9 무한급수

2006년 6월 8일

9.1-9.4 무한급수

1. n**항 판정법.**

   $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이면, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

   주의!! $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 일경우, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴, 발산은 결정 할 수없음.

9.1 연습문제 풀이

1. $a_n = \frac{2^n}{n(n+1)} \Longrightarrow$

$a_1 = \frac{2}{1\cdot 2} = 1, \quad a_2 = \frac{2^2}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{2^3}{3\cdot 4} = \frac{2}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$

3. $a_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{(2^n)!} \Longrightarrow$

$$a_1 = (-1)^{1-1}\frac{x^1}{(2^1)!} = \frac{x}{2}, \quad a_2 = (-1)^{2-1}\frac{x^2}{(2^2)!} = -\frac{x^2}{4!},$$
$$a_3 = (-1)^{3-1}\frac{x^3}{(2^3)!} = \frac{x^3}{8!}, \quad a_{n+1} = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(2^{n+1})!}$$

7.

$$\frac{3}{1\cdot 2} - \frac{5}{3\cdot 4} + \frac{7}{5\cdot 6} - \frac{9}{7\cdot 8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{(2n-1)\cdot(2n)}.$$

8.

$$1 - \frac{x}{4!} + \frac{x^2}{7!} - \frac{x^3}{10!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{(3n-2)!}$$

9.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{8}+\frac{7}{11}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n-1}$$

n-항 판정법을 사용하면

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}=\frac{2n-1}{3n-1}=\frac{2}{3}\neq 0$$

그러므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n-1}$ 는 발산한다.

15.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(k+2)}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right\}\\&=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

17.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k+4^k}{5^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{5^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{5^k}=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}+\frac{1}{1-\frac{4}{5}}=\frac{15}{2}$$

19.

$$\begin{aligned}0.2424\cdots&=0.24+0.0024+0.000024+\cdots\\&=\frac{24}{100}+\frac{24}{100^2}+\frac{24}{100^3}+\cdots\\&=\frac{\frac{24}{100}}{1-\frac{1}{100}}\\&=\frac{24}{99}\end{aligned}$$

2. **적분 판정법.** $a_n \geq 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $f(n) = a_n$ 인 연속이고 감소 함수 일때,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 수렴 (발산) $\Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$ 수렴(발산).

3. p**-급수**

$$p\text{-급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ 은 } p > 1 \text{ 이면 수렴, } p \leq 1 \text{ 이면 발산한다.}$$

4. **비교판정법.** $0 \leq a_n \leq b_n$ 일때,

(A) 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면, 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴한다.

(B) 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산하면, 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 발산한다.

주의!! (A) 의 경우 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 발산하면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴, 발산은 알수 없다. (B) 의 경우 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 수렴, 발산은 알수 없다.

5. **극한 비교판정법.** $0 < a_n$, $0 < b_n$ 일때, 두 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0$$

이라 할 때

(A) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

(B) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 발산한다.

6. **비판정법과 근판정법.** $a_n \geq 0$ 일때,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

이라 하면

(A) $R < 1$ 이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고,

(B) $R > 1$ 이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산한다.

(C) $R = 1$ 이면, 이 판정법으로는 판정할 수 없다.

9.2-9.4 연습문제풀이

9.2 풀이

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$
극한비교판정법: $b_n = \frac{1}{n}$ 이라두면 위의급수는 발산.

2. $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{4n^2} + \cdots$
극한비교판정법 :$b_n = \frac{1}{n^2}$ 수렴

3. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$
적분판정법:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{n\to\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^n = \infty \text{ 발산.}$$

4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{1+n^2} + \cdots$
극한비교판정법: $b_n = \frac{1}{n^2}$ 수렴.

5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$
극한비교판정법: $b_n = \frac{1}{n^2}$ 이라하고 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ 이라하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 이 수렴하므로 극한 비교판정법에 의하여 문제의 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 는 수렴한다.

6. $\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots+\frac{n}{e^n}+\cdots$

비판정법:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}}=\frac{1}{e}<1$$

이므로 비판정법에 의하여 수렴.

7. $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\cdots$

극한비교판정법: $b_n=\frac{1}{n^2}$ 수렴.

8. $\frac{5}{3}+\frac{7}{15}+\frac{9}{35}+\cdots+\frac{2n+3}{4n^2-1}+\cdots$

극한비교판정법: $b_n=\frac{1}{n}$ 발산.

9. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\cdots$

적분판정법:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^n=2.\ \text{수렴}$$

10. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt{2n-1}}{n}+\cdots$

극한비교판정법: $a_n=\frac{\sqrt{2n-1}}{n}$, $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 이라하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2n-1}}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{2}\neq 0$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 이 발산하므로 극한 비교판정법에 의하여 문제의 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{n}$ 는 발산한다.

11. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\cdots+\frac{\ln n}{n}+\cdots$

비교판정법:

$$\frac{1}{n}<\frac{\ln n}{n}$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 이 발산하므로 비교판정법에 의하여 문제의 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 는 발산한다.

12. $\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\cdots+\frac{n}{n^3+1}+\cdots$

극한비교판정법: $b_n=\frac{1}{n^2}$ 수렴.

13. $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{9}{28}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+1}+\cdots$

극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n}$ 발산.

14. $\frac{2}{3}+\frac{5}{24}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$

극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n^2}$ 수렴.

15. $\frac{2}{3}+2(\frac{2}{3})^2+3(\frac{2}{3})^3+\cdots+n(\frac{2}{3})^n+\cdots$

비판정법:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{2}{3})^{n+1}}{n(\frac{2}{3})^n}=\frac{2}{3}<1$$

이므로 비판정법에 의하여 수렴.

16. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}+\cdots$

적분판정법:

$$\int_1^\infty\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{x\ln x}dx\underset{\ln x=t}{=}\lim_{n\to\infty}[\ln(\ln x)]_1^n=\infty.\ \text{발산}$$

17. $\sin\pi+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{3}+\cdots+\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}+\cdots$

비교판정법:

$$\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{n^2}$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$ 이 수렴하므로 비교판정법에 의하여 문제의 급수 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}$ 는 수렴한다.

18. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$

n 항판정법:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1\neq 0$$

이므로 n 항판정법에 의하여 발산.

9.3 풀이

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\cdots$
비교판정법:

$$\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n}$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 이 수렴하므로 비교판정법에 의하여 문제의 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 는 수렴한다.

2. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$
극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n}$ 발산.

3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^3}+\cdots+\frac{1}{(2n)^n}+\cdots$
근판정법:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n)^n}}=0<1$$

이므로 근판정법에 의하여 수렴한다.

4. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}+\cdots$
극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n^2}$ 수렴.

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots$
극한비교판정법 : $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n}}$, $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 이라하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}$ 는 수렴한다.

6. $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2}{n\cdot(n+1)}+\cdots$
극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n}$ 발산.

7. $1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}+\cdots$
비교판정법 :

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 도 발산한다.

8. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$

극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n^3}$ 수렴.

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}+\cdots$

극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{3/2}}$ 수렴

10. $\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{1}{2^2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2^3}\sin\frac{\pi}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi}{n}+\cdots$

비교판정법 :

$$\frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi}{n}\le\frac{1}{2^n}$$

이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi}{n}$ 도 수렴한다.

11. $1+\frac{1}{1+\ln 2}+\frac{1}{1+\ln 3}+\cdots+\frac{1}{1+\ln n}+\cdots$

비교판정법 :

$$1+\ln n<1+n\Longrightarrow\frac{1}{1+n}<\frac{1}{1+\ln n}$$

이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 이 발산하므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln n}$ 도 발산한다.

12. $\frac{1}{4}+(\frac{2}{7})^2+(\frac{3}{10})^3+\cdots+(\frac{n}{3n+1})^n+\cdots$

근판정법:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{3n+1})^n}=\frac{1}{3}<1$$

이므로 근판정법에 의하여 수렴한다.

13. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{10}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}+\cdots$

극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{3/2}}$ 수렴

14. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{29}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+\cdots$

극한비교판정법 : $b_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{3/2}}$ 수렴

15. $\cos 1+\frac{cos 2}{2^2}+\frac{\cos 3}{3^2}+\cdots+\frac{\cos n}{n^2}+\cdots$

비교판정법 :

$$\frac{\cos n}{n^2}<\frac{1}{n^2}$$

이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ 도 수렴한다.

16. $\frac{2+1}{3} + \frac{2^2+2}{3^2} + \frac{2^3+3}{3^3} + \cdots + \frac{2^n+n}{3^n} + \cdots$

비교판정법:

$$\frac{2^n+n}{3^n} < \frac{2^n+2^n}{3^n} = \frac{2\cdot 2^n}{3^n} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$ 은 무한등비급수 이므로 수렴하므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{3^n}$ 도 수렴한다.

17. $\frac{1+1}{(5\cdot1+2)\sqrt{1}} + \frac{2+1}{(5\cdot2+2)\sqrt{2}} + \frac{3+1}{(5\cdot3+2)\sqrt{3}} + \cdots + \frac{n+1}{(5\cdot n+2)\sqrt{n}} + \cdots$

극한비교판정법 : $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ 발산

18. $\frac{7\cdot1+2}{2\cdot1^5+7} + \frac{7\cdot2+2}{2\cdot2^5+7} + \frac{7\cdot3+2}{2\cdot3^5+7} + \cdots + \frac{7\cdot n+2}{2\cdot n^5+7} + \cdots$

극한비교판정법 : $b_n = \frac{1}{n^4}$ 수렴

19. $\frac{2\cdot1+1}{\sqrt{1^4+1}} + \frac{2\cdot2+1}{\sqrt{2^4+1}} + \frac{2\cdot3+1}{\sqrt{3^4+1}} + \cdots + \frac{2\cdot n+1}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots$

극한비교판정법 : $a_n = \frac{2\cdot n+1}{\sqrt{n^4+1}}$, $b_n = \frac{1}{n}$ 이라하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot n+1}{\sqrt{n^4+1}}}{\frac{1}{n}} = 2 \neq 0$$

이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ 도 발산한다.

20. $\frac{2\cdot1+1}{\sqrt{1^5+1}} + \frac{2\cdot2+1}{\sqrt{2^5+1}} + \frac{2\cdot3+1}{\sqrt{3^5+1}} + \cdots + \frac{2\cdot n+1}{\sqrt{n^5+1}} + \cdots$

극한비교판정법 : $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ 수렴

21. $\frac{1}{2} + \frac{2^{3/2}}{2^{5/2}+2\cdot2-1} + \frac{3^{3/2}}{3^{5/2}+2\cdot3-1} + \cdots + \frac{n^{3/2}}{n^{5/2}+2n-1} + \cdots$

극한비교판정법 : $b_n = \frac{1}{n}$ 발산.

22. $\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^{2^3}} + \frac{3^2}{2^{3^3}} + \cdots + \frac{n^2}{2^{n^3}} + \cdots$

9.4 풀이

2. $\frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots + \frac{n+1}{3^n} + \cdots$

비판정법:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$$

이므로 비판정법에 의하여 수렴한다.

4. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi^2} + \frac{6}{5\pi^3} + \cdots + \frac{2n}{(2n-1)\pi^n} + \cdots$

비판정법:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+2}{(2n+3)\pi^{n+1}}}{\frac{2n}{(2n-1)\pi^n}} = \frac{1}{\pi} < 1$$

이므로 비판정법에 의하여 수렴한다.

5. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots$

극한비교판정법 : $b_n = \frac{1}{n}$ 발산.

7. $\frac{2!}{(1!)^2} + \frac{4!}{(2!)^2} + \frac{6!}{(3!)^2} + \cdots + \frac{(2n)!}{(n!)^2} + \cdots$

비판정법:

$$\begin{aligned} R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2n+2)!}{(2n)!((n+1)!)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1 \end{aligned}$$

이므로 비판정법에 의하여 발산한다.

10. $\frac{1}{1} + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots + \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} + \cdots$

비판정법:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}}{\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

이므로 비판정법에 의하여 수렴한다.

12. $2+\frac{2^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^2}+\cdots+\frac{2^n}{n^2}+\cdots$

비판정법:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}}=2>1$$

이므로 비판정법에 의하여 발산한다.

16. $(\ln 1)^2+(\frac{\ln 2}{2})^2+(\frac{\ln 3}{3)^2}+\cdots+(\frac{\ln n}{n})^2+\cdots$

적분판정법:

$$\int_1^\infty(\frac{\ln x}{x})^2\ dx \underset{\ln x=t}{=} \int_0^\infty\frac{t^2}{e^t}\ dt$$

여기서

$$\begin{aligned}\int\frac{t^2}{e^t}\ dt \ &\underset{\left(\begin{array}{ll} u=t^2 & v'=e^{-t} \\ u'=2t & v=-e^{-t}\end{array}\right)}{=} -t^2e^{-t}+2\int te^{-t}dt \\ &\underset{\left(\begin{array}{ll} u=t & v'=e^{-t} \\ u'=1 & v=-e^{-t}\end{array}\right)}{=} -t^2e^{-t}-2te^{-t}+2\int e^{-t}\ dt \\ &=-e^{-t}(t^2+2t+2)+C\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{t^2}{e^t}\ dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{t^2}{e^t}\ dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-t}(t^2+2t+2)\right]_0^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-n^2+2n+2}{e^n}+2\right\}=2\end{aligned}$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^\infty(\frac{\ln n}{n})^2$ 은 수렴한다.

나머지 문제는 .....

19번도 16번과 마찬가지로 적분 판정법을 쓰고 부분적분을 사용하여 판정.!!

9.5 절대수렴과 조건수렴

1. **교대급수 판정법.** $a_n > 0$ 일때,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이면, 교대급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2k} + a_{2k+1} - \cdots$$

는 수렴한다.

2. **절대 비, 근 판정법.** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에대하여

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

이라 하면

(A) $L < 1$ 이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 절대수렴하고,

(B) $L > 1$ 이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산한다.

(C) $L = 1$ 이면, 이 판정법으로는 판정할 수 없다.

9.5 연습문제 풀이

1. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \frac{7}{2^4} + \cdots$

일반항 $a_n = (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}$ 이므로 절대 비판정법을 사용하면

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

이므로 주어진 급수는 절대수렴한다.

2. $\frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{4\cdot5} + \frac{1}{6\cdot7} - \frac{1}{8\cdot9} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n(2n-1)} + \cdots$

$|a_n| = \frac{1}{2n(2n-1)}$ 이므로 극한비교판정법에 의하여 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$$

는 수렴한다. 따라서 주어진 급수는 절대수렴.

3. $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{5}{9} + \cdots$

$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{2n+1}$ 이므로 n 항 판정법을 사용하면

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

이어서 주어진 급수는 발산.

4. $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$

$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{2n+4}$ 이므로 교대급수판정법에 의하여 조건수렴 이지만 절대수렴은 아니다.

5. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 이라하면

$$a_1 > a_2 > \cdots$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

이므로 교대급수판정법에 의하여 수렴, 절대수렴은 (p-급수 판정에의하여) 아니다.

6. $\frac{3}{2!} - \frac{3^3}{4!} + \frac{3^3}{6!} - \frac{3^4}{8!} + \cdots$

$a_n = (-1)^{n-1}\frac{3^n}{(2n)!}$ 절대비판정법

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{3^{n+1}}{(2(n+1))!}}{(-1)^{n-1}\frac{3^n}{(2n)!}} \right| = 0 < 1$$

이므로 주어진 급수는 절대수렴.

7. $2(\frac{2}{3}) - 4(\frac{2}{3})^2 - 6(\frac{2}{3})^3 + 8(\frac{2}{3})^4 + \cdots$

$|a_n| = (2n)(\frac{2}{3})^n$ 이므로 절대비판정법에 의하여

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2(n+1))(\frac{2}{3})^{n+1}}{(2n)(\frac{2}{3})^n}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

이므로 주어진 급수는 절대수렴.

8. $\frac{10\sin\frac{\pi}{6}}{1^2} + \frac{10\sin\frac{2\pi}{6}}{2^2} + \frac{10\sin\frac{3\pi}{6}}{3^2} + \cdots \frac{10\sin\frac{n\pi}{6}}{n^2} + \cdots$

$$|a_n| = \left|\frac{10\sin\frac{n\pi}{6}}{n^2}\right| \le \frac{10}{n^2}$$

이므로 비교판정법에 의하여 절대수렴.

9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7} + \cdots$

$|a_n| = \frac{1}{2^{2n-1}}$. 무한등비급수 이므로 절대수렴.

10. $\frac{1}{3} - \frac{2}{7} + \frac{3}{11} - \frac{4}{15} + \cdots$

$|a_n| = \frac{n}{4n-1}$. n 항 판정법에 의하여 발산.

11. $\frac{1}{9} + \frac{2!}{9^2} + \frac{3!}{9^3} + \frac{4!}{9^4} + \cdots$

$a_n = \frac{n!}{9^n}$ 비판정법에 의하여 발산.

12. $\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \cdots$

$$\frac{1}{\log 2} > \frac{1}{\log 2} > \frac{1}{\log 3} > \cdots$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n} = 0$$

이므로 교대급수판정법에 의하여 수렴 하지만 절대수렴은 아니다.

13. $\frac{1}{10} - \frac{2^2}{30} + \frac{3^3}{50} - \frac{4^4}{70} + \cdots$

$$|a_n| = \frac{n^n}{10(2n-1)} > \frac{1}{10(2n-1)}$$

비교판정법에 의하여 발산.

14. $10 - \frac{10^2}{3!} + \frac{10^3}{5!} - \frac{10^4}{7!} + \cdots$

$|a_n| = \frac{10^n}{(2n-1)!}$ 절대비판정법에 의하여 절대수렴.

15. $\frac{3}{1\cdot 2} - \frac{4}{2\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4} - \frac{6}{4\cdot 5} + \cdots$

$$\frac{3}{1\cdot 2} > \frac{4}{2\cdot 3} > \frac{5}{3\cdot 4} > \frac{6}{4\cdot 5}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

이므로 교대급수판정법에 의하여 수렴 하지만 절대수렴은 아니다.

16. $\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{2!} + \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{3!} - \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{4!} + \cdots$

$$|a_n| = \frac{|\cos\frac{n\pi}{3}|}{n!} \le \frac{1}{n!}$$

이므로 비교판정법에 의하여 절대수렴.

17. $e - e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{4}} + \cdots$

n 항 판정법:

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = 1 \neq 0$$

이므로 발산.

18. $\sin 1 + 2\sin\frac{1}{2} + 3\sin\frac{1}{3} + \cdots + n\sin\frac{1}{n} + \cdots$

n 항 판정법:

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

이므로 발산.

19. $1 - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \cdots$

$$1 > \frac{2}{2^2+1} > \frac{3}{3^2+1} > \frac{4}{4^2+1} > \cdots > \frac{n}{n^2+1} < \cdots$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

이므로 교대 수판정법에 의하여 수렴 하지만 절대수렴은 아니다.

20. $\sin^{-1} - \frac{1}{2!}\sin^{-1}\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\sin^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{4!}\sin^{-1}\frac{1}{4} + \cdots$

$|a_n| = \frac{|\sin^{-1}\frac{1}{n}|}{n!}$, 절대 비판정법에 의하여 절대수렴.

9.6 멱급수

$a_0, a_1, a_2, \cdots$ 은 상수이고 x 가 변수일때,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \cdots$$

를 x 의 멱급수라하고, 이 멱급수의 수렴반경은

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

이며, 수렴구간은

$$|x| < r$$

과 $x = r$, $x = -r$ 을 대입한후 수렴,발산을 조사하여 수렴구간에 포함시킨다. 예를 들어 만일 $x = r$ 인경우 수렴하고 $x = -r$ 일때 발산한다면, 수렴구간은

$$-r < x \le r$$

이된다.

연습문제 풀이

1. $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$ 수렴구간.

$$a_n = 1$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

이고

$$x = 1 : 1 + 1 + \cdots \quad \text{발산}$$

$$x = -1 : 1 - 1 + 1 - \cdots \quad \text{발산}$$

따라서, 수렴구간은

$$|x| < 1.$$

3. $x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots + n!x^n + \cdots$.

$a_n = n!$ 이므로

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} = 0 \right|$$

따라서 $x = 0$ 일때만 수렴한다.

9. $1 + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}} + \cdots$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 이므로

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = 1$$

이고

$$x = 1 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots \quad \text{발산}$$

$$x = -1 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \quad \text{수렴}$$

따라서 수렴구간은

$$-1 \le x < 1.$$

11. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2^2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3^2\cdot 2^3} + \cdots + \frac{x^n}{n^2\cdot 2^n} + \cdots$

$a_n = \frac{1}{n^2\cdot 2^n}$ 이고

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2\cdot 2^n}}{\frac{1}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}} = 2$$

$$x = 2 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \quad \text{수렴}$$

$$x = -2 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots \quad \text{수렴}$$

따라서 수렴구간은

$$-2 \le x \le 2.$$

17. $(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots$

$a_n = \frac{1}{n}$ 이므로

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

$$x-1=1 \Longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots \quad \text{발산}$$

$$x-1=-1 \Longrightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots \quad \text{수렴}$$

따라서 수렴구간은

$$-1 \le x-1 < 1 \Longrightarrow 0 \le x < 2.$$

21. $(\frac{x-1}{x})+\frac{1}{2}(\frac{x-1}{x})^2+\frac{1}{3}(\frac{x-1}{x})^3+\cdots$

$a_n = \frac{1}{n}$ 이므로

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

$$\frac{x-1}{x}=1 \Longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots \quad \text{발산}$$

$$\frac{x-1}{x}=-1 \Longrightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots \quad \text{수렴}$$

따라서 수렴구간은

$$-1 \le \frac{x-1}{x} < 1 \Longrightarrow -1 \le 1-\frac{1}{x} < 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{x} \le 2 \Longrightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

23. $e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots$

위의 멱급수는 공비가 e^x 인 무한등비급수이다. 따라서 수렴하려면

$$e^x < 1 \Longrightarrow x < 0.$$

25. $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

이므로

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}}{\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

27. $x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots$

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{1}{2n+3}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$