# LECTURE 17

이 단원에서는 Newton의 중력 법칙으로 말미암아 중력 퍼텐셜에너지가 어떻게 계산되는지와 Kepler의 법칙이 어떻게 유도되는지를 설명한다. 또한, 천체를 공전하는 위성에 이 결과들을 어떻게 적용할 수 있는지를 알아본다.

13 중력

13.1 Newton의 중력 법칙
13.2 중력과 중첩원리
13.3 지면 근처의 중력
13.4 지구 내부의 중력
13.5 중력 퍼텐셜에너지
13.6 행성과 위성: Kepler의 법칙
13.7 위성: 궤도와 에너지
13.8 Einstein과 중력

## 13.5 중력 퍼텐셜에너지

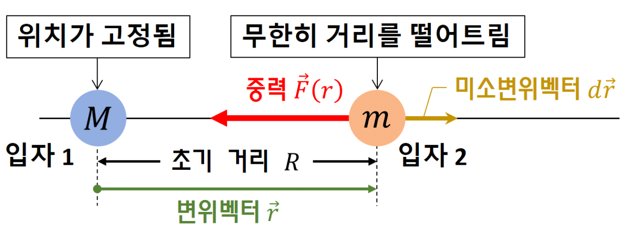
**학습목표**

☞ 두 물체 사이의 중력 퍼텐셜에너지를 알아본다.

**두 입자 사이의 퍼텐셜에너지**

다음처럼 가정된 두 입자의 **(중력) 퍼텐셜에너지** $U$를 고려하자.

❖ 두 입자를 구별하고자 입자 1과 입자 2로 표기한다.
❖ 두 입자는 초기에 $R$만큼 떨어져 있다.
❖ 입자 1의 위치는 고정되어 있다.
❖ 입자 1과 입자 2의 질량은 각각 $M, m$이다.
❖ 두 입자가 무한히 떨어져 있을 때 $U$를 0으로 둔다. 즉, $U_\infty = 0$.




- 입자 1로부터 입자 2를 무한히 떨어트릴 때 중력 $\vec{F}(r)$이 입자 2에게 한 일 $W$은 다음과 같다.

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \quad \& \quad W = \int_{r=R}^{r=\infty} \vec{F}(r)\cdot d\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

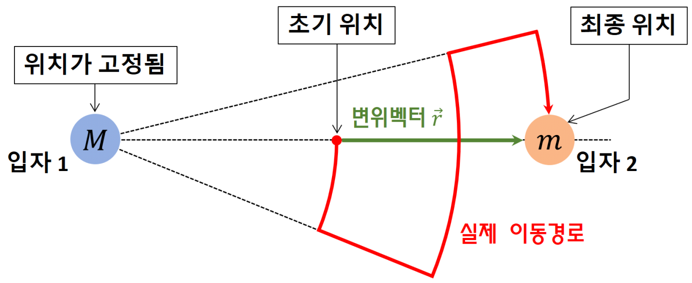
$$W = -GMm\int_{r=R}^{r=\infty}\frac{1}{r^2}dr = -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_{r=R}^{r=\infty} = -\frac{GMm}{R}$$

- 초기 위치에서의 **(중력) 퍼텐셜에너지** $U$는 $W$과 같다.

$$-U = U_\infty - U = \Delta U = -W \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad U = W = -\frac{GMm}{R}$$

- 임의의 유한한 거리에 대한 퍼텐셜에너지는 음수이다.
- $M \gg m$인 경우 $U$을 대체로 입자 2의 퍼텐셜에너지라고 한다.
- 퍼텐셜에너지의 변화 $\Delta U$는 입자의 실제 이동 경로와 무관하다.

$$\Delta U = U_{\rm f} - U_{\rm i}$$



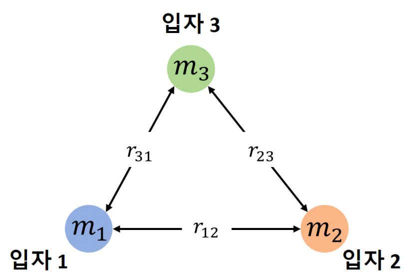

**입자계의 퍼텐셜에너지**

다음처럼 두 개 이상의 입자들로 구성된 입자계의 퍼텐셜에너지 $U$를 고려하자.

❖ 각 입자는 입자 $i$로 표기한다.

❖ 입자 $i$의 질량은 $m_i$이다.

❖ 입자 $i$와 입자 $j$ 사이의 거리는 $r_{ij}$이다.




- 입자 $i$와 입자 $j$ 사이의 퍼텐셜에너지 $U_{ij}$는 다음과 같다.

$$U_{ij} = U_{ji} = -\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}$$

- 계의 퍼텐셜에너지 $U$는 각 입자쌍의 퍼텐셜에너지 $U_{ij}$를 모두 합친 것과 같다.

$$U = \sum_{i<j} U_{ij}$$

**탈출속력**

다음처럼 가정된 지구의 지면에서 질량이 $m$인 입자를 수직 위로 쏘아 올리는 경우를 고려하자.

❖ 지구의 질량은 $M$이고 그 밀도는 균일하다.
❖ 지구는 반지름이 $R$인 완전한 구이다.
❖ 지구는 자전을 하지 않는다.

- 입자의 초기 속력이 $v$일 때 초기 운동에너지 $K_\mathrm{i}$와 초기 퍼텐셜에너지 $U_\mathrm{i}$은 다음과 같다.

$$K_\mathrm{i} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \& \quad U_\mathrm{i} = -\frac{GMm}{R}$$

- 입자가 무한대에서만 정지할 때 그 초기 속력 $v$을 가리켜 **탈출속력**이라고 한다.
- $v$가 탈출속력일 때 무한대에서의 운동에너지 $K_\mathrm{f}$는 0이다.
- 이때 에너지 보존의 원리에 따라 입자의 역학에너지는 0이다.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = K_\mathrm{i} + U_\mathrm{i} = K_\mathrm{f} + U_\mathrm{f} = 0 + 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \text{(탈출속력)}$$

- 탈출속력 $v$는 입자가 지구에서 발사되는 방향과 무관하다.

## 13.6 행성과 위성: Kepler의 법칙

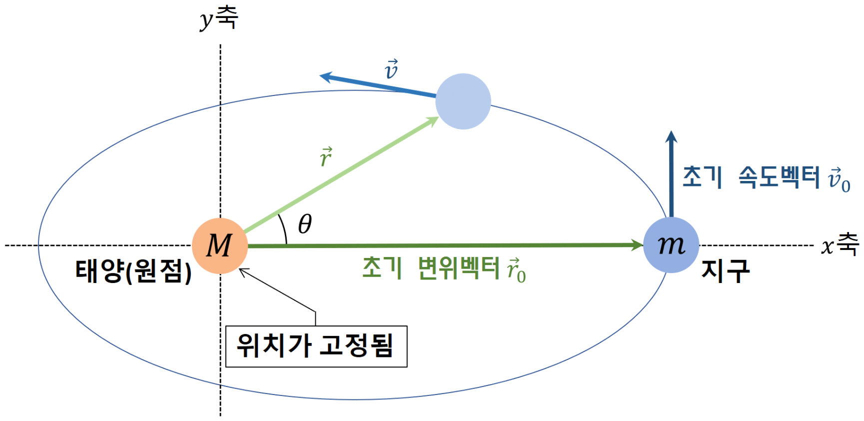
**학습목표** ☞ Kepler의 세 법칙을 이해한다.

**Kepler의 법칙**

다음처럼 가정된 태양과 지구의 공전을 고려하자.

❖ 태양과 지구의 질량은 각각 $M$과 $m$이다.
❖ 태양의 위치는 원점으로 고정되어 있다.
❖ 태양에서 지구까지의 변위벡터는 $\vec{r}$이다.
❖ 지구의 속도는 $\vec{v}$이다.
❖ 초기 변위벡터 $\vec{r}_0$와 초기 속도 $\vec{v}_0$는 수직이다.
❖ $+x$축 방향은 $\vec{r}_0$의 방향과 같다. 즉, $\vec{r}_0 = r_0\,\hat{\mathrm{i}}$.
❖ $+y$축 방향은 $\vec{v}_0$의 방향과 같다. 즉, $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{\mathrm{j}}$.
❖ $+z$축 방향은 오른손 규칙으로 결정된다.
❖ $\vec{r}_0$와 $\vec{r}$가 이루는 각도는 $\theta$이다.
❖ 초기속력 $v_0$은 탈출속력보다 작다.

$$v_0 \le \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad \text{또는} \quad r_0 v_0^2 \le 2GM$$




Kepler의 세 법칙은 Newton의 중력 법칙으로부터 유도될 수 있다.

★ **궤도법칙**: 모든 행성은 태양을 하나의 초점으로 하는 타원 궤도로 운동한다.

★ **면적법칙**: 행성과 태양을 연결하는 선분은 같은 시간 동안 같은 면적의 궤도면을 휩쓸고 지나간다. 즉, 면적 $A$를 휩쓸고 지나가는 비율 $dA/dt$는 일정하다.

★ **주기법칙**: 행성 주기 $T$의 제곱은 행성 타원 궤도에서의 긴 반지름 $a$의 세제곱에 비례한다. 즉, $T^2 \propto a^3$.

면적법칙

- 태양이 지구에 작용하는 중력 $\vec{F}$은 항상 $\vec{r}$의 방향과 반대 방향으로 작용하므로 태양에 관한 지구의 알짜 토크 $\vec{\tau}$는 0이다.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left[ -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \right] = 0$$

- 지구의 알짜 토크는 0이므로 지구의 각운동량 $\vec{l}$은 변하지 않는다.

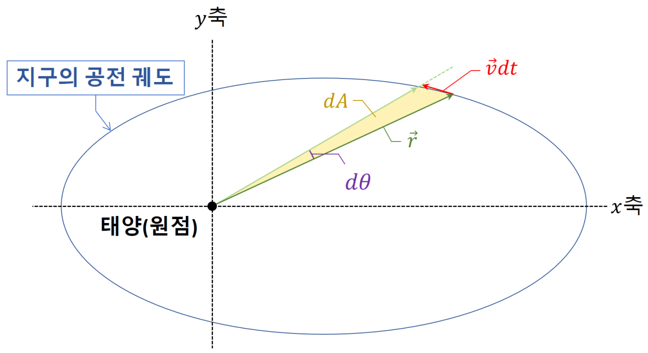
$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \vec{l} = \vec{l}_0 = m(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) = m r_0 v_0 \hat{\mathrm{k}}$$

- 여기서 $\vec{l}_0$은 초기 위치에서의 각운동량이다.
- 각운동량 $\vec{l}$의 크기 $l$는 각운동량 $\vec{l}_0$의 크기 $l_0$와 같다.

$$l = l_0 = m r_0 v_0$$

- 지구와 태양을 연결하는 선분이 휩쓸고 간 **궤도 면적**을 $A$로 표기할 때 미소시간 $dt$에 대한 미소궤도면적 $dA$은 다음과 같다.

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times (\vec{v}\,dt)\right| = \frac{1}{2m}\left|m(\vec{r} \times \vec{v})\right| dt = \frac{|\vec{l}|\,dt}{2m} = \frac{l_0}{2m}dt = \frac{r_0 v_0}{2}dt$$




- 궤도면적 $A$의 시간변화율 $dA/dt$은 상수이다. (**Kepler의 면적법칙**)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r_0 v_0}{2}$$

- 고정된 시간간격 $\Delta t$ 동안 $A$의 변화 $\Delta A$는 불변이다.

$$\Delta A = \frac{r_0 v_0}{2}\Delta t$$

- 지구의 위치에 따라 지구의 공전 속도가 다르다.
- 태양과의 거리가 짧을수록 공전 속도는 빨라진다.
- Kepler의 면적법칙은 각운동량 보존법칙과 동등하다.

궤도법칙

- 속도벡터 $\vec{v}$는 지름성분 $v_r$과 접선성분 $v_t$으로 분해될 수 있다.

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_t\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

- $\dot{r}$은 $r$의 시간 변화율이고 $\dot{\theta}$은 원점에 관한 지구의 각속도이다.
- $\hat{r}$은 $\vec{r}$의 단위벡터이고 $\hat{\theta}$은 반시계방향을 가리키는 단위벡터이다.
- $\hat{r}$와 $\hat{\theta}$은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \quad \& \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = (-\sin\theta)\dot{\theta}\,\hat{x} + (\cos\theta)\dot{\theta}\,\hat{y} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

- 선운동량 $\vec{p}$와 각운동량 $\vec{l}$의 가위곱은 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\frac{d(\vec{p}\times\vec{l})}{dt} = \vec{F}\times\vec{l} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\times mr^2\dot{\theta}\hat{\mathrm{k}} = GMm^2\dot{\theta}\hat{\theta} = \frac{d(GMm^2\hat{r})}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{p}\times\vec{l} = GMm^2\hat{r} + \vec{c}$$

- 여기서 $\vec{c}$는 상수벡터이고, 이것은 $\vec{p}_0$과 $\vec{l}_0$의 가위곱으로 말미암아 결정된다.

$$\vec{p}_0 \times \vec{l}_0 = mv_0\,\hat{\mathrm{j}} \times mr_0v_0\,\hat{\mathrm{k}} = m^2 r_0 v_0^2\,\hat{\mathrm{i}} = GMm^2\hat{r}_0 + (m^2 r_0 v_0^2 - GMm^2)\,\hat{\mathrm{i}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{c} = c_0\,\hat{\mathrm{i}} \ \ \& \ \ c_0 = m^2(r_0 v_0^2 - GM)$$

- 두 연산 $\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$와 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$은 같다.

$$l_0^2 = \vec{l}\cdot\vec{l} = \vec{l}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{l}) = \vec{r}\cdot(GMm^2\hat{r} + \vec{c}) = GMm^2 r + rc_0\cos\theta$$

- $c_0$와 $l_0$은 둘 다 상수이므로 $r$은 $\theta$의 함수이다.

$$r = \frac{l_0^2}{GMm^2 + c_0\cos\theta} = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM + \cos\theta(r_0 v_0^2 - GM)}$$

- 위의 관계식은 $x$와 $y$의 관계식으로 표현될 수 있다.

$$r_0^2 v_0^2 = GM\sqrt{x^2+y^2} + (r_0 v_0^2 - GM)x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(2GM - r_0 v_0^2)^2}{r_0^2 G^2 M^2}\left[x + \frac{r_0(r_0 v_0^2 - GM)}{(2GM - r_0 v_0^2)}\right]^2 + \frac{(2GM - r_0 v_0^2)y^2}{r_0^3 v_0^2} = 1$$

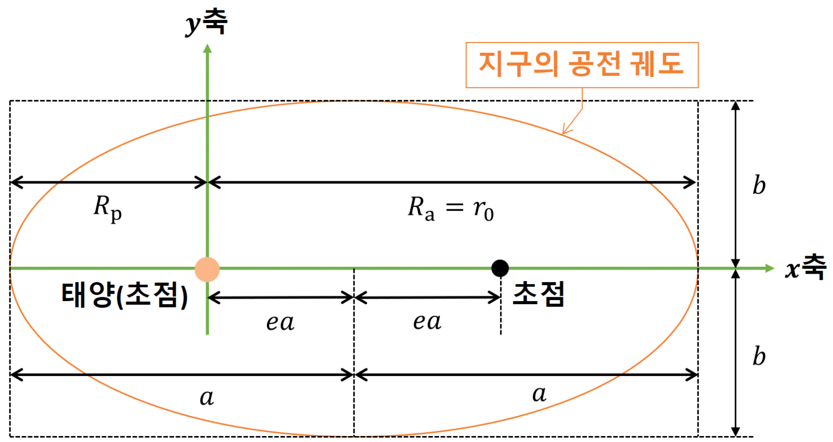
$$\Downarrow$$

$$\frac{(x-ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- 여기서 $a$와 $b$는 타원의 긴 반지름과 짧은 반지름이다.

$$a = \frac{r_0 GM}{2GM - r_0 v_0^2} \ \ \& \ \ b = \frac{r_0^2 v_0}{\sqrt{r_0(2GM - r_0 v_0^2)}} \ \ \& \ \ e = \frac{(GM - r_0 v_0^2)}{GM}$$

- $|e|$는 이심률이다. $2|e|a$는 두 초점까지의 거리이다.
- **근일점 거리** $R_\mathrm{p}$와 **원일점 거리** $R_\mathrm{a}$는 $(1-|e|)a$과 $(1+|e|)a$이다.
- 지구는 태양을 하나의 초점으로 하는 타원 궤도를 그리면서 공전한다. (**Kepler의 궤도법칙**)



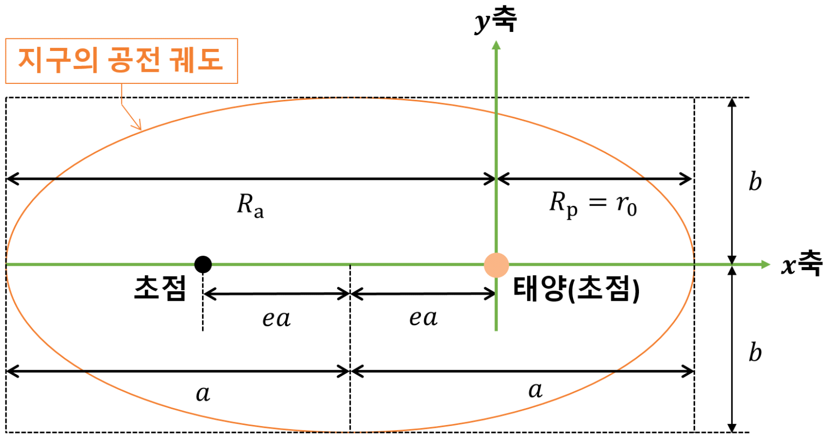
- 지구가 $v_0$의 속력으로 등속 원운동을 하고자 필요한 구심력 크기가 초기 위치에서의 지구에 작용하는 중력 크기보다 작거나 같으면 다음 관계식이 성립한다.

$$\frac{mv_0^2}{r_0} \le \frac{GMm}{r_0^2} \quad \text{또는} \quad r_0 v_0^2 \le GM$$

$$\Downarrow$$

$$R_{\mathrm{p}} = \frac{r_0^2 v_0^2}{2GM - r_0 v_0^2} \quad \& \quad R_{\mathrm{a}} = r_0$$

- 지구와 태양이 충돌하지 않으려면 지구의 반지름과 태양의 반지름을 합친 값이 근일점 거리 $R_{\mathrm{p}}$보다 작아야 한다.




- 지구가 $v_0$의 속력으로 등속 원운동을 하고자 필요한 구심력 크기가 초기 위치에서의 지구에 작용하는 중력 크기보다 크거나 같으면 다음 관계식이 성립한다.

$$\frac{mv_0^2}{r_0} \ge \frac{GMm}{r_0^2} \quad \text{또는} \quad r_0 v_0^2 \ge GM$$

$$\Downarrow$$

$$R_{\mathrm{p}} = r_0 \quad \& \quad R_{\mathrm{a}} = \frac{r_0^2 v_0^2}{2GM - r_0 v_0^2}$$

주기법칙

- 지구가 공전하면서 그리는 타원의 넓이는 $ab\pi$이다.
- 지구와 태양을 연결하는 선분이 휩쓸고 간 궤도 면적 $A$은 시간 $t$에 대하여 일정한 비율로 증가하므로 $A$가 $ab\pi$만큼 되는 데 걸리는 시간은 **공전 주기** $T$와 같다.

$$ab\pi = A = \frac{r_0 v_0}{2} T$$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi r_0^{3/2} GM}{\left(2GM - r_0 v_0^2\right)^{3/2}} \quad \text{또는} \quad \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

- 공전 주기 $T$의 제곱은 긴 반지름 $a$의 세제곱에 비례한다. (**Kepler의 주기법칙**)

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3$$

## 13.7 위성: 궤도와 에너지

| | |
|---|---|
| 학습목표 | ☞ 위성의 운동에너지와 중력 퍼텐셜에너지에 대해 알아본다. |

**위성과 역학에너지**

천체(지구) 주변을 공전하는 **위성**(달)을 고려하자.
❖ 지구와 달을 묶어 닫힌 고립계로 본다.
❖ 지구의 위치가 원점으로 고정되어 있다고 가정한다.
❖ 지구와 달의 질량을 각각 $M$와 $m$로 표기한다.
❖ 지구와 달 사이의 거리를 $r$로 표기한다.
❖ 달의 속력을 $v$로 표기한다.
❖ 무한대에서의 중력 퍼텐셜에너지를 0으로 둔다.

- 달은 타원 궤도를 그리면서 지구를 공전한다.
- 외부력이 작용하지 않으므로 계의 역학에너지 $E$는 보존된다.

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

- 여기서 $K$와 $U$은 운동에너지와 중력 퍼텐셜에너지이다.
- 만약 타원 궤도가 원 궤도이면 중력과 구심력의 관계로 말미암아 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} = -\frac{U}{2} \quad \text{(원 궤도)}$$

- 이때 역학에너지 $E$는 다음과 같다.

$$E = \frac{U}{2} = -\frac{GMm}{2r} \quad \text{또는} \quad -K \quad \text{(원 궤도)}$$

- 달이 원 궤도로 공전하지 않을 때 원지점에서의 거리와 속력이 각각 $r_0$와 $v_0$이면 역학에너지 $E$는 다음과 같다.

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{m\left(2GM - r_0 v_0^2\right)}{2r_0} \quad \& \quad a = \frac{r_0 GM}{2GM - r_0 v_0^2}$$

$$\Downarrow$$

$$E = -\frac{GMm}{2a} \text{ (타원 궤도)}$$

- $a$는 타원 궤도의 긴 반지름이다.