LECTURE 20

물리학과 공학의 주된 목표는 같은 운동이 되풀이되는 진동 현상의 이해와 제어이다. 이 단원에서는 가장 기본적 진동인 단순조화운동에 대해 알아본다. 또한, 어떤 물체가 단순조화운동을 하는지를 조사하여 그 물체의 운동이 어떻게 기술될 수 있는지를 알아본다.

15.4 진자, 원운동

학습목표

☞ 단진자가 무엇인지를 알아보고 그 운동을 어떻게 기술할 수 있는지를 조사한다.

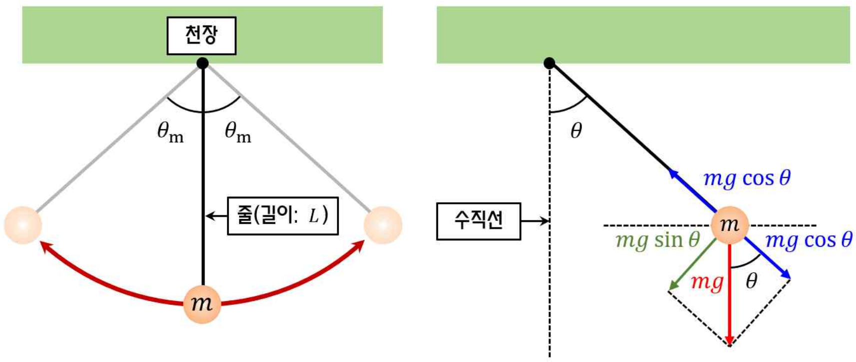
단진자

줄에 연결되어 천장에 매달려 있는 입자를 고려하자.

❖ 줄의 질량은 무시될 수 있고, 줄의 길이는 L이다.

❖ 입자의 질량은 m이고, 자유낙하 가속도는 g이다.

❖ 입자에는 장력과 중력만 작용한다.
즉, 입자의 알짜힘 $\vec{F}$은 두 힘의 벡터합이다.



- 이와 같은 장치를 일컬어 **단진자**(simple pendulum)라고 한다.
- 단진자에서 줄의 끝에 매달린 입자를 가리켜 진자의 **추**(bob)라고 말한다.

- 단진자는 보존계이므로 추가 최저점에서 정지해 있지 않으면 추는 시간에 따라 수직축 좌우로 오르락내리락 반복하여 운동한다.
- 최저점에서 입자의 속력이 v_0이면 최저점과 최고점의 줄이 이루는 각도 θ_m는 역학에너지 보존원리로 말미암아 결정된다.

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = mgL(1-\cos\theta_\mathrm{m}) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_\mathrm{m} = 1 - \frac{v_0^2}{2gL}$$

- 그래서 수직선에 대한 입자의 최대 수직거리 x_m은 $L\sin\theta_\mathrm{m}$이다.
- 추가 수직선으로부터 각도 θ만큼 떨어져 있을 때 $\vec{F}$의 지름성분은 0이고 $\vec{F}$의 접선성분 F은 다음처럼 쓸 수 있다.

$$F = -mg\sin\theta$$

- 그래서 입자의 알짜 토크 τ는 다음과 같다.

$$\tau = -mgL\sin\theta$$

- θ가 작으면 $\sin\theta$을 θ로 어림할 수 있고 수직선으로부터 추까지의 수직거리 변화 x를 $L\theta$로 어림할 수 있다.
- 그러므로 추의 높이 변화를 무시할 수 있을 정도로 θ_m가 작으면 알짜힘 $\vec{F}$는 다음처럼 어림할 수 있다.

$$\vec{F} = -\left(\frac{mg}{L}\right)x\,\hat{\mathrm{i}}$$

- 여기서 좌표의 원점은 추의 최저점이다.
- 이때 단진자는 용수철상수 $k(=mg/L)$에 해당하는 단순조화운동을 하고 그 주기 T는 오직 줄의 길이 L에 의존한다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- 또한, θ_m가 작다면 알짜 토크 τ는 다음처럼 어림할 수 있다.

$$\tau = -(mgL)\theta$$

- 이때 단진자는 비례상수 $\kappa(=mgL)$에 해당하는 단순조화 각운동을 하고 다음과 같은 주기 T를 가진다.

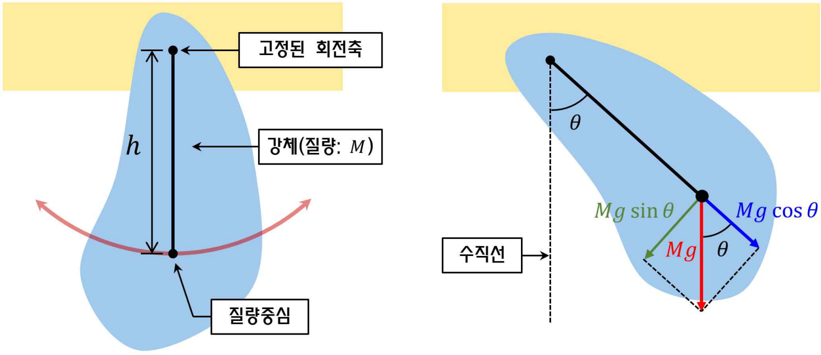
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad \text{또는} \quad 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- 여기서 I는 입자의 회전관성 mL^2이다.

물리진자

고정된 축에 관통되어 벽에 매달려 있는 강체를 고려하자.

❖ 강체의 질량은 M이고, 자유낙하 가속도는 g이다.
❖ 고정된 회전축으로부터 강체의 질량중심까지의 거리는 h이다.
❖ 강체의 알짜힘 $\vec{F}$은 장력과 중력의 벡터합이다.



- 이와 같은 장치를 일컬어 **물리진자**(physical pendulum)라고 한다.
- 물리진자도 단진자와 마찬가지로 보존계이므로 힘의 평형상태에서 강체가 정지해 있지 않으면 강체는 시간에 따라 수직축 좌우로 반복하여 회전운동을 한다.
- 강체가 수직선으로부터 각도 θ만큼 회전되어 있을 때 $\vec{F}$의 지름성분은 0이고 $\vec{F}$의 접선성분 F은 다음처럼 쓸 수 있다.

$$F = -Mg\sin\theta$$

- 고정된 회전축에 대한 강체의 알짜 토크 τ는 회전축에서 질량중심까지의 수직거리 h와 알짜힘의 접선성분 F의 곱이다.

$$\vec{\tau} = \sum_i \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right] = \sum_i \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{g}\right] = \left[\sum_i m_i \vec{r}_i\right] \times \vec{g} = \vec{r}_{\mathrm{com}} \times M\vec{g}$$

- $m_i, \vec{r}_i, \vec{F}_i$은 강체를 구성하는 입자의 질량, 위치, 중력이다.
- $\vec{r}_{\mathrm{com}}$은 강체의 질량중심이고, $\vec{g}$은 자유낙하 가속도이다.

$$\tau = -Mgh\sin\theta$$

- θ의 최대치 θ_{m}가 작으면 알짜 토크는 다음처럼 어림할 수 있다.

$$\tau = -(Mgh)\theta$$

- 이때 물리진자는 용수철상수 $\kappa(=Mgh)$에 해당하는 단순조화 각운동을 하고 다음과 같은 주기 T를 가진다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

- 여기서 I는 강체의 회전관성이며 강체의 모양에 따라 달라진다.
- 추의 질량이 M인 단진자에서 줄의 길이 L_0가 다음과 같다면 그 주기는 물리진자의 주기 T와 같아진다.

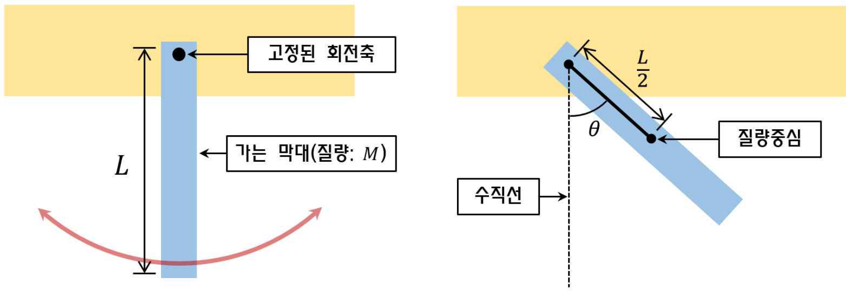
$$2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad \Rightarrow \quad L_0 = \frac{I}{Mh}$$

- 회전축에서 질량중심 방향으로 L_0만큼 떨어진 점을 가리켜 **진동중심**(center of oscillation)이라고 말한다.

자유낙하 가속도 크기의 측정

물리진자의 강체가 밀도가 균일한 막대인 경우를 고려하자.

- ❖ 막대의 질량과 길이는 각각 M과 L이다.
- ❖ 회전축은 막대의 한쪽 끝을 관통한다.



- 질량중심에 대한 가는 막대의 회전관성 I_{com}은 $ML^2/12$이다.
- 회전축으로부터 질량중심까지의 수직거리 h는 $L/2$이다.
- 주어진 회전축에 대한 회전관성 I은 평행축 정리로 말미암아 다음과 같다.

$$I = I_{\text{com}} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

- 수직선과 막대가 이룰 수 있는 최대 각도 θ_{m}가 작으면 이 물리진자는 다음과 같은 주기 T로 단순조화 각운동을 한다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{2ML^2}{3MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

- 그러므로 막대의 길이 L와 주기 T를 측정하여 자유낙하 가속도 크기 g를 알아낼 수 있다.

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$

- 이 물리진자의 진동중심은 회전축으로부터 질량중심 방향으로 L_0 만큼 떨어진 위치에 있다. 즉, 진동중심과 질량중심은 다르다.

$$L_0 = \frac{I}{Mh} = \frac{2ML^2}{3ML} = \frac{2L}{3}$$

단순조화운동과 등속 원운동

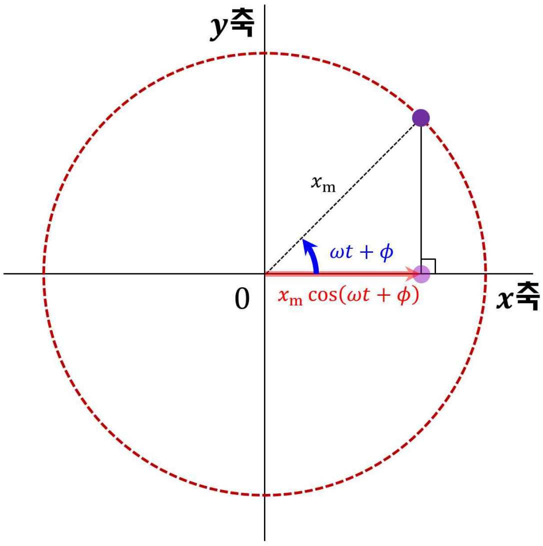
xy평면에서 원점을 중심으로 등속 원운동을 하는 입자를 고려하자.

- ❖ 입자가 그리는 원의 반지름은 x_{m}이다.
- ❖ 입자의 각속도는 ω이다.
- ❖ 시간 t에 따른 입자의 각위치는 $\theta(t)$이다.
- ❖ 입자의 초기 각위치 $\theta(0)$는 ϕ이다.

- 입자의 위치를 x축에 투영한 것 $x(t)$은 단순조화운동을 한다.

$$x(t) = x_{\text{m}}\cos\theta = x_{\text{m}}\cos(\omega t + \phi)$$

- 여기서 반지름 x_{m}, 각위치 θ, 각속도 ω, 초기 각위치 ϕ는 각각 진폭, 위상, 각진동수, 위상상수의 역할을 한다.
- 그러므로 단순조화운동은 등속 원운동을 원의 지름방향으로 투영시킨 것과 같다.



15.5 감쇠 단순조화운동

학습목표

☞ 감쇠 단순조화운동이 무엇인지를 알아보고 경우에 따라 그 운동이 어떻게 기술되는지를 조사한다.

감쇠진동

용수철, 토막, 막대, 저항판으로 구성된 다음과 같은 장치를 고려하자.

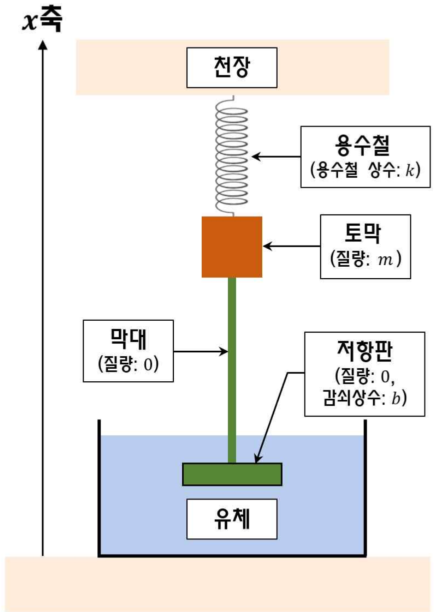
❖ 토막은 용수철에 연결되어 천장에 매달려 있다.
❖ 토막의 질량은 m이고, 용수철 상수는 k이다.
❖ 토막과 저항판은 막대로 연결되어 있다.
❖ 막대와 저항판은 질량이 없다고 가정한다.
❖ 토막과 저항판은 지면에 수직한 방향(x축)으로만 움직이다.
❖ 원점은 토막에 작용하는 중력 F_{g}과 용수철 힘 F_{s}이 평형을 이룰 때 토막의 위치이다.

$$F_{\mathrm{g}}+F_{\mathrm{s}}=-kx$$

❖ 저항판은 유체 속에 잠겨있다.
❖ 토막과 저항판의 속도 v에 비례하여 **감쇠력** F_{d}이 발생한다.

$$F_{\mathrm{d}}=-bv$$

❖ 여기서 b은 저항판과 유체의 특성에 의존하는 **감쇠상수**이다.



- 이 장치처럼 단순조화진동자에 감쇠력을 부여한 계를 일컬어 **감쇠 단순조화진동자**(Damped simple harmonic oscillator) 또는 줄여서 간단히 **감쇠진동자**(Damped oscillator)이라고 하고, 그 진동을 가리켜 **감쇠진동**(Damped oscillation)이라고 한다.
- Newton의 제2법칙으로 말미암아 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$-kx - bv = F_{\mathrm{g}} + F_{\mathrm{s}} + F_{\mathrm{d}} = ma$$

- 이 식에서 토막의 속도 v와 가속도 a을 dx/dt와 d^2x/dt^2로 대치하면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- 위의 미분방정식처럼 표현되는 운동을 일컬어 **감쇠 단순조화운동**(Damped SHM)이라고 한다.

저감쇠진동

- 단순조화진동자의 각진동수 $\sqrt{k/m}$가 $b/2m$보다 크면 위 미분방정식의 해는 임의의 상수 x_{m}와 ϕ로 말미암아 다음처럼 표현된다.

$$x(t) = x_{\mathrm{m}} e^{-bt/2m} \cos(\omega t + \phi)$$

- x_{m}은 단순조화진동자의 진폭이고 ϕ은 위상상수이다.
- ω은 저감쇠진동자의 각진동수이고 다음처럼 주어진다.

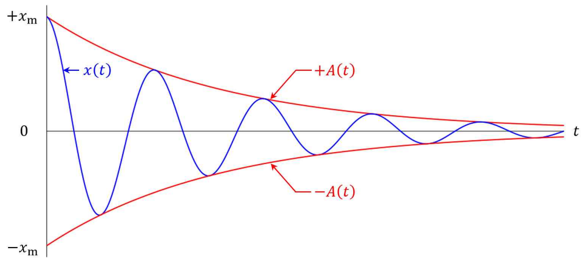
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

- $x(t)$와 같은 진동을 **저감쇠진동**(underdamped oscillation)라고 하고, 그 진동자를 **저감쇠진동자**(underdamped oscillator)라고 한다.

- 저감쇠진동자의 진폭 $A(t)$은 시간 t에 따라 지수함수적으로 감소한다.

$$A(t) = x_{\mathrm{m}} e^{-bt/2m}$$

- $\sqrt{k/m} \gg b/2m$이면 ω을 단순조화진동자의 진동수 $\sqrt{k/m}$로 어림할 수 있다.
- $\phi = 0$인 경우 $x(t)$은 다음처럼 표현된다.



- $x = 0$에서의 탄성 퍼텐셜에너지를 0으로 잡을 때 탄성 퍼텐셜에너지 $U(t)$는 다음처럼 표현된다.

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 e^{-bt/m}\cos^2(\omega t + \phi)$$

- 감쇠상수 b가 작을 때 토막의 운동에너지 $K(t)$을 다음처럼 어림할 수 있다.

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 \approx \frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 e^{-bt/m}\sin^2(\omega t + \phi)$$

- 이때 감쇠진동자의 역학에너지 $E(t)$는 시간 t에 따라 지수함수적으로 감소한다.

$$E(t) = U(t) + K(t) = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 e^{-bt/m}$$

과감쇠진동

- 단순조화진동자의 각진동수 $\sqrt{k/m}$가 $b/2m$보다 작으면 앞에서 제시한 감쇠 단순조화운동 미분방정식의 해는 임의의 상수 x_1와 x_2로 말미암아 다음처럼 표현된다.

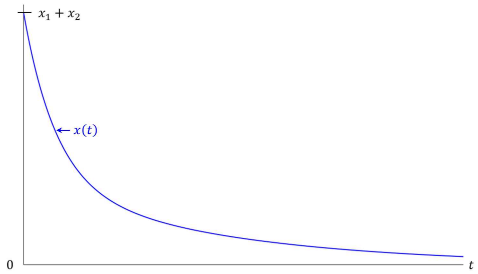
$$x(t) = e^{-bt/2m}\left(x_1 e^{+\omega t} + x_2 e^{-\omega t}\right)$$

- x_1와 x_2은 초기 토막의 위치와 속도로 말미암아 결정된다.
- 여기서 ω은 과감쇠진동자의 각진동수이고 다음처럼 주어진다.

$$\omega = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

- $x(t)$와 같은 진동을 **과감쇠진동**(overdamped oscillation)라고 하고, 그 진동자를 **과감쇠진동자**(overdamped oscillator)라고 한다.

- 과감쇠진동은 주기적인 진동 없이 급격하게 평형점($x=0$)로 수렴한다.



임계감쇠진동

- 단순조화진동자의 각진동수 $\sqrt{k/m}$가 $b/2m$와 같으면 앞에서 제시한 감쇠 단순조화운동 미분방정식의 해는 임의의 상수 c_1와 c_2로 말미암아 다음처럼 표현된다.

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-bt/2m}$$

- c_1와 c_2은 토막의 초기위치와 초기속도로 말미암아 결정된다.
- $x(t)$와 같은 진동을 **임계감쇠진동**(critically damped oscillation)라고 하고, 그 진동자를 **임계감쇠진동자**(critically damped oscillator)라고 한다. 임계감쇠진동은 과감쇠진동처럼 급격하게 평형점($x=0$)으로 수렴한다.

15.6 강제진동과 공명

학습목표

☞ 강제진동 단순조화운동이 무엇인지를 알아보고 경우에 따라 그 운동이 어떻게 기술되는지를 조사한다.

자유진동과 강제진동

외부력이 작용하는 단순조화진동자를 고려하자.

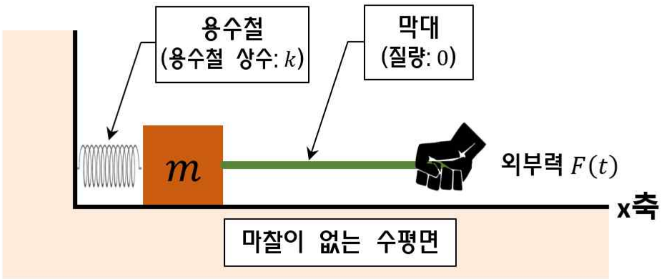
- ❖ 용수철은 벽과 토막을 연결한다.
- ❖ 토막의 질량은 m이고, 용수철 상수는 k이다.
- ❖ 토막이 놓여있는 수평면에는 마찰이 없다.
- ❖ 토막은 지면에 수평한 방향(x축)으로만 움직이다.
- ❖ 원점은 토막에 작용하는 용수철 힘 F_s이 0일 때 토막의 위치이다.

$$F_s=-kx$$

- ❖ 토막에는 질량이 없는 막대가 고정되어 있다.
- ❖ 막대에는 시간 t에 따라 다음과 같은 외부력 $F(t)$이 작용한다.

$$F(t)=F_0\cos(\omega_f t+\phi_f)$$

❖ ω_{f}와 ϕ_{f}은 외부 단순조화진동자의 각진동수와 위상상수이다.
❖ F_0은 외부력 변화의 최대치이다.



- 복원력 이외에 다른 힘이 존재하지 않는 경우의 진동을 가리켜 단순조화진동 또는 **자유진동**(free oscillation)이라고 말한다.
- 복원력과 감쇠력 이외에도 외부력이 존재하는 경우의 진동을 일컬어 **강제진동**(forced oscillation)이라고 한다.
- 이 장치처럼 단순조화진동자에 외부력을 부여한 계를 **강제 단순조화진동자**(forced simple harmonic oscillator) 또는 줄여서 간단히 **강제진동자**(forced oscillator 또는 driven oscillator)라고 한다.
- Newton의 제2법칙으로 말미암아 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$-kx + F(t) = ma$$

- 이 식에서 토막의 가속도 a을 d^2x/dt^2로 대치하면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F(t)$$

- 위의 미분방정식처럼 표현되는 운동을 일컬어 **강제 단순조화운동**(forced SHM)이라고 한다. 이 식의 해는 다음과 같다.

$$x(t) = x_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2)}\cos(\omega_{\mathrm{f}} t + \phi_{\mathrm{f}})$$

- 여기서 $x_{\mathrm{m}}, \omega, \phi$은 단순조화진동자의 진폭,각진동수,위상상수이다.
- 즉, ω은 $\sqrt{k/m}$이다. x_{m}와 ϕ은 초기조건으로 결정된다.
- ω_{f}가 ω에 가까워질수록 진동 $x(t)$의 진폭은 증가한다. 이처럼 외부 진동자로 말미암아 진동의 진폭이 극대화되는 현상을 일컬어 **공명**(resonance)이라고 한다.