미분적분학 2

곡 면

제13장 7절

한양대학교 과학기술대학 응용수학전공

핵심내용

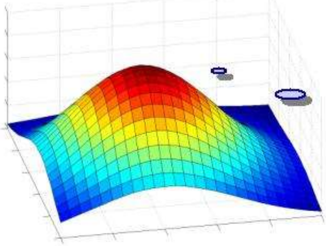
- **3**차원 공간내의 곡면
  - 곡면과 방정식의 관계
  - 주면의 방정식
- **2**차 곡면과 그의 그래프
  - **2**차 곡면을 그리는 방법
  - **2**차 곡면의 일반식
  - **2**차 곡면의 종류

3차원 공간내의 곡면

- 곡면과 방정식의 관계

곡 면

어떤 방정식을 만족하는
점들의 집합



방정식

$F(x, y, z) = 0$

또는

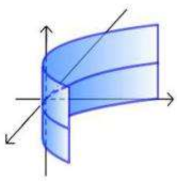
$z = f(x, y)$

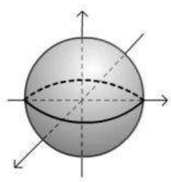
$F(x,y,z) = e^{-x^2-y^2} - z = 0$

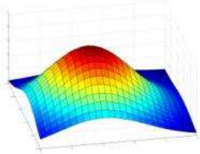
3차원 공간내의 곡면

© Dai-Gyoung Kim

- 주면
  - 평면상의 한 곡선을 3차원으로 확장
- 2차 곡면
  - x, y, z 의 2차 방정식으로 표현되는 곡면
- 일반곡면
  - 일반적인 방정식으로 표현되는 곡면





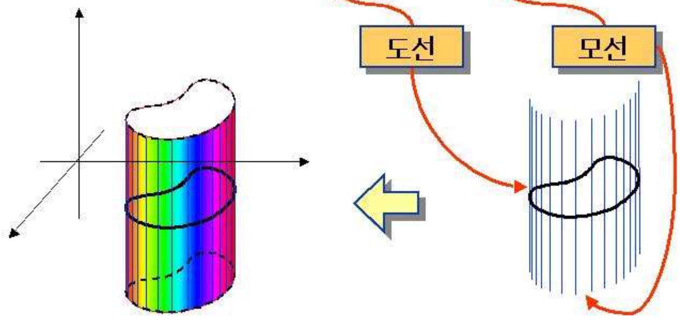


3차원 공간내의 곡면

- 주면의 정의와 용어

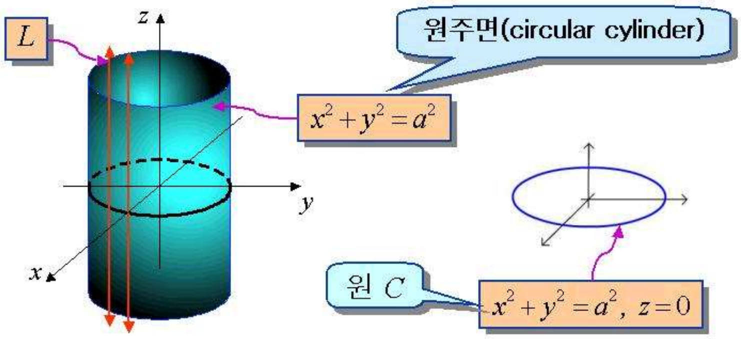
주면(Cylindrical Surface)

한 좌표 평면상의 곡선 C에 수직인 직선들의 집합



예제1(124쪽)

중심이 원점이고 반지름이 a 인 원 C가 xy 평면상 있다고 하자. 직선 L이 원 C 를 따라 z 축에 평행하게 움직일 때, 직선 L 로 이루어진 주면의 방정식은?



주면 방정식

주면방정식 기본형태

1) 도선 C가 xy평면 상에 있을 때: $f(x,y)=0,\ z=0$

z 값은 임의의 실수 — $f(x,y)=0$

2) 도선 C가 yz평면 상에 있을 때: $f(y,z)=0,\ x=0$

x 값은 임의의 실수 — $f(y,z)=0$

2) 도선 C가 zx평면 상에 있을 때: $f(z,x)=0,\ y=0$

y 값은 임의의 실수 — $f(z,x)=0$

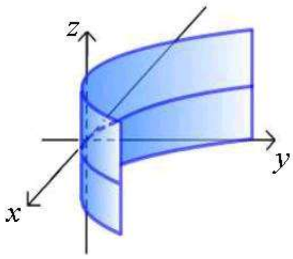
주면 방정식

주면방정식 기본형태

예) 곡면 $y=x^2$ 의 도선 C는?

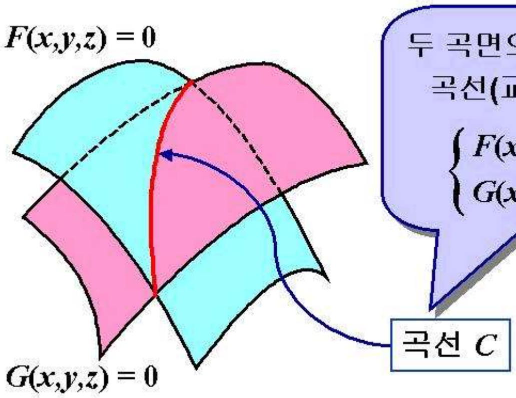
포물주면
(parabolic cylinder)

$y=x^2,\ z=0$



두 곡면의 교선

- 곡면을 표현하는 일반식: $F(x,y,z) = 0$



두 곡면으로 생성되는 곡선(교선)의 표현

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

두 곡면의 교선

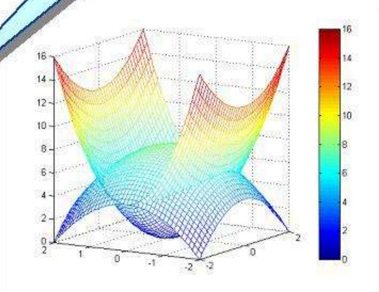
- 예) $\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 - 3y^2 \end{cases}$

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + 2y^2 = 4$$

타원 주면위의 곡선



2차 곡면

- 2차 곡면의 방정식

2차 곡면의 일반식

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{33} = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

$$Ax^2 + By^2 + 2Ez = 0$$

- 평행 이동
- 회전
- 변수 변환

2차 곡면

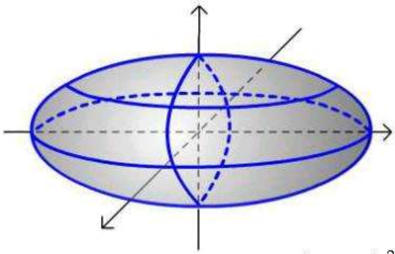
- 2차 곡면의 그래프를 그리는 방법

1) 곡면과 각 좌표평면과의 교선의 방정식을 구하고, 그 교선을 그린다.
2) 각 좌표 평면에 평행한 평면과 곡면과의 교선의 방정식을 구하고, 그 교선을 그린다.
3) 곡면의 대칭성, 치역, 정의역 등을 최대한 활용한다.

2차 곡면의 종류

- 구면 (sphere)
- 타원면 (ellipsoid)

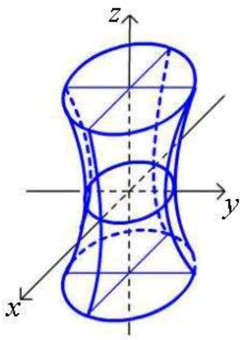
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

2차 곡면의 종류

- 단엽 쌍곡면 (hyperboloid of one sheet)



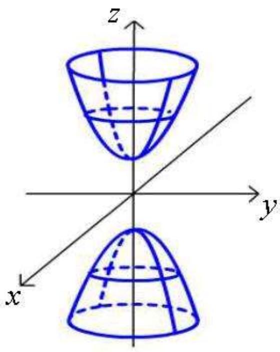
음의 부호

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}$$

2차 곡면의 종류

- 쌍엽 쌍곡면 (hyperboloid of two sheets)



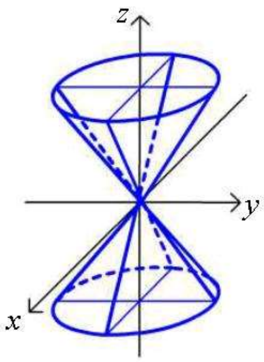
두개의 음의 부호

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1$$

2차 곡면의 종류

- 추면 (conoid)



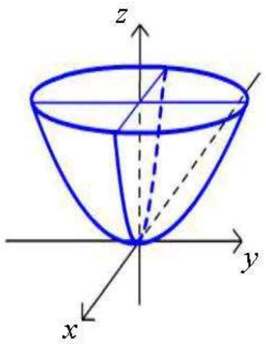
음의 부호

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

2차 곡면의 종류

- 타원 포물면 (elliptic paraboloid)

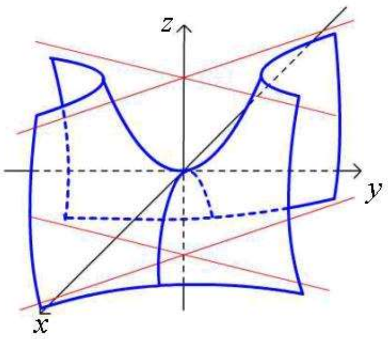


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-z\right)$$

2차 곡면의 종류

- 쌍곡 포물면 (hyperbolic paraboloid)



음의 부호

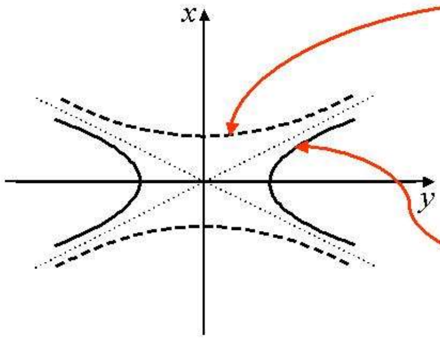
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

2차 곡면의 종류

- 쌍곡 포물면 (hyperbolic paraboloid)

$z = k > 0:$

$$\frac{x^2}{a^2k} - \frac{y^2}{b^2k} = 1$$



$z = k < 0:$

$$\frac{x^2}{a^2k} - \frac{y^2}{b^2k} = 1$$

예제3(132쪽)

다음 방정식은 어떤 곡면인가?

$$x^2 + y^2 - 4z^2 - 4x - 2y - 24z - 35 = 0$$

■ 요약

• 3차원 공간내의 여러 가지 곡면들

1) 주면

2) 2차곡면

① 구, 타원면

② 단엽, 쌍엽 쌍곡면

③ 타원,쌍곡 타원면

④ 추면