Chapter 1. Sets and logics

1.1 Sets 집합

Definitions (1) A *set* is a collection of *objects* (객체) (or elements or members).

(2) If X is a finite set (유한개의 성분으로 구성된 집합), the *cardinality* (기수) of X, denoted by $|X|$, refers to the number of elements in X.

(3) The set with no elements is called the empty (or *null* or void) set (공집합) and is denoted by $\emptyset$ or $\{\}$.

Example 1.1 Some important sets:

Z ... set of integers

Q ... set of fractional numbers

R ... set of real numbers

Z^+ ... set of positive integers

Example 1.2 (집합의 표현 방법)

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{x \mid x > 0 \text{ and even integer}\}$

$C = \{R, Z\}$

Set operations (집합의 연산)

(1) Two sets X and Y are *equal*, $X = Y$, if X and Y have the same elements.

- $X = Y$, if the following two conditions hold:
  For every $x \in X$, $x \in Y$, and for every $x \in Y$, $x \in X$: *i.e.*, $X \subseteq Y$ and $Y \subseteq X$.
- $X \neq Y$, if there is at least one element in X that is not in Y or if there is at least one element in Y that is not in X.

(2) Suppose that X and Y are sets. If every element of X is an element of Y, we say that X is a *subset* (부분집합) of Y and we write $X \subseteq Y$.

- For X to not be a subset of Y, there must be at least one element of X that is not in Y.
- X is a *proper subset* (진부분집합) of Y, denoted as $X \subset Y$, if $X \subseteq Y$ and $X \neq Y$.
- For any set X, $X \subseteq X$ and $\emptyset \subseteq X$.

(3) The set of all subsets of a set X, denoted by $P(X)$, is called the *power set* (멱집합) of X.

(4) Given two sets X and Y,

$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$ ... *union* (합집합) of X and Y

$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ and } x \in Y\}$ ... *intersection* (교집합) of X and Y

$X - Y = \{x \mid x \in X \text{ and } x \notin Y\}$ ... *difference* (차집합 or relative complement 상대적 여집합) of X and Y

(5) Sets X and Y are *disjoint*, if $X \cap Y = \emptyset$. A collection of sets S is said to be *pairwise disjoint*, if, whenever X and Y are distinct sets in S, X and Y are disjoint.

(6) For a collection of sets S, if every sets in S is a subset of U, then this set U is called a *universal set* (전체집합). Given a universal set U and a subset X of U, the set $U - X$ is called the *complement* (여집합) of X and is denoted by $\overline{X}$ or X^c.

Example 1.3 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{2, -3\}$, $C = \{1,2,3\}$, $D = \{2,4\}$, $E = \{1,2,3,4\}$, $F = \{1,3\}$, $G = \{x \mid 3x^2 - x - 2 = 0\}$, $H = \{a,b,c\}$, $U = \{1,2,3,4,5\}$

(a) $A = B$.

(b) $C \neq D$.

(c) $F \subseteq E$

(d) $A \subseteq Z$

(e) G is not a subset of Z.

(f) $P(H)$, $|H|$, and $|P(H)|$

(g) $C \cap D$, $C \cup D$, $C - D$, $D - C$

(h) $R \cup Q$, $R \cap Q$, $Q - R$

(i) E^c

Venn diagram

It provides a pictorial view of sets.

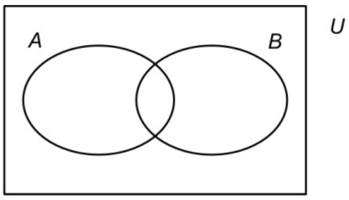

Figure 1.1 A Venn diagram

Example 1.4 Using a Venn diagram, we can depict a particular set (or subset) by shading. In Fig. 1.1, we can shade the following sets:

$A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A - B$, $B - A$, A^c, B^c

Venn diagrams can be used to visualize certain properties of sets. For example, by sketching both $\overline{A \cup B}$ and $A^c \cap B^c$, we see that these sets are equal.

Example 1.5 Among a group of 165 students, 8 are taking calculus, psychology, and computer science; 33 are taking calculus and computer science; 20 are taking calculus and psychology; 24 are taking psychology and computer science; 79 are taking calculus; 83 are taking psychology; and 63 are taking computer science. How many are taking none of the three subjects?

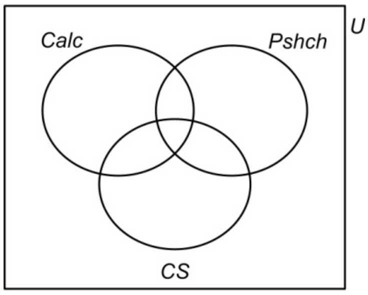

Figure 1.2 A Venn diagram with three sets in Example 1.5

Theorem 1.1 Let U be a universal set and let A, B, and C be subsets of U. The following properties hold:

(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ... associative (결합) law

(b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ ... commutative (교환) law

(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$ ... distributive (분배) law

(d) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$ ... identity law

(e) $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$ ... complement law

(f) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ ... idempotent law

(g) $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ ... bound law

(h) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ ... absorption law

(i) $(A^c)^c = A$ ... involution law

(j) $\emptyset^c = U$, $U^c = \emptyset$ ... 0/1 law

(k) $\overline{A \cup B} = A^c \cap B^c$, $\overline{A \cap B} = A^c \cup B^c$ ... De Morgan's law

Definitions (1) A *partition* (분할) of a set X is a collection, $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, of non-empty and disjoint subsets of X.

(2) For two sets X and Y, their *Cartesian product*, denoted by $X \times Y$ is the set of all ordered pair (x, y) such that $x \in X$ and $y \in Y$.

- If S is a partition of X, then $A_i \cap A_j = \emptyset$ and $\cup_{i=1}^{n} A_i = U$.
- $X \times Y \neq Y \times X$
- $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$

Example 1.6 Given $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{a, b\}$,

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

(c) $A \times A$

1.2 Propositions 명제

논리는 인간이 어떻게 사고하는가를 표현하는 사고의 규칙을 말한다. 논리는 일반적으로 명제논리(propositional logic)와 술어논리(predicate logic)으로 구분된다. 명제 논리는 주어와 술어를 구분하지 않고 전체 문장(statement)을 하나로 처리하여 참/거짓을 판별하는 법칙을 다룬다. 반면에, 술어 논리는 주어와 술어를 구분하여 이들과의 연결관계로부터 참/거짓을 판별한다.

Definitions A *proposition* is a sentence or statement that is either true or false.

- 명제란 어떤 사고를 나타내는 문장 중에서 참/거짓을 객관적이고 명확하게 구분할 수 있는 문장이나 수식을 말한다.
- 명제는 일반적으로 선언문(declarative sentence)의 형태를 갖는다. 의문문이나 명령문은 참과 거짓을 구별할 수 없기 때문에 proposition 이 될 수 없다.
- Propositions are basic building blocks of any theory or logic (논리).
- 명제가 참 혹은 거짓 값을 가질 때, 그 값을 명제의 진리값(truth value)이라 하며, 각각 T/F 로 표시한다.
- We use variables, such as p, q, and r, to represent propositions together with the notation such as

  $p: 1 + 1 = 3$

  to define p to be the proposition $1 + 1 = 3$.

Example 1.7 (a) p: 바나나는 맛있다.

(b) q: $3x + 5y = 7$

(c) r: 28 은 4 의 배수이다.

(c) s: 지금 어디로 가니?

논리연산 및 명제의 결합

하나의 문장이나 식으로 구성된 명제를 단순 명제(simple propositions)라 하고, 여러 개의 단순 명제들이 논리 연산자로 연결되어 구성된 명제를 합성 명제(combined propositions)라 한다. 단순 명제들은 아래와 같은 논리 연산자(logical operators)들로 연결되어 합성 명제를 구성한다.

Definitions (명제의 결합) Let p and q be propositions.

(1) The *conjunction* (논리곱) of p and q, denoted by $p \wedge q$, is the proposition

$p \text{ and } q$

(2) The *disjunction* (논리합) of p and q, denoted by $p \vee q$ and called *inclusive-or*, is the proposition

$p \text{ or } q$

(3) The *negation* (부정) of p, denoted by $\sim p$, is the proposition

$\text{not } p$

단순 명제는 그 명제의 참/거짓에 따라 T/F 값을 갖는다. 복합명제의 진리값은 진리표를 사용하여 단계적으로 연산할 수 있다.

Table 1.1 Truth table of combined propositions

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

Example 1.8 (a) Given two propositions, p: It is raining, q: It is cold:

$p \wedge q$

$p \vee q$

(b) p: A decade is 10 years, q: A millennium is 1000 years:

$p \wedge q$

Operator precedence (우선순위)

~, ∧, ∨ (실수 연산에서 −, ×, ÷ 연산의 순서와 동일)

Example 1.9 $\sim p \vee q \wedge r \;\leftrightarrow\; (\sim p) \vee (q \wedge r)$

1.3 Conditional propositions and logical equivalence

Definitions If p and q are propositions, then proposition

if p, then q (p이면, q이다)

is called a *conditional proposition* (조건명제) and is denoted by '$p \rightarrow q$'

- If hypothesis (가정), then conclusion (결론).
- p implies q (p는 q를 함축한다).
- p is a sufficient condition (충분조건) for q.
- q is a necessary condition (필요조건) for q.
- 이때 사용되는 "→"를 조건 연산자라 칭한다.
- 조건명제, $q \rightarrow p$를 $p \rightarrow q$의 *logical converse* (논리역)이라 한다.

Table 1.2 Truth table of conditional proposition

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

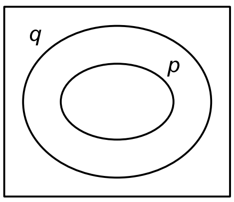

Figure 1.3.1 Set representation of conditional proposition

Logical equivalence (논리적 동치)

if p, then q. $\equiv$ p, only if q.

$\equiv$ p is a sufficient condition for q.

$\equiv$ q is a necessary condition (필요조건) for p.

- 이때 사용되는 "≡"연산자(equivalence operator)는 양쪽에 위치한 두 명제가 논리적 동치임을 의미한다. 즉, 두 명제가 동일한 진리값을 갖는다.

(a) 필요조건은 특별한 결과(outcome)를 얻기 위해서 반드시 필요한 조건을 의미한다. 필요조건이 만족되더라도 결과가 보장하지 않는다. 하지만, 필요조건이 만족되지 않으면, 결과는 달성될 수 없다.

(b) 충분조건은 특별한 결과를 보장하기에 충분한 조건을 말한다. 충분조건이 만족되면 결과는 반드시 발생한다. 하지만, 충분조건이 만족되지 않으면, 결과는 예측할 수 없다.

Example 1.10 (a) Mary will be a good student if she studies hard.

(b) John takes calculus only if he has sophomore, junior, or senior standing.

(c) A necessary condition for the Cubs to win the World Series is that they sign a right-handed relief pitcher.

(d) A sufficient condition for Maria to visit France is that she goes to the Eiffel Tower.

(e) 바다가 육지라면, 런던은 영국의 수도이다.

(f) $3+4>5$이면, $3>5$이다.

(g) 유채꽃이 빨갛다면, 바다가 육지다.

(g) If Jerry wins a scholarship, he will go to the college: $p \to q$. Its *logical converse* (논리역) is $q \to p$, which states "if Jerry go to the college, he will receive a scholarship. 조건 명제가 참일지라도 그 논리역은 거짓일 수 있다.

Definitions If p and q are propositions, then proposition

p, if and only if q

is called a *bi-conditional proposition* (쌍조건명제) and is denoted by '$p \leftrightarrow q$'

- p iff q.
- p is a necessary and sufficient condition (필요충분조건) for q.
- 명제 p와 q가 필요충분조건의 관계에 있다면, 두 명제는 동치이다.

Table 1.3 Truth table of bi-conditional proposition

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Some important logical equivalence (This is very important)

(a) De Morgan's Laws for logic

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q), \quad \sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

(b) $\sim(p \to q) \equiv p \wedge (\sim q)$

(b) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Definitions **(항진명제와 모순명제)** (a) 합성명제에서 그 명제를 구성하는 단순 명제의 진리값과 관계 없이 합성명제의 진리값이 항상 참의 값을 가질 때, 이를 항진명제(*tautology)*라 한다.

(b) 반대로 항상 거짓의 값을 가질 때, 이를 모순명제(*contradiction)*라 한다.

Example 1.11 (a) p가 명제일 때, $p \vee (\sim p)$는 항진명제이고, $p \wedge (\sim p)$는 모순명제이다.

(b) $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$는 모순명제이다.

Definitions The *contrapositive* (or *transposition:* 대우 혹은 전치) of the conditional proposition $p \to q$ is the proposition, $\sim q \to \sim p$.

Theorem 1.2 The conditional proposition $p \to q$ and its contrapositive $\sim q \to \sim p$ are logically equivalent: $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$.

Example 1.11 Assume that the network is not down and Dale can access the network and consider the conditional proposition, "if the network is down, then Dale cannot access the internet".

(a) p: network is down (False) and q: Dale cannot access the internet (False) : $p \to q$. (True)

(b) Contrapositive: $\sim q \to \sim p$. If Dale *can* access the internet, then the network is *not* down. (True)

(c) Converse (역): $q \to p$. If Dale *cannot* access the internet, then the network is down. (True)

Table 1.4 Truth table of conditional proposition and its contrapositive

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Example 1.12 If you fix my computer, I will pay you 50 dollars.

말한 의도는 "네가 컴퓨터를 고치지 않으면 돈을 주지 않는다"는 의미도 포함되어 있다. 따라서, 이 명제는 쌍방향명제로 해석되어야 한다. 실 생활에서 사용하는 문장은 논리적인 부분이 명확하지 않은 경우도 있다.

1.4 Arguments (논법) and rule of inference (추론규칙)

주어진 일련의 명제가 참인 것을 바탕으로 새로운 명제가 참이 되는 것을 유도하는 과정을 연역적 추론(deductive argument)이라 한다. 사전에 주어진 명제를 가설 혹은 전제(*hypotheses*)라 하고 가설에 따라 유도되는 명제를 결론(*conclusion*)이라 한다. 논법(*argument*)은 다음과 같은 형태 과정으로 표현된다.

If p_1 and p_2 and ... and p_n, then q.

(a) 논법은 다음과 같이 표시한다.

$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n \ / \therefore q$

(b) An argument is said to be *valid* (유효), if the conclusion follows from the hypotheses: *i.e.*, if all propositions $p_1,\ p_2$ up to p_n are true, then q must also be true. Otherwise, the argument is invalid (or a fallacy: 무효, 오류, 혹은 허위 추론).

(c) In a valid argument, we sometimes say that the conclusion follows from the hypotheses. Notice that we are not saying the conclusion is true: we are only saying that if the hypotheses are granted, then we have to grant the conclusion also. An argument is valid because of its form, not because of its content.

Rules of inference (추론 규칙)

(a) $p \to q,\ p \ / \therefore q$ (modus ponens: 긍정식 논법)

(b) $p,\ q \ / \therefore p \wedge q$

(c) $p \to q,\ \sim q \ / \therefore \sim p$ (modus tollens: 부정식 논법)

(d) $p \to q,\ q \to r \ / \therefore p \to r$ (hypothetical syllogism: 가설적 삼단논법)

(e) $p \ / \therefore p \vee q$

(f) $p \vee q,\ \sim p \ / \therefore q$

(g) $p \wedge q \ / \therefore q$

Example 1.13 Determine if the following argument is valid: $p \to q,\ p \ / \therefore q$.

Truth table for Ex.1.13

p	q	$p \to q$	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Example 1.14 If $2 = 3$, then I bet my position. I bet my position. Therefore, $2 = 3$.

Let propositions be 'p: $2 = 3$' and 'q: I bet my position'. Then, $p \to q,\ q \ / \therefore p$ (invalid)

p	q	$p \to q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Example 1.15 Bugs exist on modules-17 or module-81. Bugs are numerical. Module-81 is bug-free (If a numerical bug exist, it is not on module-81). Therefore, bug is in module-17.

Let propositions, p: Bug on module-17, q: Bug on module-81, and r: Bug is a numerical one. Then,

$p \vee q,\ r,\ r \to \sim q\ \ / \therefore p$ (valid)

1.5 Quantifiers (한정기호)

일반적인 명제들은 참/거짓이 명확하게 결정된다 (그렇지 않으면 명제가 아니다). 그러나, 명제 중에는 값이 정해지지 않은 변수나 객체(object)가 있어 참/거짓이 변수 혹은 객체에 따라 달라지는 경우가 있다. 예를 들어, '$x^2+5x+6=0$'이라는 명제는 x값이 $\{-2,-3\}$일 경우에는 참 값을 가지고 그 외의 실수 값에 대해서는 거짓 값을 가진다. 이러한 경우, '$x^2+5x+6=0$을 만족시키는 변수가 있다'고 표현한다.

Definitions (1) Let $P(x)$ be a statement involving variable x and let D be a set. We call P be a propositional function (명제함수) or predicate (술어) with respect to D. If

$\forall x \in D, P(x)$ ... for all x in D, $P(x)$

is a proposition, we call D the domain of discourse (논의영역) of P. This statement '$\forall x \in D, P(x)$' is said to be a universally quantified statement (전치 한정된 문장).

- $\forall x \in D, P(x)$ is true, if $P(x)$ is true for all $x \in D$.
- In order to prove $\forall x \in D, P(x)$ is true or not, we
  ① check every element $x \in D$ if $P(x)$ is true, or
  ② find one element $x \in D$ such that $P(x)$ is false (counter example).

(2) Let P be a propositional function with domain of discourse D. The statement

$\exists x\, P(x)$ ... there exists x in D, such that $P(x)$

is said to be an existentially quantified statement (존재 한정된 문장).

- $\exists x\, P(x)$ is ① true, if $P(x)$ is true for some $x \in D$ and ② is false if $P(x)$ is false $\forall x \in D$.

Example 1.16 When $D = Z$ (set of integers),

(a) $\forall x \in D,\ x < x+1$ (True)

(b) $\forall x \in D,\ x = 3$ (False)

(c) $\forall x \in D,\ x > x-3$

(d) $\exists x,\ x^2 = x$

Example 1.17 Interpret the following propositional function:

(a) $\sim(\forall x, P(x))$

(b) $\exists y,\ (\forall x, P(x))$

Theorem 1.3 Generalized De Morgan's law for logic

(a) $\sim(\forall x, P(x)) \equiv \exists x \sim P(x)$

(b) $\sim(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x, \sim P(x)$

Example 1.18 다음 문장을 명제함수로 표현

(a) 모든 rock fan 들은 U2 를 좋아한다.

- DOD, D: 모든 rock fan 들의 집합, $P(x)$ ... 'x는 U2 를 좋아한다'.
- $\forall x \in D,\ P(x)$
- 이 명제에 대한 부정은 $\sim(\forall x \in D, P(x)) = \exists x \in D, \sim P(x)$이고 'U2 를 좋아하지 않는 rock fan 이 있다'로 해석된다.

(b) 어떤 새들은 날지 못한다.

- DOD, D: 모든 새들의 집합, $P(x)$ ... x가 난다.
- $\exists x \in D, \sim P(x)$ $\forall x \in D,\ P(x)$
- 이 명제에 대한 부정은 $\sim(\exists x \in D, \sim P(x)) = \forall x \in D, P(x)$이고 '모든 새들은 난다'로 해석된다.

(c) 반짝인다고 모두 금은 아니다.

- DOD, D: 모든 물체들의 집합, $P(x)$ ... x가 반짝인다. $Q(x)$ ... x가 금이다.
- 표현식 1: $\forall x, (P(x) \rightarrow \sim Q(x))$
- 표현식 2: $\exists x, (P(x) \wedge \sim Q(x)) \equiv \exists x, \sim(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \sim(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x))$
- 이상과 같이 표현식 1 과 같이 문장 일부가 부정되거나, 표현식 2 에서와 같이 전체 문장에 부정을 적용하는 경우, 애매모호한 해석이 있을 수 있다.
- 긍정문에서는 'any', 'all', 'each', 'every'가 같은 의미를 갖는다.
- 부정문에서는, 'not all $x, P(x)$', 'not each', 'not every'는 'for some $x, \sim P(x)$'의 의미로 해석될 수 있으나, 'not any $x, P(x)$'와 'no x'는 'for all $x, \sim P(x)$'의 의미를 가진다.

(d) 모든 남자가 바람을 피우는 것은 아니다.

- DOD, D: 모든 사람들의 집합, $P(x)$ ... x가 남자다. $Q(x)$ ... x가 바람을 피운다.
- $\exists x, (P(x) \wedge \sim Q(x))$

Example 1.19 명제함수와 추론 법칙

(a) 모든 양의 정수n에 대하여, $n^2 \geq n$이다. 그러므로 $64^2 \geq 64$이다.

- 추론 법칙: $\forall x,\ P(x) \,/ \therefore P(d), if\ d \in D$

(b) 모든 실수 x에 대하여, 만약 x가 정수이면 x는 유리수이다. $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다. 그러므로 $\sqrt{2}$는 정수가 아니다.

- DOD, $D = R$ (set of real numbers), $P(x)$ ... x가 정수다: $Q(x)$ ... x가 유리수다
- $\forall x \in D, (P(x) \rightarrow Q(x)),\ \sim Q(\sqrt{2})\ \ / \therefore \sim P(\sqrt{2})$
- $\sqrt{2} \in D$이므로, 명제 $P(\sqrt{2}) \rightarrow Q(\sqrt{2})$가 참이며, $\sim Q(\sqrt{2})$ 참, 그리고 $\sim P(\sqrt{2})$ 역시 참이므로 이 논법은 유효하다.
- 이러한 형태의 논법을 부정식 논법(추론규칙 (c) 참조)이라 한다: $P \rightarrow,\ \sim Q\ \ / \therefore \sim P$

1.6 Nested quantifiers (다중 한정기호)

Four statements with nested quantifiers

(1) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$ with domain of discourse $X \times Y$

- True, if $P(x, y)$ is true $\forall x \in X$ and $\forall y \in Y$.
- False, if $\exists x \in X$ and $y \in Y$, such that $P(x, y)$ is false.

(2) $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$

- True, if $\exists x \in X$ such that $P(x, y)$ is true $\forall y \in Y$.
- False, if $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$, such that $P(x, y)$ is false.

(3) $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$

- True, if $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$, such that $P(x, y)$ is true.

- False, if $\exists x \in X$, such that $P(x, y)$ is false $\forall y \in Y$.

(4) $\exists x\, \exists y\, P(x, y)$

- True, if $\exists x \in X$ and $y \in Y$, such that $P(x, y)$ is true.

- False, if $P(x, y)$ is false $\forall x \in X$ and $\forall y \in Y$.

Example 1.20 (a) $\forall m\, \exists n\, (m < n)$, with DoD $Z \times Z$ (The largest integer does not exist)

(b) Everybody loves somebody: $\forall x\, \exists y\, L(x, y)$

- Compare to $\exists x\, \forall y\, L(x, y)$ (Somebody loves everybody)

(c) $\forall x \forall y\, \big((x > 0) \land (y > 0)\ \rightarrow\ (x + y > 0)\big)$, with DoD $R \times R$

(d) $\forall x \forall y\, \big((x > 0) \land (y < 0)\ \rightarrow\ (x + y \neq 0)\big)$, with DoD $R \times R$

(e) $\forall x\, \exists y\, (x + y = 0)$, with DoD $R \times R$

(f) $\forall x\, \exists y\, (x > y)$, with DoD $N \times N$

(g) $\exists x\, \forall y\, (x \leq y)$, with DoD $N \times N$

(h) $\exists x\, \forall y\, (x \geq y)$, with DoD $N \times N$ (The largest positive integer does not exist)

- Negation: $\forall x \in N$, $\exists y \in N$, such that $x \geq y$

(i) $\exists x\, \exists y\, \big((x > 1) \land (y > 1) \land (xy = 6)\big)$, with DoD $Z \times Z$

(j) $\exists x\, \exists y\, \big((x > 1) \land (y > 1) \land (xy = 7)\big)$, with DoD $Z \times Z$

(k) $\sim (\forall x\, \exists y\, P(x, y))$

(l) $\sim \big(\forall x\, \exists y\, (xy < 1)\big)$, with DoD $R \times R$