Chapter 7. Recursive relations 점화관계

Example 7.1 (a) Fibonacci sequence, $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, with $F_1 = F_2 = 1$.

(b) Compound interest (복리이자): $A_n = A_{n-1} + 0.12A_{n-1}$, $n \geq 1$

(c) Let S_n be the number of subsets of an n-element set:

$S_1 = 2$, $S_2 = 2^2$, ..., $S_n = 2^n$ or $S_n = 2 \cdot S_{n-1}$, $n \geq 1$, with $S_0 = 1$

(d) Let S_n be the number of n-bit strings that does not contain the pattern '111'.

$S_1 = 2$: $\{0, 1\}$, $S_2 = 2^2$: $\{00, 01, 10, 11\}$,

$S_3 = 2^3 - 1$: $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110\}$.

Among all n-bit strings which does not contain pattern '111' can be classified into 3 mutually disjoint categories:

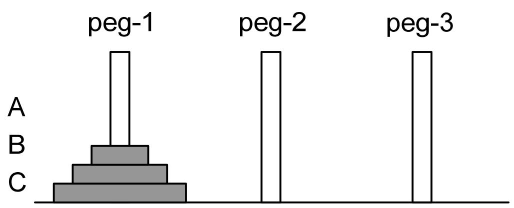
(1) string starting from '0': S_{n-1}

(2) string starting from '10': S_{n-2}

(3) string starting from '11': S_{n-3} (3^{rd}-bit must be '0' in order not to contain '111' pattern).

$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$, $n \geq 4$

Example 7.1.8 Hanoi tower: Hanoi tower 는 n개의 disc 와 3개의 peg 으로 구성된다. Peg-1 에 크기 순으로 쌓여 있는 disc 를 한번에 하나씩 이동하여 다른 peg 으로 이동하고자 한다. 단, 반경이 작은 disc 는 반경이 큰 disc 밑에 위치할 수 없다. 전체를 이동하는데 소요되는 이동 횟수를 C_n이라 하자.



case $n = 2$: ABA, $C_2 = 2$

case $n = 3$: ABA C ABA, $C_3 = 7$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\text{A} & & & & & & & & & & & & & & \mathbf{A} \\
\text{B} & \xrightarrow{\text{A}} & \text{B} & \xrightarrow{\text{B}} & & \xrightarrow{\text{A}} & \mathbf{A} & \xrightarrow{\text{C}} & \text{A} & \xrightarrow{\text{A}} & & \xrightarrow{\text{B}} & \mathbf{B} & \xrightarrow{\text{A}} & \text{B} \\
\text{C} & & \text{C}\ \mathbf{A} & & \text{C}\ \text{A}\ \mathbf{B} & & \text{C}\quad \text{B} & & \mathbf{C}\ \text{B} & & \mathbf{A}\ \text{C}\ \text{B} & & \text{A}\ \text{C} & & \text{C}
\end{array}$$

case $n = 4$: ABA C ABA D ABA C ABA, $C_4 = 15 = C_3 + 1 + C_3$

Disc 의 수가 n개 있을 때,

(1) 먼저 $(n-1)$단 Hanoi tower 를 다른 peg 에 옮기고,

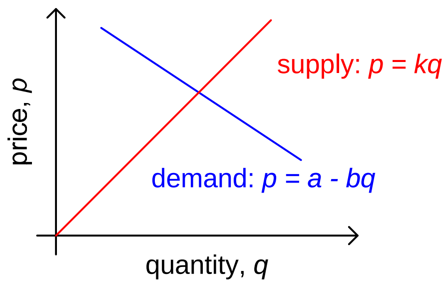
(2) 가장 큰 disc 를 빈 peg 에 옮긴 다음

(3) $(n-1)$단 Hanoi tower 를 가장 큰 disc 위에 옮긴다.

$C_n = 2C_{n-1} + 1$, $n \geq 3$, with $C_2 = 3$.

$C_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, $C_{64} \cong 1.8 \times 10^{19}$

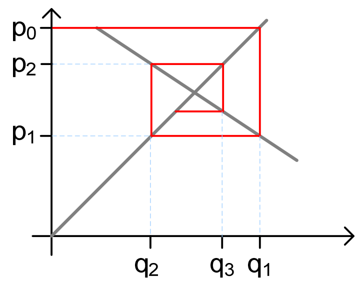
Example 7.1.9 Cobweb in economics (경제학 거미집): 수요자의 입장에서는 가격이 오르면 수요자의 요구가 증가하고, 반대로 공급자는 가격이 오르면 생산량을 증가시킨다. 수요의 변화에 따라 공급이 반응하는데 시간 지체가 있다고 가정한다.



demand (수요): $p_n = a - bq_n, \ a, b > 0$

supply (공급): $p_n = kq_{n+1}, \ k > 0$

$p_{n+1} = a - \frac{b}{k} p_n$



Cases: (1) $b < k$, fixed point (attractor)

(2) $b = k$, oscillation

(3) $b > k$, diverge to infinity

Put $s = -b/k$, so that $p_n = a + sp_{n-1}$.

$$p_n = a + sp_{n-1} = a + s(a + sp_{n-2}) = a + sa + s^2 p_{n-2} = a + sa + s^2 a + s^3 p_{n-3}$$

$$p_n = \frac{a - as^n}{1-s} + s^n p_0 = s^n \left(-\frac{a}{1-s} + p_0\right) + \frac{a}{1-s} = \left(-\frac{b}{k}\right)^n \left(-\frac{ak}{k+b} + p_0\right) + \frac{ak}{k+b}$$