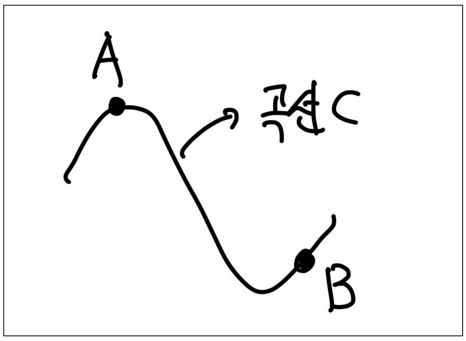
THEME 04 - 선적분

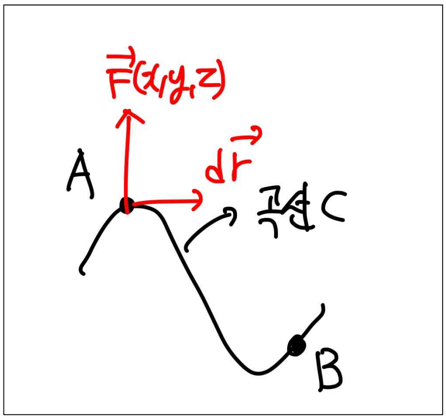
❶ 함수가 스칼라로 주어진 선적분



점 A에서 B까지의 곡선 C를 따르는 구간에서 정의된 함수 $f(x,y,z)$의 적분이 스칼라 함수에 대한 선적분이다.

① 정의 : $\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\frac{ds}{dt}dt = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$

❷ 함수가 벡터로 주어진 선적분



벡터함수 $\vec{F}(x,y,z)$는 곡선 C의 모든 점에서 정의된 벡터라 할 때 A에서 B까지 곡선 C를 따르는 $\vec{F}$의 적분을 벡터함수에 대한 선적분이라고 한다.

① 가정 : 곡선 C는 폐곡면이다. (단, $F(x,y,z)=(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$, $C: r(t)=(x(t),y(t),z(t))$)

② F가 x,y,z의 함수로 주어진 경우 : $\int_C F \bullet dr = \int_C F_1dx+F_2dy+F_3dz$

③ F가 매개변수 t의 함수로 주어진 경우 : $\int_C F \bullet dr = \int_C F \bullet \frac{dr}{dt}dt = \int_C F(x(t),y(t),z(t)) \bullet (\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt})dt$

❸ 포텐셜 함수

① 시작 : $CurlF=0$이면 포텐셜 함수가 존재한다.

② 정의 : $F=\nabla f=(f_x,f_y,f_z)$일 때 f를 F의 포텐셜 함수라고 한다.

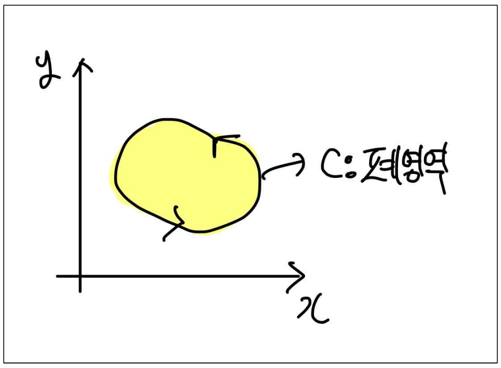
③ 포텐셜 함수를 찾는 방법 : 각 성분을 적분하여 겹치는 것을 제외한 f를 찾는다.

④ 공식 : $\int_{r(t_1)}^{r(t_2)} F \bullet dr = \int_{r(t_1)}^{r(t_2)} \nabla f \bullet dr = f(r(t_2))-f(r(t_1))$

* 닫힌 공간이면 시점과 끝점이 같으므로 선적분의 값은 0이 나온다.
* 열린 공간이면 시점과 끝점이 다르므로 선적분의 값은 0이 아니다.

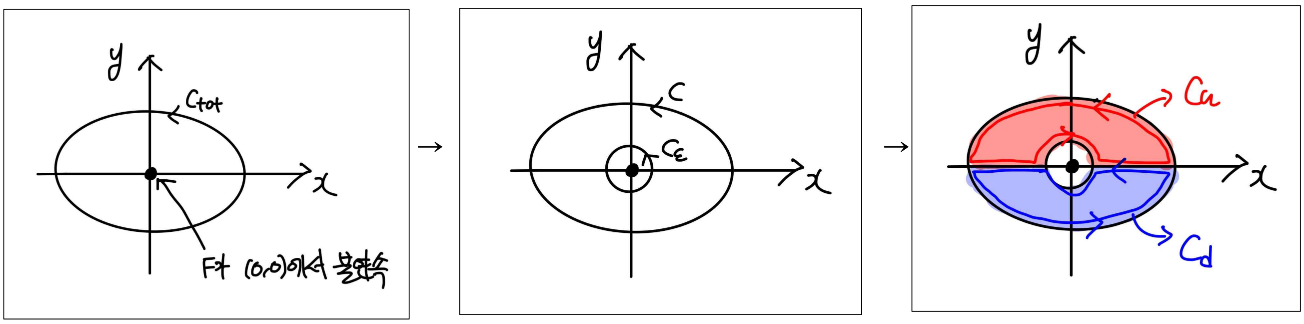
❹ 그린정리

(1) 피적분함수 F가 구간에서 연속인 그린정리



$\int_C F \cdot dr = \int_C Mdx + Ndy = \iint_R (N_x - M_y)dxdy$ (C: 폐곡선, R: 폐곡선 내부)

(2) 피적분함수 F가 구간에서 불연속인 그린정리



i) 예를들어서 피적분함수 $F=(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$이란 함수가 C_{tot}로 둘러싸인 부분에서 정의되었다고 하자.

그러면 F는 $(0,0)$에서 불연속이다.

ii) 그림2에서와 같이 C으로 외부를 감싸고 C_ε으로 내부를 감싸는 구멍을 뚫자.

$C_\varepsilon : r_\varepsilon = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t)$로 반시계로 회전하고, 반지름이 ε로 매우작은 원으로 생각하자.

iii) 그림3에서 $C - C_\varepsilon = C_u + C_d$를 만족한다. 이를 수학적으로 정리하면

$$\int_{C_{tot}} Fdr = \int_C Fdr - \int_{C_\varepsilon} Fdr = \int_{C_u} Fdr + \int_{C_d} Fdr$$

여기서 $\int_{C_u} Fdr$, $\int_{C_d} Fdr$은 폐곡선으로 둘러쌓여 있으므로 (1)의 그린정리를 사용할 수 있다.

$$\int_{C_u} Fdr = \iint_{R_u} (N_x - M_y)dxdy = 0$$

$$\int_{C_d} Fdr = \iint_{R_d} (N_x - M_y)dxdy = 0$$

$\int_{C_{tot}} Fdr = \int_C Fdr - \int_{C_\varepsilon} Fdr = \int_{C_u} Fdr + \int_{C_d} Fdr = 0$이 되므로

$\int_C Fdr = \int_{C_\varepsilon} Fdr = \int_0^{2\pi} F(\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t) \cdot (-\varepsilon \sin t, \varepsilon \cos t)dt$이다.

❺ 흐름(Flow)

flow= $\int_c F \cdot dr$

❻ 유출량,유량(Flux)

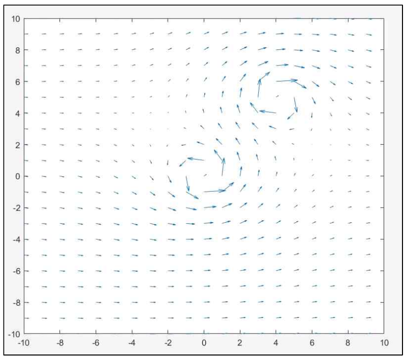
Flux= $\int\int_S F \cdot \vec{n} dS$ ($\vec{n}$은 곡면 S의 바깥 방향으로 향하는 벡터)

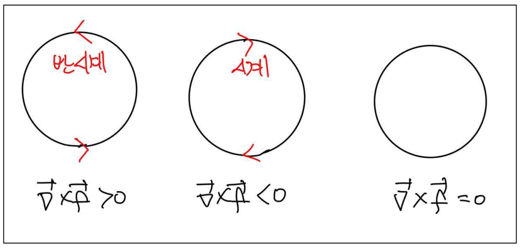
❼ 회전(Curl)

① 2차원 회전의 정의 : Curl $F(x,y) = \nabla \times F(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M(x,y) & N(x,y) & 0 \end{vmatrix} = (0,0,N_x - M_y)$

② 3차원 회전의 정의 : Curl $F(x,y,z) = \nabla \times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M(x,y,z) & N(x,y,z) & P(x,y,z) \end{vmatrix}$

③ k성분의 회전 : $T = (Curl\,F) \cdot \vec{k} = (\nabla \times F) \cdot K = N_x - M_y = \begin{cases} T > 0\ \text{반시계} \\ T = 0\ \text{회전}X \\ T < 0\ \text{시계} \end{cases}$





❽ 발산(Divergence)

(1) 발산의 수학적 정의

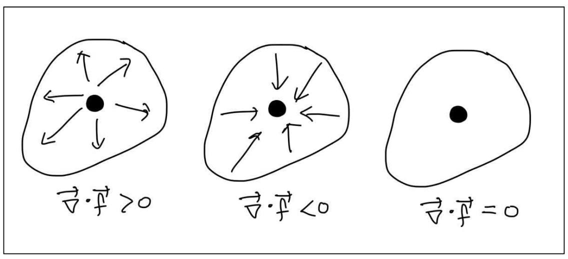
$$\text{Div} f = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (M,N,P) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = M_x + N_y + P_z$$

(2) 발산의 기하학적 정의

① $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} > 0$: 유체가 밖으로 유출되는 것을 의미

② $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} < 0$: 유체가 안으로 흡입되는 것을 의미

③ $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$: 유체의 흐름이 없는 것을 의미



(3) 성질 : $Div\,(Curl\,F) = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

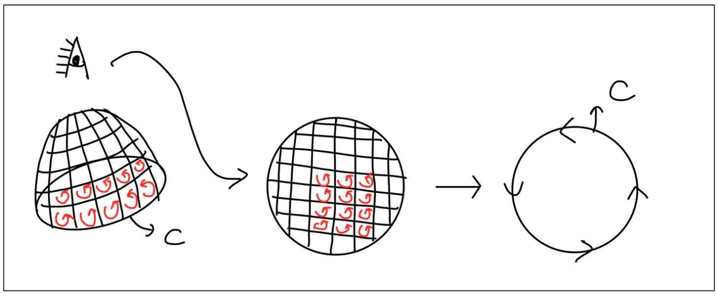
❾ 라플라스(Laplace)

① 정의 : $Div(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \nabla^2 f = \triangle f$

② 조화함수 : $\triangle f = 0$을 만족하는 f

❿ 스톡정리(Storke's Therem)

면 적분을 선 적분으로 바꿀 수 있다는 정리
면적 S는 3차원에서 봤을 때 열려있다.

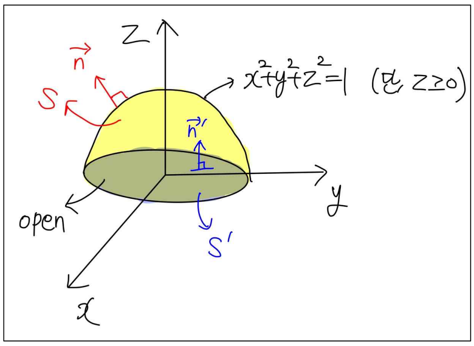


1. 정의로 풀기

(1) 수학적 의미

$$\underbrace{\int_C F \cdot dr = \iint_S CurlF \cdot ndS}_{\text{(스톡정리)}} = \iint_{S'} CurlF \cdot (-f_x, -f_y, 1)dS'$$ (누를수 없는 평면에서 사용)

(2) 기하학적 의미



① S가 3차원으로 닫히지 않는 공간에서 쓸 수 있는 공식이다.

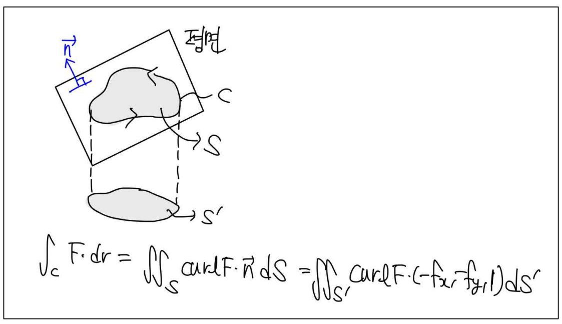
② S'은 S를 손바닥으로 누른, 즉 정사영인 면이다.

③ n은 S의 법선벡터이고, n'은 S'의 법선벡터이다.

④ $F = z - f(x,y) = 0$인 함수라고 하자.

$$n = \frac{\overrightarrow{\nabla F}}{|\overrightarrow{\nabla F}|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

곡면적의 $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy \rightarrow ndS = (-f_x, -f_y, 1)dxdy = (-f_x, -f_y, 1)dS'$

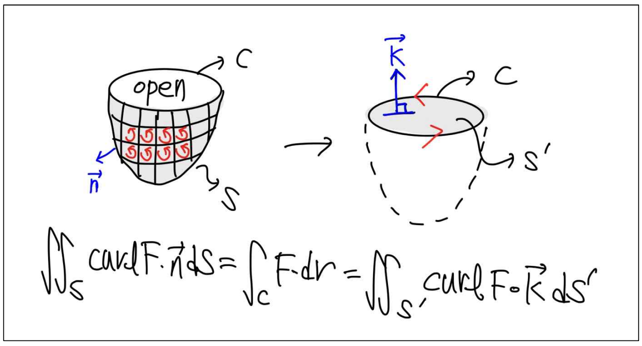


2. 눌러서 풀기

(1) 수학적 의미

$\iint_S Curl\vec{F} \bullet \vec{n} dS = \int_C F \bullet dr = \iint_{S'} Curl\vec{F} \bullet \vec{n}' dS'$ (누를수 있는 원뿔, 구 등에서 사용)

(스톡정리) (스톡정리)



⓫ 발산정리

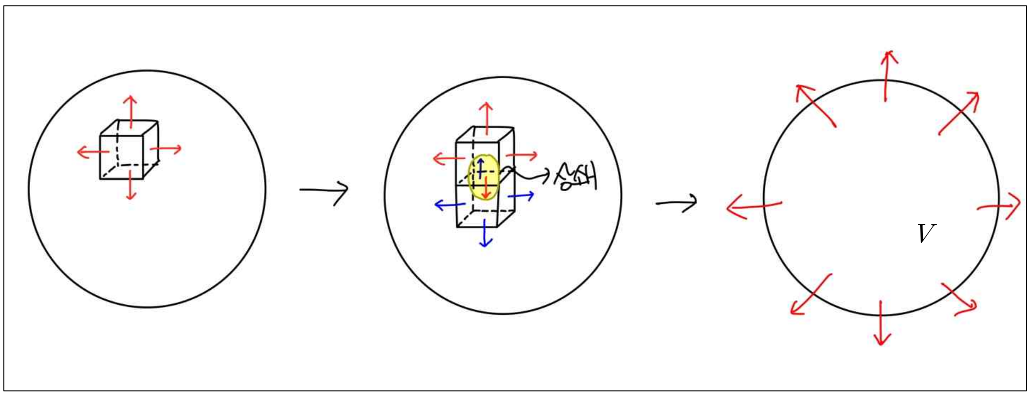
삼중적분은 공간 내 영역의 경계면에서의 면적분으로 변환될 수 있다.

면적 S는 3차원에서 봤을 때 닫혀있다.

(1) 수학적 의미 : $\iint_S F \bullet \vec{n} dS = \iiint_V DivF dV$

(발산정리)

(2) 기하적 의미



⓬ 로직 세우는법 (단, F가 연속일 때)