LECTURE 09

일상의 물체들은 대체로 부피가 없는 입자가 아니므로 그 물체가 어떤 종류의 운동을 한다면 그 물체의 각 부분은 제각기 다른 경로로 움직인다. 이 단원에서는 복잡한 물체의 운동을 물체의 특별한 점을 이용하여 간단하게 기술하는 물리학적 방법론을 알아본다.

9.1 질량중심

학습목표

☞ 차원에 따라 질량중심이 어떻게 정의되는지 알아본다.

질량중심

물체나 물체들로 이루어진 계의 **질량중심**은

- 모든 질량이 그 점에 모여 있고
- 외부력이 모두 그 점에 작용하는 것처럼 움직이는 특별한 점이다.

불연속적 분포 (두 개의 입자)

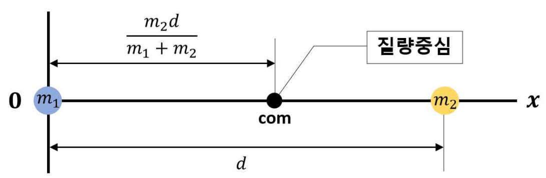
두 개의 입자로 구성된 계를 고려하자.

❖ 두 입자의 질량을 각각 m_1과 m_2로 표기한다.

❖ 질량이 m_i인 입자의 위치를 x축 좌표의 x_i로 둔다.

그때 계의 **질량중심** x_{com}은 다음과 같다.

$$x_{\mathrm{com}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



불연속적 분포 (1차원)

계의 입자들이 한 직선에 놓인 경우를 고려하자.

❖ i번째 입자의 질량을 m_i로 표기한다.

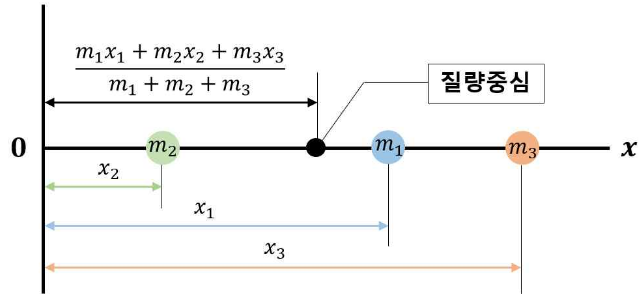
❖ i번째 입자의 위치를 x축 좌표의 x_i로 둔다.

그때 계의 **질량중심** x_{com}는 다음과 같다.

$$x_{\text{com}} = \frac{m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

여기서 M은 계의 총질량이다.

$$M = m_1 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



불연속적 분포 (3차원)

n개의 입자들이 3차원 공간에 불연속적으로 분포된 계를 고려하자.

❖ i번째 입자의 질량을 m_i로 표기한다.

❖ i번째 입자의 위치를 $\vec{r}_i$로 표기한다. 즉, $\vec{r}_i = x_i\,\hat{\mathrm{i}} + y_i\,\hat{\mathrm{j}} + z_i\,\hat{\mathrm{k}}$.

그때 계의 질량중심을 나타내는 좌표 $x_{\text{com}}, y_{\text{com}}, z_{\text{com}}$는 다음과 같다.

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

그러므로 질량중심의 위치 $\vec{r}_{\text{com}}$는 다음처럼 표현될 수 있다.

$$\vec{r}_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

연속적 분포 (1차원)

계의 입자들이 연속적으로 분포된 경우를 고려하자.

- 이때 입자들은 미분질량요소 dm로 표기된다.
- 입자들이 1차원(x축 좌표)으로 분포되면 질량중심 x_{com}는 다음처럼 표현된다.

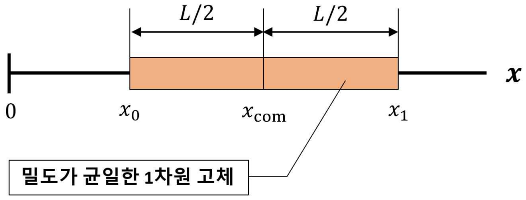
$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

- 선밀도 λ가 균일한 1차원 고체에서 질량요소 dm이 차지하는 길이 dL는 일정하다.

$$\lambda = \frac{dm}{dL} = \frac{M}{L} \quad \Rightarrow \quad \therefore \; x_{\text{com}} = \frac{1}{L}\int x\,dL$$

- L은 1차원 고체의 전체 길이이다.
- 1차원 고체의 시작 x_0과 끝 x_1만 알면 그 고체의 질량중심은 쉽게 결정된다.

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{L}\int x\,dL = \frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2(x_1 - x_0)} = \frac{x_0 + x_1}{2}$$



연속적 분포 (2차원)

- 입자들이 2차원(xy평면)으로 분포되면 질량중심의 좌표 $x_{\text{com}}, y_{\text{com}}$는 다음처럼 표현된다.

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M}\int x\,dm, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

- 면밀도 σ가 균일한 2차원 고체에서 질량요소 dm이 차지하는 면적 dA는 일정하다.

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} \quad \Rightarrow \quad \therefore \; x_{\text{com}} = \frac{1}{A}\int x\,dA, \; y_{\text{com}} = \frac{1}{A}\int y\,dA$$

- A은 2차원 고체의 전체 면적이다.

연속적 분포 (3차원)

- 입자들이 3차원으로 분포되면 질량중심의 좌표 $x_{\text{com}}, y_{\text{com}}, z_{\text{com}}$는 다음처럼 적분으로 표현된다.

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M}\int x\,dm, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M}\int y\,dm, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

- 밀도 ρ가 균일한 고체에서 질량요소 dm이 차지하는 부피 dV는 일정하다.

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$$

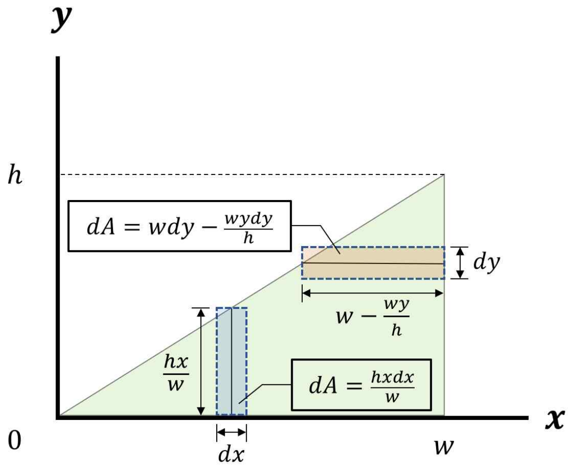
$$\Downarrow$$

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{V}\int x\,dV, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{V}\int y\,dV, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

- V은 고체의 전체 부피이다.

예제

아래 그림처럼 입자들이 2차원으로 연속적으로 분포된 경우를 고려하자. 여기서 계의 면밀도는 균일하다고 가정한다.



그때 질량중심의 두 좌표 $x_{\rm com}\,y_{\rm com}$는 다음처럼 계산된다.

$$
\begin{aligned}
x_{\rm com} &= \frac{1}{A}\int x dA = \frac{2}{wh}\int_{x=0}^{x=w} x\cdot\frac{hxdx}{w} \\
&= \frac{2}{w^2}\int_0^w x^2 dx = \frac{2}{w^2}\frac{w^3}{3} = \frac{2w}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{\rm com} &= \frac{1}{A}\int y dA = \frac{2}{wh}\int_{y=0}^{y=h} y\cdot\left(wdy - \frac{wydy}{h}\right) \\
&= \frac{2}{h^2}\int_0^h (hy - y^2)dy = \frac{2}{h^2}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{h}{3}
\end{aligned}
$$

9.2 입자계에 대한 Newton의 제2법칙

학습목표

☞ 외부에서 작용하는 힘에 의해 질량중심이 어떻게 움직이는지를 알아본다.

Newton의 제2 운동법칙

3차원으로 불연속적으로 분포된 입자들로 이루어진 계를 고려하자.

- 계의 움직일 때 질량이 계에서 빠져나가거나 계로 들어오지 않다고 가정한다. 이러한 계를 **닫힌 계**라고 한다.
- 질량중심 $\vec{r}_{\rm com}$에 대한 정의로 말미암아 다음과 같은 벡터 방정식이 성립한다.

$$M\vec{r}_{\rm com} = m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$

- 이 식의 양변을 시간에 대해 미분하면 질량중심의 속도 $\vec{v}_{\mathrm{com}}$에 대한 벡터 방정식을 얻는다.

$$M\vec{v}_{\mathrm{com}} = m_1\vec{v}_1 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- 위 식의 양변을 시간에 대해 미분하면 질량중심의 가속도 $\vec{a}_{\mathrm{com}}$에 대한 벡터 방정식을 얻는다.

$$M\vec{a}_{\mathrm{com}} = m_1\vec{a}_1 + \cdots + m_n\vec{a}_n = \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n$$

- $\vec{F}_i$은 i번째 입자에 작용하는 외부력이므로 이들의 합은 계의 알짜힘 $\vec{F}_{\mathrm{net}}$과 같다. 그러므로 다음 벡터 방정식이 성립한다.

$$\vec{F}_{\mathrm{net}} = M\vec{a}_{\mathrm{com}}$$

- 이 식은 입자계에서의 질량중심의 운동에 대한 **Newton의 제2법칙**이고 세 성분으로 주어지는 아래 세 방정식과 동등하다.

$$F_{\mathrm{net},x} = Ma_{\mathrm{com},x}, \quad F_{\mathrm{net},y} = Ma_{\mathrm{com},y}, \quad F_{\mathrm{net},z} = Ma_{\mathrm{com},z}$$

- 질량중심은 단 하나의 점이지만 계의 총질량과 같은 질량을 가진 단일입자처럼 움직인다.
- 계의 한 부분이 다른 부분으로부터 받는 **내부력**은 알짜힘 $\vec{F}_{\mathrm{net}}$에 포함되지 않는다.

9.3 선운동량

학습목표

☞ 단일입자의 선운동량과 다수의 입자들로 구성된 계의 선운동량이 어떻게 정의되는지를 알아본다.

입자의 선운동량

입자의 선운동량은 벡터 $\vec{p}$로 표기하며 다음처럼 정의된다.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- m은 입자의 질량이고 $\vec{v}$는 입자의 속도이다.
- 선운동량 $\vec{p}$의 방향은 속도 $\vec{v}$의 방향과 같다.
- 선운동량의 SI 단위는 kg·m/s이다.
- 선운동량의 ‘**선**’은 종종 생략되지만 회전에 관련된 **각운동량**과 구별하고자 선운동량으로 쓴다.
- 선운동량의 시간변화율은 입자에 작용하는 알짜힘과 같다.

$$\vec{F}_{\mathrm{net}} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- 알짜 외부력이 없으면 선운동량은 변하지 않는다.

입자계의 선운동량

다수의 입자가 불연속적으로 분포된 계에서 계의 전체 선운동량 또는 **입자계의 선운동량** $\vec{P}$은 다음처럼 정의된다.

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_n = m\vec{v}_1 + \cdots\ m_n\vec{v}_n = M\vec{v}_{\text{com}}$$

- M은 계의 총질량이고 $\vec{v}_{\text{com}}$는 계의 질량중심이 갖는 속도이다.
- $\vec{P}$의 시간변화율은 입자계에 작용하는 알짜 외부력 $\vec{F}_{\text{net}}$과 같다.

$$\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a}_{\text{com}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

- 입자계에 작용하는 알짜 외부력이 없으면 입자계의 선운동량은 변하지 않는다.

9.4 충돌과 충격량

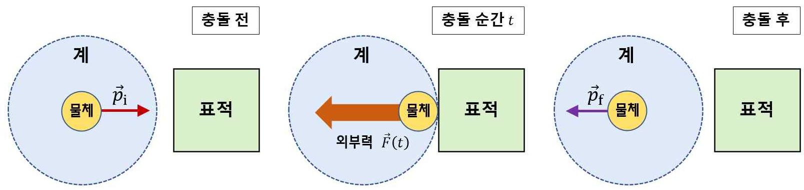
학습목표

☞ 충격량과 선운동량 사이의 관계를 이해한다.

단일충돌

- 물체가 시간 t에 다른 물체와 **충돌**하면 외부력 $F(t)$은 물체에 매우 짧은 시간 dt 동안 매우 큰 크기로 작용하여 물체의 선운동량 $\vec{p}$을 변화시킨다.
- 물체에 작용하는 알짜 외부력은 선운동량의 시간변화율과 같으므로 시간간격 dt 동안 선운동량 변화 $d\vec{p}$는 다음처럼 표현된다.

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$$



- 이 식의 양변을 충돌 직전의 시간 t_{i}부터 충돌 직후의 시간 t_{f}까지 적분하면 충돌로 인한 선운동량의 변화 $\Delta\vec{p}$를 얻을 수 있다.

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\text{f}} - \vec{p}_{\text{i}} = \int_{t_{\text{i}}}^{t_{\text{f}}} d\vec{p} = \int_{t_{\text{i}}}^{t_{\text{f}}} \vec{F}(t)dt$$

- 이때 $\Delta\vec{p}$를 **충격량** $\vec{J}$이라 한다.

$$\vec{J} = \int_{t_{\text{i}}}^{t_{\text{f}}} \vec{F}(t)dt \quad \text{또는} \quad \vec{J} = \vec{p}_{\text{f}} - \vec{p}_{\text{i}}$$

- 이는 성분형태로도 표현될 수 있다.

$$J_x = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} F_x(t)dt,\quad J_y = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} F_y(t)dt,\quad J_z = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} F_z(t)dt$$

또는

$$J_x = \vec{p}_{x,\mathrm{f}} - \vec{p}_{x,\mathrm{i}},\quad J_y = \vec{p}_{y,\mathrm{f}} - \vec{p}_{y,\mathrm{i}},\quad J_z = \vec{p}_{z,\mathrm{f}} - \vec{p}_{z,\mathrm{i}}$$

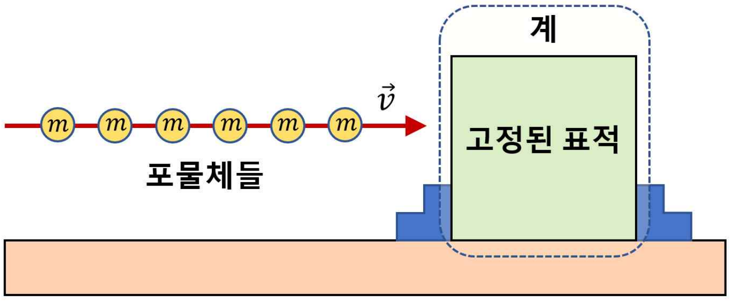
- 많은 경우에 충돌하는 동안 시간 t에 따른 외부력 $\vec{F}(t)$이 어떻게 변하는지 알 수 없지만 **평균 외부력** $\vec{F}_\mathrm{avg}$는 충격량 $\vec{J}$과 충돌시간 $\Delta t (= t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i})$으로부터 쉽게 유추될 수 있다.

$$\vec{F}_\mathrm{avg} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

연속충돌

동일한 충돌을 반복하는 표적에 작용하는 힘에 대해 고려하자.

❖ 동일한 질량 m과 선운동량 $m\vec{v}$를 갖는 포물체가 일정한 시간간격으로 x축을 따라서 위치가 고정된 표적에 충돌한다고 가정한다.
❖ Δt의 시간 동안 충돌하는 포물체의 수를 n이라고 가정한다.
❖ 포물체가 x축에 따라 움직이는 1차원 운동을 한다고 가정한다. 즉, $\vec{r} = x\,\hat{\mathrm{i}}$ & $\vec{v} = v\,\hat{\mathrm{i}}$.
❖ 각 포물체의 초기 선운동량은 mv이고 충돌 후 Δp만큼 변한다고 가정한다.



- 시간간격 Δt 동안 표적에 작용하는 충격량 J는 다음과 같다.

$$J = -n\Delta p$$

- 충돌이 진행되는 동안 표적에 작용하는 평균 외부력 F_avg는 시간간격 Δt과 포물체의 속도 변화 Δv로 나타낼 수 있다.

$$F_\mathrm{avg} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta v$$

- 포물체가 충돌하자마자 정지한다면 속도 변화 Δv는 $-v$이다.

$$\Delta v = -v \quad \Rightarrow \quad \therefore\ F_\mathrm{avg} = \frac{nmv}{\Delta t}$$

- 충돌한 후 포물체가 속력의 변화 없이 곧바로 튕겨 나온다면 물체의 속도 변화 Δv은 $-2v$이다.

$$\Delta v = -2v \quad \Rightarrow \quad \therefore \; F_{\text{avg}} = \frac{2nmv}{\Delta t}$$