# 제4장 연립상미분방정식. 상평면 및 정성법

# 행렬과 벡터

- **연립미분방정식**(Systems of Differential Equations)

  : 두 개 이상의 미지함수를 갖는 두 개 이상의 상미분방정식

예)

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{aligned}$$

- 미분

  : 요소(또는 성분)가 변수인 행렬(또는 벡터)의 도함수는 각각의 요소를 미분함.

예)

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}$$

예)

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

# 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

- **행렬(Matrix) :** 수(혹은 함수)를 직사각형 모양으로 괄호 안에 배열한 것
  - **원소**(Entry) 또는 **요소**(Element): 행렬에 배열되는 수(혹은 함수)
  - **행**(Row) : 수평선
  - **열**(Column) : 수직선

- **벡터**(Vector) : 한 개의 행이나 열로 구성된 행렬
  - **행벡터**(Row Vector) : 하나의 행으로 구성
  - **열벡터**(Column Vector) : 하나의 열로 구성

# 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

- 일반적인 표기법과 개념

$$\mathbf{A}=[a_{jk}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : m\times n \text{행렬}$$

- 행렬은 굵은 대문자로 나타낸다
- 첫 번째 아래 첨자 $j$ 는 행(Row)
- 두 번째 아래 첨자 $k$ 는 열(Column)
- $a_{jk}$ : $j$ 행, $k$ 열의 원소(Element)

- **정방행렬**(Square Matrix)
- $m=n$ 이라면 $\mathbf{A}$는 정사각형 모양이다
- 정방행렬에서 원소 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 을 포함하는 대각선을 행렬 $\mathbf{A}$ 의 주대각선 (Principal Diagonal) 이라고 한다

- **벡터**(Vectors) : 하나의 행(열)으로 이루어진 $1\times n$ $(m\times 1)$ 행렬

■ Ex. $n$ 차원 행벡터(Row Vector) : $\mathbf{a}=[a_1, \quad a_2, \quad \cdots \quad a_n]$

$m$ 차원 열벡터(Column Vector) : $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

# 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

- **행렬의 상등**(Equality of Matrices)

  : 행렬의 크기가 같으며 대응되는 원소들이 모두 같은 경우

- **행렬의 가법**(Matrix Addition)

  : 같은 크기의 행렬에 대해서만 정의되고, 그 합은 대응하는 원소를 각각 합하여 얻어진다.

- **스칼라곱**(Scalar Multiplication)

  : 행렬의 각 원소에 상수를 곱하여 얻어진다.

- **행렬의 가법과 스칼라곱에 대한 연산법칙**

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$$

$$c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

# 행렬의 곱

- **행렬과 행렬의 곱(Matrix Multiplication)**

: $m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$와 $r \times p$ 행렬 $\mathbf{B} = [b_{jk}]$의 곱 C=AB가 정의되기 위해서는 A의 열수 $n$ 과 B의 열수 $r$ 이 서로 같아야 정의되며 C는 $c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$ 를 원소로 하는 $m \times p$ 행렬로 정의된다. (이때, $j$=1, 2, …, $m$ ; $k$=1, 2, …, $p$)

즉, C=AB 가 정의될 필요충분 조건은 $r = n$

$$m=4\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}^{n=3} \overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}}^{p=2} = \overbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}}^{p=2}\right\} m=4$$

| AB 는 정의되지만 BA는 정의되지 않을 수 있다 |
|---|

- **행렬의 곱은 비가환적(Not Commutative)이다.** $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

- **행렬의 곱에 대한 연산법칙**

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad (\text{결 합 법 칙}(\text{Associative Low}))$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \ (\text{분 배 법 칙}(\text{Distrivutive Low}))$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB} \ (\text{분 배 법 칙}(\text{Distrivutive Low}))$$

- **행렬의 곱의 간결한 표현:** $c_{jk} = \mathbf{a}_j \mathbf{b}_k = [a_{j1}\ a_{j2} \cdots a_{jn}] \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$

# 행렬의 곱

- **행렬과 벡터의 전치**(Transposition of Matrices)

  : 열과 행이 서로 바뀌어 얻어진 행렬.

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❖ 정방행렬에 대한 전치는 주대각선에 관하여 대칭으로 위치된 원소들을 서로 바꾼 것이다.

- **열벡터와 행벡터의 전치 관계**

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ 이면 } \quad \mathbf{v}^{\mathrm{T}} = [v_1 \quad v_2]$$

- **역행렬**

  ***n*×*n* 행렬 A에 대하여 AB=BA=I 를 만족하는 *n*×*n* 행렬 B (=A$^{-1}$)**

  **역행렬을 갖지 않는 행렬: 특이 행렬**

- **벡터의 일차 독립과 종속성**

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0} \quad (c: \text{스칼라}, \ \mathbf{a}: \text{벡터})$$

- **일차 독립**(Linearly Independent) : 모든 $c_j = 0$일 때만 위 식이 만족
- **일차 종속**(Linearly Dependent) : 어떤 $c_j \neq 0$ 이어도 위 식이 만족

# 행렬과 벡터

- **고유값(Eigenvalue), 고유벡터(Eigenvector)**

$\mathbf{A} = \lfloor a_{jk} \rfloor$을 주어진 $n \times n$ 행렬이라 하고, 어떤 벡터 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$에 대하여 식 $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$가 성립하게 하는 스칼라 $\lambda$를 의 고유값(**Eigenvalue**)이라 하며, 이 때의 벡터 $\mathbf{x}$를 $\lambda$에 대응하는 고유벡터(**Eigenvector**)라 함.

❖ 임의의 $\lambda$에 대하여 영벡터 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 방정식 $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$의 해이다.

❖ $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow$ n개의 미지수 $x_1, \cdots, x_n$(벡터 $\mathbf{x}$의 성분)에 관한 대수적인 1차 연립방정식

❖ 방정식 $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$이 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$인 해를 갖기 위해서는 계수행렬 $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$의 역행렬이 존재하지 않는다. $\quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

# 행렬과 벡터

예) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 이면

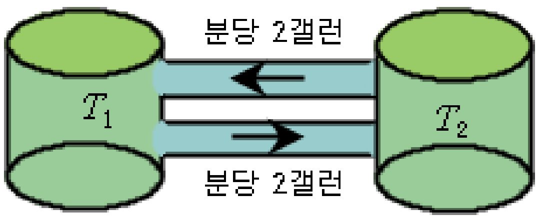
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 특성방정식(Characteristic Equation) : $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$
  - 행렬 $\mathbf{A}$ 의 고유값 : 특성방정식의 해
  - $\mathbf{x}$가 행렬 $\mathbf{A}$의 고유벡터이면 임의의 스칼라 $k \neq 0$에 대하여 $k\mathbf{x}$ 도 고유벡터임

# 연립상미분방정식 모델

**예제1)** 2개의 탱크에 관련된 혼합문제(두 개의 1계 미분방정식)

- 탱크 $T_1$ : 순수한 물 100갤론
- 탱크 $T_2$ : 순수한 물 100갤론 + 150파운드의 비료
- 액체는 분당 2갤론의 일정한 속도로 두 탱크를 순환하여 골고루 섞여 균질하게 된다.




$y_1$ : 탱크 $T_1$의 비료의 양, $y_2$ : 탱크 $T_2$ 의 비료의 양

탱크 $T_1$ 의 비료의 양이 적어도 탱크 $T_2$ 에 남아 있는 비료의 양의 반이 되기 위해서는 얼마 동안 액체를 순환시켜야 하는가?

**Step 1 모델설정**

$$y_1' = \text{분당 유입량} - \text{분당 유출량} = \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1 \qquad (\text{탱크 } T_1) \quad \Rightarrow \quad y_1' = -0.02y_1 + 0.02y_2$$

$$y_2' = \text{분당 유입량} - \text{분당 유출량} = \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2 \qquad (\text{탱크 } T_2) \quad \Rightarrow \quad y_2' = 0.02y_1 - 0.02y_2$$

$$\therefore \ \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

# 연립상미분방정식 모델

**Step 2** **일반해**

**Idea** : $t$ 에 대한 지수함수로 시도

$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \Rightarrow$ 행렬 **A** 의 고유값과 고유벡터 계산

특성방정식 : $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -0.02 - \lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.02 - \lambda)^2 - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0$

$\Rightarrow$고유값 : $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -0.04$ 고유벡터 : $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

**중첩의 원리 적용**

$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$ ($c_1$ 과 $c_1$ 는 임의의 상수)

**Step 3** **초기조건 이용**

초기조건 : $y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 150$

$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 75, \quad c_2 = -75 \Rightarrow \mathbf{y} = 75 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 75 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$

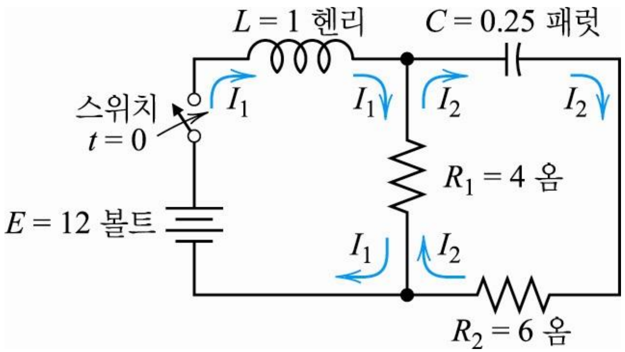
**Step 4** **답**

탱크 $T_1$ 이 50파운드의 비료를 포함하면, 탱크 $T_1$이 포함한 비료의 양이 탱크 $T_2$ 가 포함한 비료 양의 반

$y_1 = 75 - 75e^{-0.04t} = 50 \quad \Rightarrow \quad e^{-0.04t} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad t = \ln 3 / 0.04 = 27.5$

# 연립상미분방정식 모델

**예제 2)** 전기회로망




주어진 전기회로망에서 전류 $I_1(t)$ 와 $I_2(t)$ 를 구하라. 스위치가 닫힌 순간인 $t = 0$ 에 전류와 전하가 모두 0이라 가정한다.

**Step 1** **모델설정 :** Kirchhoff의 전압법칙 적용

왼쪽 루프 : $I_1' = -4I_1 + 4I_2 + 12$

오른쪽 루프 : $6I_2 + 4(I_2 - I_1) + 4\int I_2 dt = 0 \;\Rightarrow\; I_2' - 0.4I_1' + 0.4I_2 = 0 \;\Rightarrow\; I_2' = -1.6I_1 + 1.2I_2 + 4.8$

$$\therefore \;\; \mathbf{J}' = A\mathbf{J} + \mathbf{g}, \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4.0 & 4.0 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 12.0 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

# 연립상미분방정식 모델

**Step 2 일반해**

제차 연립방정식 $\mathbf{J}' = A\mathbf{J}$ 에 $\mathbf{J} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ 를 대입하면 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 의 고유값과 고유벡터 계산

고유값 $\lambda_1 = -2$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; 고유값 $\lambda_1 = -0.8$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

제차 연립미분방정식의 일반해 : $\mathbf{J}_h = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t}$

비제차 연립미분방정식의 특수해 구하기

$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 라 하면, $\mathbf{J}_p' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이므로 $A\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -4.0a_1 + 4.0a_2 + 12.0 = 0 \\ -1.6a_1 + 1.2a_2 + 4.8 = 0 \end{matrix} \Rightarrow a_1 = 3, \quad a_2 = 0 \Rightarrow \therefore \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

일반해 : $\mathbf{J} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I_1 = 2c_1e^{-2t} + c_2e^{-0.8t} + 3 \\ I_2 = c_1e^{-2t} + 0.8c_2e^{-0.8t} \end{matrix}$

초기조건 적용

$$\begin{matrix} I_1(0) = 2c_1 + c_2 + 3 = 0 \\ I_2(0) = c_1 + 0.8c_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow c_1 = -4, \quad c_2 = 5 \Rightarrow \therefore \begin{matrix} I_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0.8t} + 3 \\ I_2 = -4e^{-2t} + 4e^{-0.8t} \end{matrix}$$

# 연립상미분방정식 모델

## n계 미분방정식의 1계 연립상미분방정식으로의 변환

- n계 상미분방정식 : $y^{(n)} = F\left(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$

- 1계 연립상미분방정식으로의 변환

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F\left(t, y_1, y_2, \cdots, y_n\right) \end{aligned}$$

**예제 3)** 용수철에 매달린 물체

앞에서 다룬 용수철에 달린 물체의 자유진동을 모델화하는 문제에 변환방법을 적용

$$my'' + cy' + ky = 0 \xrightarrow{y_1 = y,\ y_2 = y'} \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m} y_1 - \frac{c}{m} y_2 \end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow$$

2.4 절의 특성방정식과 일치

# 연립상미분방정식에 대한 기본 이론

- **연립상미분방정식**

$$y_1' = f_1(t, y_1, \cdots, y_n)$$
$$y_2' = f_2(t, y_1, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = f_n(t, y_1, \cdots, y_n)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

- **벡터해**(Solution Vector)

: 어떤 구간 $a < t < b$ 에서 연립상미분방정식을 만족하는 미분 가능한 n개의 함수들

$y_1 = h_1(t), \quad \cdots, \quad y_n = h_n(t)$ 의 집합.

- **초기조건**

$$y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \cdots, \quad y_n(t_0) = K_n \longrightarrow \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}$$

# 연립상미분방정식에 대한 기본 이론

## 존재성과 유일성 정리

연립상미분방정식의 $f_1, \cdots, f_n$ 이 점 $(t_0, K_1, \cdots, K_n)$ 을 포함하는 공간 내의 어떤 영역 $R$ 에서 연속인 함수이고, 이 영역에서 연속인 편도함수 $\partial f_1 / \partial y_1, \cdots, \partial f_1 / \partial y_n, \cdots, \partial f_\mathbf{n} / \partial y_n$ 를 갖는다고 하자. 그러면 연립상미분방정식은 어떤 구간 $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ 에서 초기조건을 만족하는 해를 가지며 이 해는 유일하다.

# 연립상미분방정식에 대한 기본 이론

- **선형연립상미분방정식** (Linear System)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\quad \mathbf{g}=\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1+\cdots+a_{1n}(t)y_n+g_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1+\cdots+a_{nn}(t)y_n+g_n(t) \end{aligned} \longrightarrow \mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{g}$$

- **제차 :** $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$
- **비제차 :** $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{g},\quad \mathbf{g}\neq\mathbf{0}$
- **선형인 경우의 존재성과 유일성 정리**

선형연립미분방정식의 $a_{jk}$ 와 $g_j$ 가 점 $t=t_0$를 포함하는 열린 구간 $\alpha<t<\beta$ 내에서 $t$ 의 연속함수라 하자. 그러면 선형연립미분방정식은 이 구간에서 초기조건을 만족하는 해를 가지며 이 해는 유일하다.

- **중첩의 원리 (선형성 원리)**

$\mathbf{y}^{(1)}$과 $\mathbf{y}^{(2)}$ 가 어떤 주어진 구간에서 제차선형연립방정식의 해이면, 그들의 일차 결합 $\mathbf{y}=c_1\mathbf{y}^{(1)}+c_2\mathbf{y}^{(2)}$ 또한 제차선형연립방정식의 해이다.

# 연립상미분방정식에 대한 기본 이론

- **기저**(Basic) **또는 기본계**(Fundamental System)

  : 어떤 구간 $J$ 에서 일차 독립인 n 개의 해 $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$

- **일반해**(General Solution)

  : 기저들의 일차결합 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$ $\left(c_1, \cdots, c_n\right.$ 은 임의의 상수 $\left.\right)$

• 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 에서 모든 $a_{jk}(t)$ 가 구간 $J$ 에서 연속이면, 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 는 에서 해의 기저를 갖는다는 사실을 보일 수 있음.

• 이 경우에 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 는 $J$ 에서 일반해를 가지고, 일반해는 모든 해를 포함.

- **기본행렬**(Fundamental Matrix) : n 개의 해 $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$ 를 열로 가지는 $n \times n$ 행렬

- Wronskian : 기본행렬의 행렬식

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}^{(1)} \cdots \mathbf{y}^{(n)}]$$

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

- 상수계수를 갖는 선형연립방정식의 해법

상수계수를 갖는 선형연립방정식 : $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},\ \mathbf{A} = \lfloor a_{jk} \rfloor,\ a_{jk}$ 는 상수

Idea $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ 으로 시도

$\Rightarrow\ \mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ (**고유값 문제**)로 변환

- **일반해**

연립미분방정식의 상수행렬이 n개의 일차 독립인 고유벡터를 갖는다면 이에 대응하는 식

$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t},\ \cdots,\ \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}$ 의 해 $\mathbf{y}^{(1)},\ \cdots,\ \mathbf{y}^{(n)}$ 는 연립방정식의 해의 기저를 형성하고, 이에 대응되는 일반해는 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}$ 이다.

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

- 상평면에서의 해의 그래프를 그리는 방법

$$\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}\left(\Leftrightarrow \begin{array}{l} y_1'=a_{11}y_1+a_{12}y_2 \\ y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2 \end{array}\right) \text{ 의 일반해 } \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

- 성분 $y_1(t)$와 $y_2(t)$ 를 $t-$축 위에 두 개의 곡선으로 나타냄.
- 매개변수 $t$ 를 사용한 매개변수표현법(또는, 매개변수방정식)

  : $y_1y_2-$평면에 하나의 곡선으로 나타낼 수 있음.

- 용어정리

- **궤적**(Trajectory, 때로는 **궤도**(Orbit), **경로**(Path) : $y_1y_2-$평면의 곡선
- **상평면**(Phase Plane) : $y_1y_2-$평면
- **상투영**(Phase Portrait) : 상평면을 방정식 $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$ 의 궤적들로 채워서 얻는다

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**예제 3)** 상평면에서의 궤적(상투영)

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

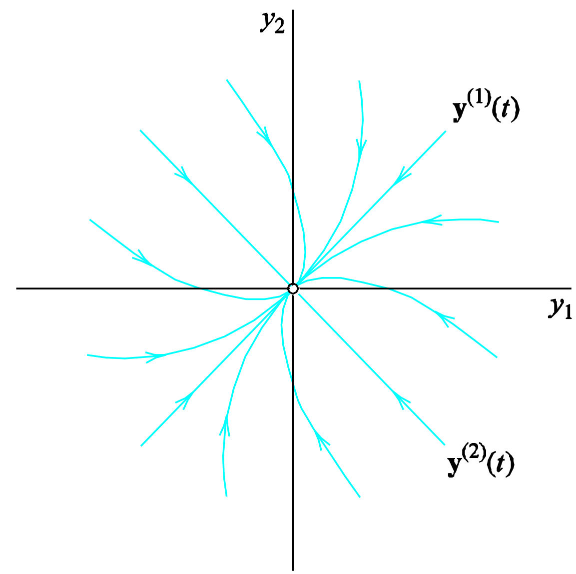
특성방정식

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

고유값 $\lambda_1 = -2$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

고유값 $\lambda_2 = -4$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

일반해 : $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$




- 두 개의 직선궤적은 각각 $c_1 = 0$ 과 $c_2 = 0$ 에 대응하는 것
- 나머지 궤적들은 다르게 선택된 $c_1$, $c_2$ 의 값에 대응하는 것
- 상투영은 일반적으로 해 전체를 정성적으로 파악하는데 유용 (해를 구하기 어렵거나 불가능한 경우)

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

- 연립미분방정식의 **임계점(Critical Point)** : $dy_2 / dy_1$ 이 정의되지 않는 점

예) $\dfrac{dy_2}{dy_1} = \dfrac{dy_2 / dt}{dy_1 / dt} = \dfrac{y_2'}{y_1'} = \dfrac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$

- 점 $P = P_0 : (0,0)$을 제외한 임의의 점 $P : (y_1, y_2)$을 지나는 궤적은 이 점에서 유일한 접선 방향 $dy_2 / dy_1$ 을 갖게 됨.
- 원점 $P_0$ 에서 $dy_2 / dy_1$은 $0/0$이 되어 정의되지 않음.

- 임계점의 다섯 가지 유형

: 임계점은 근방에서 궤적의 모양에 따라 5가지 유형으로 구분.

- **비고유마디점(Improper Node)**
- **고유마디점(Proper Node)**
- **안장점(Saddle Point)**
- **중심점(Center)**
- **나선점(Spiral Point)**

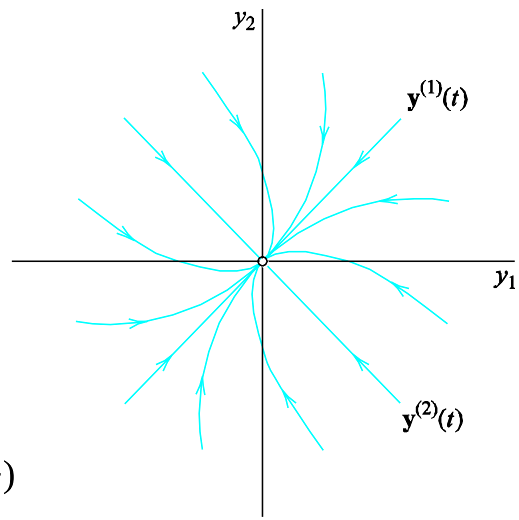
# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**예제 1)** 비고유마디점

: 두 개의 궤적을 제외한 모든 궤적이 주어진 점에서 같은 접선방향의 극한을 갖는 경우.

- 예외적인 두 개의 궤적도 주어진 점에서 접선방향의 극한을 갖게 됨
- 극한값은 앞의 극한값과 다르다.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{y}$$




- 공통인 접선방향의 극한은 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 임.

( $t$ 가 증가할 때 $e^{-4t}$ 가 $e^{-2t}$ 보다 훨씬 더 빨리 0에 접근)

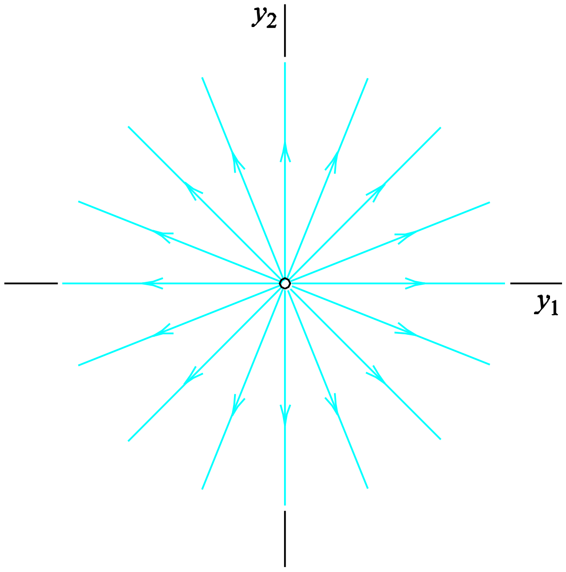
- 예외적인 궤적의 접선방향극한은 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 임.

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**예제 2)** 고유마디점

: 모든 궤적이 명확한 접선방향의 극한을 가지고, 또한 임의의 상수가 접선방향의 극한인 궤적이 존재하는 경우.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \left( \text{즉} \quad \begin{matrix} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \end{matrix} \right)$$




**일반해** : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_1 = c_1 e^t \\ y_2 = c_2 e^t \end{matrix}$

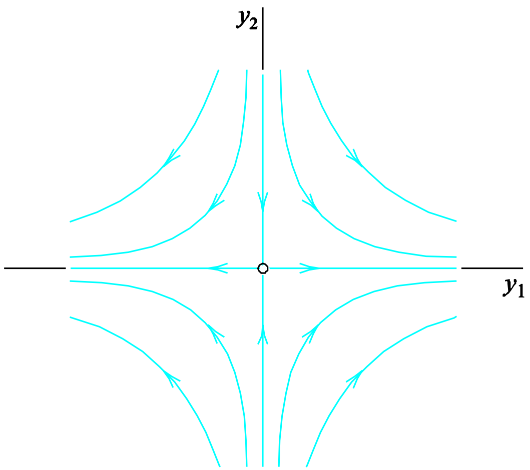
$$\Rightarrow \quad c_1 y_2 = c_2 y_1$$

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**예제** 3) 안장점

: 두 개의 들어오는 궤적과 두 개의 나아가는 궤적이 존재하고, 나머지 궤적은 주어진 점을 지나지 않고 우회하는 경우.

$$\mathbf{y}'=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{y},\left(\text{즉}\qquad \begin{matrix} y_1'=y_1 \\ y_2'=-y_2\end{matrix}\right)$$




**일반해** :

$$\mathbf{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^{t}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{-t}\quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} y_1=c_1e^{t} \\ y_2=c_2e^{-t}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow\qquad y_1y_2=\text{상수}$$

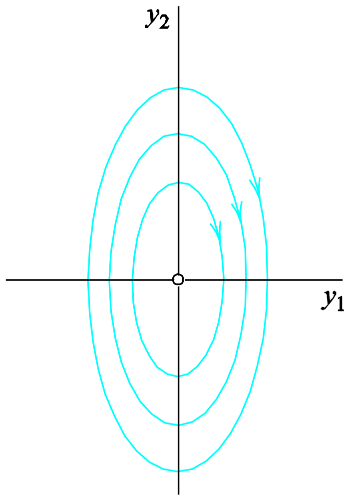
- 두 좌표축과 쌍곡선족(族)이다

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**예제 4)** 중심점

: 무수히 많은 폐곡선으로 이루어진 궤적으로 둘러싸인 임계점을 말함.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \left( \text{즉} \quad \begin{matrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 \end{matrix} \right)$$




특성방정식 : $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i$

고유값 $\lambda_1 = 2i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ ;

고유값 $\lambda_1 = -2i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$

**일반해 :** $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{-2it} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_1 = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it} \\ y_2 = 2ic_1 e^{2it} - 2ic_2 e^{-2it} \end{matrix}$

궤적그리기 $y_1' = y_2, \ y_2' = -4y_1 \quad \Rightarrow \quad 4y_1 y_1' = -y_2 y_2' \quad \Rightarrow \quad 2{y_1}^2 + \frac{1}{2}{y_2}^2 = 상수$

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**예제** 5) 나선점

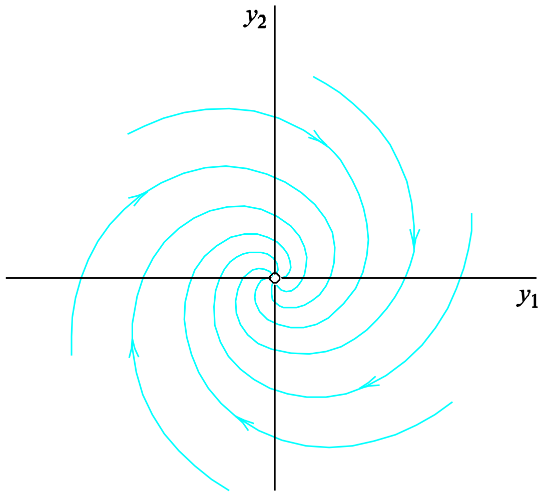
: $t \to \infty$ 를 취할 때, 임계점 근방에서 나선형의 궤적이 임계점으로 향하여 접근하는 (혹은 임계점로부터 벗어나 멀어지는) 경우.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \left( \text{즉} \quad \begin{array}{l} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{array} \right)$$

특성방정식 : $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm i$

고유값 $\lambda_1 = -1 + i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$;

고유값 $\lambda_1 = -1 - i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$




**일반해** : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

## ● 고유벡터가 기저를 형성하지 않는 경우. 퇴화마디점(Degenerate Node)

- 대칭행렬( $a_{kj}=a_{jk}$ )이거나 반대칭행렬( $a_{kj}=-a_{jk},\ a_{jj}=0$ )이면 고유벡터들로 이루어진 기저가 존재한다.
- 행렬 $n\times n$ 가 중복고유값 $\lambda$ (즉, $\mathbf{A}$ 가 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$ 의 중복근)를 가지고,

$\lambda$ 에 대응하는 고유벡터(상수배는 같은 것으로 취급)가 오직 하나 뿐이라고 가정

$\Rightarrow$ 우선 하나의 해 $\mathbf{y}^{(1)}=\mathbf{x}e^{\lambda t}$ 를 얻음.

$\mathbf{y}^{(1)}$ 과 일차독립인 두 번째 해 : $\mathbf{y}^{(2)}=\mathbf{x}te^{\lambda t}+\mathbf{u}e^{\lambda t}$

$$\left(\mathbf{y}^{(2)}\right)'=\mathbf{x}e^{\lambda t}+\lambda\mathbf{x}te^{\lambda t}+\lambda\mathbf{u}e^{\lambda t}=\mathbf{A}\mathbf{x}te^{\lambda t}+\mathbf{A}\mathbf{u}e^{\lambda t}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{A}\mathbf{u}\quad\Rightarrow\quad(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{x}$$

.

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**예제 6)** 퇴화마디점

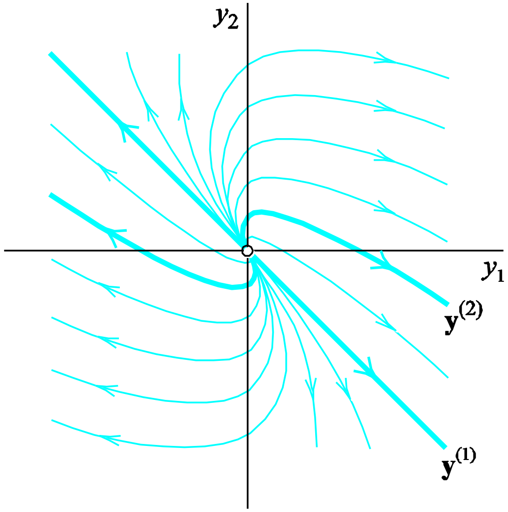
$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

- **해 구하기** $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 3, x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$

특성방정식 :

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**일반해** : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$




- **그래프 관찰**
  - $c_1 \mathbf{y}^{(1)}$ 의 그래프는 굵게 표시된 직선
  - 제4사분면의 반직선은 $c_1 > 0$ 인 경우
  - 제2사분면의 반직선은 $c_1 < 0$ 인 경우
  - 굵은 곡선의 오른쪽은 $\mathbf{y}^{(2)}$ 를 왼쪽부분은 $-\mathbf{y}^{(2)}$

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**예제 1)** 다음 상미분 방정식의 해를 구하라.

(1) (연립방정식을 이용하여)

$$y'' - 4y = 0$$

(2)
$$y_1' = 3y_2$$
$$y_2' = 12y_1$$

(3)
$$y_1' = 5y_2$$
$$y_2' = 5y_1$$

(4)
$$y_1' = y_1 + y_2$$
$$y_2' = 4y_1 + y_2$$
$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 6$$

# 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법

**연습 1)** 다음 상미분 방정식의 해를 구하라.

(1) (연립방정식을 이용하여)

$$y'' + 2y' - 24y = 0$$

(2) $$y_1' = 4y_2$$
$$y_2' = -4y_1$$

(3) $$y_1' = 3y_1 + 2y_2$$
$$y_2' = 2y_1 + 3y_2$$
$$y_1(0) = 7, \quad y_2(0) = 7$$

# 임계점에 대한 판별기준. 안정성

- 임계점 유형의 판별기준(Criteria for Types of Critical Points)

행렬 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 의 고유값 $\lambda_1,\ \lambda_2$

특성방정식 : $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det \mathbf{A} = 0$

$p = a_{11} + a_{22}$(고유값의 합), $q = \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$(고유값의 곱), $\Delta = p^2 - 4q$(판별식)

| 임계점의 종류 | $p = \lambda_1 + \lambda_2$ | $q = \lambda_1 \lambda_2$ | $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ | $\lambda_1,\ \lambda_2$ 에 대한 설명 |
|---|---|---|---|---|
| (a) 마디점 | | $q > 0$ | $\Delta \geq 0$ | 실수, 같은 부호 |
| (b) 안장점 | | $q < 0$ | | 실수, 반대 부호 |
| (c) 중심 | $p = 0$ | $q > 0$ | | 순허수 |
| (d) 나선점 | $p \neq 0$ | | $\Delta < 0$ | 복소수<br>(순허수가 아님) |

# 임계점에 대한 판별기준. 안정성

- **안정성(Stability)**
  - 임계점의 또 다른 분류방식은 안정성에 의한 것
  - 안정성은 물리학에서 처음 생각한 개념으로, 공학이나 응용 등 여러 분야에서 기본적인 개념
  - 안정성은 어떤 순간에 물리적 계에 가해진 작은 변화(작은 충격)가 이후의 모든 시간 $t$ 에서 계의 움직임에 단지 작은 영향을 미치는 것을 의미한다.

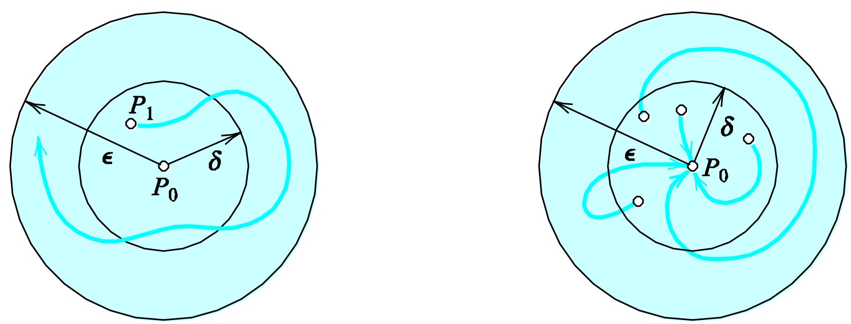
- **안정적 임계점**(Stable Critical point)

: 어떤 순간 $t = t_0$ 에서 임계점에 아주 가깝게 접근한 모든 궤적이 이후의 시간에서도 임계점에 아주 가까이 접근한 상태로 남아 있는 경우.

- **불안정적 임계점**(Unstable Critical point) : 안정적이 아닌 임계점
- **안정하고 끌어당기는 임계점**(Stable and Attractive Critical point)

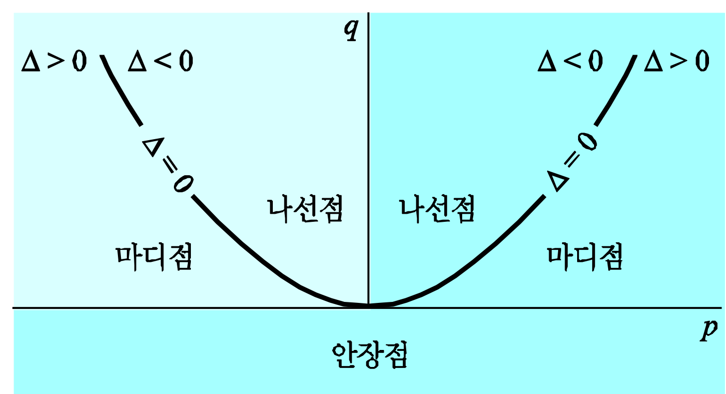
: 안정적 임계점이고 임계점 근처 원판 내부의 한 점을 지나는 모든 궤적이 $t \to \infty$ 를 취할 때 임계점에 가까이 접근하는 경우

# 임계점에 대한 판별기준. 안정성




### ● 임계점에 대한 안정성 판별기준

- 안정적 흡인 임계점 : $p<0,\ q>0$
- 안정적 임계점 : $p\leq 0,\ q>0$
- 불안정적 임계점 : $p>0$ 또는 $q<0$



# 임계점에 대한 판별기준. 안정성

**예제 2)** 다음 상미분 방정식의 임계점의 유형과 안정성을 결정하라.

(1)
$$y_1' = 2y_2$$
$$y_2' = 8y_1$$

(2)
$$y_1' = 4y_1$$
$$y_2' = 3y_2$$

# 임계점에 대한 판별기준. 안정성

**연습 2)** 다음 상미분 방정식의 임계점의 유형과 안정성을 결정하라.

(1) $$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -5y_1 - 2y_2$$

(2) $$y_1' = -4y_1 + y_2$$
$$y_2' = y_1 - 4y_2$$

# 비선형연립방정식에 대한 정성법

- **정성법**(Qualitative Method)
  - 방정식의 해를 실제로 구하지 않으면서 해에 대한 정석적인 정보를 얻는 방법
  - 연립방정식의 해를 해석적으로 구하기 어렵거나 불가능한 경우에 매우 유용한 방법
  - 상평면법을 선형연립방정식으로부터 비선형연립방정식으로 확장

비선형연립방정식

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \xrightarrow{\text{비선형연립방정식의 선형화}} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

따라서

$$y_1' = f_1(y_1, y_2)$$
$$y_2' = f_2(y_1, y_2)$$

따라서

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h_1(y_1, y_2)$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + h_2(y_1, y_2)$$

# 비선형연립방정식에 대한 정성법

- **선형화**

비선형 연립방정식의 $f_1$과 $f_2$가 임계점 $P_0$ 근방에서 연속이고 또한 연속인 도함수를 가지며, $\det \mathbf{A} \neq 0$이면, 비선형연립방정식의 임계점에 대한 유형 및 안정성은 선형화를 통해 얻어진 선형연립방정식

$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, 따라서 $$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

의 유형 및 안정성과 같다.

# 비제차 선형연립방정식

- **비제차 선형연립미분방정식**(Nonhomogeneous of Linear Systems) : $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$

  $\mathbf{g}(t)$ 와 행렬 $\mathbf{A}(t)$의 모든 성분은 $t-$축의 어떤 구간 $J$ 에서 연속이라고 가정

  일반해 : $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)}$

  - $\mathbf{y}^{(h)}$: 제차방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 의 일반해
  - $\mathbf{y}^{(p)}$: 비제차방정식의 특수해(임의의 상수를 포함하지 않는해)

- 특수해 $\mathbf{y}^{(p)}$를 구하는 방법

  - **미정계수법**(Method of Undetermined Coefficients)
  - **매개변수변환법**(Method of the Variation of Parameter)

# 비제차 선형연립방정식

- **미정계수법** : 벡터 $\mathbf{g}$ 의 성분이 $t$ 의 거듭제곱, 지수함수, 사인함수와 코사인함수 등으로 이루어져 있을 때 적합.

**예제 1)** 비제차 선형연립방정식의 일반해를 구하라.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

제차연립방정식의 일반해 : $\mathbf{y}^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$

미정계수법에 의하여 비제차연립방정식의 특수해 구하기

$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{u}te^{-2t} + \mathbf{v}e^{-2t}$ 라 하면 $\left(\mathbf{y}^{(p)}\right)' = \mathbf{u}e^{-2t} - 2\mathbf{u}te^{-2t} - 2\mathbf{v}e^{-2t} = \mathbf{A}\mathbf{u}te^{-2t} + \mathbf{A}\mathbf{v}e^{-2t} + \mathbf{g}$

$te^{-2t}$ 항의 계수 : $-2\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(a$ : 임의의 상수$)$

$e^{-2t}$항의 계수 : $\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = -2,\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k \\ k+4 \end{bmatrix}$ $(k = 0$으로 선택 $)$

일반해 : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

# 비제차 선형연립방정식

- **매개변수변환법**

: $t-$ 축의 어떤 구간 $J$ 상에서 제차연립미분방정식의 일반해

$\mathbf{y}^{(h)} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{y}^{(n)}$ 를 이미 알고 있을 때, 이 일반해를 이용하여 방정식의 한 특수해를

찾아내는 방법

제차연립방정식의 일반해 : $\mathbf{y}^{(h)} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c} \quad (\because\ \mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y})$

비제차연립방정식의 특수해를 $\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{u}(t)$ 라 하자.

$$\left(\mathbf{y}^{(p)}\right)' = \mathbf{Y}'\mathbf{u} + \mathbf{Y}\mathbf{u}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}'\mathbf{u} + \mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{g}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tilde{t})\mathbf{g}(\tilde{t})\,d\tilde{t}$$

# 비제차 선형연립방정식

**예제 2)** 예제 1을 매개변수변환법을 이용하여 풀어라.

$$\mathbf{y}^{(h)} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}$$

$$\mathbf{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-6t}} \begin{bmatrix} -e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ -8e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \int_0^t \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2\tilde{t}} \end{bmatrix} d\tilde{t} = \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{Y}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^{-2t} - 2e^{-2t} + 2e^{-4t} \\ -2te^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t - 2 \\ -2t + 2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

$$\therefore\ y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

# 비제차 선형연립방정식

**예제 3)** 다음 비제차 상미분방정식의 일반해를 구하여라.

(1) $$y_1' = y_2 + t$$
$$y_2' = y_1 - 3t$$

(2) $$y_1' = 4y_2 + 9t$$
$$y_2' = -4y_1 + 5$$

# 비제차 선형연립방정식

**연습 3)** 다음 비제차 상미분방정식의 일반해를 구하여라.

(1) $$y_1' = 2y_1 + 2y_2 + 12$$
$$y_2' = 5y_1 - y_2 - 30$$

(2) $$y_1' = 2y_1 + y_2 + 5\cos t$$
$$y_2' = 3y_1 - y_2 - 5\sin t$$

# Homework Ch.4

**연습문제**