LECTURE 19

물리학과 공학의 주된 목표는 같은 운동이 되풀이되는 진동 현상의 이해와 제어이다. 이 단원에서는 가장 기본적 진동인 단순조화운동과 단순조화 각운동에 대해 알아본다.

15.1 단순조화운동

학습목표

☞ 단순조화운동이 어떻게 정의되는지를 알아보고 그와 관련된 힘의 법칙에 대해 조사한다.

진동자와 진동수

- 같은 운동이 일정한 시간간격(**주기**; period) T로 되풀이되는 현상을 일컬어 **진동**(oscillation)이라고 하고, 진동이 일어나는 계를 가리켜 **진동자**(oscillator)라고 말한다.
- 진동자에서 단위시간 동안 주기적인 현상이 일어난 횟수를 일컬어 **진동수**(frequency) f이라고 한다.
- 진동수 f와 주기 T는 역수의 관계에 있다.

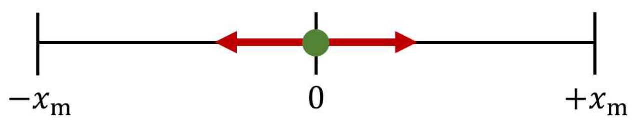
$$f = 1/T$$

- 진동수의 SI 단위는 독일 물리학자 Heinrich Rudolf Hertz의 이름에서 따온 **헤르츠**(Hz)이다.

$$1 \text{ 헤르츠} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

단순조화운동

x축의 원점을 중심으로 좌우로 같은 거리 x_m만큼 반복하여 움직이는 입자를 고려하자.



- 이때 입자의 위치함수 $x(t)$가 다음처럼 표현되면 그 운동을 가리켜 **단순조화운동**(simple harmonic motion; SHM)이라고 말한다.

$$x(t) = x_{\mathrm{m}}\cos\theta = x_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi)$$

- 위치변화의 최대치를 나타내는 상수 x_{m}를 **진폭**(amplitude)이라고 하고, 코사인값을 결정하는 변수 θ를 **위상**(phase)이라고 한다.

$$\theta(t) = \omega t + \phi$$

- 위상함수에서 $\theta(0)$을 나타내는 상수 ϕ를 **위상상수** 혹은 **위상각도**이라고 하고, 위상의 시간 변화율을 나타내는 상수 ω를 **각진동수**(angular frequency)이라고 한다.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- T의 정의로 말미암아 각진동수는 2π와 진동수 f의 곱과 같다.

$$x(t) = x(t+T) \quad\Rightarrow\quad \omega T = 2\pi \quad\Rightarrow\quad \therefore\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- 각진동수의 SI 단위는 각속도의 SI 단위(rad/s)와 같다.
- 각진동수와 각속도는 같은 기호 ω로 그 물리량을 표기한다.
- 그러나 각진동수는 스칼라량이고 각속도는 벡터량이다.
- 라디안(rad)은 무차원 단위이므로 Hz와 rad/s은 차원이 같다.

단순조화운동의 속도

입자가 단순조화운동을 할 때 그 속도함수 $v(t)$는 다음과 같다.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi)\right] = -\omega x_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi)$$

- 여기서 속도변화의 최대치를 나타내는 상수 ωx_{m}를 **속도진폭** v_{m}이라고 한다.

$$v_{\mathrm{m}} = \omega x_{\mathrm{m}} \quad\Rightarrow\quad v(t) = -v_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi)$$

- $t = 0$의 위치 x_0와 속도 v_0은 위상상수 ϕ을 결정한다.

$$\cos\phi = \frac{x_0}{x_{\mathrm{m}}} \quad \& \quad \sin\phi = -\frac{v_0}{v_{\mathrm{m}}}$$

단순조화운동의 가속도

입자가 단순조화운동을 할 때 그 가속도함수 $a(t)$는 다음과 같다.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\omega x_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi)\right] = -\omega^2 x_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi)$$

- 여기서 가속도변화의 최대치를 나타내는 상수 $\omega^2 x_{\mathrm{m}}$를 **가속도진폭** a_{m}이라고 한다.

$$a_{\mathrm{m}} = \omega^2 x_{\mathrm{m}} \quad\Rightarrow\quad a(t) = -a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi)$$

- 가속도 함수 $a(t)$는 위치 함수 $x(t)$로 표현될 수 있다.

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

- 단순조화운동에서 가속도 a는 원점에서 입자까지의 변위 x에 비례하지만 부호는 반대이며, 비례상수는 각진동수 ω의 제곱이다.

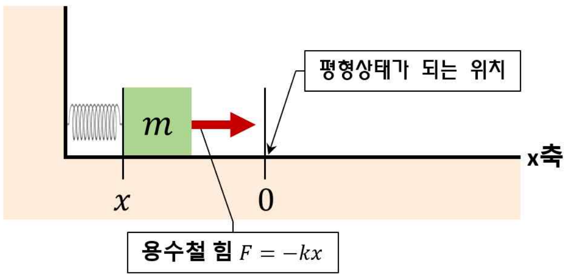
단순조화운동에 대한 힘의 법칙

질량이 m인 입자가 단순조화운동을 할 때 입자에 작용하는 알짜힘 F은 Newton의 제2법칙으로 말미암아 다음처럼 표현된다.

$$F = ma = m(-\omega^2 x) = -(m\omega^2)x$$

- 힘 F의 크기는 원점에서 입자까지의 거리 $|x|$에 비례하지만, 그 방향은 항상 원점을 향한다.
- 즉, 단순조화운동을 수행시키는 힘은 **복원력**이다.
- 다르게 말하자면, 알짜힘이 복원력인 계는 단순조화운동을 한다.
- 질량이 m인 토막이 다음처럼 용수철 상수가 k인 용수철에 연결되어 마찰이 없는 수평면 위에 놓여있으면 토막은 Hooke의 법칙에 말미암아 다음과 같은 각진동수를 지닌 단순조화운동을 한다.

$$F = -kx \quad \Rightarrow \quad k = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{또는} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



- 토막-용수철 계처럼 단순조화운동을 하는 계를 일컬어 **단순조화진동자**(simple harmonic oscillator)이라고 하고, 그러한 진동을 가리켜 **단순조화진동**(simple harmonic oscillation)이라고 말한다.
- 단순조화진동자의 주기 T는 물체의 질량 m과 용수철 상수 k로 말미암아 다음처럼 표현될 수 있다.

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

15.2 단순조화운동의 에너지

학습목표 ☞ 단순조화진동자의 역학에너지에 대해 알아본다.

선형진동자의 역학에너지

- 단순조화진동자는 보존계이므로 그 역학에너지는 변하지 않는다.
- 기준점 $x=0$에서의 퍼텐셜에너지를 0으로 잡았을 때 단순조화진동자의 퍼텐셜에너지 $U(t)$는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$U(t)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

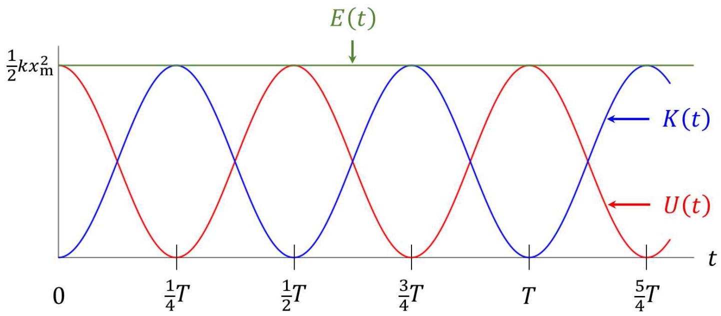
- 단순조화진동자의 운동에너지 $K(t)$는 다음과 같다.

$$K(t)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2x_{\mathrm{m}}^2\sin^2(\omega t+\phi)=\frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

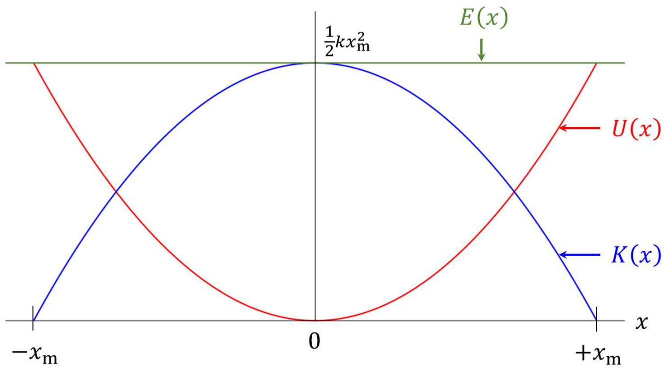
- 단순조화진동자의 역학에너지 $E(t)$는 시간에 관계없이 일정하다.

$$E(t)=U(t)+K(t)=\frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 \text{ 또는 } \frac{1}{2}m\omega^2x_{\mathrm{m}}^2$$

- 아래 도표는 $\phi=0$일 때의 $U(t),K(t),E(t)$을 그린 것이다.



- 아래 도표는 $\phi=0$일 때의 $U(x),K(x),E(x)$을 그린 것이다.



- 역학에너지 E는 진폭 x_{m}을 결정하고, 그 역도 성립한다.

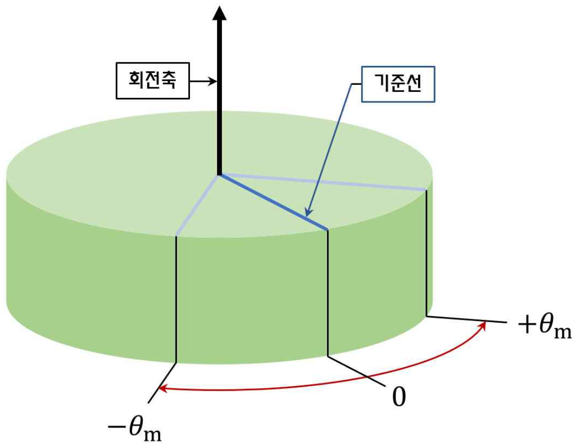
15.3 단순조화 각진동자

학습목표

☞ 단순조화 각진동자가 무엇인지를 알아보고 그 운동을 기술한다.

단순조화 각운동

고정된 회전축의 정해진 각위치 $\theta=0$을 중심으로 반시계방향과 시계방향으로 같은 각도 θ_{m}만큼 반복하여 회전하는 강체를 고려하자.



- 이때 강체의 각위치함수 $\theta(t)$가 다음처럼 표현되면 그 운동을 가리켜 **단순조화 각운동**(angular SHM)이라고 말한다.

$$\theta(t)=\theta_{\mathrm{m}}\cos\tilde{\theta}=\theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$$

- 각도변화의 최대치를 나타내는 상수 θ_{m}를 가리켜 **각진폭**이라고 하고, 코사인값을 결정하는 변수 $\tilde{\theta}$를 일컬어 **위상**이라고 한다.
- 위상 $\tilde{\theta}$은 각위치 θ가 아니다.

$$\tilde{\theta}(t)=\tilde{\omega}t+\tilde{\phi}$$

- SHM처럼 $\tilde{\theta}(0)$을 나타내는 상수 $\tilde{\phi}$를 일컬어 **위상상수**이라고 하고, 위상의 시간 변화율을 나타내는 상수 $\tilde{\omega}$를 가리켜 **각진동수**이라고 말한다. ※위상은 각위치가 아니며, 각진동수는 각속도가 아니다.

$$\tilde{\omega}=\frac{d\tilde{\theta}}{dt}$$

각속도

- 각속도 함수 $\omega(t)$는 다음과 같다.

$$\omega(t)=\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\theta_{\mathrm{m}}\cos(\tilde{\omega}t+\tilde{\phi})\right]=-\tilde{\omega}\theta_{\mathrm{m}}\sin(\tilde{\omega}t+\tilde{\phi})$$

- 여기서 각속도변화의 최대치를 나타내는 상수 $\tilde{\omega}\theta_{\mathrm{m}}$를 일컬어 **각속도진폭** ω_{m}이라고 한다.

$$\omega_{\mathrm{m}}=\tilde{\omega}\theta_{\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega(t)=-\omega_{\mathrm{m}}\sin(\tilde{\omega}t+\tilde{\phi})$$

- 위상상수 $\tilde{\phi}$은 $t=0$일 때의 각위치 θ_0와 각속도 ω_0로 결정된다.

$$\cos\tilde{\phi}=\frac{\theta_0}{\theta_{\mathrm{m}}} \quad \& \quad \sin\tilde{\phi}=-\frac{\omega_0}{\omega_{\mathrm{m}}}$$

각가속도

- 각가속도함수 $\alpha(t)$는 다음처럼 표현된다.

$$\alpha(t)=\frac{d\omega(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[-\tilde{\omega}\theta_{\mathrm{m}}\sin(\tilde{\omega}t+\tilde{\phi})\right]=-\tilde{\omega}^2\theta_{\mathrm{m}}\cos(\tilde{\omega}t+\tilde{\phi})$$

- 여기서 각가속도변화의 최대치를 나타내는 상수 $\tilde{\omega}^2\theta_{\mathrm{m}}$를 **각가속도 진폭** α_{m}이라고 한다.

$$\alpha_{\mathrm{m}}=\tilde{\omega}^2\theta_{\mathrm{m}} \quad\Rightarrow\quad \alpha(t)=-\alpha_{\mathrm{m}}\cos(\tilde{\omega}t+\tilde{\phi})$$

- 각가속도 함수 $\alpha(t)$는 각위치 함수 $\theta(t)$로 표현될 수 있다.

$$\alpha(t)=-\tilde{\omega}^2\theta(t)$$

토크의 법칙

회전관성이 I인 강체가 단순조화 각운동을 할 때 강체에 작용하는 알짜 토크 τ은 회전운동에 대한 Newton의 제2법칙으로 말미암아 다음처럼 표현된다.

$$\tau=I\alpha=I(-\tilde{\omega}^2\theta)=-(I\tilde{\omega}^2)\theta$$

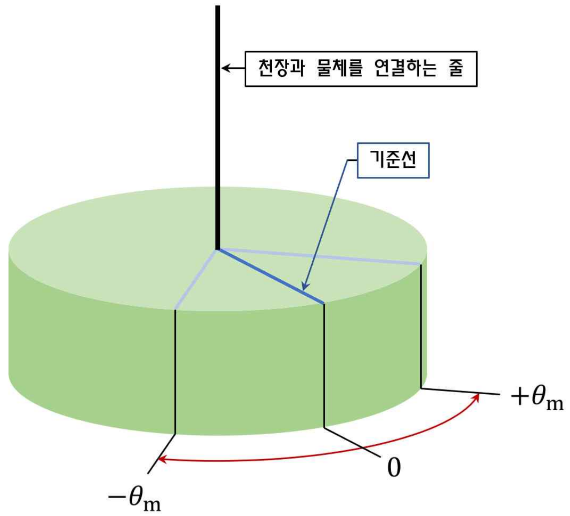
- 토크 τ의 크기는 $|\theta|$에 비례하지만, 그 방향은 항상 평형 각위치 $(\theta=0)$를 향한다.
- 즉, 단순조화 각운동을 수행시키는 토크는 **복원 토크**이다.
- 다르게 말하자면, 알짜 토크가 복원 토크인 계는 단순조화 각운동을 한다.

비틀림과 토크

줄에 연결되어 천장에 매달려 있는 다음과 같은 원판을 고려하자.

❖ 원판의 회전관성은 I이다.
❖ 줄은 원판의 중심에 연결되어 있다.
❖ 원판의 밀도는 균일하다. 즉, 원판의 질량중심은 원판의 중심이다.
❖ 원판을 각도 θ만큼 회전시키면 원판에 다음과 같은 복원 토크가 작용한다.

$\tau=-\kappa\theta$ **(각변위에 관한 Hooke의 법칙)**



- κ는 **비틀림상수**이며 줄의 길이, 지름, 재질 등에 따라 결정된다.
- 이러한 장치를 일컬어 **비틀림진자**이라고 한다.
- 이 원판은 다음과 같은 각진동수를 지닌 단순조화 각운동을 한다.

$$\tau = -\kappa\theta \quad \Rightarrow \quad \kappa = I\tilde{\omega}^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{또는} \quad \tilde{f} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

- 비틀림진자처럼 단순조화 각운동을 하는 계를 일컬어 **단순조화 각진동자**(angular simple harmonic oscillator)이라고 하고, 그 진동을 가리켜 **단순조화 각진동**(angular simple harmonic oscillation)이라고 말한다.
- 단순조화 각진동자의 주기 $\tilde{T}$는 물체의 회전관성 I과 비틀림 상수 κ로 말미암아 다음처럼 표현될 수 있다.

$$\tilde{T} = \frac{1}{\tilde{f}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$