LECTURE 04

물체는 직선운동뿐만 아니라 2차원 운동과 3차원 운동도 한다. 이 단원에서는 벡터의 개념을 이용하여 직선운동의 내용을 확장하고 2차원 운동과 3차원 운동을 물리적으로 분석한다.

4.1 위치와 변위

학습목표

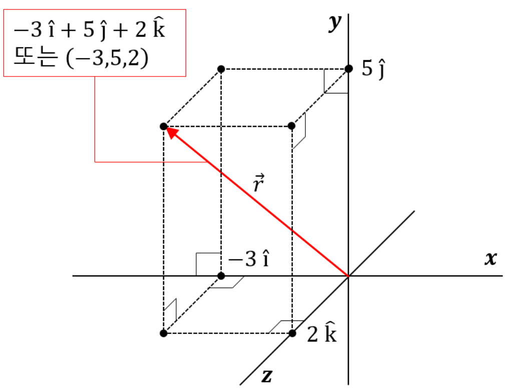
☞ 3차원 운동에서의 위치와 변위를 이해한다.

벡터성분과 스칼라성분

- **위치벡터**는 기준점(또는 좌표계의 원점)에서 입자까지의 변위벡터 $\vec{r}$이다.

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k} \quad \text{또는} \quad (x, y, z)$$

- $x\,\hat{\imath}, y\,\hat{\jmath}, z\,\hat{k}$은 $\vec{r}$의 **벡터성분**이고 x, y, z은 $\vec{r}$의 **스칼라성분**이다.

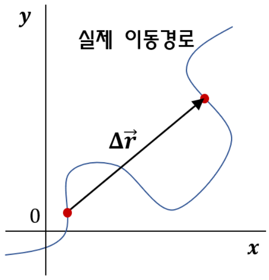


변위

- 어떤 시간간격 동안에 위치벡터가 $\vec{r}_0$에서 $\vec{r}_1$로 변한다면 그 **변위** $\Delta\vec{r}$는 $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$이다.

- 입자의 초기위치 $\vec{r}_0$와 나중위치 $\vec{r}_1$가 각각 (x_0, y_0, z_0)와 (x_1, y_1, z_1)일 때 그 변위 $\Delta\vec{r}$는 다음과 같다.

$$\Delta\vec{r} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \text{ 또는 } (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$



4.2 평균속도와 순간속도

학습목표

☞ 3차원 운동에서의 평균속도와 순간속도를 이해한다.

평균속도

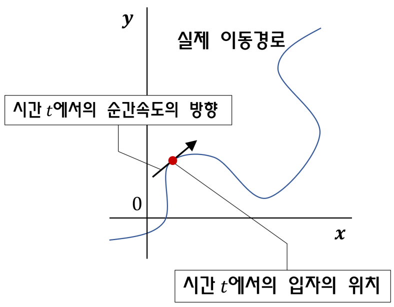
- $\Delta\vec{r}$가 시간간격 Δt 동안 입자의 변위일 때 그 **평균속도** $\vec{v}_{\text{avg}}$은 벡터 $\Delta\vec{r}$에 스칼라 Δt을 나누어 얻는 벡터이다.

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{k}}$$

순간속도

- **순간속도** $\vec{v}$은 평균속도의 시간간격 Δt을 0으로 접근시킬 때 그 극한값이다.
- 입자의 **속도**는 어떤 순간에서의 순간속도 $\vec{v}$를 의미한다.
- 속도 $\vec{v}$의 스칼라성분들은 $\vec{r}$의 성분들(x, y, z)을 미분한 것이다.

$$\begin{aligned}\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{i}} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{j}} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{k}} \\ &= \frac{dx}{dt}\,\hat{\mathrm{i}} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\mathrm{j}} + \frac{dz}{dt}\,\hat{\mathrm{k}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\end{aligned}$$



4.3 평균 가속도와 순간 가속도

학습목표 ☞ 3차원 운동에서의 평균 가속도와 순간 가속도를 이해한다.

평균 가속도

- 시간간격 Δt 동안 입자의 속도가 $\vec{v}_0$에서 $\vec{v}_1$로 변할 때, 그 **평균 가속도** $\vec{a}_{\text{avg}}$은 $\vec{v}_1 - \vec{v}_0$에 Δt를 나누어 얻은 벡터이다.

$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

순간 가속도

- **순간 가속도** $\vec{a}$은 평균 가속도의 시간간격 Δt을 0으로 접근시킬 때 그 극한값이다.
- 입자의 **가속도**는 어떤 순간에서의 순간 가속도 $\vec{a}$를 의미한다.
- 가속도 $\vec{a}$의 스칼라성분들은 $\vec{v}$의 스칼라성분들(v_x, v_y, v_z)을 미분한 것이다.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,\hat{\text{i}} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\,\hat{\text{j}} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\,\hat{\text{k}}$$

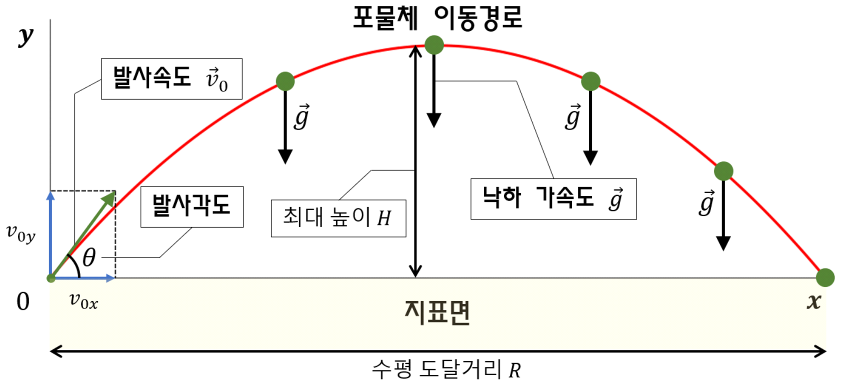
$$= \frac{dv_x}{dt}\,\hat{\text{i}} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{\text{j}} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{\text{k}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

4.4 포물체 운동

학습목표 ☞ 2차원 운동 중 하나인 포물체 운동을 이해한다.

포물체 운동

- 지표면의 수직 평면에서 입자가 초기속도 $\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{\text{i}} + v_{0y}\,\hat{\text{j}}$로 발사되면 입자의 가속도는 자유낙하 가속도 $\vec{g}$가 된다.
- 이러한 입자를 **포물체**라 하고, 그런 운동을 **포물체 운동**이라 한다.



수평운동과 수직운동

- 포물체 운동은 가속도의 크기가 0인 **수평운동**과 가속도의 크기가 일정한 **수직운동**의 결합으로 발생한다.
- 포물체 운동에서 수평운동과 수직운동은 서로 독립된 운동이며 두 운동은 서로 어떤 영향도 주지 않는다.
- v_0가 포물체의 초기속력일 때 θ가 지표면과 초기속도 $\vec{v}_0$ 사이의 각도이면 초기속도의 성분 v_{0x}와 v_{0y}은 다음처럼 표현된다.

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad \text{(수평운동의 초기속도)}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \quad \text{(수직운동의 초기속도)}$$

- 포물체 운동에서 수평운동은 등속운동이므로 시간간격 Δt 동안의 수평변위 Δx는 다음과 같다.

$$\Delta x = v_{0x} \Delta t$$

- 포물체 운동에서 수직운동은 앞장에서 논의한 자유낙하운동이므로 시간간격 Δt 동안의 수직변위 Δy은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta y &= v_{0y} \Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \\ \text{또는} \quad &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} - \frac{g}{2} \left(\Delta t - \frac{v_0 \sin\theta}{g} \right)^2 \end{aligned}$$

- 포물체가 도달할 수 있는 최대 높이 H와 그때까지 걸리는 시간 T은 다음처럼 쓸 수 있다.

$$T = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \quad \& \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

- 포물체가 다시 지표면에 도달할 때까지 걸리는 시간은 $2T$이다.
- 수평변위 Δx은 시간간격 Δt과 비례하므로 수직변위 Δy는 다음처럼 Δx로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta y &= \tan\theta \Delta x - \frac{g (\Delta x)^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \quad \text{(궤적 방정식)} \\ \text{또는} \quad &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \left(\Delta x - \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \right)^2 \end{aligned}$$

- 즉, 포물체의 경로(궤적)은 **포물선**을 이룬다.
- 포물체가 다시 지표면에 도달할 때 수평변위 R은 다음과 같다.

$$R = \frac{2 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \quad \text{또는} \quad \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad \text{(수평 도달거리)}$$

- 수평 도달거리 R은 발사각도 θ가 45°일 때 최대이다.
- 포물체가 최대 높이 H에 도달할 때 수평변위는 $R/2$이다.

4.5 등속 원운동

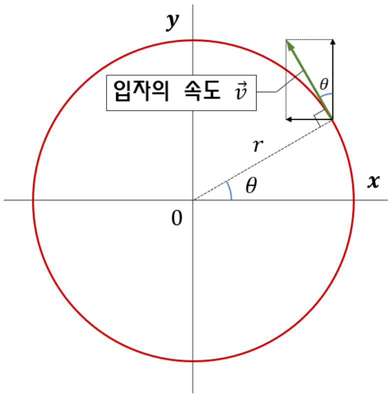
학습목표

☞ 등속 원운동에서의 속도와 가속도의 관계를 이해한다.

등속 원운동

- 입자가 원둘레(또는 원호)를 일정한 속력 v으로 움직이면 **등속 원운동**을 한다고 말한다.
- 아래 그림처럼 입자가 반시계 방향으로 등속 원운동을 하면 회전 각도 θ에 따라 입자의 속도 $\vec{v}$는 다음처럼 표현될 수 있다.

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\mathrm{i}} + v_y\,\hat{\mathrm{j}} = (-v\sin\theta)\,\hat{\mathrm{i}} + (v\cos\theta)\,\hat{\mathrm{j}}$$



- 입자가 각도 θ 만큼 회전했을 때 입자의 총 이동거리는 $r\theta$이므로 시간 t에 따른 회전각도 θ은 다음처럼 표현된다.

$$\theta(t) = \frac{vt}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$$

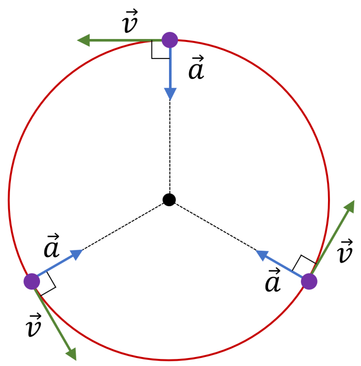
구심가속도

- 등속 원운동은 입자의 속력이 증가하지도 감소하지도 않는 가속도 운동이다.
- 등속 원운동에서 가속도의 방향은 원의 중심을 향한다.
- 그러므로 등속 원운동의 가속도 $\vec{a}$를 **구심가속도**라 한다.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\hat{\mathrm{j}} \\ &= \left(-v\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(-v\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\mathrm{j}} \\ &= -\frac{v^2}{r}(\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathrm{j}})\end{aligned}$$

- 등속 원운동에서 가속도의 크기 a는 일정하다.

$$a = \frac{v^2}{r}$$



회전주기

- 등속 원운동에서 입자가 원둘레($2\pi r$의 거리)를 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간은 T이다.

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

- 따라서 T를 **회전주기**(또는 단순히 **주기**)라 한다.

4.6 1차원 상대운동

학습목표

☞ 한 축에 따라 일정한 속도로 서로 움직이는 두 기준틀에서 측정한 입자의 위치, 속도, 가속도 사이의 관계를 구한다.

기준틀

- 좌표계를 부여한 물리적인 대상을 **기준틀**(reference frame)이라고 한다.
- 한 입자의 속도는 속도를 관찰하거나 측정하는 기준틀에 따라 다르다.
- 일반적으로 기준틀이 되는 물리적인 대상은 지표면이다.

예제

- 다음 상황을 가정하자.
  - ✓ 자동차 P가 일직선으로 된 고속도로를 달리고 있다.
  - ✓ Alex(틀 A)가 지표면에 서서 자동차 P를 보고 있다.
  - ✓ Barbara(틀 B)이 등속운동을 하면서 자동차 P를 보고 있다.
- 위치(x성분)와 속도(x성분)을 다음처럼 표기한다.
  - ✓ x_{PA}와 v_{PA}는 Alex가 측정한 P의 위치와 속도이다.
  - ✓ x_{PB}와 v_{PB}는 Barbara가 측정한 P의 위치와 속도이다.
  - ✓ x_{BA}와 v_{BA}는 Alex가 측정한 Barbara의 위치와 속도이다.
- 그때 다음과 같은 위치 관계식이 성립한다.

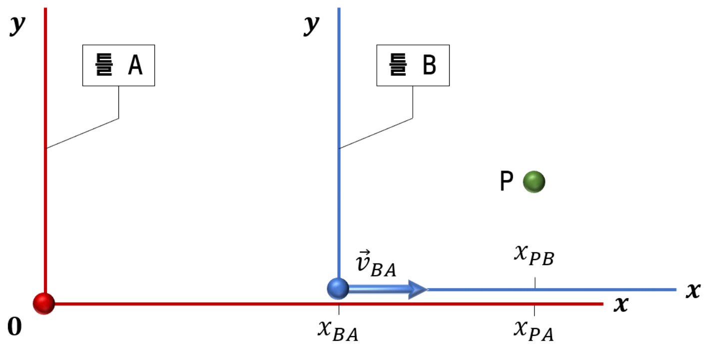
$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$$

- 이 위치 관계식을 시간에 대해 미분하면 다음 같은 속도 관계식을 얻을 수 있다.

$$v_{PA} = \frac{dx_{PA}}{dt} = \frac{dx_{PB}}{dt} + \frac{dx_{BA}}{dt} = v_{PB} + v_{BA}$$

- 속도 관계식을 다시 한번 시간에 대해 미분하면 다음 같은 가속도 관계식을 얻을 수 있다.

$$a_{PA} = \frac{dv_{PA}}{dt} = \frac{dv_{PB}}{dt} + \frac{dv_{BA}}{dt} = a_{PB} + 0 = a_{PB}$$



4.7 2차원 상대운동

학습목표

☞ 2차원에서 서로 일정한 속도로 움직이는 두 기준틀에서 측정한 입자의 위치, 속도, 가속도 사이의 관계를 구한다.

상대운동

- 다음 상황을 가정하자.
  - ✓ 기준틀 A에 대해 기준틀 B가 상대적인 등속도 운동을 하고 있다.
  - ✓ 기준틀 A의 원점 0_A와 기준틀 B의 원점 0_B에서 두 관측자가 움직이는 입자 P를 바라보고 있다.
  - ✓ 두 틀의 축은 서로 평행이다.
- 위치와 속도를 다음처럼 표기한다.
  - ✓ $\vec{r}_{PA}$와 $\vec{v}_{PA}$는 0_A에 대한 입자 P의 위치와 속도이다.
  - ✓ $\vec{r}_{PB}$와 $\vec{v}_{PB}$는 0_B에 대한 입자 P의 위치와 속도이다.
  - ✓ $\vec{r}_{BA}$와 $\vec{v}_{BA}$는 0_A에 대한 0_B의 위치와 속도이다.
- 그때 다음과 같은 위치 관계식이 성립한다.

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

- 이 위치 관계식을 시간에 대해 미분하면 다음 같은 속도 관계식을 얻을 수 있다.

$$\vec{v}_{PA} = \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

- 속도 관계식을 다시 한번 시간에 대해 미분하면 다음 같은 가속도 관계식을 얻을 수 있다.

$$\vec{a}_{PA} = \frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \vec{a}_{PB} + 0 = \vec{a}_{PB}$$