LECTURE 08

물리학의 과제 중 하나는 여러 형태의 에너지, 특히 일상에서 중요한 에너지를 식별하는 것이다. 잘 알려진 에너지로 퍼텐셜에너지가 있다. 이 단원에서는 퍼텐셜에너지와 그와 관련된 에너지 보존에 대해 알아본다.

8.1 퍼텐셜에너지

학습목표

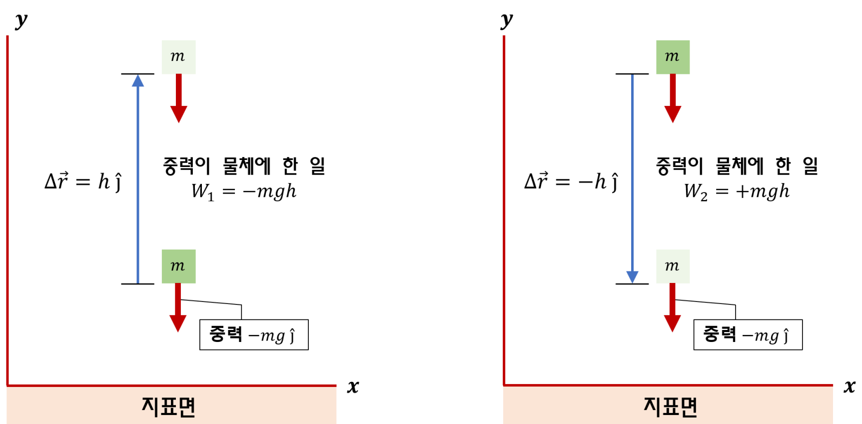
☞ 보존력과 비보존력을 구별하고 퍼텐셜에너지를 이해한다.

보존력과 비보존력

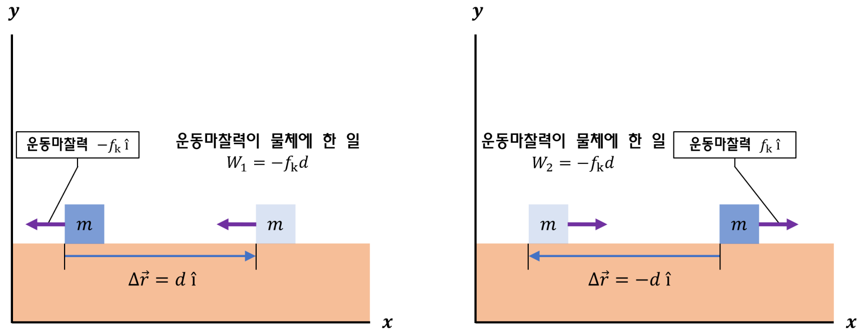
다음과 같은 에너지 전환을 가정하자.

❖ **계**는 둘 또는 그 이상의 물체들로 구성되어 있다.
❖ **힘**은 계에 있는 물체와 계의 나머지 부분 사이에 작용한다.
❖ 계의 짜임새가 변할 때 힘은 물체에 **일** W_1을 한다.
❖ 계의 짜임새가 반대로 변할 때 힘은 물체에 **일** W_2을 한다.

- $W_1 = -W_2$가 항상 성립할 때 작용하는 힘을 **보존력**이라 한다.
- 그렇지 않으면 그 힘을 **비보존력**이라 한다.
- 중력과 용수철 힘은 둘 다 보존력이다.



- 운동마찰력과 항력은 둘 다 비보존력이다.



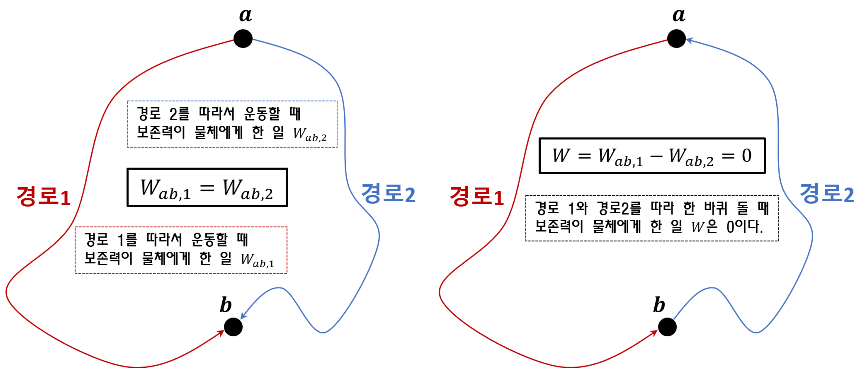
- 운동마찰력은 물체에 무조건 음의 일을 하고, 물체의 운동에너지는 열에너지라고 부르는 에너지로 전환되어 외부로 전달된다.

경로와 무관한 보존력

- 모든 닫힌 경로를 따라 운동하는 입자에 보존력이 한 알짜일은 0이다.
- 두 점 사이에서 움직이는 입자에 작용하는 보존력이 한 일은 입자의 이동경로와 무관하다.

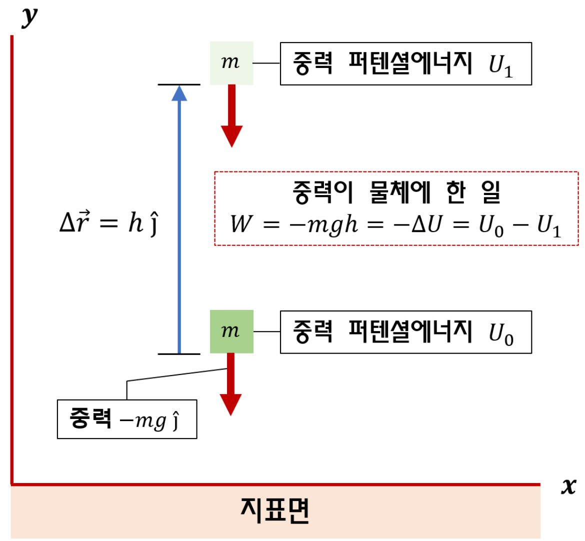
$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

- $W_{ab,1}$은 점 a에서 점 b로 경로 1를 따라서 운동할 때 보존력이 입자에게 한 일이다.
- $W_{ab,2}$은 점 a에서 점 b로 경로 2를 따라서 운동할 때 보존력이 입자에게 한 일이다.



퍼텐셜에너지

- **퍼텐셜에너지** U는 보존력이 작용하는 물체와 계의 짜임새와 관련있는 에너지이고 퍼텐셜에너지 그 자체에는 아무런 의미가 없지만 물체의 상대적인 위치에 따른 **퍼텐셜에너지 변화** ΔU에는 물리적 의미가 있다.
- 물체가 수직 위 방향으로 올라갈 때나 수직 아래 방향으로 떨어질 때 W가 중력이 물체에 한 일이면 $-W$은 **중력 퍼텐셜에너지의 변화량** ΔU이다.



- 물체가 용수철에 매달려 운동할 때 W가 용수철 힘이 물체에 한 일이면 $-W$은 **탄성 퍼텐셜에너지의 변화량** ΔU이다.

퍼텐셜에너지 구하기

보존력 $\vec{F}$가 작용하는 물체를 고려하자.

❖ 물체는 x축으로만 운동한다. 즉, $\vec{r} = x\,\hat{i}$.

❖ 보존력 $\vec{F}$는 x축으로만 작용한다. 즉, $\vec{F} = F(x)\,\hat{i}$.

- x_i와 x_f가 물체의 초기위치와 최종위치일 때 W가 보존력이 물체에게 한 일이면 퍼텐셜에너지 변화 ΔU는 $-W$이다.

$$\Delta U = -W = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

중력 퍼텐셜에너지

y축을 따라 점 y_i에서 점 y_f로 움직이는 질량 m의 입자를 고려하자.

- 중력 $\vec{F}_g(=-mg\,\hat{j})$이 한 일 W은 적분으로 유도될 수 있다.

$$W = \int_{y_i}^{y_f}(-mg)dy = -mg(y_f - y_i)$$

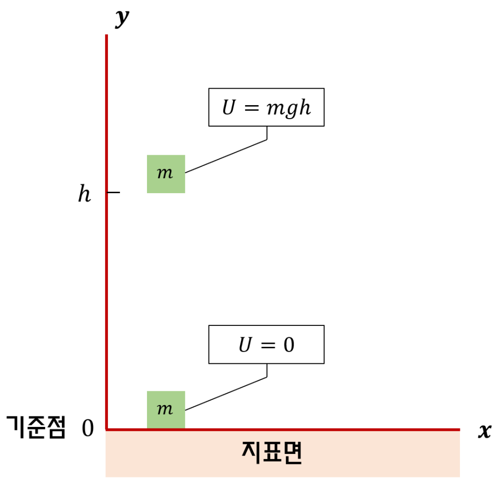
- 중력 퍼텐셜에너지의 변화 ΔU는 $-W$와 같다.

$$\Delta U = -W = mg(y_f - y_i)$$

- 기준점 $y_i = 0$의 중력 퍼텐셜에너지를 0으로 잡았을 때 $y_f = y$에서의 중력 퍼텐셜에너지 U는 다음과 같다.

$$U = mgh$$

- 중력 퍼텐셜에너지는 기준위치에 대한 상대적인 수직높이에만 의존하며 수평위치와는 무관하다.



탄성 퍼텐셜에너지

x축을 따라 점 x_i에서 점 x_f로 움직이는 질량 m의 입자를 고려하자.

- 용수철 힘 $\vec{F}_s(=-kx\,\hat{i})$이 한 일 W은 적분으로 유도될 수 있다.

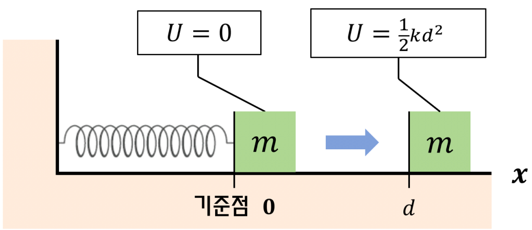
$$W=\int_{x_i}^{x_f}(-kx)dx=-(\frac{1}{2}kx_f^2-\frac{1}{2}kx_i^2)$$

- 탄성 퍼텐셜에너지의 변화 ΔU는 $-W$와 같다.

$$\Delta U=-W=\frac{1}{2}k(x_f^2-x_i^2)$$

- 기준점 $x_i=0$의 탄성 퍼텐셜에너지를 0으로 잡았을 때 $x_f=d$에서의 탄성 퍼텐셜에너지 U는 다음과 같다.

$$U=\frac{1}{2}kd^2$$



8.2 역학에너지 보존

학습목표

☞ 운동에너지와 퍼텐셜에너지의 관계를 이해한다.

역학에너지

- 운동에너지 K와 퍼텐셜에너지 U의 합을 계의 **역학에너지** E_{mec}이라고 한다.

$$E_{\text{mec}} = K + U$$

다음과 같은 계를 가정하자.

- ❖ 비보존력이 작용하지 않고 보존력만이 물체에 작용한다.
- ❖ 계는 **외부와 고립되어** 있다. 즉, 계 내부의 에너지에 변화를 일으키는 어떠한 **외부력**도 계에 작용하지 않는다.

- 보존력이 계의 내부에 있는 물체에 일 W를 할 때 계의 운동에너지 K와 퍼텐셜에너지 U 사이에는 에너지 전환이 일어난다.
- 운동에너지 변화 ΔK는 W과 같다.

$$\Delta K = W$$

- 퍼텐셜에너지 변화 ΔU는 $-W$와 같다.

$$\Delta U = -W$$

- 운동에너지와 퍼텐셜에너지 중 하나가 증가하면 다른 에너지는 같은 양만큼 감소한다.

$$K_{\text{f}} - K_{\text{i}} = \Delta K = -\Delta U = U_{\text{i}} - U_{\text{f}}$$

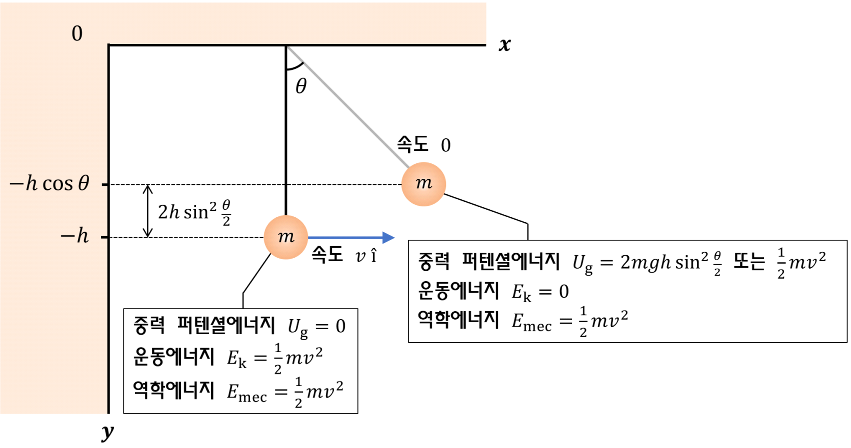
- 계 내부의 다른 두 짜임새에도 계의 역학에너지는 변하지 않는다.

$$E_{\text{mec}} = K_{\text{i}} + U_{\text{i}} = K_{\text{f}} + U_{\text{f}}$$

- 정리하자면, 보존력만 작용하는 고립계에서, 운동에너지와 퍼텐셜에너지는 변할 수 있지만, 그 합인 계의 역학에너지는 변하지 않는다. 이 결과를 **역학에너지 보존원리**라 한다.
- 이 보존원리는 다음처럼도 표현될 수 있다.

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = 0$$

예제



8.3 퍼텐셜에너지 곡선 읽기

학습목표

☞ 퍼텐셜에너지와 입자에 가한 힘의 관계를 이해한다.

역학에너지가 보존되는 계(**보존계**)의 내부 입자를 고려하자.

❖ 입자는 x축을 따라서만 운동한다. 즉, $\vec{r} = x\,\hat{\mathrm{i}}$.

❖ $F(x)$은 입자에 작용하는 보존력 함수이다. 즉, $\vec{F} = F(x)\,\hat{\mathrm{i}}$.

❖ $U(x)$는 그 보존력에 해당하는 퍼텐셜에너지 함수이다.

보존력과 퍼텐셜에너지

- 입자가 거리 Δx만큼 움직일 때 보존력 $\vec{F}$이 입자에 한 일 W는 $F(x)\Delta x$이므로 퍼텐셜에너지 변화 ΔU는 다음과 같다.

$$\Delta U(x) = -W = -F(x)\Delta x \quad \Rightarrow \quad \therefore\ F(x) = -\frac{\Delta U(x)}{\Delta x}$$

- 이동간격 Δx을 0으로 접근시킬 때 $F(x)$은 위치 x에 대한 퍼텐셜에너지 함수 $U(x)$의 미분으로 표현된다.

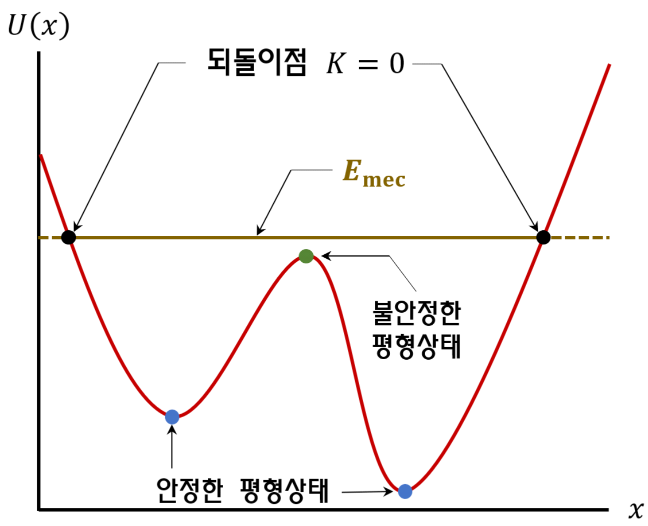
$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \ \textbf{(1차원)} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathrm{i}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathrm{j}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathrm{k}}\right) \ \textbf{(3차원)}$$

되돌이점

- 퍼텐셜에너지 $U(x)$와 운동에너지 $K(x)$의 합은 위치 x의 변화에도 일정한 값 E_{mec}을 갖는다.

$$U(x) + K(x) = E_{\mathrm{mec}}$$

- 어떤 위치 x에서 $K(x) = 0$이면 그 위치를 기준으로 입자의 운동 방향이 반대로 바뀐다. 이러한 위치를 **되돌이점**이라 한다.



평형상태

- 힘이 작용하지 않은 위치에 입자가 있을 때 그 위치에서는 입자가 **평형상태**에 있다고 말한다.
- 어떤 위치를 전후로 입자에 아무런 힘도 작용하지 않으면 그 위치에는 입자가 **중립적 평형상태**에 있다고 말한다.
- 어떤 위치를 전후로 입자에 그 위치로 끌어당기는 힘이 작용하면 그 위치에서는 입자가 **안정한 평형상태**에 있다고 말한다.
- 어떤 위치를 전후로 입자에 그 위치에서 밀어내는 힘이 작용하면 그 위치에서는 입자가 **불안정한 평형상태**에 있다고 말한다.

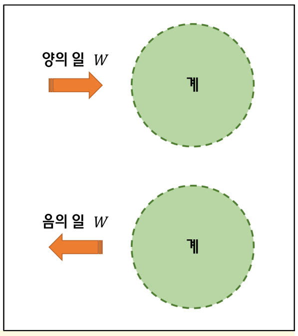
8.4 외부력이 계에 한 일

학습목표

☞ 외부력이 계에 일을 할 때 운동에너지와 퍼텐셜에너지의 변화를 알아본다.

외부력

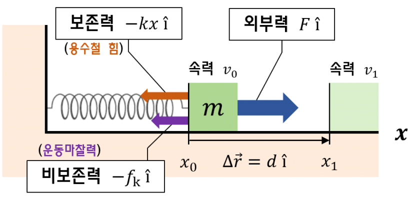
- 계에 작용하는 **외부력**은 계에 에너지를 전달하거나 계로부터 에너지를 전달받는 일을 한다.
- **양의 일**은 계로 전달되는 에너지이다.
- **음의 일**은 계에서 전달받는 에너지이다.
- 비보존력이 없을 때 외부력이 계에 한 일 W은 계의 역학에너지 변화 ΔE_{mec}이다.



$$W = \Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U$$

- 비보존력(마찰력)이 존재할 때 그 힘은 역학에너지 E_{mec}를 **열에너지** E_{th}로 변환하는 일을 한다.
- 그때 외부력이 계에 한 일 W은 계의 역학에너지 변화 ΔE_{mec}와 열에너지 증가 ΔE_{th}의 합이다.

$$W = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{th}}$$



외부력이 계에 한 일 $W = Fd$

운동에너지의 변화 $\Delta K = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

탄성 퍼텐셜에너지의 변화 $\Delta U = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$

열에너지의 증가 $\Delta E_{\text{th}} = f_k d$

8.5 에너지 보존

학습목표

☞ 고립계와 비고립계에서 여러 종류의 에너지 변화 사이의 관계를 알아본다.

전체 에너지

- 계의 **전체 에너지** E는 계의 역학에너지 E_{mec}, 열에너지 E_{th}, 그리고 다른 모든 형태의 **내부에너지**들 E_{int}의 합을 의미한다.

$$E = E_{\text{mec}} + E_{\text{th}} + E_{\text{int}}$$

- 외부력이 계에 한 일 W는 전체 에너지 E의 변화와 같다.

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}}$$

고립계에서의 에너지 보존법칙

- 어떤 계가 주위로부터 고립되어 있다면 그 계에는 에너지 전달이 없다. 즉, 고립계의 전체 에너지 E는 변할 수 없다.

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

- 고립계에서 한 순간의 전체 에너지는 다른 순간의 전체 에너지와 같다. (**에너지 보존법칙**)

$$E_{\text{mec},1} + E_{\text{th},1} + E_{\text{int},1} = E_{\text{mec},2} + E_{\text{th},2} + E_{\text{int},2}$$

- 에너지 보존법칙은 기본적인 물리원리들로부터 유도한 것이 아니다. 오히려 끊임없는 실험을 통해서 알게 된 경험법칙이다.

일률

- 시간간격 Δt 동안에 힘이 계에 W만큼의 일을 한다면 힘의 **평균 일률** P_{avg}은 다음과 같다.

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t}$$

- W은 계의 전체 에너지 변화 ΔE와 같으므로 평균 일률은 다음처럼도 표현될 수 있다.

$$P_{\text{avg}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

- 그러므로 **순간 일률** P은 다음처럼 표현될 수 있다.

$$P = \frac{dE}{dt}$$