은 물체의 질량중심이 된다.
❖ 물체의 반지름과 질량은 각각 R과 M로 표기한다.
❖ 물체의 밀도가 균일하다고 가정한다. 이때 물체의 중심 O은 물체의 질량중심이 된다.

- 점 O에 크기가 Mg인 중력이 작용한다.
- 중력의 x성분과 y성분은 각각 $Mg\cos\theta$와 $-Mg\sin\theta$이다.
- 점 P에 크기가 $Mg\sin\theta$인 수직력이 작용한다.



- 물체가 점 P에서 미끄러지려 한다면 물체는 경사면 아래 방향($\hat{\imath}$)으로 미끄러지려 할 것이다.
- 따라서 마찰력은 물체가 미끄러지지 않도록 경사면의 위쪽($-\hat{\imath}$)으로 작용한다.
- 물체의 x축 성분에 **Newton의 제2 (병진)운동법칙**을 적용하면 다음 관계식을 얻는다.

$$Mg\sin\theta - f_s = Ma_{\mathrm{com},x}$$

- 여기서 f_s은 정지마찰력의 크기이고 $a_{\mathrm{com},x}$은 질량중심 O에 해당하는 가속도 $\vec{a}$의 x축 성분이다. ※이 관계식 안에서 미지수는 f_s와 $a_{\mathrm{com},x}$이다.
- 점 O을 지나는 축을 물체의 회전축으로 잡고 **Newton의 회전운동법칙**을 적용하면 다음 관계식을 얻는다.

$$Rf_s = I_{\mathrm{com}}\alpha$$

- 여기서 I_{com}은 점 O을 지나는 회전축에 대한 물체의 회전관성이고 α은 점 O을 지나는 회전축에 대한 물체의 각가속도 크기이다. ※이 관계식 안에서 미지수는 f_s와 α이다.

- 점 P의 선가속도는 $a_{\mathrm{com},x}\,\hat{\mathrm{i}}$이므로 다음 관계식이 성립한다.

$$R\alpha = a_{\mathrm{com},x}$$

- 미지수 f_{s}는 앞서 언급한 관계식들로부터 유도된다.

$$f_{\mathrm{s}} = \frac{I_{\mathrm{com}}\alpha}{R} = \frac{I_{\mathrm{com}}a_{\mathrm{com},x}}{R^2} = \frac{I_{\mathrm{com}}}{R^2}\left[\frac{Mg\sin\theta - f_{\mathrm{s}}}{M}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$f_{\mathrm{s}} = \frac{I_{\mathrm{com}}Mg\sin\theta}{I_{\mathrm{com}} + MR^2}$$

- f_{s}로부터 미지수 α,$a_{\mathrm{com},x}$도 유도된다.

$$\alpha = \frac{Rf_{\mathrm{s}}}{I_{\mathrm{com}}} = \frac{MRg\sin\theta}{I_{\mathrm{com}} + MR^2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{\mathrm{com},x} = R\alpha = \frac{MR^2 g\sin\theta}{I_{\mathrm{com}} + MR^2}$$

- 물체는 중력이 잡아당겨 경사면을 내려오지만, 물체를 회전하게 만드는 것은 정지마찰력이다. 따라서 유연하게 굴러간다.
- 만약 경사면에 마찰이 없거나 $Mg\sin\theta$이 최대 정지마찰력보다 크면 물체는 미끄러져 내려온다.

11.3 요요

학습목표 ☞ 줄을 따라 올라가거나 내려가는 요요의 운동을 이해한다.

요요

다음처럼 움직이는 요요를 고려하자.

❖ 요요의 질량은 M이고 요요의 질량중심은 요요의 중심 O이다.
❖ 요요의 끈은 반지름이 R_0인 축에 감겨 있다.
❖ 끈의 굵기는 무시한다.
❖ 요요는 줄을 따라 수직 각도로 구른다.
❖ 요요는 반지름이 R_0인 축을 따라 구른다.

- 요요는 경사면을 유연하게 굴러 내려오는 둥근 물체와 동등하다.
  - ✓ 경사면은 요요의 끈으로 대체된다.
  - ✓ 그때 경사면의 경사각은 90°가 된다.
  - ✓ 또한 x축의 양의 방향은 지표면의 수직 아래 방향이 된다.

✓ 물체에 작용하는 수직력은 0이 된다.
✓ 물체의 질량중심에 대한 가속도의 x축 성분 $a_{\mathrm{com},x}$은 가속도 크기 a가 된다.
✓ 물체에 작용하는 마찰력 $-f_s\hat{\mathrm{i}}$은 요요의 끈에 작용하는 장력 $-T\hat{\mathrm{i}}$으로 대체된다.
✓ 물체의 반지름 R은 요요의 끈이 감겨 있는 축의 반지름 R_0으로 대체된다.

- 장력의 크기 T는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$T = \frac{I_{\mathrm{com}} Mg}{I_{\mathrm{com}} + MR_0^2}$$

- 여기서 I_{com}은 요요의 중심을 지나는 회전축에 대한 요요의 회전 관성이다.
- 질량중심의 가속도 크기 a와 요요의 각가속도 크기 α는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$a = \frac{MR_0^2 g}{I_{\mathrm{com}} + MR_0^2} \quad \& \quad \alpha = \frac{MR_0 g}{I_{\mathrm{com}} + MR_0^2}$$