LECTURE 10

외부력이 작용하지 않고 물질이 교환될 수 없는 계에서 몇몇 물리량은 어떠한 시간에도 변하지 않는다. 이 단원에서는 그러한 계에서의 선운동량 변화를 조사하여 물체가 충돌 전후 어떻게 달라지는지를 알아본다. 또한, 이러한 성질로부터 중력과 항력이 없는 우주 공간에 가속하는 로켓이 어떠한 운동을 하는지를 알아본다.

9 질량중심과 선운동량
9.1 질량중심
9.2 입자계에 대한 Newton의 제2법칙
9.3 선운동량
9.4 충돌과 충격량
9.5 선운동량의 보존
9.6 충돌의 선운동량과 운동에너지
9.7 1차원 탄성충돌
9.8 2차원 충돌
9.9 질량이 변하는 계: 로켓

9.5 선운동량의 보존

학습목표

☞ 충격량과 선운동량 사이의 관계를 이해한다.

선운동량의 보존법칙

다음 조건을 만족하는 입자계를 고려하자.

❖ 알짜 외부력 $\vec{F}_{\text{net}}$이 0이다. (고립계)
❖ 어떤 입자도 계에 출입할 수 없다. (닫힌계)

- 계의 선운동량 $\vec{P}$은 변하지 않는다. (**선운동량 보존법칙**)

$$\vec{P} = \text{상수} \quad \text{또는} \quad \vec{P}_{\text{i}} = \vec{P}_{\text{f}}$$

선운동량 성분의 보존법칙

- 외부력이 작용하는 입자계이더라도 모든 방향이 아니라 하나 또는 두 방향에 대해서만 선운동량이 보존될 수 있다.
- 어떤 축 방향(x축)으로 닫힌계에 작용하는 알짜 외부력 $F_{\text{net},x}$이 0이면 그 축에 해당하는 선운동량 P_x은 변하지 않는다.

$$F_{\text{net},x} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x = \text{상수}$$

9.6 충돌의 선운동량과 운동에너지

학습목표

☞ 탄성충돌, 비탄성충돌, 완전 비탄성충돌을 구별한다.

충돌과 운동에너지 손실

두 물체가 충돌하는 계의 전체 운동에너지를 살펴보자.

- 전체 운동에너지가 보존되는 충돌을 **탄성충돌**이라 한다.
- 전체 운동에너지가 보존되지 않는 충돌을 **비탄성충돌**이라고 한다.
- 일상적인 충돌에서는 운동에너지의 일부가 열에너지, 소리에너지 등 다른 형태의 에너지로 빠져나간다.
- 운동에너지 손실이 가장 큰 충돌을 **완전 비탄성충돌**이라고 한다.
- 그러나 상황에 따라 일상적인 물체들 사이의 충돌을 탄성충돌로 어림잡을 수도 있다.

1차원 비탄성충돌

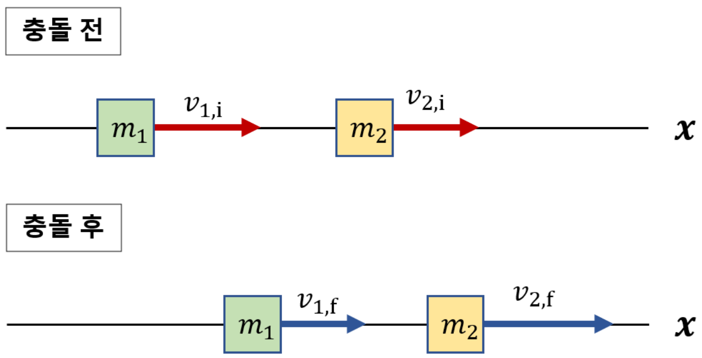
닫힌 고립계에 있는 두 물체의 1차원 충돌 전과 후를 고려하자.

- 선운동량 보존법칙으로 말미암아 다음 관계식이 성립한다.

$$\vec{p}_{1,\mathrm{i}} + \vec{p}_{2,\mathrm{i}} = \vec{p}_{1,\mathrm{f}} + \vec{p}_{2,\mathrm{f}}$$

- 두 물체는 1차원 운동을 하므로 위 식은 다음처럼도 쓸 수 있다.

$$m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}} = m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}$$



- 양변을 $v_{1,\mathrm{f}}$으로 미분하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$0 = \frac{d}{dv_{1,\mathrm{f}}}(m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}) = \frac{d}{dv_{1,\mathrm{f}}}(m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}) = m_1 + m_2 \frac{dv_{2,\mathrm{f}}}{dv_{1,\mathrm{f}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\therefore \frac{dv_{2,\mathrm{f}}}{dv_{1,\mathrm{f}}} = -\frac{m_1}{m_2}$$

- 충돌 후 운동에너지 E_f는 다음처럼 표현된다.

$$E_\mathrm{f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2$$

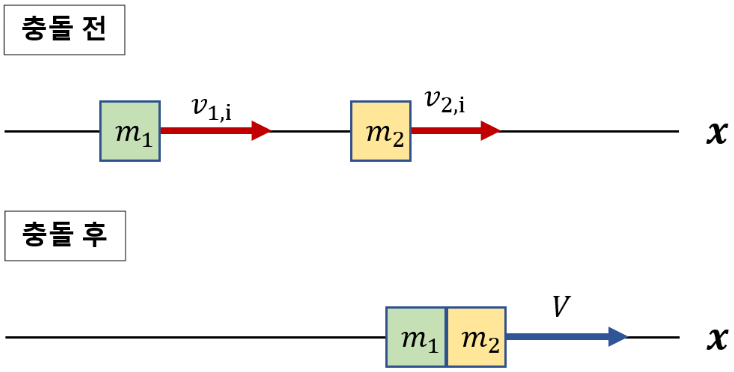
- E_{f}은 $dE_{\mathrm{f}}/dv_{1,\mathrm{f}}=0$일 때 최소화되므로 완전 비탄성충돌 직후에는 두 물체의 속도가 같아진다. 즉, 서로 붙어서 함께 움직인다.

$$0 = \frac{dE_{\mathrm{f}}}{dv_{1,\mathrm{f}}} = \frac{d}{dv_{1,f}}\left[\frac{1}{2}m_1v_{1,\mathrm{f}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2,\mathrm{f}}^2\right] = m_1v_{1,\mathrm{f}}+m_2v_{2,\mathrm{f}}\frac{dv_{2,\mathrm{f}}}{dv_{1,\mathrm{f}}}$$

$$= m_1v_{1,\mathrm{f}}+m_2v_{2,\mathrm{f}}\left(-\frac{m_1}{m_2}\right) = m_1(v_{1,\mathrm{f}}-v_{2,\mathrm{f}}) \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \ v_{1,\mathrm{f}} = v_{2,\mathrm{f}}$$

- 완전 비탄성충돌 후 두 물체의 속도는 질량중심 속도 V와 같다.

$$m_1v_{1,\mathrm{i}}+m_2v_{2,\mathrm{i}} = (m_1+m_2)V \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \ V = \frac{m_1v_{1,\mathrm{i}}+m_2v_{2,\mathrm{i}}}{m_1+m_2}$$



질량중심의 속도

닫힌 고립계에 있는 두 물체가 충돌할 때 계의 질량중심 속도 $\vec{v}_{\mathrm{com}}$은 충돌 전후 변하지 않는다.

$$\vec{p}_{1,\mathrm{i}}+\vec{p}_{2,\mathrm{i}} = \vec{p}_{1,\mathrm{f}}+\vec{p}_{2,\mathrm{f}} = \vec{P} = M\vec{v}_{\mathrm{com}} = (m_1+m_2)\vec{v}_{\mathrm{com}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{\mathrm{com}} = \frac{\vec{p}_{1,\mathrm{i}}+\vec{p}_{2,\mathrm{i}}}{m_1+m_2} \quad \text{또는} \quad \frac{\vec{p}_{1,\mathrm{f}}+\vec{p}_{2,\mathrm{f}}}{m_1+m_2}$$

9.7 1차원 탄성충돌

학습목표

☞ 운동에너지와 선운동량이 보존되는 1차원 충돌을 이해한다.

닫힌 고립계와 탄성충돌

닫힌 고립계에 있는 두 물체의 1차원 탄성충돌 전과 후를 고려하자.

❖ 질량 m_1의 물체는 $v_{1,\mathrm{i}}$의 초기속도로 운동하다 탄성충돌 후 $v_{1,\mathrm{f}}$의 최종속도로 운동한다.

❖ 질량 m_2의 물체는 $v_{2,\mathrm{i}}$의 초기속도로 운동하다 탄성충돌 후 $v_{2,\mathrm{f}}$의 최종속도로 운동한다.

- 두 물체가 있는 계는 닫힌 고립계이므로 선운동량이 보존된다.

$$m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}} = m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 (v_{1,\mathrm{i}} - v_{1,\mathrm{f}}) = -m_2 (v_{2,\mathrm{i}} - v_{2,\mathrm{f}})$$

- 탄성충돌에서 각 물체의 운동에너지는 충돌로 인해 변할 수 있으나 계의 전체 운동에너지는 충돌 후에도 변하지 않는다.

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 (v_{1,\mathrm{i}} - v_{1,\mathrm{f}})(v_{1,\mathrm{i}} + v_{1,\mathrm{f}}) = -m_2 (v_{2,\mathrm{i}} - v_{2,\mathrm{f}})(v_{2,\mathrm{i}} + v_{2,\mathrm{f}})$$

- 위 식들로부터 다음과 같은 결과들을 얻을 수 있다.

$$v_{1,\mathrm{i}} + v_{1,\mathrm{f}} = v_{2,\mathrm{i}} + v_{2,\mathrm{f}}$$

$$\Downarrow$$

$$v_{1,\mathrm{f}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,\mathrm{i}} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2,\mathrm{i}}$$

$$v_{2,\mathrm{f}} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,\mathrm{i}} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2,\mathrm{i}}$$

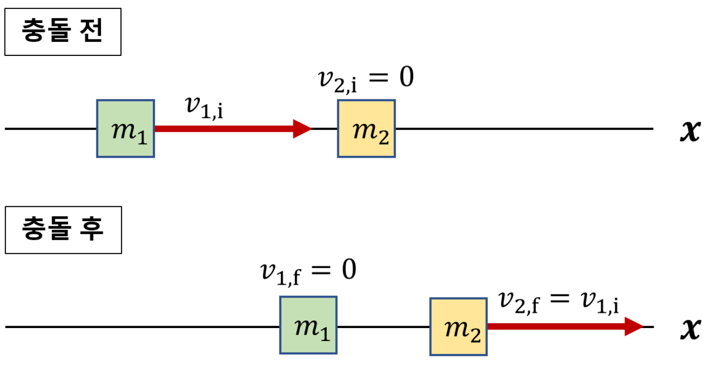
정지한 표적과 탄성충돌

- 정지해 있는 물체($v_{2,\mathrm{i}} = 0$)에 탄성충돌이 일어나면 최종속도는 다음과 같다.

$$v_{1,\mathrm{f}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,\mathrm{i}} \quad \& \quad v_{2,\mathrm{f}} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,\mathrm{i}}$$

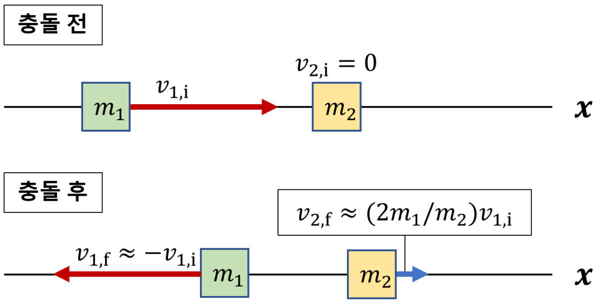
- 두 물체의 질량이 같으면($m_1 = m_2$) 충돌 후 두 물체의 속도는 서로 뒤바뀐다.

$$v_{1,\mathrm{f}} = 0 \quad \& \quad v_{2,\mathrm{f}} = v_{1,\mathrm{i}}$$



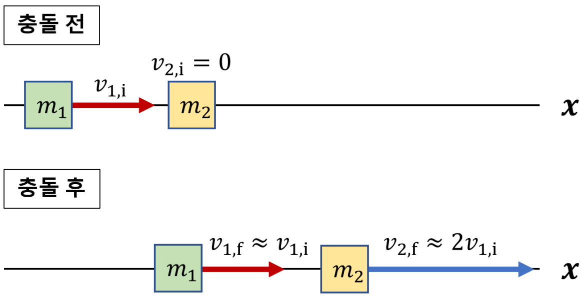
- 정지해 있는 물체의 질량이 다가오는 물체의 질량에 비해 매우 크면($m_1 \ll m_2$) 충돌후 질량이 작은 물체는 거의 같은 속력으로 뒤로 튕겨 나오고 질량이 큰 물체는 작은 속도로 전진한다.

$$v_{1,\mathrm{f}} \approx -v_{1,\mathrm{i}} \quad \& \quad v_{2,\mathrm{f}} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1,\mathrm{i}}$$



- 다가오는 물체의 질량이 정지해 있는 물체의 질량에 비해 매우 크면($m_1 \gg m_2$) 충돌후 질량이 큰 물체는 거의 같은 속도로 운동하지만 질량이 작은 물체는 그보다 거의 2배 되는 속도로 운동한다.

$$v_{1,\mathrm{f}} \approx v_{1,\mathrm{i}} \quad \& \quad v_{2,\mathrm{f}} \approx 2v_{1,\mathrm{i}}$$



9.8 2차원 충돌

학습목표

☞ 운동에너지와 선운동량이 보존되는 2차원 충돌을 이해한다.

닫힌 고립계와 탄성충돌

닫힌 고립계에 있는 두 물체의 2차원 탄성충돌 전과 후를 고려하자.

- 두 물체는 닫힌 고립계에 있으므로 전체 선운동량은 보존된다.

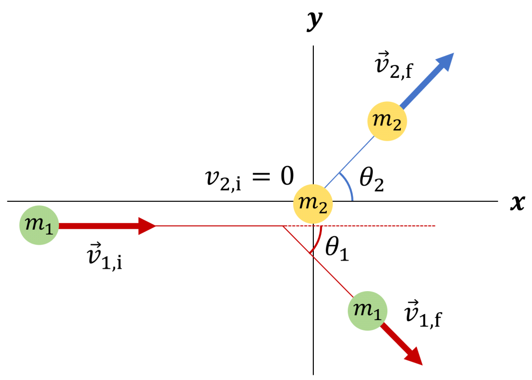
$$\vec{P}_{1,\mathrm{i}} + \vec{P}_{2,\mathrm{i}} = \vec{P}_{1,\mathrm{f}} + \vec{P}_{2,\mathrm{f}}$$

- 두 물체는 탄성충돌을 하므로 전체 운동에너지도 보존된다.

$$K_{1,\mathrm{i}} + K_{2,\mathrm{i}} = K_{1,\mathrm{f}} + K_{2,\mathrm{f}}$$

정지한 표적

그림처럼 입사체와 정지한 표적 사이의 **스침충돌**(정면충돌이 아님)을 고려하자.



- 선운동량 보존법칙은 성분형태로 표현될 수 있다.

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2,f}\cos\theta_2 \qquad (x\text{축 성분})$$

$$0 = -m_1 v_{1,f}\sin\theta_1 + m_2 v_{2,f}\sin\theta_2 \qquad (y\text{축 성분})$$

$$\Downarrow$$

$$m_1^2 v_{1,i}^2 = m_1^2 v_{1,f}^2 + m_2^2 v_{2,f}^2 + 2 m_1 m_2 v_{1,f} v_{2,f}\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

- 운동에너지 보존법칙은 다음 관계식을 내포한다.

$$m_1 v_{1,i}^2 = m_1 v_{1,f}^2 + m_2 v_{2,f}^2$$

- 일곱 개의 변수 $m_1, m_2, v_{1,i}, v_{1,f}, v_{2,f}, \theta_1, \theta_2$ 중 네 개를 알면 세 방정식을 풀어 나머지 세 변수를 구할 수 있다.

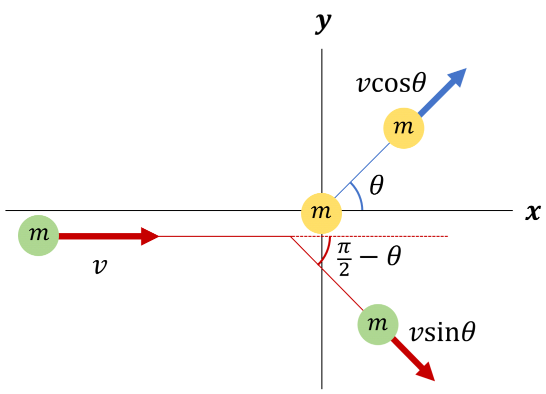
동일한 질량

- 두 물체의 질량이 같으면 앞에서 제시된 보존법칙들의 식들로부터 다음 관계식들을 유도할 수 있다.

$$m_1 = m_2 \quad \& \quad \theta_1 + \theta_2 = \pi/2 \quad \& \quad v_{2,f} = v_{1,f}\tan\theta_1$$

$$\Downarrow$$

$$v_{1,f} = v_{1,i}\cos\theta_1 \quad \& \quad v_{2,f} = v_{1,i}\sin\theta_1$$



9.9 질량이 변하는 계: 로켓

학습목표 ☞ 로켓 방정식으로 계의 총질량이 변하는 계를 이해한다.

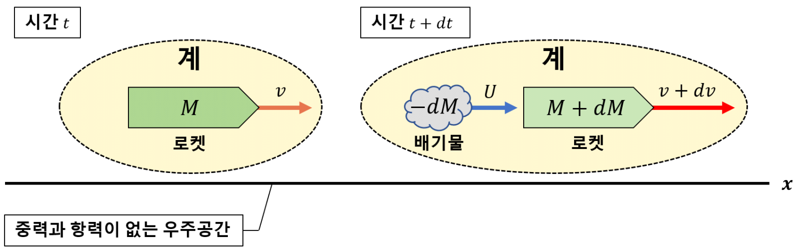
로켓

중력이나 대기에 의한 항력이 없는 우주 공간에서 연소된 연료를 엔진의 배기구로 배출하여 1차원 운동을 하는 **로켓**을 고려하자.

❖ 우주 공간을 관성기준틀로 본다.
❖ 어떤 순간 t에서 로켓의 질량과 속도를 M와 v로 표기한다.
❖ 로켓에서 배출된 배기물의 속도를 U로 표기한다.

제1 로켓 방정식

- dt의 시간이 지난 후 로켓은 $M+dM$의 질량과 $v+dv$의 속도로 운동한다.
- 로켓은 연료를 연소하여 배기구로 배출하므로 dM은 음의 값이다. 즉, dt의 시간 동안 로켓에서 배출된 배기물의 질량은 $-dM$이다.
- 전체 계의 질량은 로켓이 가속되더라도 변하지 않는다.



- 선운동량 보존법칙으로 말미암아 다음 관계식이 성립한다.

$$Mv = P_{\rm i} = P_{\rm f} = -dM\,U + (M+dM)(v+dv)$$

- 기준틀에서 본 로켓의 속도 $(v+dv)$는 배기물에 대한 로켓의 상대속도 $v_{\rm rel}$와 기준틀에서 본 배기물의 속도 U의 합이다.

$$(v+dv) = v_{\rm rel} + U \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad U = v + dv - v_{\rm rel}$$

- U을 $v_{\rm rel}$로 치환하면 선운동량 보존법칙으로부터 로켓의 가속도 방정식을 얻을 수 있다.

$$-dMv_{\rm rel} = Mdv \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad -\frac{dM}{dt}v_{\rm rel} = M\frac{dv}{dt} = Ma$$

- 연료를 소비하는 질량의 비율$(-dM/dt)$을 R로 표기할 때 다음과 같은 **제1 로켓 방정식**을 얻을 수 있다.

$$Rv_{\rm rel} = Ma$$

- 이처럼 연료 소비로 말미암아 로켓에 작용하는 힘 $Rv_{\rm rel}$을 **추진력**이라고 한다.

제2 로켓 방정식

- $-dM$의 연료가 소비될 때 로켓의 속도 변화 dv는 다음과 같다.

$$dv = -v_{\mathrm{rel}}\frac{dM}{M}$$

- 위 식의 양변을 적분하면 **제2 로켓 방정식**을 얻을 수 있다.

$$v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{i}} = \int_{v_{\mathrm{i}}}^{v_{\mathrm{f}}} dv = -v_{\mathrm{rel}}\int_{M_{\mathrm{i}}}^{M_{\mathrm{f}}}\frac{dM}{M} = -v_{\mathrm{rel}}(\ln M_{\mathrm{f}} - \ln M_{\mathrm{i}}) = v_{\mathrm{rel}}\ln\frac{M_{\mathrm{i}}}{M_{\mathrm{f}}}$$