[12-1]

#5. 43251

4,3 ; 4,2 ; 4,1 ; 3,2 ; 3,1 ; 2,1 ; 5,1 ⇒ 7개

#8. $542136 \in S_6$

5,4 ; 5,2 ; 5,1 ; 5,3 ; 4,2 ; 4,1 ; 4,3 ; 2,1 ; ⇒ 8개 //

[12-2]

#2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-6) - 2(1-4) + 1(3+2)$$
$$= -7 + 6 + 5 = 4$$

#6.
$$\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

#9.
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(2+9) + 1(12-10)$$
$$= 22 + 2 = 24.$$

#14
$$\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(x+3)(x^2+x-12+6) + (-1)(-1)^3(5x+20-6)$$
$$+ (-1)^4(-30-6x+18)$$
$$= (x+3)(x^2+x-6) + (5x+14) + (-6x-12)$$
$$= x^3+x^2-6x+3x^2+3x-18+5x+14-6x-12$$
$$= x^3+4x^2-4x-16 \,//$$

[12-3]

#2.
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$
$$= 2(33+24) - (11-32) = 135$$

#5. $\begin{vmatrix} b+c & a & a-b \\ c+a & b & b-c \\ a+b & c & c-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+c & a & -b \\ c+a & b & -c \\ a+b & c & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & -b \\ a & b & -c \\ b & c & -a \end{vmatrix}$

$= c(-ab+c^2) - a(-a^2+bc) - b(ac-b^2)$

$= a^3+b^3+c^3-3abc$

#8. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & 0 & x & 0 \\ c & y & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & x & 0 \\ c & 0 & 0 \\ d & 0 & x \end{vmatrix}$

$+ c\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ c & y & 0 \\ d & 0 & x \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & 0 & x \\ c & y & 0 \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= -ax^2y + bcx^2 + bcxy + d^2xy$

$= (bc-ay)x^2 + (bc+d^2)xy$

#12. $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = 0.$

$\Rightarrow bce\begin{vmatrix} -a & a & a \\ d & d & d \\ f & f & -f \end{vmatrix} = abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 4abcdef$

#15. $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$$= (b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2) + a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2$$

$$- (b^2+c^2)b^2c^2 - a^2b^2(a^2+b^2) - a^2c^2(a^2+c^2)$$

$$= a^4b^2 + a^2b^4 + a^4c^2 + a^2c^4 + b^4c^2 + b^2c^4 + 4a^2b^2c^2$$

$$- b^4c^2 - b^2c^4 - a^4b^2 - a^2b^4 - a^4c^2 - a^2c^4$$

$$= 4a^2b^2c^2$$

[12-4]

#3.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 135 - 102 - 36 = -3.$$

#8.

$$\begin{vmatrix} x & y & y & y \\ x & y & x & y \\ x & x & y & x \\ y & y & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y & y & y & y \\ x-y & y & x & y \\ 0 & x & y & x \\ 0 & y & y & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)\begin{vmatrix} y & x & y \\ x & y & x \\ y & y & x \end{vmatrix} - (x-y)\begin{vmatrix} y & y & y \\ x & y & x \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)\begin{vmatrix} y & x & y \\ x-y & 0 & 0 \\ y & y & x \end{vmatrix} + (x-y)\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-y \\ x & y & x \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

$$= -(x-y)^2\{x^2-y^2\} + (x-y)^2\{xy-y^2\}$$

$$= (x-y)^2\{y^2-x^2+xy-y^2\}$$

$$= (x-y)^2\{-x(x-y)\} = -x(x-y)^3$$

#12.

$$\begin{vmatrix} 3-x & 5+x & 1 \\ 7+2x & 3-2x & 2 \\ 11-3x & 17+3x & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 5+x & 1 \\ 7+2x & 3-2x & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 5+x & 1 \\ 3-2x & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 7+2x & 2 \end{vmatrix} = 2\{7+4x\} - 2\{-1-4x\}$$

$$= 16 + 16x = 0$$

$$\therefore x = -1$$

13. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 0 & d \\ b & 0 & 0 & e \\ c & d & e & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & 0 & d \\ b & 0 & e \\ c & e & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 & d \\ b & 0 & e \\ c & d & 0 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & d & e \end{vmatrix}$

$= ae\{ae - bd\} - bd\{ae - bd\}$

$= (ae - bd)^2$

#15. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} -b & -d & c \\ -c & a & -b \\ -d & b & a \end{vmatrix}$

$+ c \begin{vmatrix} -b & a & c \\ -c & d & -b \\ -d & -c & a \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} -b & a & -d \\ -c & d & a \\ -d & -c & b \end{vmatrix}$

$= a\{a^3 - \cancel{bcd} + \cancel{bcd} + ac^2 + ab^2 + ad^2\}$

$- b\{-ba^2 - bd^2 - bc^2 \cancel{+acd} - b^3 \cancel{-acd}\}$

$+ c\{\cancel{-abd} + \cancel{abd} + c^3 + cd^2 + b^2c + a^2c\}$

$- d\{-b^2d - a^2d - c^2d - d^3 \cancel{-abc} \cancel{+abc}\}$

$= a^2\{a^2 + c^2 + b^2 + d^2\} + b^2\{a^2 + b^2 + c^2 + d^2\}$

$+ c^2\{c^2 + d^2 + b^2 + a^2\} + d^2\{b^2 + a^2 + c^2 + d^2\}$

$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$