국방정보공학과 1학년 2020032406 송민겸

일반물리학2 과제#2

Q.2 식 22-7에 대해 이항정리를 하여 어림식을 구했을 때 나오는 E_{next}를 구하는 문제이다.

$\left(E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3} + E_{next}\right)$

먼저 식 22-7은 $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{2d/z}{(1-(\frac{d}{2z})^2)^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\frac{d}{(1-(\frac{d}{2z})^2)^2}$ 이다.

또한 이항정리에 따르면,

$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots$ 이 성립한다.

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\frac{d}{(1-(\frac{d}{2z})^2)^2} = \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\left(\frac{1}{(1+\frac{d}{2z})^2\times(1-\frac{d}{2z})^2}\right)$$

$$= \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\left\{\frac{z}{2d}\left(\frac{1}{(1-\frac{d}{2z})^2} - \frac{1}{(1+\frac{d}{2z})^2}\right)\right\} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{d}{2z})^2} - \frac{1}{(1+\frac{d}{2z})^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left((1-\frac{d}{2z})^{-2} - (1+\frac{d}{2z})^{-2}\right)$$ 이므로

$n=-2$이고, 각각 $x = -\frac{d}{2z}$, $x = \frac{d}{2z}$인 식을 이항정리를 이용해 전개해 주면 된다.

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1+\frac{-2}{1!}\left(-\frac{d}{2z}\right)+\frac{6}{2!}\left(-\frac{d}{2z}\right)^2+\frac{-24}{3!}\left(-\frac{d}{2z}\right)^3\cdots\right)\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{-2}{1!}\left(\frac{d}{2z}\right)+\frac{6}{2!}\left(\frac{d}{2z}\right)^2+\frac{-24}{3!}\left(\frac{d}{2z}\right)^3\cdots\right)\right]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left\{\left(1+\frac{d}{z}+\frac{6d^2}{4z^2}+\frac{d^3}{2z^3}\right)-\left(1-\frac{d}{z}+\frac{6d^2}{4z^2}-\frac{d^3}{2z^3}\right)\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{2d}{z}+\frac{d^3}{z^3}\right)$$

$$= \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3} + \frac{qd^3}{4\pi\varepsilon_0 z^5}$$ 이므로

$E_{next} = \frac{qd^3}{4\pi\varepsilon_0 z^5}$ 이다.

$$\boxed{\frac{qd^3}{4\pi\varepsilon_0 z^5}}$$

Q3. 문제에 따르면, 대전된 플라스틱 원판은 전하가 균일하게 분포되어 있으며, 반지름이 $R=0.600m$이다.

원판을 수많은 고리들이 모여서 이룬 것이라 생각하고 적분하여 얻은 식 (22-26)은

$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$ 이므로 이 식을 이용해 구해주면 된다.

원판 중심에 생기는 전기장을 $\vec{E_0}$ 이라 하면, 중심에서 $z=0$ 이므로

$|\vec{E_0}|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-0)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 이다.

이 때, 구하고자 하는 전기장의 크기가 $\frac{1}{4}|\vec{E_0}|$이 되는 지점과 원판 중심 사이의 거리를 d라 하면,

$\frac{1}{4}|\vec{E_0}|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\times\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2+(0.600m)^2}}\right)$, $(\because z=d)$

$\frac{1}{4}=1-\frac{d}{\sqrt{d^2+0.36m^2}}$, $(\because |\vec{E_0}|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0})$

$\frac{d}{\sqrt{d^2+0.36m^2}}=\frac{3}{4}$, $\frac{d^2}{d^2+0.36m^2}=\frac{9}{16}$, $16d^2=9(d^2+0.36m^2)$, $7d^2=9\times0.36m^2$

$d=\sqrt{\frac{9\times0.36m^2}{7}}=0.680m$ $(d>0)$

따라서, 원판의 중심축 위 $0.680m$인 곳에서 전기장의 크기의 25%가 된다. $\boxed{0.680m}$

Q11. x축을 기준으로 위에 있는 고리의 전기장을 $\vec{E_a}$, 아래에 있는 고리의 전기장을 $\vec{E_b}$라 하자.

먼저 $\vec{E_a}$를 구해 보면, 이는 y축 대칭이므로 x성분은 모두 상쇄되기 때문에 y성분만 고려하면 된다.

고리에 전하가 균일하게 분포하므로 x축으로 부터 각도 θ에 위치한 미소길이 ds를 고려하면,

고리의 선전하 밀도를 λ라 할 때 미소전하 $dq=\lambda ds$ 이다. 이 때, 미소전하는 거리 r인 점 P에

미소전기장 $d\vec{E}$를 만들고, 그 크기는 $dE=\frac{kdq}{r^2}=k\frac{\lambda ds}{r^2}$ 이다. 여기서 ds가 만든 dE_y는

$dE_y=dE\sin\theta=k\frac{\lambda}{r^2}\sin\theta\, ds$ 이고 $ds=rd\theta$를 이용하여 한 개의 변수를 제거해준다.

따라서 $E_a=\int dE_y=\int_0^{\pi}k\frac{\lambda}{r^2}\sin\theta\cdot rd\theta=\frac{k\lambda}{r}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta=\frac{k\lambda}{r}[-\cos\theta]_0^{\pi}=\frac{k\lambda}{r}[1-(-1)]=\frac{2k\lambda}{r}$

이다. 이 때 $d\vec{E_y}=-dE\sin\theta\uparrow$ 이므로 방향은 y축 아래 방향 $(-90°)$ 이다.

다음으로 $\vec{E_b}$를 구해 보면 $\vec{E_a}$와 마찬가지로 x성분은 모두 상쇄되어 y성분만 고려해주면 된다.

이 때, 위에 있는 고리를 $180°$ 회전하면 크기는 같고 방향은 반대인 전기장인 $-\vec{E_a}$가 형성되는데,

아래고리는 위에 있는 고리와 반대 전하를 띠므로 $\vec{E_a}=\vec{E_b}$, 즉 크기와 방향이 같은 전기장을 형성한다.

따라서, 점 P에 만들어지는 전기장 $\vec{E}$의 크기는 $E=E_a+E_b=2\times E_a=\frac{4k\lambda}{r}$ 이다.

여기서 $\lambda=\frac{q}{l}$, $l=r\pi$, $r=R=4.25cm\times\frac{1m}{100cm}=0.0425m$, $k=8.99\times10^9N\cdot m^2/C^2$, $q=15.0\times10^{-12}C$ 이므로

$E=\frac{4k(\frac{q}{l})}{R}=\frac{4k\frac{q}{R\pi}}{R}=\frac{4kq}{R^2\pi}=\frac{4\times(8.99\times10^9N\cdot m^2/C^2)\times(15.0\times10^{-12}C)}{(0.0425m)^2\pi}=95056.8\times10^{-3}N/C=95.1N/C$ 이다.

따라서 원의 중심 P에 만들어진 전기장 $\vec{E}$의 크기는 (a) $95.1N/C$ 이고, 방향은 (b) y축 아래 방향 $(-90°)$ 이다.

(a) $95.1N/C$
(b) y축 아래 방향 $(-90°)$