10장 연습문제 풀이

2006년 6월 11일

10 Maclaurin 급수전개, Taylor 급수전개

1. **주어진 함수 $f(x)$ 에 대한 매클로린의 급수전개:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \end{aligned}$$

이고, 수렴반경은

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)f^{(n)}(0)}{f^{(n+1)}(0)} \right|$$

이다.

2. **주어진 함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에 대한 테일러의 급수전개:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

이고, 수렴반경은

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)f^{(n)}(a)}{f^{(n+1)}(a)} \right|$$

이다.

10. 1 연습문제 풀이

1. $f(x) = e^x$ 의 매클로린의 급수를 전개하고 수렴구간을 구하라.

풀이.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

$$f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \cdots = e^x$$

이므로

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = e^0 = 1$$

이고

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots \end{aligned}$$

수렴반경: $|a_n| = \frac{1}{n!}$ 이므로

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \infty.$$

따라서 수렴구간은

$$-\infty < x < \infty$$

3. $f(x) = \ln(1 + x)$ 의 매클로린의 급수 전개.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= (1+x)^{-1}, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2}, & f''(0) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}, & f^{(3)}(0) &= 2 \cdot 1 \\ f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}, & f^{(4)}(0) &= -3! \\ f^{(5)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(-4)(1+x)^{-5}, & f^{(5)}(0) &= 4! \\ &\cdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots\end{aligned}$$

수렴반경: $|a_n| = \frac{1}{n}$ 이므로

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

$x = 1$ 이면 교대급수 판정법에 의하여 수렴하고 $x = -1$ 이면 발산한다. 따라서 수렴구간은

$$-1 < x \leq 1.$$

5. $f(x) = \sin^{-1} x$ 의 매클로린의 급수 전개. 예제 2 를 사용하면 정확한 급수전개를 구할 수 있다. 우선

$$f(x) = \sin^{-1} x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

예제 2에 의하면

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

이므로 $m = -\frac{1}{2}$ 대입하고 x 대신 $-x^2$ 대입하면 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 의 급수전

개를 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2^n})3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{n!}x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}
\end{aligned}
$$

이제 $f(x) = \sin^{-1} x$ 의 매클로린의 급수 전개는 위의 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 의 급수전개의 각 항을 적분 함으로써 구할 수 있다.

$$
\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.
$$

참고로

$$
2^n n! = 2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n.
$$

이용하면 책과같은 답을 얻을 수 있다. (좀 어렵게 풀었나?) 직접 미분하려고 하면 아마도 머리가 더 지끈지끈 하니.... 원 참

7. $f(x) = \sqrt{1-x}$ 의 매클로린의 급수 전개.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)^{\frac{1}{2}} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} & f'(0) &= -\frac{1}{2} \\
f''(x) &= -\frac{1}{2^2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} & f''(0) &= -\frac{1}{2^2} \\
f^{(3)}(x) &= -\frac{3}{2^3}(1-x)^{-\frac{5}{2}} & f^{(3)}(0) &= -\frac{3}{2^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{3\cdot 5}{2^4}(1-x)^{\frac{7}{2}} & f^{(4)}(0) &= -\frac{3\cdot 5}{2^4} \\
f^{(5)}(x) &= -\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^5}(1-x)^{\frac{9}{2}} & f^{(5)}(0) &= -\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^5} \\
&\cdots \\
f^{(n)}(x) &= -\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}(1-x)^{\frac{2n-1}{2}} & f^{(n)}(0) &= -\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}
\end{aligned}
$$

따라서

$$\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n$$
$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \cdots$$

27. $f(x) = \sec^2 x$ 의 매클로린의 급수 전개.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sec^2 x & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= 2\sec x \sec x \tan x = 2\sec^2 \tan x & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x & f''(0) &= 2 \\
f^{(3)}(x) &= 8\sec^2 x \tan^3 x + 16\sec^4 x \tan x & f^{(3)}(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= 16\sec^2 x \tan^4 x + 88\sec^4 \tan^2 x + 16\sec^6 x & f^{(4)}(0) &= 16
\end{aligned}$$

따라서

$$\sec^2 x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 + \cdots$$

31. 31 번 풀이는 5번 풀이 과정에 들어 있으니 그것을 참고할것.

10. 4 연습문제 풀이

1. $f(x) = \cos x$ 의 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 관한 Taylor 급수전개.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & f(\frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
f'(x) &= -\sin x & f'(\frac{\pi}{4}) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
f''(x) &= -\cos x & f''(\frac{\pi}{4}) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
f^{(3)}(x) &= \sin x & f^{(3)}(\frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(\frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

다음 부터는 계속 반복...

따라서

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}(x - \frac{\pi}{4})^n \\
&= f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{f''(\frac{\pi}{4})}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \cdots \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

수렴반경: $|a_n| = \frac{1}{n!}$ 이므로 수렴반경 $r = \infty$.

2. $f(x) = e^x$ 의 $x = -1$ 에 관한 Taylor 급수전개.

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = e^x$$

이므로

$$f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = \cdots = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{e}}{n!}(x+1)^n \\
&= \frac{1}{e}\left[1 + (x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{3!}(x+1)^2 + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

수렴반경 $r = \infty$.

4. 이문제는 $\ln x$ 를 $x = 2$ 에관한 Taylor 급수전개를 묻는 문제임.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(2) &= \ln 2 \\
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & f'(2) &= \frac{1}{2} \\
f''(x) &= -x^{-2} & f''(2) &= -\frac{1}{2^2} \\
f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)x^{-3} & f^{(3)}(2) &= \frac{2}{2^3} \\
f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)x^{-4} & f^{(4)}(2) &= \frac{(-1)3!}{2^4} \\
&\cdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} & f^{(n)}(2) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
\ln x &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}}{n!}(x-2)^n \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}(x-2)^n
\end{aligned}
$$

수렴반경

$$
r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}}{\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}\right| = 2
$$

수렴구간:

$$
-2 < x \leq 2 \Longrightarrow 0 < x \leq 4.
$$

7. $\ln(a+x)$ 의 $x=0$ 에서의 Taylor 또는 매클로린 급수전개.

$$f(x) = \ln(a+x) \qquad f(0) = \ln a$$

$$f'(x) = \frac{1}{a+x} = (a+x)^{-1} \qquad f'(0) + \frac{1}{a}$$

$$f''(x) = (-1)(a+x)^{-2} \qquad f''(0) = -\frac{1}{a^2}$$

$$f^{(3)}(x) = 2(a+x)^{-3} \qquad f^{(3)}(0) = \frac{2}{a^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -3\cdot 2(a+x)^{-4} \qquad f^{(4)}(0) = \frac{-3!}{a^4}$$

$$f^{(5)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2(a+x)^{-5} \qquad f^{(5)}(0) = \frac{4!}{a^5}$$

$$\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(a+x)^{-n} \qquad f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{a^n}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\ln(a+x) &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{a^n}}{n!} x^n \\
&= \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot a^n} x^n
\end{aligned}$$

수렴반경

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot a^n}}{\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot a^{n+1}}} \right| = a$$

수렴구간:

$$-a < x \le a.$$

8. $f(x) = \tan x$ 의 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 관한 Taylor 급수 전개.

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x & f(\frac{\pi}{4}) &= 1 \\ f'(x) &= \sec^2 x & f'(\frac{\pi}{4}) &= 2 \\ f''(x) &= 2\sec^2 x \tan x & f''(\frac{\pi}{4}) &= 4 \\ f^{(3)}(x) &= 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x & f^{(3)}(\frac{\pi}{4}) &= 16 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \tan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}(x - \frac{\pi}{4})^n \\ &= f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{f''(\frac{\pi}{4})}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{f^{(3)}(\frac{\pi}{4})}{2}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots \\ &= 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{4}{2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{16}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots \end{aligned}$$