LECTURE 12

병진운동에서 물체에 작용하는 힘에 대한 Newton의 운동법칙이 존재하듯이 회전운동에서도 물체에 작용하는 회전력에 대한 운동법칙이 존재한다. 이 단원에서는 회전운동에서의 회전력을 정의하고 회전운동에 대한 운동법칙을 알아본다.

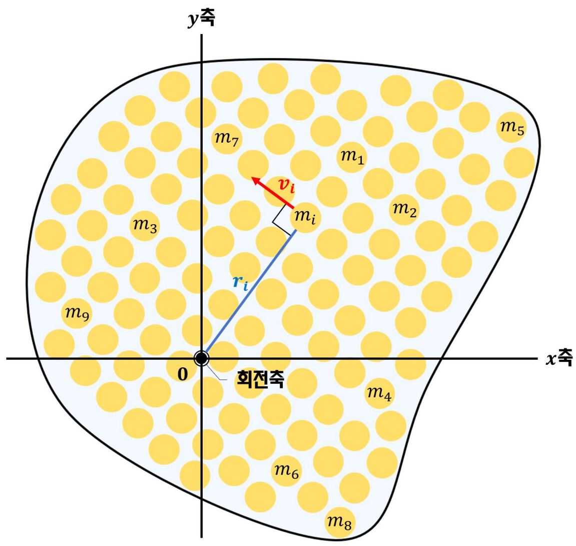
10.4 회전 운동에너지

학습목표

☞ 회전관성을 이해하고 회전 운동에너지를 어떻게 정의할 수 있는지를 알아본다.

회전관성과 운동에너지

- 강체는 서로 다른 선속력으로 움직이는 입자들의 결합체로 취급할 수 있다.



- 강체 내 입자의 운동에너지를 모두 합하면 강체의 전체 운동에너지 K를 구할 수 있다.

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \cdots = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

- 여기서 m_i와 v_i는 각각 i번째 입자의 질량과 속력이다.
- 각 입자의 선속력 v_i은 다를 수 있지만 각속력 ω은 동일하다.

$$K = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2 \ \ \& \ \ v_i = r_i\omega \quad \Rightarrow \quad \therefore \ K = \frac{1}{2}(\sum_i m_ir_i^2)\omega^2$$

- 괄호 속의 양은 회전체의 질량이 회전축에 대하여 어떻게 분포하고 있는지를 알려준다. 이 양을 특정 회전축에 대한 물체의 **회전관성** 또는 **관성모멘트** I라고 한다.
- 특정 회전축에 대해서 강체의 회전관성 I은 일정한 값을 가진다.

$$I = \sum_i m_ir_i^2$$

- 회전관성의 SI 단위는 $\mathrm{kg \cdot m^2}$이다.
- 같은 강체여도 회전축에 따라 그 회전관성이 달라질 수 있다.
- **운동에너지** K는 다음처럼 회전관성과 각속도로 표현될 수 있다.

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

- 병진운동과 회전운동의 운동에너지는 다른 종류의 에너지가 아니다. 둘 다 운동에너지이고 각 운동에 적합하게 표기된 것뿐이다.

10.5 회전관성 계산하기

학습목표

☞ 주어진 강체의 회전관성을 어떻게 결정하는지 알아본다.

연속적인 물체의 회전관성

- 주어진 강체가 몇 개의 입자로 이루어진 불연속적인 물체이면 주어진 회전축에 대한 회전관성 I은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

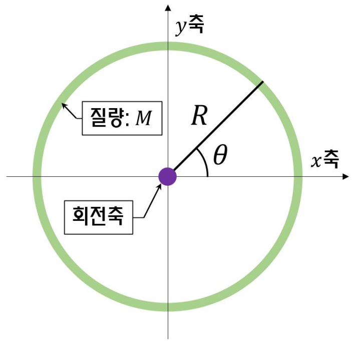
$$I = \sum_i m_ir_i^2$$

- 주어진 강체가 수많은 입자로 이루어진 연속적인 물체이면 위 식은 적분의 형태로 표현된다.

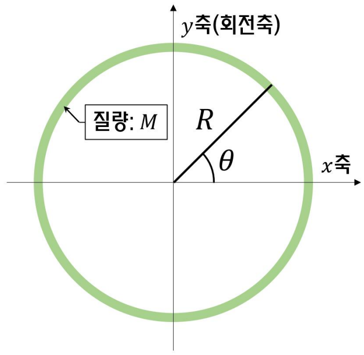
$$I = \int r^2 dm$$

- 강체가 단순한 형태를 가질 때 주어진 회전축에 대한 회전관성은 컴퓨터를 사용하지 않고도 계산할 수 있다. (p. 311 참조)

예제

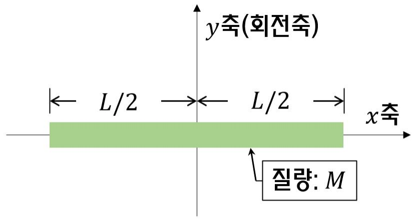


$$I = \int_0^{2\pi} R^2 \cdot \frac{M}{2\pi} d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = MR^2$$



$$I = \int_0^{2\pi} (R\cos\theta)^2 \cdot \frac{M}{2\pi} d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \cdot \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=-L/2}^{x=+L/2} = \frac{1}{12} ML^2$$

평행축 정리

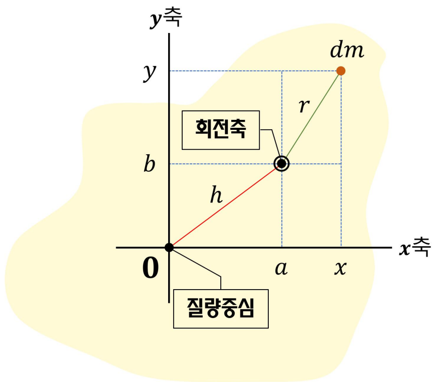
주어진 회전축에 대한 강체의 회전관성을 고려하자.

- ❖ 강체의 총질량을 M이라고 가정한다.
- ❖ 주어진 회전축과 **평행**이면서 강체의 질량중심을 지나는 회전축에 대한 회전관성을 I_{com}이라고 가정한다.
- ❖ 주어진 회전축과 질량중심을 지나는 회전축 사이의 수직거리는 h이라고 가정한다.

- 그때 다음과 같은 기준틀이 존재한다.

✓ xy평면은 주어진 회전축과 수직하다.
✓ 질량중심은 원점 0이다.

- 아래 그림은 강체의 단면(xy평면)이다.



- 이 기준틀을 사용하면 주어진 회전축에 대한 강체의 회전관성 I을 다음처럼 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm \\ &= \int (x^2+y^2) dm - 2a \int x\, dm - 2b \int y\, dm + \int (a^2+b^2) dm \\ &= \int (x^2+y^2) dm + h^2 \int 1\, dm \\ &= I_{\text{com}} + Mh^2 \quad \textbf{(평행축 정리)} \end{aligned}$$

10.6 토크

학습목표	☞ 회전운동에서 회전력이 어떻게 정의되는지 알아본다.

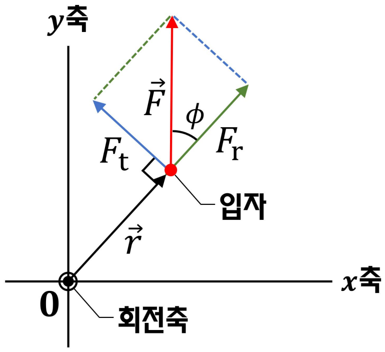
힘의 지름성분과 접선성분

다음처럼 가정된 기준틀을 바탕으로 입자에 힘 $\vec{F}$이 작용하는 경우를 고려하자.

❖ 회전축은 원점 0을 지나고 xy평면에 수직하다.
❖ 입자는 xy평면에 있다.
❖ 원점 0에서 입자까지의 위치벡터는 $\vec{r}$이다.
❖ 힘 $\vec{F}$은 회전축과 평행한 성분이 없다고 가정한다. 즉, $F_z = 0$.

- $\vec{F}$은 $\vec{r}$을 기준으로 **지름성분** $F_{\rm r}$과 **접선성분** $F_{\rm t}$으로 분해된다.

$$F_{\rm r} = F\cos\phi \quad \& \quad F_{\rm t} = F\sin\phi$$

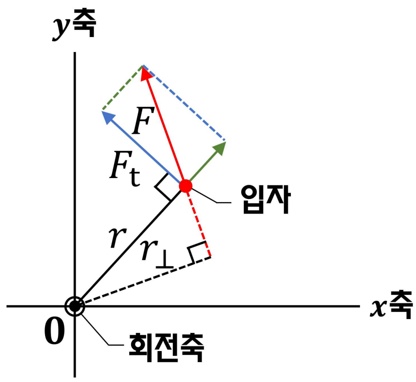


- ϕ은 $\vec{F}$와 $\vec{r}$가 이루는 각도이다.
- 지름성분 F_r은 $\vec{r}$과 같은 방향의 성분이다.
- 접선성분 F_t은 $\vec{r}$과 수직한 방향의 성분이다.

토크

- 다음처럼 정의된 **토크** τ는 힘 $\vec{F}$이 강체를 회전시킬 수 있는 정도를 나타낸다.

$$\tau = rF_t \text{ 또는 } r_\perp F$$



- r은 회전축에서 입자까지의 거리이고 $r_\perp$은 $\vec{F}$의 연장선과 회전축 사이의 수직거리이다. $r_\perp$은 $\vec{F}$의 **모멘트 팔**이라 한다.
- F은 힘 $\vec{F}$의 크기이고 F_t은 $\vec{F}$의 접선성분이다.
- 토크의 SI 단위는 일과 마찬가지로 뉴턴미터(N·m)이다. 그러나 토크의 단위를 줄(J)로 표기하지는 않는다.
- 일과 토크는 전혀 다른 물리량이다.

※ 토크도 힘과 마찬가지로 벡터이다. 그러나 단일 축에 대한 토크는 직선운동과 마찬가지로 양의 값과 음의 값으로 그 방향을 대신할 수 있다.

※ 정지해 있는 물체에 양의 값인 토크를 작용하면 물체는 반시계방향으로 돌아가고 음의 값인 토크를 작용하면 물체는 시계방향으로 돌아간다.

10.7 회전에 관한 Newton의 제2법칙

학습목표

☞ 회전운동에서 Newton의 제2법칙에 대응되는 운동법칙이 무엇인지를 알아본다.

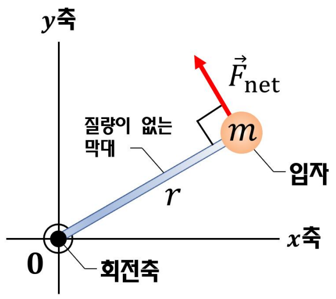
알짜 토크

하나의 입자에 둘 혹은 그 이상의 토크가 작용할 때 이들의 (벡터)합을 그 입자의 **알짜 토크** τ_{net}라고 한다. 다음 경우를 고려하자.

❖ 입자와 회전축은 질량이 없는 막대의 각 끝에 매달려 있다.
❖ 막대의 길이는 r이고 입자의 질량은 m이다.
❖ 입자의 알짜힘 $\vec{F}_{\text{net}}$은 회전축에 수직한 방향을 향한다.
❖ 입자의 가속도 $\vec{a}$은 회전축에 수직한 방향을 향한다.

또한, 다음과 같은 기준들을 고려하자.

❖ 회전축은 원점 0을 지나고 xy평면에 수직하다.
❖ 입자는 xy평면에 있다.



- Newton의 제2법칙에 의해 다음 관계가 성립한다.

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \therefore \; F_{\text{t}} = ma_{\text{t}}$$

- 입자의 회전관성 I과 각가속도 α은 각각 mr^2와 a_{t}/r이므로 입자에 작용하는 **알짜 토크** τ_{net}는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\tau_{\text{net}} = rF_{\text{t}} = (mr^2)(a_{\text{t}}/r) = I\alpha$$

- 모든 강체는 단일 입자의 조합이므로 위 식은 고정된 회전축에 대해 회전하는 임의의 강체에 대해서도 적용할 수 있다.

10.8 일과 회전 운동에너지

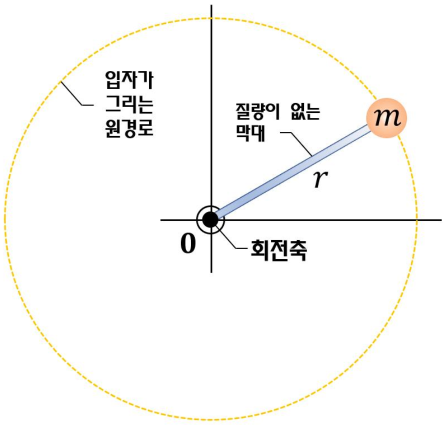
학습목표

☞ 병진운동에서의 일-운동에너지 정리를 회전운동으로 확장하고 일과 일률의 정의를 각변수들로 서술한다.

일과 일률

다음처럼 주어진 물체를 고려하자.

❖ 입자와 회전축은 질량이 없는 막대의 각 끝에 매달려 있다.
❖ 막대의 길이는 r이고 입자의 질량은 m이다.



- 입자에 W의 일을 하면 일-운동에너지 정리로 말미암아 W만큼의 운동에너지 변화가 일어난다.

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = \Delta K = W$$

- 입자는 막대에 매달려 있으므로 입자의 속도는 지름성분이 없다.
- 입자의 초기 속력 v_i과 최종 속력 v_f은 막대의 길이 r를 사용하여 초기 각속력 ω_i과 최종 각속력 ω_f으로 표현될 수 있다.

$$K_\mathrm{i} = \frac{1}{2}m(r\omega_\mathrm{i})^2 = \frac{1}{2}I\omega_\mathrm{i}^2 \quad \& \quad K_\mathrm{f} = \frac{1}{2}m(r\omega_\mathrm{f})^2 = \frac{1}{2}I\omega_\mathrm{f}^2$$

- 여기서 I은 입자의 회전관성이다.
- W은 회전 운동에너지로 표현될 수 있다.

$$W = \frac{1}{2}I\omega_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2}I\omega_\mathrm{i}^2$$

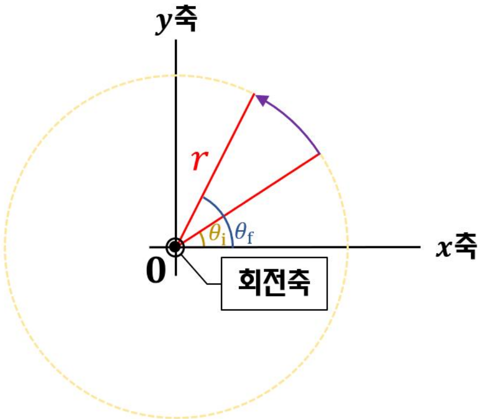
- 입자의 각가속도가 α로 일정할 때 각변위가 $\Delta\theta$이면 W은 다음처럼 쓸 수 있다.

$$W = \frac{1}{2}I(\omega_\mathrm{f}^2 - \omega_\mathrm{i}^2) = \frac{1}{2}I(2\alpha\Delta\theta) = (I\alpha)\Delta\theta = \tau\Delta\theta$$

- 여기서 W은 일정한 토크 τ가 입자에서 한 일이라고 말한다.
- 입자에 작용하는 토크 τ가 일정하지 않으면 W은 다음처럼 적분 형태로 표현될 수 있다.

$$W = \int_{\theta_\mathrm{i}}^{\theta_\mathrm{f}} \tau\, d\theta$$

- θ_i와 θ_f은 초기 각위치의 최종 각위치이다.



▪ 회전운동에서도 일률 P은 토크와 각속도의 곱으로 표현된다.

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_t v = \tau\omega$$