테일러급수 (Taylor series)

+ 테일러 급수

함수 f가 $a\in\mathrm{R}$에서 여러번 미분 가능할 때, 다항함수로 근사한 식을 테일러급수라고 부른다. 특히 $a=0$일 때의 테일러급수를 매클로린급수라고 부른다.

$$T_f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots$$

$$M_f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3+\cdots$$

+ 여러 가지 함수의 매클로린 급수

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \qquad (\forall\ x)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \qquad (\forall\ x)$$

$$\tan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\cdots \qquad (\forall\ x)$$

$$\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \qquad (\forall\ x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad (|x|<1)$$

* 해석함수

함수 f가 한 점 x_0에서 해석적이라는 것은 그 점 근방에서의 테일러급수가 수렴한다는 의미이고, 정의역 D의 모든 점에서 해석적인 함수를 해석함수라고 한다.

무한번 미분 가능하지만 해석적이지 않은 함수의 예 : $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$Q1.$ 테일러 급수

$(as\ x\to 0)$ $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)$, $x^2\sim 1-\cos x$, $x^3\sim\sin x-\tan x$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\qquad\left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=$ $\qquad\left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=$ $\qquad\left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=$ $\qquad\left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=\right)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$ $\qquad\left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x}=\right)$

$Q2.$ 세상에서 가장 아름다운 공식

오일러 공식 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

(1) 테일러 전개를 이용하여 오일러 공식을 유도해보자.

(2) $e^{\pi i}+1=$

테일러급수 (Taylor series)

+ 테일러 급수

함수 f가 $a\in\mathrm{R}$에서 여러번 미분 가능할 때, 다항함수로 근사한 식을 테일러급수라고 부른다. 특히 $a=0$일 때의 테일러급수를 매클로린급수라고 부른다.

$$T_f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots$$

$$M_f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3+\cdots$$

+ 여러 가지 함수의 매클로린 급수

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \qquad (\forall\ x)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \qquad (\forall\ x)$$

$$\tan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\cdots \qquad (\forall\ x)$$

$$\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \qquad (\forall\ x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad (|x|<1)$$

* 해석함수

함수 f가 한 점 x_0에서 해석적이라는 것은 그 점 근방에서의 테일러급수가 수렴한다는 의미이고, 정의역 D의 모든 점에서 해석적인 함수를 해석함수라고 한다.

무한번 미분 가능하지만 해석적이지 않은 함수의 예 : $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$Q1.$ 테일러 급수

$(as\ x\to 0)$ $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)$, $x^2\sim 1-\cos x$, $x^3\sim\sin x-\tan x$

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\qquad\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\right)$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ $\qquad\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=a\right)$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\qquad\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a\right)$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\qquad\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a\right)$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ $\qquad\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x}=\frac{a^2}{2}\right)$

$Q2.$ 세상에서 가장 아름다운 공식

오일러 공식 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

(1) 테일러 전개를 이용하여 오일러 공식을 유도해보자.

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)=\cos x+i\sin x$$

(2) $e^{\pi i}+1$ $\Rightarrow e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$\therefore e^{\pi i}+1=0.$