LECTURE 22

파동은 물리학의 중요한 주제 중의 하나이다. 일상에서 흔히 접하게 되는 수면파, 음파, 지진파 등은 매질이 필요한 역학적 파동이고, 일상에서 흔히 사용되는 가시광선, 자외선, 라디오파, TV파, 마이크로파, 엑스선, 레이더파 등은 매질이 필요 없는 전자기파이다. 그 밖에도 양자역학에서의 물질파가 존재한다. 이 단원에서는 팽팽한 줄을 따라 이동하는 파동에 대해 알아본다.

16.4 파동방정식

학습목표

☞ 줄에 생긴 진행파동을 기술하는 미분방정식에 대해 알아본다.

파동방정식

미소 시간간격 Δt동안 Δx만큼 진행하는 파동이 발생한 줄에서 x축 길이가 Δx인 줄 요소를 고려하자.

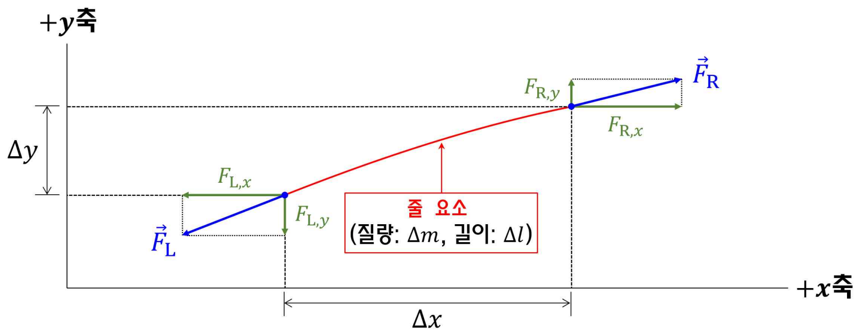
❖ 줄의 선밀도는 μ이다.

❖ 파동의 속도는 v이다. 즉, $v = \Delta x / \Delta t$.

❖ 줄 요소의 질량과 길이는 Δm과 Δl이다. 즉, $\Delta m = \mu \Delta l$.

❖ 줄 요소의 좌측 끝에 작용하는 힘은 $\vec{F}_{\mathrm{L}} (= F_{\mathrm{L},x}\,\hat{\mathrm{i}} + F_{\mathrm{L},y}\,\hat{\mathrm{j}})$이다.

❖ 줄 요소의 우측 끝에 작용하는 힘은 $\vec{F}_{\mathrm{R}} (= F_{\mathrm{R},x}\,\hat{\mathrm{i}} + F_{\mathrm{R},y}\,\hat{\mathrm{j}})$이다.



- Δt가 작으면 줄 요소의 질량 Δm을 다음처럼 어림할 수 있다.

$$\Delta l \approx \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \mu \Delta l \approx \mu \Delta x$$

- $\vec{F}_{\mathrm{L}}$과 $\vec{F}_{\mathrm{R}}$의 크기는 줄 전체에 작용하는 장력의 크기 τ와 같고 그 방향은 각 끝에 연결된 줄이 향하는 방향과 같다.

$$\sqrt{F_{\mathrm{L},x}^2 + F_{\mathrm{L},y}^2} = \sqrt{F_{\mathrm{R},x}^2 + F_{\mathrm{R},y}^2} = \tau$$

- $\vec{F}_{\mathrm{L}}$와 $\vec{F}_{\mathrm{R}}$은 줄 요소의 작은 곡률로 말미암아 완전히 반대 방향을 향하지 않는다. 즉, 두 힘은 완전히 상쇄되지 않는다.
- 줄 요소의 질량과 마찬가지로 Δt가 작으면 $\vec{F}_{\mathrm{L}}$와 $\vec{F}_{\mathrm{R}}$의 성분들도 다음처럼 근사될 수 있다.

$$F_{\mathrm{L},x} \approx -\tau \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{L},y} = F_{\mathrm{L},x} S_{\mathrm{L}} \approx -\tau S_{\mathrm{L}}$$

$$F_{\mathrm{R},x} \approx +\tau \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{R},y} = F_{\mathrm{R},x} S_{\mathrm{R}} \approx +\tau S_{\mathrm{R}}$$

- 여기서 S_{L}은 줄 요소 좌측 끝의 접선 기울기이고, S_{R}은 줄 요소 우측 끝의 접선 기울기이다.
- Newton의 제2법칙으로 말미암아 줄 요소의 알짜힘 $\vec{F}(=\vec{F}_{\mathrm{L}}+\vec{F}_R)$은 줄 요소가 y축 방향으로 가속하도록 만든다.

$$(F_{\mathrm{L},y} + F_{\mathrm{R},y})\,\hat{\mathrm{j}} \approx \vec{F} = (\Delta m)\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \tau(S_{\mathrm{R}} - S_{\mathrm{L}}) \approx (\Delta m) a_y$$

- 여기서 $\vec{a}$은 줄 요소의 가속도이고 a_y은 $\vec{a}$의 y축 성분이다.
- a_y은 줄 요소 변위 y를 시간 t에 대해 연이어 두 번 편미분한 것과 같으므로 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\tau(S_{\mathrm{R}} - S_{\mathrm{L}}) \approx (\Delta m) a_y \approx (\mu \Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{S_{\mathrm{R}} - S_{\mathrm{L}}}{\Delta x} = \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- 파동의 속력 v은 $\sqrt{\tau/\mu}$과 같으므로 μ/τ은 $1/v^2$과 같다.
- 단위 길이당 줄의 접선 기울기 변화는 다음처럼 근사될 수 있다.

$$\frac{S_{\mathrm{R}} - S_{\mathrm{L}}}{\Delta x} \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- 최종적으로 다음과 같은 미분방정식이 성립한다.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

※ 위 식은 사인모양의 진행파동뿐만 아니라 모든 유형의 진행파동을 기술하는 일반적인 파동방정식이다.

16.5 파동의 간섭

학습목표

☞ 하나의 줄에 두 개의 진행파동이 중첩되어 생긴 합성파동이 어떻게 기술되는지를 알아본다.

파동의 중첩원리

하나의 줄에 다음처럼 진행하는 두 개의 진행파동을 고려하자.

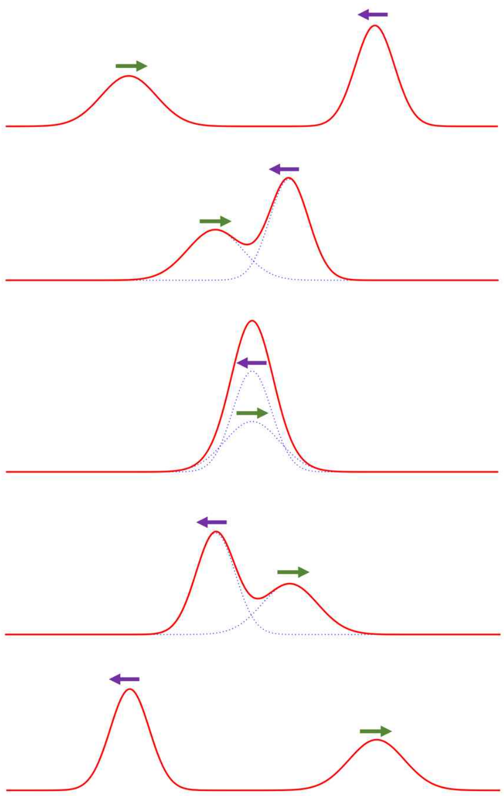
❖ 각 파동이 단독으로 진행할 때 줄 요소의 변위는 위치 x와 시간 t의 함수 $y_1(x,t)$와 $y_2(x,t)$로 표현된다.

❖ 두 파동이 동시에 진행할 때 줄 요소의 변위는 함수 $y'(x,t)$로 표현된다.

- 두 개의 진행파동이 중첩되어 생기는 합성파동은 두 파동의 대수적인 합과 같다.

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

- 이를 일컬어 **파동의 중첩원리**라고 한다.
- 파동의 중첩원리는 같은 줄에 진행하는 파동들이 서로의 진행을 방해하지 않는다는 것을 내포한다.



파동의 간섭

- 위상상수만 ϕ만큼 차이가 나는 두 사인모양 파동을 고려하자.

$$y_1(x,t) = y_\mathrm{m}\sin(kx-\omega t) \quad \& \quad y_2(x,t) = y_\mathrm{m}\sin(kx-\omega t+\phi)$$

- $\phi = 0$이면 합성파동의 변위는 두 배가 된다.

$$y'(x,t) = y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega t) + y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega t) = 2y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega t)$$

- $\phi = \pi$이면 합성파동의 변위는 0이 된다.

$$y'(x,t) = y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega) - y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega) = 0$$

- 중첩된 파동의 이런 현상을 **간섭**(interference)이라고 한다.
- 간섭현상은 줄 요소의 변위에만 영향을 주며 파동의 진행에는 아무런 영향을 주지 않는다.
- 두 각도 α, β의 사인의 합은 다음과 같다.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

- 그러므로 임의의 ϕ에 대한 합성파동은 다음처럼 기술된다.

$$\begin{aligned} y'(x,t) &= y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega t) + y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega t + \phi) \\ &= [2y_{\mathrm{m}}\cos\tfrac{1}{2}\phi]\sin(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi) \end{aligned}$$

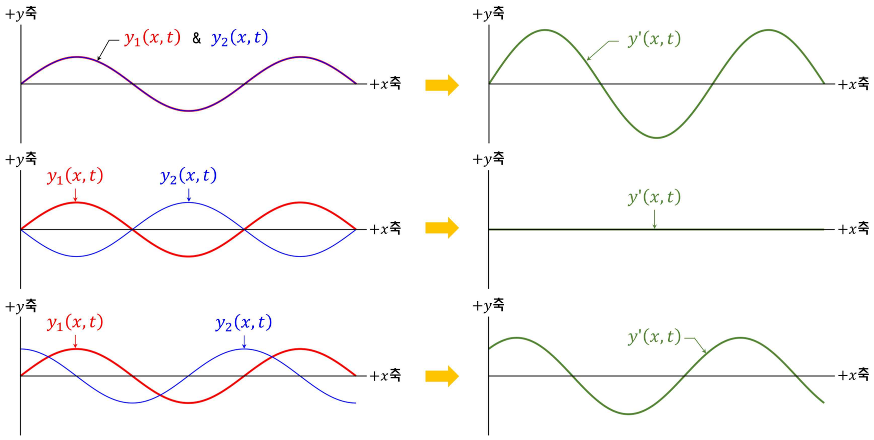
- 즉, 하나의 줄에 위상상수만 다른 두 사인모양 파동이 진행하면 진폭이 $|2y_{\mathrm{m}}\cos\tfrac{1}{2}\phi|$인 사인모양 합성파동이 만들어진다.
- 두 파동의 **위상차**(phase difference) ϕ가 2π의 정수배일 때 중첩된 파동의 진폭은 $2y_{\mathrm{m}}$이 된다.

$$\phi = 2\pi m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

- 이와 같은 간섭을 가리켜 **완전 보강간섭**이라고 한다.
- 위상차 ϕ가 2π의 반정수배일 때 중첩된 진폭은 0이 된다.

$$\phi = 2\pi(m + \tfrac{1}{2}) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

- 이와 같은 간섭을 일컬어 **완전 상쇄간섭**이라고 한다.
- 완전 보강간섭도 완전 상쇄간섭도 아닌 간섭을 가리켜 **중간간섭**이라고 한다. 이때 파동의 진폭은 0과 $2y_{\mathrm{m}}$ 사이의 값이다.



16.6 위상자

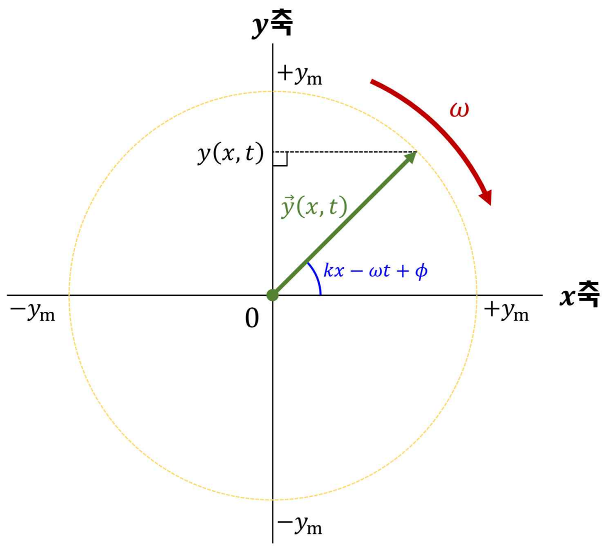
학습목표

☞ 위상자가 어떻게 줄 요소의 운동을 표현하는지를 알아본다.

위상자

- 사인모양 진행파동이 주어졌을 때 xy좌표계의 다음과 같은 2차원 벡터 $\vec{y}(x,t)$를 일컬어 파동의 **위상자**(phasor)라고 한다.
  - ✓ $\vec{y}(x,t)$의 크기는 파동의 진폭 y_{m}과 같다.
  - ✓ $\vec{y}(x,t)$는 시간 t에 따라 시계방향으로 회전한다.
  - ✓ $\vec{y}(x,t)$의 각속력는 파동의 각진동수 ω와 같다.
  - ✓ $\vec{y}(x,t)$의 y축 성분은 줄 요소의 변위 $y(x,t)$와 같다.

$$\vec{y}(x,t)=y_{\mathrm{m}}\cos(kx-\omega t+\phi)\,\hat{\mathrm{i}}+y_{\mathrm{m}}\sin(kx-\omega t+\phi)\,\hat{\mathrm{j}}$$



- 다음처럼 기술되는 두 사인모양 진행파동이 주어졌을 때 두 파동의 위상자 $\vec{y}_1(x,t)$와 $\vec{y}_2(x,t)$는 각도 ϕ만큼 떨어져 있다.

$$y_1(x,t)=y_{\mathrm{m},1}\sin(kx-\omega t) \quad \& \quad y_2(x,t)=y_{\mathrm{m},2}\sin(kx-\omega t+\phi)$$

- 두 파동의 진폭과 위상상수는 다르지만 파장과 진행속도는 같다.
- 두 위상자의 벡터합 $\vec{y}'(x,t)$은 합성파동의 위상자와 같다.
- 즉, 파동의 진폭이 다르더라도 위상자를 이용하여 파동을 합성할 수 있다. 그러므로 합성파동은 사인모양 진행파동이 된다.

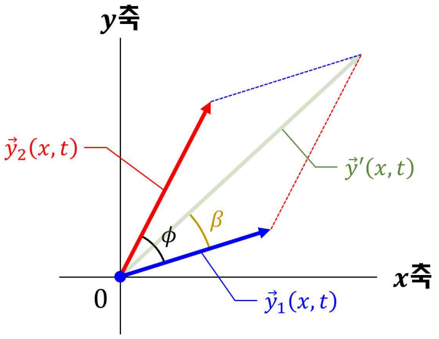
$$y'(x,t)=y_{\mathrm{m}}'\sin(kx-\omega t+\beta)$$

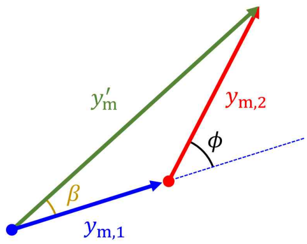
- 여기서 y_{m}'과 β은 합성파동의 진폭과 위상상수이다.
- y_{m}'과 β은 다음처럼 표현된다.

$$y_{\mathrm{m}}'=\sqrt{y_{\mathrm{m},1}^2+y_{\mathrm{m},2}^2+2y_{\mathrm{m},1}y_{\mathrm{m},2}\cos\phi}$$

&

$$\beta = \arccos\left[\frac{y_{\mathrm{m},1} + y_{\mathrm{m},2}\cos\phi}{\sqrt{y_{\mathrm{m},1}^2 + y_{\mathrm{m},2}^2 + 2y_{\mathrm{m},1}y_{\mathrm{m},2}\cos\phi}}\right]$$





16.7 정지파와 공명

학습목표

☞ 진행방향만 다른 두 파동이 중첩될 때 그 합성파동이 어떻게 기술되는지를 알아본다.

정지파

다음처럼 진행방향만 다른 두 사인모양 진행파동을 고려하자.

$$y_1(x,t) = y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega t) \quad \& \quad y_2(x,t) = y_{\mathrm{m}}\sin(kx + \omega t)$$

- 첫 번째 파동은 좌측에서 우측으로 진행하고 두 번째 파동은 우측에서 좌측으로 진행한다.
- 파동의 중첩원리로 말미암아 합성파동은 다음처럼 기술된다.

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = [2y_{\mathrm{m}}\sin kx]\cos\omega t$$

- 이처럼 파형이 좌우로 진행하지 않고 줄 요소의 최소점과 최대점이 변하지 않는 파동을 일컬어 **정지파**(standing wave)라고 한다.
- 진행파동의 진폭은 어떠한 위치에서도 똑같지만, 정지파의 진폭은 위치에 따라서 달라진다.
- $|2y_{\mathrm{m}}\sin kx|$은 위치 x에 있는 줄 요소의 진폭이다.
- 정지파에서 진폭 0의 위치 x를 가리켜 **마디**(node)라고 한다.

$$kx = n\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{n\pi}{k} = n\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- 인접한 마디는 반파장 $\frac{1}{2}\lambda$만큼 떨어져 있다.
- 정지파에서 최대 진폭의 위치 x를 가리켜 **배**(anti-node)라고 한다.

$$kx = (n + \tfrac{1}{2})\pi \quad \Rightarrow \quad x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- 인접한 배는 마디와 마찬가지로 반파장 $\frac{1}{2}\lambda$만큼 떨어져 있다.
- 배는 두 마디의 중간점에 위치한다.

입사파와 반사파

다음처럼 $-x$축 방향으로 진행하는 사인모양 파동을 고려하자.

$$y_{\mathrm{in}}(x,t)=y_{\mathrm{m}}\sin(kx+\omega t)$$

강한 반사

- 만약 줄의 좌측 끝($x=0$)이 벽에 고정되어 있으면 반사된 파동(**반사파**)은 입사된 파동(**입사파**)과 위상이 반대가 된다.

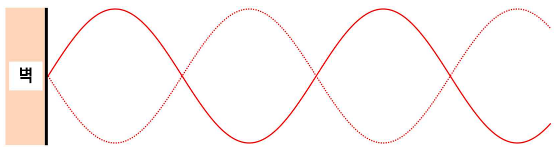
$$y_{\mathrm{re}}(x,t)=-y_{\mathrm{m}}\sin(-kx+\omega t)=y_{\mathrm{m}}\sin(kx-\omega t)$$

- 이러한 종류의 반사를 **강한 반사**라고 한다.
- 이때 입사파와 반사파의 합성파동은 다음과 같은 정지파가 된다.

$$y'(x,t)=y_{\mathrm{in}}(x,t)+y_{\mathrm{re}}(x,t)=[2y_{\mathrm{m}}\sin kx]\cos\omega t$$

- 이 정지파의 마디 x_{node}와 배 x_{anti}는 다음과 같다.

$$x_{\mathrm{node}}=n\left(\frac{\lambda}{2}\right)\quad \& \quad x_{\mathrm{anti}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}\quad (n=0,1,2,\ldots)$$



약한 반사

- 만약 줄의 좌측 끝($x=0$)이 y축 방향으로 뻗어 있는 막대에 달린 고리에 묶여 있으면 반사파는 입사파와 위상이 같다.

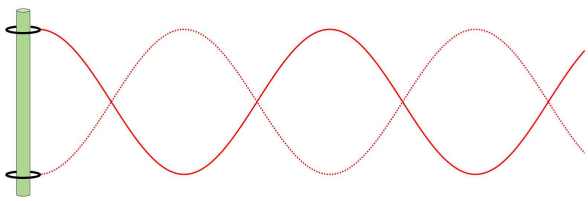
$$y_{\mathrm{re}}(x,t)=y_{\mathrm{m}}\sin(-kx+\omega t)=-y_{\mathrm{m}}\sin(kx-\omega t)$$

- 이러한 종류의 반사를 약한 반사라고 한다.
- 이때 입사파와 반사파의 합성파동은 다음과 같은 정지파가 된다.

$$y'(x,t)=y_{\mathrm{in}}(x,t)+y_{\mathrm{re}}(x,t)=[2y_{\mathrm{m}}\cos kx]\sin\omega t$$

- 이 정지파의 마디 x_{node}와 배 x_{anti}는 다음과 같다.

$$x_{\mathrm{node}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}\quad \& \quad x_{\mathrm{anti}}=n\left(\frac{\lambda}{2}\right)\quad (n=0,1,2,\ldots)$$



정지파와 공명

L만큼 떨어져 있는 두 벽에 양 끝이 고정된 팽팽한 줄에 생긴 파장과 진행속력이 각각 λ와 v인 진행파동을 고려하자.

- 이 줄에 생긴 진행파동이 어느 쪽 벽에 도달하더라도 위상이 반대인 반사파가 생긴다.
- 이때 L이 반파장 $\frac{1}{2}\lambda$의 정수배이면 줄에 생긴 진행파동들의 간섭은 줄의 양 끝이 마디인 정지파를 만들어낸다. 이런 정지파를 일컬어 **진동모드**라고 하고, 이때의 진동수를 **공명진동수** f라고 한다. 이때 줄이 **공명**한다고 말한다.

$$L = n\left(\tfrac{1}{2}\lambda\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

- 여기서 정수 n를 일컬어 **조화차수**라고 한다.
- 조화차수 n에 해당하는 진동모드를 n**번째 조화모드**라고 한다.
- **제1조화모드**$(n=1)$는 **기본모드**라고도 일컫는다.