제12장 벡터함수

12.1 벡터함수와 공간곡선

12.2 벡터함수의 도함수와 적분

12.3 호의 길이와 곡률

벡터함수와 공간곡선

벡터함수(vector function) 또는 **벡터값 함수**(vector-valued function)

정의역이 실수의 집합이고, 치역이 벡터의 집합인 함수.

벡터함수는 실숫값 함수 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$를 성분으로 갖는 함수로 $\mathbf{r}(t)$*로 표현*

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}}$$

$\mathbf{r}$: 3차원 벡터방정식

f, g, h를 $\mathbf{r}$의 **성분함수**(component function)라 한다.

독립변수로 문자 t가 사용되는데, 이는 벡터함수의 활용에서 대부분 이것이 시간을 나타내기 때문이다.

벡터함수 r의 극한(limit)

$\mathbf{r}(t)$ = <$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$>일 때, 각 성분함수의 극한이 존재하면 다음과 같다.

$$\boxed{\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\left\langle \lim_{t\to a} f(t),\ \lim_{t\to a} g(t),\ \lim_{t\to a} h(t)\right\rangle}$$

예제

$\mathbf{r}(t)=(1+t^3)\mathbf{i}+te^{-t}\mathbf{j}+\dfrac{\sin t}{t}\mathbf{k}$ 일 때, $\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$ 를 구하라.

벡터함수의 연속성

벡터함수 $\mathbf{r}$ 이 $t = a$ 에서 **연속**(continuous at a)

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

벡터함수 $\mathbf{r}$ 이 $t = a$ 에서 연속이기 위한 필요충분조건은 성분함수 f, g, h가 $t = a$ 에서 연속

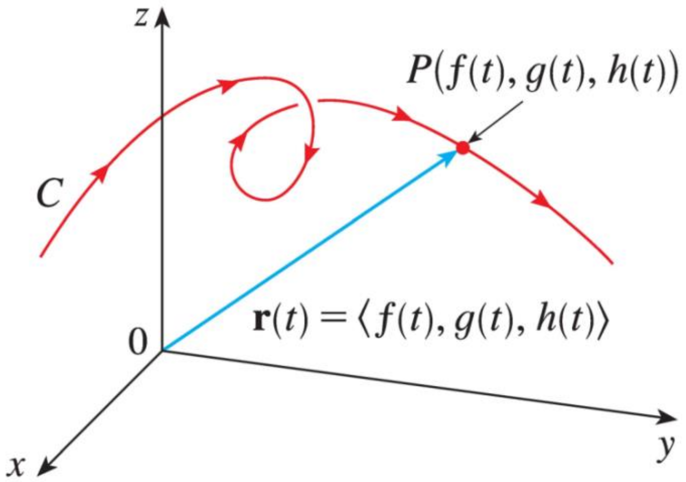
공간곡선 (space curve)

성분함수 f, g, h를 구간 I에서 연속인 실숫값 함수라 하자. 이 때 t가 구간 I 전체에서 변한다고 할 때 다음 식을 만족하는 공간의 모든 점 (x, y, z)의 집합 C를 **공간곡선**이라 한다.

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

매개변수방정식(parametric equations of C)

t : **매개변수**(parameter)

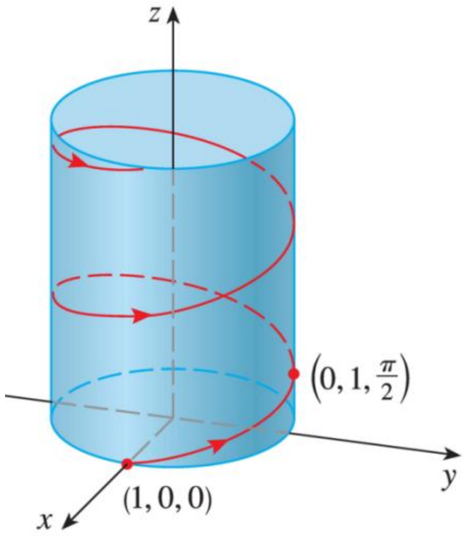


예제

벡터함수 $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$ 로 정의된 곡선을 설명하라.

예제

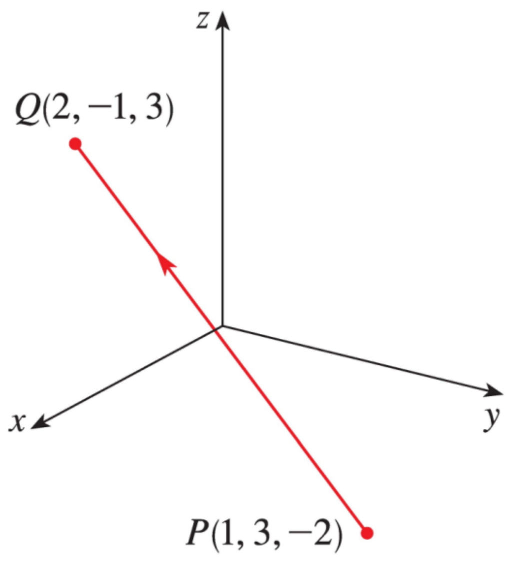
벡터방정식이 $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ 인 곡선을 그려라.



나선(helix)

예제

점 $P(1, 3, -2)$와 점 $Q(2, -1, 3)$을 잇는 선분의 벡터방정식과 매개변수방정식을 구하라.



예제

원기둥 $x^2 + y^2 = 1$과 평면 $y + z = 2$ 의 교선의 방정식을 표현하는 벡터함수를 구하라.