LECTURE 07

에너지에 대한 탐구는 물리학의 기본 목표 중 하나이고 에너지의 확보와 효율적 사용은 인류의 문명에 필수적이다. 그러나 에너지라는 용어는 너무나 광범위해서 명쾌하게 정의하기가 쉽지 않다. 이 단원에서는 운동에너지, 일, 일률을 정의하고 다른 물리량과의 관계를 알아본다.

7.1 운동에너지

학습목표

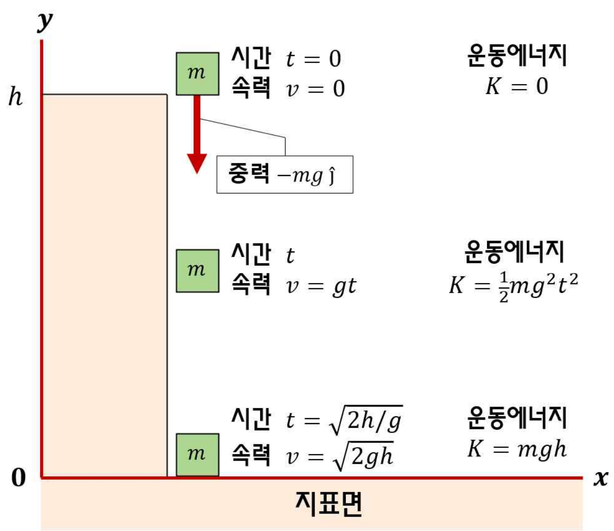
☞ 운동에너지가 어떻게 정의되는지 알아본다.

고전적 운동에너지

- **운동에너지** K는 물체의 운동상태와 관련된 에너지이다.
- 질량이 m인 물체가 광속 c보다 훨씬 작은 속력 v로 움직일 때 물체의 운동에너지 K는 다음처럼 정의된다.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ (고전적 운동에너지)}$$

예제



상대론적 운동에너지

- 질량이 m인 물체가 광속 c에 가까운 속력 v로 움직일 때 물체의 운동에너지 K는 다음처럼 정의된다.

$$K = \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right] mc^2 \quad \text{(상대론적 운동에너지)}$$

에너지 단위

- 에너지의 SI 단위는 영국 과학자 James Prescott Joule의 이름을 따서 **줄**(J)이라고 하고 다음처럼 정의된다.

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg{\cdot}m^2/s^2}$$

7.2 일과 운동에너지

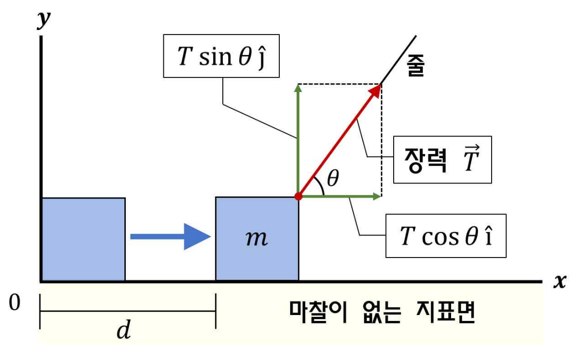
학습목표 ☞ 일이 어떻게 정의되는지를 알아본다.

양의 일과 음의 일

- **일** W는 물체에 가해진 힘을 통해서 외부에서 물체로 또는 물체에서 외부로 전달된 에너지이다.
- 외부에서 물체로 전달된 에너지는 **양의 일**이다.
- 물체에서 외부로 전달된 에너지는 **음의 일**이다.
- ‘일’은 전달된 에너지이고, ‘일을 한다는 것’은 에너지를 전달하는 행위이다.
- 일은 에너지와 같은 단위를 갖는 스칼라량이다.

예제1

❖ 아래 그림처럼 질량이 m인 물체에 일정한 장력 $\vec{T}$을 작용하여 x축으로 거리 d만큼 이동시킨다고 가정하자.



- 물체에 작용하는 y축의 힘들은 평형을 이룬다.

$$\vec{F}_{\mathrm{N}} + \vec{F}_{\mathrm{g}} + T_y \hat{\mathrm{j}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore\ F_{\mathrm{N}} = mg - T\sin\theta$$

- 물체의 가속도 $\vec{a}$는 장력 $\vec{T}$의 x축 성분에 의해서 결정된다.

$$T_x \hat{\mathrm{i}} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \therefore\ \vec{a} = (T/m)\cos\theta\, \hat{\mathrm{i}}$$

- 물체는 x축 방향으로 등가속도 운동을 하므로 물체의 초기속력 v_0과 나중속력 v_1 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$v_1^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} = \frac{2Td\cos\theta}{m} \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Td\cos\theta$$

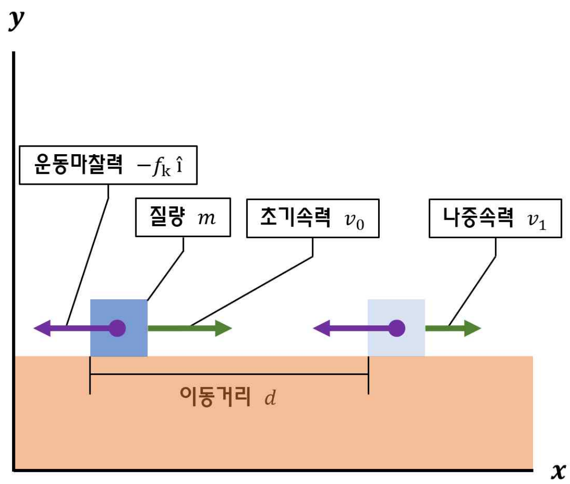
- 장력이 물체에 한 일은 물체의 운동에너지 변화량과 같다.

$$W = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Td\cos\theta = \vec{T}\cdot\Delta\vec{r}$$

- W은 양의 값이므로 물체는 외부에서 $Td\cos\theta$만큼의 에너지를 전달받는다.

예제2

❖ 아래 그림처럼 일정한 운동마찰력만이 작용하는 물체가 x축으로 d만큼 이동했다고 가정하자.



- 물체에 작용하는 y축의 힘들은 평형을 이룬다.

$$\vec{F}_N + \vec{F}_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \ F_N = mg$$

- 물체의 가속도 $\vec{a}$는 운동마찰력 $-f_k\,\hat{i}$에 의해서 결정된다.

$$-f_k\,\hat{i} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \vec{a} = -(f_k/m)\,\hat{i}$$

- 물체는 x축 방향으로 등가속도 운동을 하므로 물체의 초기속력 v_0과 나중속력 v_1 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$v_1^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} = -2f_kd/m \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_kd$$

- 마찰력이 물체에 한 일은 물체의 운동에너지 변화량과 같다.

$$W = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_kd$$

- W은 음의 값이므로 물체는 외부에 f_kd만큼의 에너지를 전달한다.

알짜일

- 물체에 두 개 이상의 힘이 작용할 때 각 힘이 물체에 한 일의 합을 **알짜일**이라고 하고 그것은 알짜힘이 물체에 한 일과 같다.
- 알짜일 W은 물체의 운동에너지 변화량 ΔK과 같다.

$$\Delta K = K_f - K_i = W \quad \Rightarrow \quad \therefore \ K_f = K_i + W \ \text{(일—운동에너지 정리)}$$

- 알짜일이 양의 값이면 물체의 운동에너지는 증가한다.
- 알짜일이 음의 값이면 물체의 운동에너지는 감소한다.

등가속도 운동과 알짜일

질량이 m인 물체가 일정한 가속도 $\vec{a}$로 운동을 한다고 하자.
즉, 물체는 등가속도 운동을 한다.

- 그때 물체의 초기속력 v_0과 나중속력 v_1에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$v_1^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = m\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$$

- 물체의 알짜일 W 혹은 운동에너지 변화량 ΔK은 물체의 알짜힘 $\vec{F}_{\text{net}}$과 변위 $\Delta\vec{r}$의 내적과 같다.

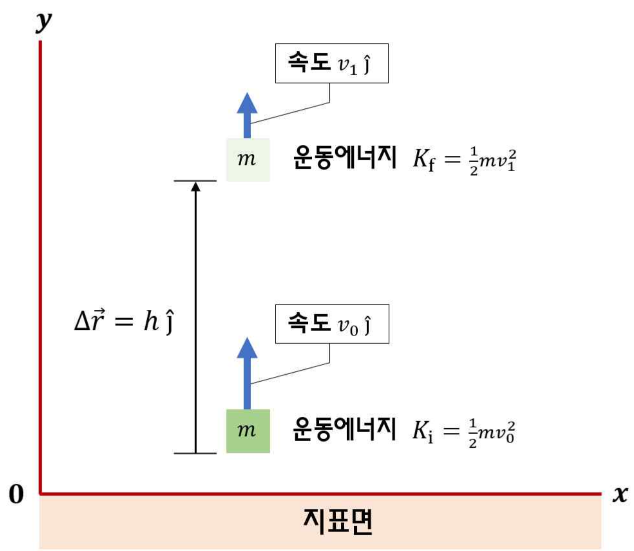
$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = m\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} = \vec{F}_{\text{net}}\cdot\Delta\vec{r}$$

7.3 중력이 한 일

학습목표 ☞ 물체에 작용하는 중력이 하는 일을 알아본다.

중력이 한 일 (음의 일)

❖ 물체를 수직 위로 던진 경우를 고려하자.



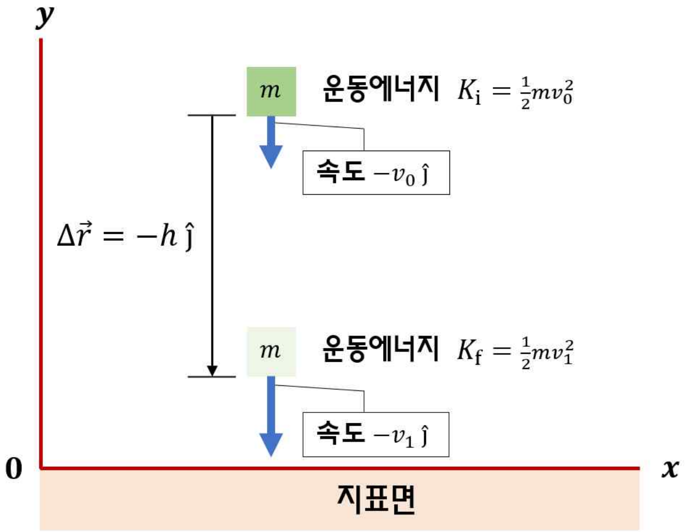
- 물체의 알짜힘은 중력 $\vec{F}_g$이므로 물체는 등가속도 운동을 한다.
- 물체가 수직으로 올라간 높이가 h일 때 물체의 알짜일 또는 중력이 물체에 한 일은 다음과 같다.

$$W = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = -mgh$$

- W은 음의 값이므로 물체는 외부에 에너지를 전달한다.

중력이 한 일 (양의 일)

❖ 중력만이 작용하는 물체를 수직 아래로 던진 경우를 고려하자.



- 물체의 알짜힘은 중력 $\vec{F}_g$이므로 물체는 등가속도 운동을 한다.
- 물체가 수직 아래로 떨어진 깊이가 h일 때 물체의 알짜일 또는 중력이 물체에 한 일은 다음과 같다.

$$W = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = mgh$$

- W은 양의 값이므로 물체는 외부에서 에너지를 전달받는다.

물체를 들어 올릴 때 한 일

❖ 수직 위 방향의 힘 $\vec{F}$를 작용하여 물체를 수직 위로 들어올리는 경우를 고려하자.

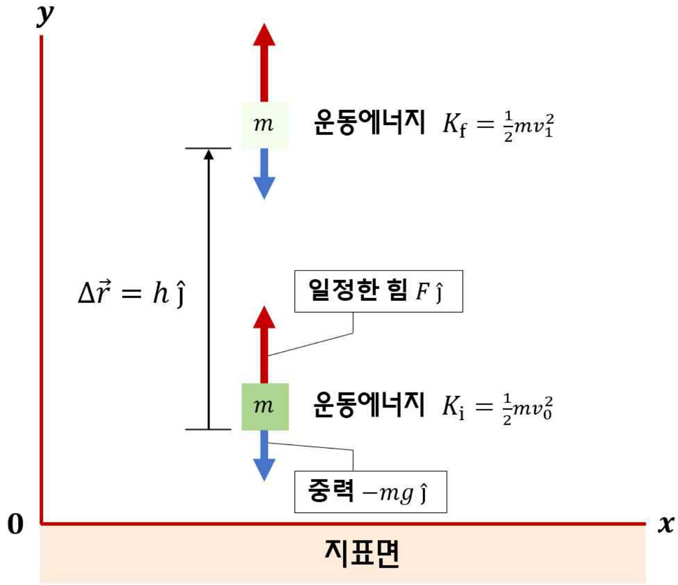
- 알짜힘 $\vec{F}_{\text{net}}$은 힘 $\vec{F}$과 중력 $\vec{F}_g$의 벡터합이다.

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F} + \vec{F}_g = (F - mg)\,\hat{j}$$

- h가 물체를 들어올린 높이일 때 알짜일 W은 다음과 같다.

$$W = \vec{F}_{\text{net}} \cdot \Delta\vec{r} = Fh - mgh$$

- Fh와 $-mgh$은 각각 힘 $\vec{F}$가 물체에 한 일과 중력이 물체에 한 일이다. W가 양의 값이면 물체는 외부에서 에너지를 전달받고 그것이 음의 값이면 물체는 외부에 에너지를 전달한다.



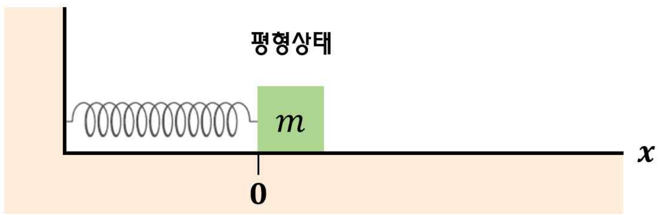
7.4 용수철 힘이 한 일

학습목표	☞ 물체에 작용하는 용수철이 하는 일을 알아본다.

용수철 힘

❖ 용수철의 한쪽 끝은 벽에 고정되어 있고 다른 쪽 끝에는 물체가 매달려 있으며 물체가 놓여있는 표면은 마찰이 없다고 하자.

- 용수철이 늘어나거나 줄어들지 않은 **평형상태**에 있을 때 용수철은 물체에 어떠한 힘도 가하지 않는다.

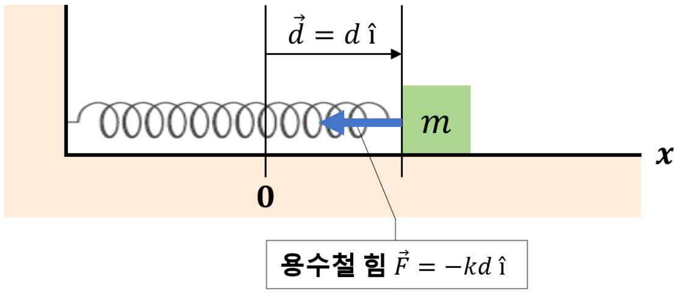


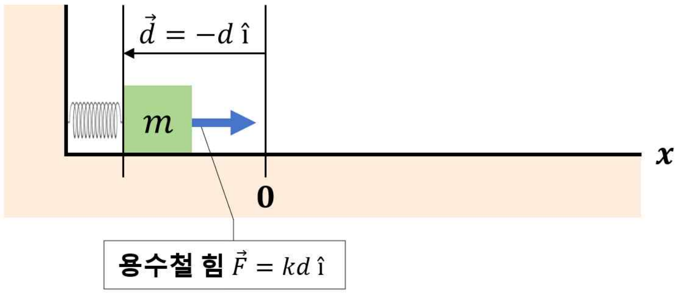
- 용수철이 늘어나거나 당겨진 상태에 있을 때 물체에는 평형위치 0로부터의 변위 $\vec{d}$에 비례한 **용수철 힘** $\vec{F}$가 작용한다.

$$\vec{F} = -k\vec{d} \quad \text{(Hooke의 법칙)}$$

- k는 **용수철상수**로서 용수철의 탄성을 나타내는 양이다.
- 용수철을 평형상태로 복귀시키려는 용수철 힘을 **복원력**이라 한다.
- Hooke의 법칙은 x축의 직선운동에서 다음처럼 표현된다.

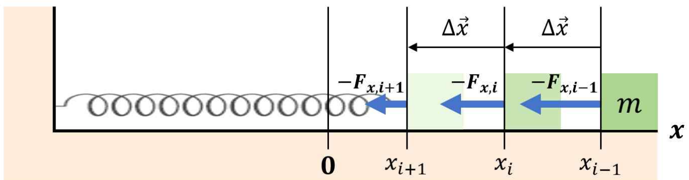
$$F_x = -kx \quad \text{(Hooke의 법칙)}$$





용수철 힘이 한 일

❖ 용수철에 매달린 물체를 어떤 위치에서 정지시켰다가 놓았다고 가정하자.



- 용수철 힘은 물체의 위치에 따라 다르므로 물체는 등가속도 운동을 하지 않는다.
- 물체의 변위를 매우 잘게 나눈 미소부분 $\Delta\vec{x}(=-\Delta x)$에서 용수철 힘의 변화는 무시할 수 있다.
- 각 미소부분에서 용수철 힘은 (대략) 한 값 $F_{x,i}$을 가진다. 즉, 등가속도 운동을 한다.

$$F_{x,i} = -kx_i$$

- 용수철 힘이 물체에 한 일 W은 각 미소부분에서 용수철 힘이 물체에 한 일 ΔW_i을 모두 합친 것과 (대략) 같다.

$$W = \sum_i \Delta W_i = -\sum_i F_{x,i}\Delta x = -\sum_i kx_i\Delta x$$

- Δx가 0으로 가는 극한을 취하면 알짜일 W은 다음처럼 물체의 초기위치 x_i와 나중위치 x_f로 표기된다.

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} -F_x dx = -k\int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} x dx = \frac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2$$

7.5 변하는 힘이 한 일

학습목표

☞ 변하는 힘이 위치의 함수로 주어졌을 때 이 힘이 물체에 한 일을 일차원 혹은 그 이상의 차원에서 계산한다.

1차원 분석

❖ 어떤 물체가 x축의 x_{i}에서 $x_{\mathrm{f}}(> x_{\mathrm{i}})$까지 방향의 변화 없이 움직인다고 가정한다.

❖ $\vec{F}$은 x축 방향으로 작용하는 힘이라고 가정하자. 즉, $\vec{F} = F_x\,\hat{\mathrm{i}}$.

❖ $\vec{F}$은 위치 x에 따라 변한다고 가정하자. 즉, $F_x = F(x)$.

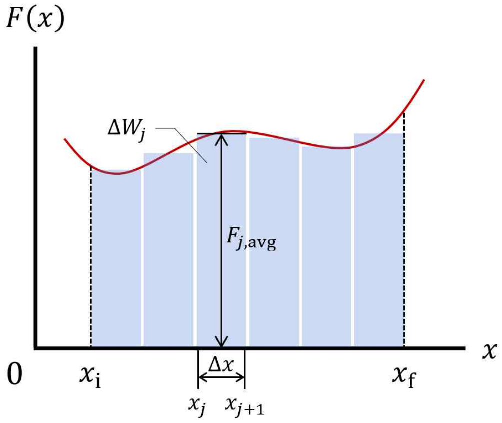
- 물체의 총 이동거리 $x_{\mathrm{f}} - x_{\mathrm{i}}$를 너비가 Δx인 수많은 미소구간으로 나누었을 때 각 구간에서 힘의 변화는 무시할 수 있다.
- 각 미소부분에서 힘 $F(x)$은 (대략) 한 값 $F_{j,\mathrm{avg}}$을 가진다.

  여기서 $F_{j,\mathrm{avg}}$은 $F_{j,\mathrm{avg}}\Delta x = \int_{x_j}^{x_{j+1}} F(x)dx$을 만족하는 값이다.
- 이런 식으로 물체에 힘이 작용할 때 전체 알짜일은 각 미소부분에서의 알짜일 ΔW_i을 합친 것과 같다.

$$\sum_j \Delta W_j = \sum_j F_{x,j}\Delta x = \int_{x_{\mathrm{i}}}^{x_{\mathrm{f}}} F(x)dx$$

- Δx가 0으로 가는 극한을 취하면 힘 $\vec{F}$이 물체에 한 일 W을 적분 형태로 얻을 수 있다.

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_j F_{x,j}\Delta x = \int_{x_{\mathrm{i}}}^{x_{\mathrm{f}}} F(x)dx$$



3차원 분석

❖ 어떤 물체에 3차원 힘 $\vec{F}$이 작용한다고 가정하자.

$$\vec{F} = F_x\,\hat{\mathrm{i}} + F_y\,\hat{\mathrm{j}} + F_z\,\hat{\mathrm{k}}$$

- F_x,F_y,F_z은 각각 x,y,z의 함수이다.
- 물체의 미소변위 $d\vec{r}$는 힘 $\vec{F}$처럼 분해될 수 있다.

$$d\vec{r} = dx\,\hat{\mathrm{i}} + dy\,\hat{\mathrm{j}} + dz\,\hat{\mathrm{k}}$$

- 미소변위 $d\vec{r}$ 동안에 힘 $\vec{F}$가 물체에 한 일 dW은 $\vec{F}$와 $d\vec{r}$의 내적과 같다.

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

- 좌표가 $(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}},z_{\mathrm{i}})$인 초기위치 $\vec{r}_{\mathrm{i}}$에서 좌표가 $(x_{\mathrm{f}},y_{\mathrm{f}},z_{\mathrm{f}})$인 최종위치 $\vec{r}_{\mathrm{f}}$까지 물체가 움직이는 동안 힘 $\vec{F}$가 한 일 W은 다음과 같다.

$$W = \int_{\vec{r}_{\mathrm{i}}}^{\vec{r}_{\mathrm{f}}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_{\mathrm{i}}}^{x_{\mathrm{f}}} F_x dx + \int_{y_{\mathrm{i}}}^{y_{\mathrm{f}}} F_y dy + \int_{z_{\mathrm{i}}}^{z_{\mathrm{f}}} F_z dz$$

7.6 일률

학습목표

☞ 평균 일률과 순간 일률이 어떻게 정의되는지를 알아본다.

평균일률

- 시간간격 Δt 동안에 힘이 ΔW의 일을 한다면 힘의 **평균 일률**은 다음과 같다.

$$P_{\mathrm{avg}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

순간일률

- 평균 일률의 시간간격 Δt을 0으로 접근시킬 때 그 극한값을 **순간 일률** 또는 **일률** P라고 한다.

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{또는} \quad = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

SI 단위

- 일률의 SI 단위는 증기기관의 성능을 개량한 James Watt의 이름을 따서 **와트**(W)라고 하고 다음처럼 정의된다.

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{kg{\cdot}m^2/s^3}$$

- 일의 단위는 킬로와트-시(kW·h)처럼 일률과 시간의 관계로 표시할 수 있다.

$$1\ \mathrm{kW{\cdot}h} = (10^3\ \mathrm{W})(3600\ \mathrm{s}) = 3.6 \times 10^6\ \mathrm{J} = 3.6\ \mathrm{MJ}$$