Quiz V

성명(학번) 송민경 (2020032306)

1. 함수 $u=\tan^{-1}\frac{y}{x}$, $x=\ln\theta$, $y=e^{\theta}$에 대하여 θ에 관한 u의 전도함수가 $\frac{xe^{\theta}-y/\theta}{h(x,y)}$ 일 때, x와 y의 함수 $h(x,y)$를 구하여라. (4점)

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{d\theta}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta}$$

$$=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{x}{x^2+y^2}e^{\theta}$$

$$=\frac{xe^{\theta}-\frac{y}{\theta}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\theta},\quad \frac{dy}{d\theta}=e^{\theta}$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$\therefore h(x,y)=x^2+y^2$

2. 점 $P_0(-1,1)$에서의 점 $P_1(2,4)$로 향하는 방향으로의 2변수함수 $f(x,y)$의 방향도함수는 $\sqrt{2}$이고 $P_2(1,2)$으로 향하는 방향으로의 $f(x,y)$의 방향도함수가 $1/\sqrt{5}$일 때, $P_3(2,5)$으로 향하는 방향으로의 $f(x,y)$의 방향도함수를 구하여라. (6점)

우선 $\overrightarrow{P_0P_1}=(3,3)$, $\overrightarrow{P_0P_2}=(2,1)$, $\overrightarrow{P_0P_3}=(3,4)$의 방향벡터는

$u_1=\frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|}=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $u_2=\frac{\overrightarrow{P_0P_2}}{|\overrightarrow{P_0P_2}|}=\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5}\right)$, $u_3=\frac{\overrightarrow{P_0P_3}}{|\overrightarrow{P_0P_3}|}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

$D_{u_1}(-1,1)=\nabla f(-1,1)\circ u_1=(f_x(-1,1),f_y(-1,1))\circ\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=\sqrt2 \cdots ①$

$D_{u_2}(-1,1)=\nabla f(-1,1)\circ u_2=(f_x(-1,1),f_y(-1,1))\circ\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5}\right)=\frac{1}{\sqrt5} \cdots ②$ 이므로

식 ①, ②로 부터

$$f_x(-1,1)+f_y(-1,1)=2$$

$$2f_x(-1,1)+f_y(-1,1)=1$$

$f_x(-1,1)=-1$, $f_y(-1,1)=3$ 이고,

$D_{u_3}=\Delta f(-1,1)\circ u_3=(f_x(-1,1),f_y(-1,1))\cdot u_3$

$=(-1,3)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}+\frac{12}{5}=\frac{9}{5}$

3. 2변수함수 $g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$에 대하여 $s=r\cos\theta$, $t=r\sin\theta$라 놓자. 이 때,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2$$

임을 증명하여라. (5점)

$\frac{ds}{dr}=\cos\theta \quad \frac{dt}{dr}=\sin\theta \qquad \frac{\partial f}{\partial s}=a, \quad \frac{\partial f}{\partial t}=b$

$\frac{ds}{d\theta}=-r\sin\theta \quad \frac{dt}{d\theta}=r\cos\theta$

$\frac{df}{dr}=a\cos\theta+b\sin\theta=\frac{\partial g}{\partial r}=c$

$\frac{df}{d\theta}=-ar\sin\theta+br\cos\theta=\frac{\partial g}{\partial \theta}=d$

$c^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+2ab\sin\theta\cos\theta$

$\frac{1}{r^2}d^2=\frac{1}{r^2}(a^2r^2\sin^2\theta+b^2r^2\cos^2\theta-2abr^2\sin\theta\cos\theta)$

$=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta-2ab\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\ c^2+\frac{1}{r^2}d^2=a^2+b^2$ 이므로

위 식은 성립한다.