LECTURE 03

벡터는 크기와 방향 둘 다 필요한 물리량을 기술하는 데 필요한 수학적 개념이다. 1차원 공간에서 입자의 방향은 +부호나 −부호만으로 표현되지만 3차원 공간에서는 그것만으로 부족하므로 벡터를 사용해야 한다. 이 단원에서는 벡터의 기본 특성을 알아본다.

3 벡 터
3.1 벡터와 성분
3.2 단위벡터, 성분을 이용한 벡터의 덧셈
3.3 벡터 곱하기

3.1 벡터와 성분

학습목표

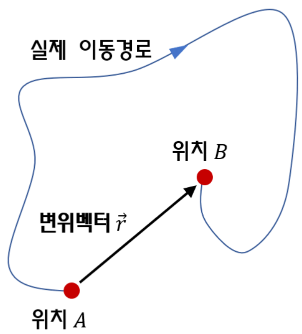
☞ 물리량을 표현하는 벡터의 기본적 특성을 이해한다.

스칼라와 벡터량

- 물리학에서 크기만 있고 방향이 없는 물리량을 **스칼라(량)**이라고 하고 크기와 방향 둘 다 지니는 물리량을 **벡터량**이라고 한다.
- 질량, 부피, 시간, 거리, 속력, 온도, 압력, 에너지 등은 스칼라인 물리량이다.
- 변위, 속도, 가속도, 힘, 운동량, 전기장, 자기장 등은 벡터량인 물리량이다.
- 벡터량은 하나의 **벡터**로 표현될 수 있다.

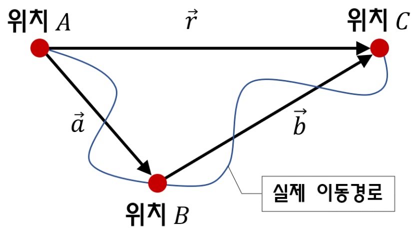
변위벡터

- 변위는 가장 간단한 벡터량이다. **변위벡터**는 변위를 나타내는 벡터이다.
- 입자의 위치가 A에서 B로 변한다면, A에서 B로의 변위벡터는 A에서 B까지 화살표를 그어 표현하거나 $\vec{r}$처럼 기호 위에 화살표를 올리는 방식으로 표현한다.
- 변위벡터가 입자의 실제 이동 경로를 나타내지는 않는다.



벡터합

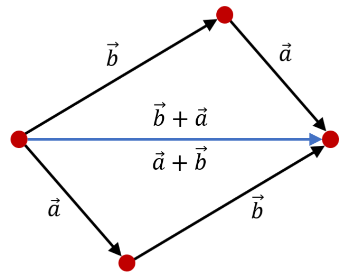
- 입자가 A에서 B로 이동한 후에 B에서 C로 이동할 때 연속된 두 변위벡터가 $\vec{a}(=AB)$와 $\vec{b}(=BC)$이면 전체의 변위는 A에서 C로 직접 이동하는 $\vec{r}(=AC)$와 같다.
- 벡터 $\vec{r}$은 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $\vec{b}$의 **벡터합**으로 불린다.
- 벡터합은 보통의 대수적인 합과는 다르며 $\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}$과 같은 **벡터 방정식**으로 표현된다.



- 벡터합에서 덧셈 순서는 무관하다.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

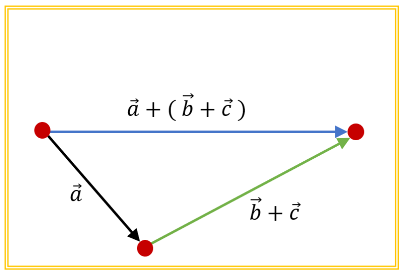
(교환법칙)

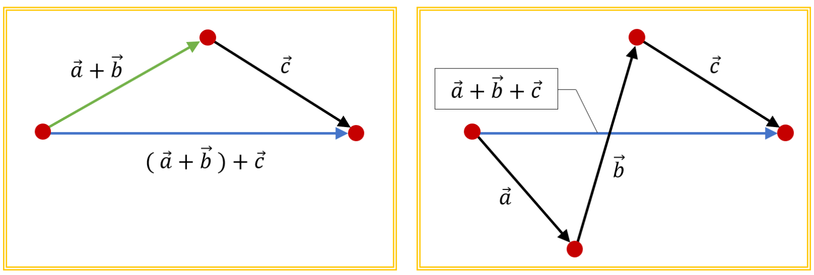


- 벡터합에서 두 개 이상의 벡터들은 어떤 순서로도 더할 수 있다.

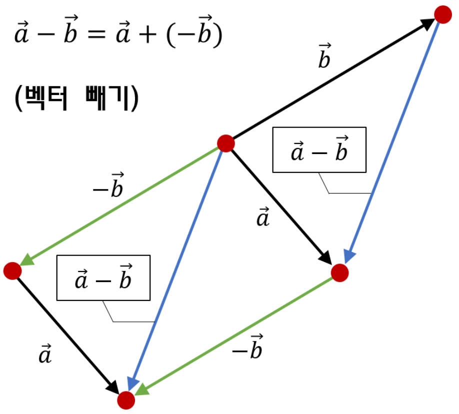
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

(결합법칙)





- 벡터 $\vec{b}$와 크기는 같으나 방향이 반대인 벡터는 벡터 $-\vec{b}$로 표기하고 벡터 $-\vec{b}$를 더하는 것은 벡터 $\vec{b}$를 빼는 것과 같다.



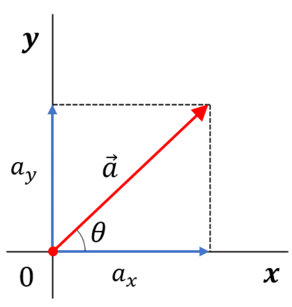
벡터의 성분과 벡터의 분해

- **벡터의 성분**은 좌표축에 벡터를 투영시킨 값이고 **벡터의 분해**는 그 성분을 찾는 과정이다.
- 2차원 벡터에서 벡터의 x축에 대한 투영은 x**성분**이 되고 y축에 대한 투영은 y**성분**이 된다.
- 벡터는 벡터성분들로 표현될 수 있지만 벡터의 크기 a와 몇 개의 각도들로도 표현될 수 있다.
- 2차원 벡터 $\vec{a}$는 크기와 하나의 각도 (a,θ) 또는 두 개의 성분 (a_x,a_y)을 써서 표기될 수 있다. 그때 벡터의 두 성분은 다음처럼 표현된다.

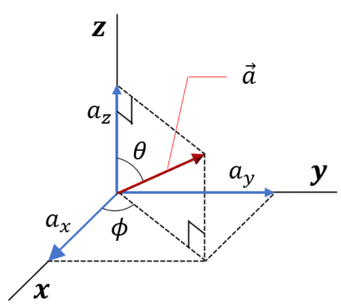
$$a_x = a\cos\theta \quad \& \quad a_y = a\sin\theta$$

- 3차원 벡터 $\vec{a}$는 크기와 두 개의 각도 (a,θ,ϕ) 또는 세 개의 성분 (a_x,a_y,a_z)를 써서 표기한다. 그때 벡터의 세 성분은 다음처럼 표현된다.

$$a_x = a\sin\theta\cos\phi \quad \& \quad a_y = a\sin\theta\sin\phi \quad \& \quad a_z = a\cos\theta$$



[2차원 벡터의 분해]



[3차원 벡터의 분해]

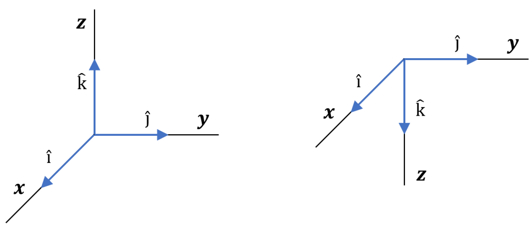
3.2 단위벡터, 성분을 이용한 벡터의 덧셈

학습목표

- ☞ 주어진 벡터를 단위벡터로 표현한다.
- ☞ 단위벡터 표기법으로 벡터들을 더하거나 뺀다.

단위벡터

- 크기가 1이며 특정한 방향을 갖는 벡터를 **단위벡터**라고 한다.
- 단위벡터는 차원과 단위가 없다.
- 직각좌표계에서 x, y, z축 양의 방향을 향하는 단위벡터는 $\hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{j}}, \hat{\mathrm{k}}$로 표기된다.
- **화살표**(→) **기호**로 표기되는 일반벡터와 달리 단위벡터는 **모자**(̂) **기호**로 표기된다.
- 벡터 $\vec{a}$가 $\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}$로 표현될 때 $a_x\hat{\mathrm{i}}, a_y\hat{\mathrm{j}}, a_z\hat{\mathrm{k}}$을 $\vec{a}$의 **벡터성분**이라 하고 a_x, a_y, a_z을 $\vec{a}$의 **스칼라성분**(또는 단순히 **성분**)이라 한다.



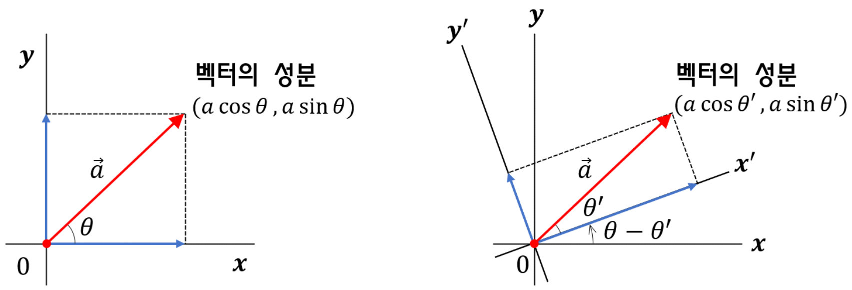
[오른손 직각좌표계] [왼손 직각좌표계]

벡터 더하기

- a_x, a_y, a_z와 b_x, b_y, b_z가 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 성분일 때 벡터 $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$와 $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$의 성분 r_x, r_y, r_z와 d_x, d_y, d_z은 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 성분끼리의 덧셈과 뺄셈으로 얻을 수 있다.

$$r_x = a_x + b_x \quad \& \quad r_y = a_y + b_y \quad \& \quad r_z = a_z + b_z$$
$$d_x = a_x - b_x \quad \& \quad d_y = a_y - b_y \quad \& \quad d_z = a_z - b_z$$

- 벡터들 사이의 관계는 좌표계의 원점 위치나 좌표계의 방향과 무관하다.



- 모든 물리법칙은 벡터와 마찬가지로 좌표계의 선택과는 무관하다.

3.3 벡터 곱하기

학습목표

☞ 세 가지 유형의 벡터 곱하기를 이해한다.

벡터에 스칼라 곱하기

- 벡터 $\vec{a}$에 스칼라 s를 곱하여 얻는 벡터는 $s\vec{a}$로 표기한다.
- 벡터 $\vec{a}$에 스칼라 s를 나눈다는 것은 $\vec{a}$에 $(1/s)$을 곱한다는 것을 의미한다.
- $s\vec{a}$은 $\vec{a}$의 각 성분에 s을 곱한 것과 같다.
- 즉, a_x, a_y, a_z가 $\vec{a}$의 성분일 때 $s\vec{a}$의 성분은 $s\,a_x, s\,a_y, s\,a_z$이다.
- $s\vec{a}$의 크기는 $\vec{a}$의 크기에 s의 절댓값을 곱한 것과 같다.
- $s\vec{a}$의 방향은 s의 부호로 결정된다. s가 양수이면 그 방향은 $\vec{a}$와 같지만 s가 음수이면 그 방향은 $\vec{a}$의 반대 방향이 된다.

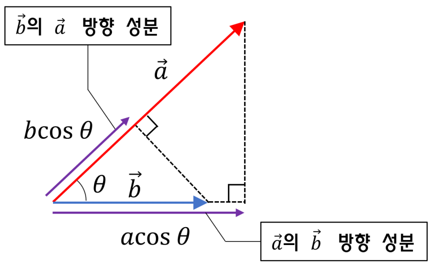
벡터에 벡터 곱하기

- 벡터에 벡터를 곱하는 방법은 곱한 결과가 스칼라이냐 벡터이냐에 따라 두 가지로 분류된다.
- 곱한 결과가 스칼라이면 **스칼라곱**이라 하고 벡터이면 **벡터곱**이라 한다.

스칼라곱: 점곱

- 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 점곱은 $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 표기되고 다음처럼 정의된다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \text{ 또는 } ab\cos\theta$$



- 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 수직이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}$은 0이다.
- 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 평행이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 크기는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 크기를 곱한 것과 같다. 즉, $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = ab$.
- 점곱은 교환법칙을 만족한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

벡터곱: 가위곱

- 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 가위곱은 $\vec{a}\times\vec{b}$로 표기하고 다음처럼 정의된다.

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}$$

- 벡터 $\vec{a}\times\vec{b}$의 크기는 $\vec{a},\vec{b}$의 크기 a,b와 그들이 만드는 내각 θ으로 표현될 수 있다.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\theta$$

- $\vec{a}\times\vec{b}$의 방향은 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 평면에 수직이고 정확한 방향은 **오른손 규칙**으로 결정된다.
- 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 평행이면 $\vec{a}\times\vec{b}$은 0이다.
- 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 수직이면 $\vec{a}\times\vec{b}$의 크기는 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 크기를 곱한 것과 같다. 즉, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab$.
- 가위곱에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$$