LECTURE 21

파동은 물리학의 중요한 주제 중의 하나이다. 일상에서 흔히 접하게 되는 수면파, 음파, 지진파 등은 매질이 필요한 역학적 파동이고, 일상에서 흔히 사용되는 가시광선, 자외선, 라디오파, TV파, 마이크로파, 엑스선, 레이더파 등은 매질이 필요 없는 전자기파이다. 그 밖에도 양자역학에서의 물질파가 존재한다. 이 단원에서는 팽팽한 줄을 따라 이동하는 파동에 대해 알아본다.

16 파동 - I

16.1 가로파동
16.2 팽팽한 줄에 생긴 파동의 속력
16.3 줄을 따라 진행하는 파동의 에너지와 일률
16.4 파동방정식
16.5 파동의 간섭
16.6 위상자
16.7 정지파와 공명

16.1 가로파동

학습목표

- ☞ 가로파동과 세로파동을 구별한다.
- ☞ 팽팽한 줄에 생긴 파동을 기술하는 방법을 알아본다.

가로파동과 세로파동

- 한 점에서의 진동이 매개체를 걸쳐 다른 점으로 퍼져 나가는 현상을 일컬어 **역학적 파동**(mechanical wave)이라고 하고, 그 매개체를 가리켜 **매질**(medium)이라고 한다.
- 매질 내 각 점에 일시적인 진동을 일으키는 파동을 일컬어 **펄스**(pulse)라고 하고, 매질 내 각 점에 주기적인 진동을 일으키는 파동을 가리켜 **주기적인 파동** 또는 단순히 줄여서 **파동**이라고 한다.
- 팽팽한 줄의 한쪽 끝을 위아래로 진동시키면 줄의 장력으로 말미암아 변형된 줄 모양이 특정한 속도로 줄을 따라 진행한다.
- 이처럼 매질의 변위가 파동의 진행 방향에 수직인 역학적 파동을 일컬어 **가로파동**(transverse wave)이라고 한다.
- 소리처럼 매질의 변위가 파동의 진행 방향에 수평인 역학적 파동을 가리켜 **세로파동**(longitudinal wave)이라고 한다.
- 한쪽 끝에서 다른 쪽 끝으로 진행하는 역학적 파동을 가리켜 **진행파동**(traveling wave)이라고 한다. 이때 한쪽 끝에서 다른 쪽 끝으로 움직이는 것은 파동이지 매질이 아니다.

진동수와 파장

- 팽팽한 줄을 따라 진행하는 가로파동은 그 **파형**(파동의 모양)을 표현하는 다음과 같은 함수로 말미암아 기술된다.

$$y = h(x,t)$$

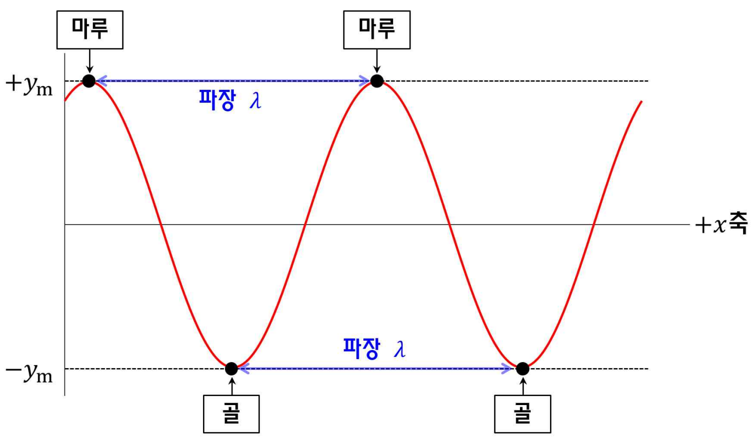
- 여기서 x은 줄 요소(줄의 아주 작은 부분)의 위치이고, t는 시간이다. 그리고 y는 줄 요소의 변위이다.
- 만약 줄의 한쪽 끝($x=0$)이 아래위 방향으로 단순조화운동을 하면 그 줄에는 사인모양의 파동이 발생한다.

$$y(x,t) = y_{\mathrm{m}} \sin\theta = y_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t + \phi)$$

- 단순조화운동[1]과 비슷하게 사인함수의 값을 결정하는 θ을 일컬어 **위상**이라고 하고, $y_{\mathrm{m}}, \omega, \phi$을 파동의 **진폭**, **각진동수**, **위상상수**라고 부른다. 그리고 상수 k를 가리켜 **각파동수**(angular wave number)라고 한다. 각파동수의 SI 단위는 rad/m이다.
- $y_{\mathrm{m}}, \omega, \phi$는 각각 위치 $x=0$에서의 단순조화운동에 해당하는 진폭, 각진동수, 위상상수와 일치한다.
- $y = -y_{\mathrm{m}}$인 지점을 파동의 **골**(trough)이라고 부르고, $y = +y_{\mathrm{m}}$인 지점을 가리켜 파동의 **마루**(crest 또는 peak)라고 부른다.
- 파동의 진행 방향에 따라 어떤 파형이 반복될 때 그 파형의 길이를 일컬어 **파장**(wavelength) λ이라고 한다.

$$k\lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- 즉, 파장은 골과 골 사이의 거리 또는 마루와 마루 사이의 거리와 같다. 파장의 정의로 말미암아 파장 λ은 각파동수 k를 결정한다.
- 아래 그림은 어느 순간의 파형을 그린 것이다.

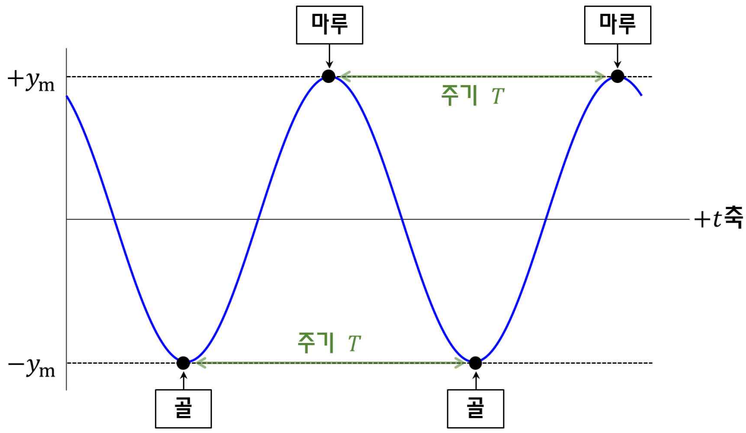


- 줄 요소의 진동주기와 진동수를 파동의 **주기** T와 **진동수** f라고 부른다. 즉, T 또는 f는 ω을 결정한다.

1 단순조화운동은 사인함수와 코사인함수 어느 쪽으로도 표현될 수 있다.

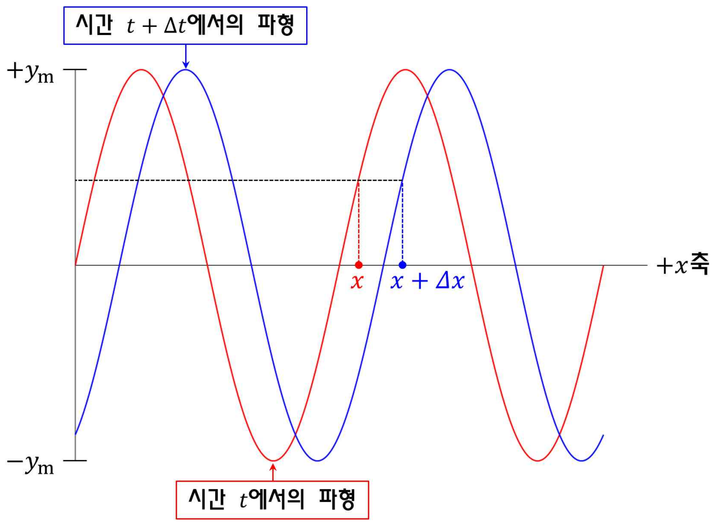
$$\omega T = 2\pi \quad \& \quad f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \& \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

- 아래 그림은 어느 위치 x에 있는 줄 요소의 변위 y를 시간 t에 따라 그린 것이다.



진행파동의 속도

- 진행파동에서 전체적인 파형이 시간간격 Δt동안 Δx만큼 진행할 때 비율 $\Delta x/\Delta t$(또는 dx/dt)을 진행파동의 **속도** v이라고 한다.



- 이때 어떠한 x,t에서도 (x,t)와 $(x+\Delta x, t+\Delta t)$의 위상은 같다.

$$kx - \omega t = \theta(x,t) = \theta(x+\Delta x, t+\Delta t) = k(x+\Delta x) - \omega(t+\Delta t)$$

$$\Downarrow$$

$$k\Delta x - \omega \Delta t = 0$$

- 그러므로 진행파동의 속도 v은 다음처럼 표현된다.

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- 즉, 진행파동은 한 주기 동안 파장의 거리만큼 진행한다.

- 반대 방향($-x$축 방향)으로 진행하는 파동은 다음처럼 기술된다.

$$y(x,t) = y_{\mathrm{m}}\sin(kx + \omega t + \phi)$$

- 시간간격 Δt동안 전체적인 파형의 변위가 Δx일 때 어떠한 x,t에서도 (x,t)와 $(x+\Delta x, t+\Delta t)$의 위상은 같다.

$$kx + \omega t = \theta(x,t) = \theta(x+\Delta x, t+\Delta t) = k(x+\Delta x) + \omega(t+\Delta t)$$

$$\Downarrow$$

$$k\Delta x + \omega \Delta t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\omega}{k} = -\frac{\lambda}{T} = -\lambda f$$

16.2 팽팽한 줄에 생긴 파동의 속력

학습목표	☞ 팽팽한 줄에 생긴 파동의 속력을 두 가지 방법으로 유도한다.

파동의 속력

팽팽한 줄에 생긴 파동의 속력 v은 줄의 장력 τ과 선밀도 μ에만 의존한다. 이 사실은 두 가지 방법으로 보일 수 있다.

차원 분석

질량, 길이, 시간의 차원을 각각 M, L, T로 표기하자.

- 그때 속력 v의 차원은 LT^{-1}이다.
- 장력 τ과 선밀도 μ의 차원은 각각 MLT^{-2}와 ML^{-1}이다.
- τ/μ의 차원은 L^2T^{-2}이므로 $\sqrt{\tau/\mu}$의 차원은 LT^{-1}이다.
- 그러므로 v와 $\sqrt{\tau/\mu}$의 차원은 일치한다.

$$v = C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

- 여기서 C는 차원이 없는 상수이다.

Newton의 제2법칙에서 유도하기

다음과 같은 상황을 고려하자.

❖ 팽팽한 줄에 진폭이 y_{m}인 파동이 왼쪽에서 오른쪽으로 v의 속력으로 진행한다.

❖ 관찰자도 왼쪽에서 오른쪽으로 v의 속력으로 움직인다.

- ✓ 마루에 있는 줄 요소는 관찰자에게 오른쪽에서 왼쪽으로 v의 속력으로 움직이는 것처럼 보인다.
- ✓ 즉, 관찰자는 마루에 있는 줄 요소의 운동을 등속 원운동으로 고려할 수 있다.
- ✓ 여기서 진폭 y_{m}은 원의 반지름으로 생각될 수 있다.

- 줄 요소의 길이 Δl는 작은 각도 2θ에 해당하는 원호의 길이로 생각될 수 있다.

$$\Delta l = y_{\mathrm{m}}(2\theta)$$

- 줄 요소의 질량 Δm은 μ와 Δl의 곱과 같다.

$$\Delta m = \mu \Delta l$$

- θ는 매우 작은 각도이므로 $\sin\theta$는 다음처럼 근사될 수 있다.

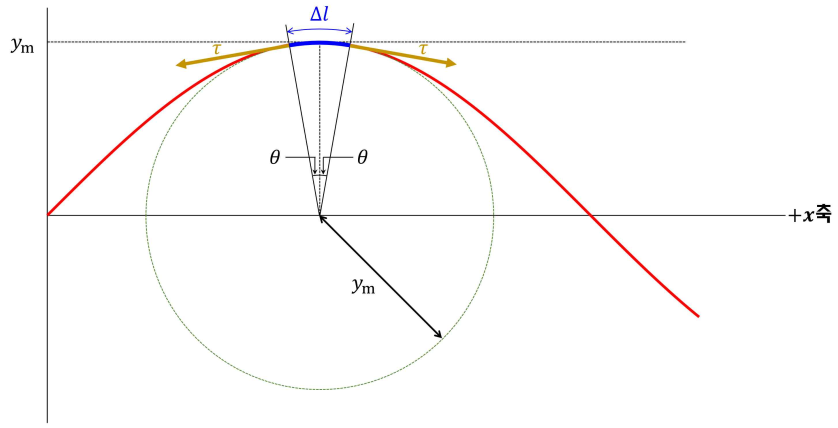
$$\sin\theta \approx \theta = \frac{\Delta l}{2y_{\mathrm{m}}}$$

- 줄에 작용하는 장력 크기가 τ일 때 줄 요소의 양 끝에 작용하는 장력의 크기도 τ이다. 즉, 줄 요소에 작용하는 알짜힘은 $-y$축 방향을 향하고 다음과 같은 크기 F를 갖는다.

$$F = 2\tau\sin\theta \approx \frac{\tau \Delta l}{y_{\mathrm{m}}}$$

- 이 알짜힘은 구심력 역할을 하므로 팽팽한 줄에 생긴 파동의 속력 v은 다음처럼 표현된다.

$$\frac{(\Delta m)v^2}{y_{\mathrm{m}}} = F = \frac{\tau \Delta l}{y_{\mathrm{m}}} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{\tau \Delta l}{\Delta m}} = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$



16.3 줄을 따라 진행하는 파동의 에너지와 일률

학습목표	☞ 가로파동에 의해 전달되는 에너지의 평균비율을 계산한다.

파동의 에너지와 일률

- 팽팽한 줄에 파동을 만들 때 줄이 운동하도록 공급된 에너지는 운동에너지 K와 탄성 퍼텐셜에너지 U의 형태로 전달된다.

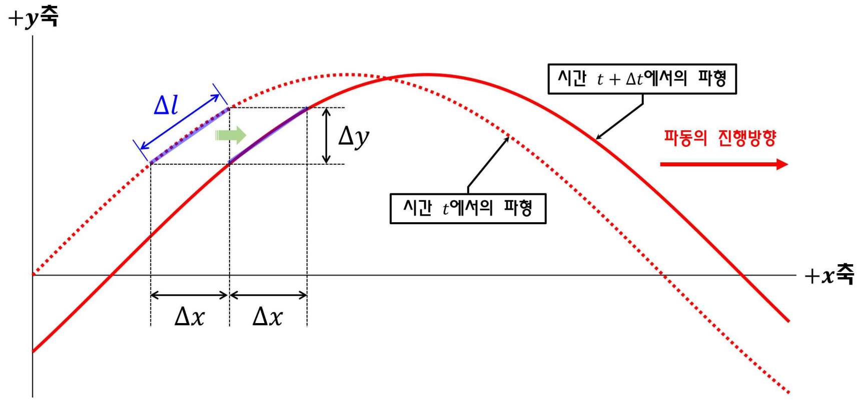
운동에너지

균일한 선밀도 μ을 지닌 줄을 통해 미소 시간간격 Δt동안 Δx만큼 진행하는 파동을 고려하자.

- 이때 파동의 속력 v은 $\Delta x/\Delta t$와 같다.
- 파동은 미소 시간간격 Δt동안 x축 길이가 Δx인 줄 요소가 지닌 역학에너지 ΔE를 전달한다.
- Δt가 작으면 줄 요소를 하나의 선분으로 볼 수 있다.

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

- 여기서 Δy와 Δl는 줄 요소의 y축 길이와 전체 길이이다.



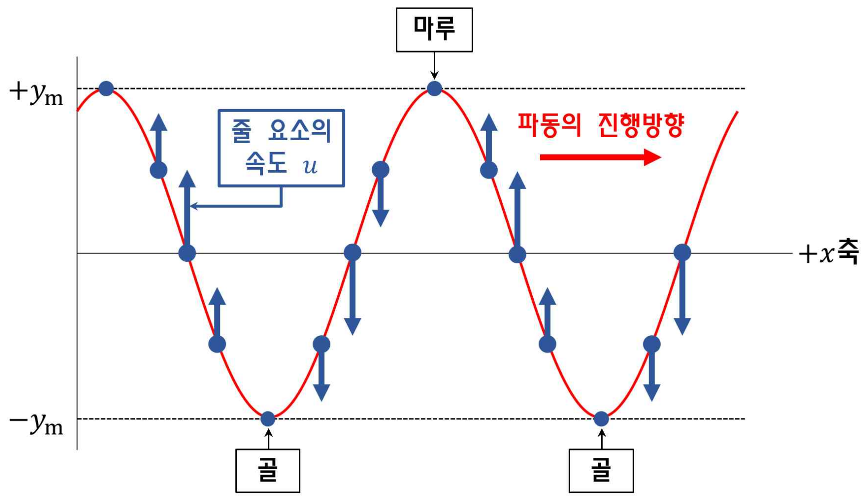
- Δt가 작으면 줄 요소의 질량 Δm을 다음처럼 어림할 수 있다.

$$\Delta m = \mu \Delta l \approx \mu \Delta x$$

- 줄 요소는 y축 방향으로 단순조화운동을 하므로 줄 요소의 속도 u은 줄 요소의 운동에너지 ΔK을 결정한다.

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}(\Delta m)u^2 \approx \tfrac{1}{2}\mu u^2 \Delta x$$

- 줄 요소의 속력과 운동에너지는 줄 요소가 마루나 골에 있는 순간에 최소가 되고 $y = 0$인 순간에는 최대가 된다.



- 줄 요소의 속도 u는 y의 시간변화율과 같다.

$$y = y_{\mathrm{m}}\sin(kx - \omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_{\mathrm{m}}\cos(kx - \omega + \phi)$$

- Δt동안 전달되는 운동에너지 ΔK는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\Delta K = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2\cos^2(kx - \omega t + \phi)\Delta x$$

- 즉, 파동이 운반하는 운동에너지의 시간당 전달률은 다음과 같다.

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2\cos^2(kx - \omega t + \phi)\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2\cos^2(kx - \omega t + \phi)$$

- 그러므로 파장 단위에서의 평균 전달률은 다음과 같다.

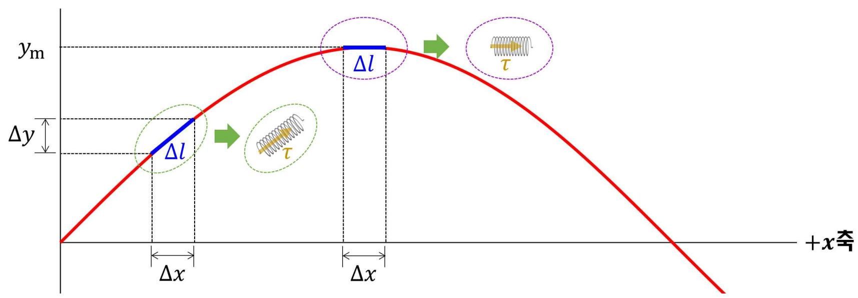
$$\left[\cos^2(kx - \omega t + \phi)\right]_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\cos^2(kx - \omega t + \phi)dx = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2\left[\cos^2(kx - \omega t + \phi)\right]_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{4}\mu v\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2$$

탄성 퍼텐셜에너지

- 줄 요소는 하나의 용수철처럼 고려될 수 있다.
- 이때 장력을 보존력으로 생각할 수 있다.
- 장력 크기 τ는 줄의 어떤 부분에서도 일정하므로 줄 요소가 그 끝에 연결된 줄에 가하는 힘 $\vec{\tau}$의 크기도 τ이다.
- 그리고 그 힘의 방향은 줄 요소의 중심을 향한다.
- 줄 요소의 전체 길이 Δl는 마루($y = +y_{\mathrm{m}}$)와 골($y = -y_{\mathrm{m}}$)에서 최소(즉, $\Delta l = \Delta x$)이고 $y = 0$에서는 최대이다.



- $\Delta l = \Delta x$일 때부터 보존력 $\vec{\tau}$이 한 일 W_{t}은 다음과 같다.

$$W_{\mathrm{t}} = -\tau(\Delta l - \Delta x)$$

- $\Delta l = \Delta x$일 때의 탄성 퍼텐셜에너지를 0으로 잡을 때 줄 요소의 탄성 퍼텐셜에너지 ΔU는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta U &= -W_{\mathrm{t}} = \tau(\Delta l - \Delta x) = \tau\Delta x\left[\sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2} - 1\right] \\ &\approx \tau\Delta x\left[1 + \tfrac{1}{2}(\Delta y/\Delta x)^2 - 1\right] = \tfrac{1}{2}\tau(\Delta y/\Delta x)^2\Delta x\end{aligned}$$

- 파동의 속력 v은 $\sqrt{\tau/\mu}$으로 표현되므로 장력 크기 τ은 μv^2으로 표현될 수 있다. $\Delta y/\Delta x$은 편미분 $\partial y/\partial x$으로 고려될 수 있다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\partial y}{\partial x} = k y_{\mathrm{m}} \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\mu v^2 \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]^2 \Delta x = \frac{1}{2}\mu v^2 k^2 y_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)\Delta x$$

- 파동의 속력 v과 각파동수 k의 곱은 각진동수 ω이다.

$$vk = \omega$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\mu \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)\Delta x$$

- ΔU은 Δt동안 전달되는 탄성 퍼텐셜에너지이므로 파동이 운반하는 탄성 퍼텐셜에너지의 시간당 전달률은 다음과 같다.

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)$$

- 탄성 퍼텐셜에너지도 운동에너지와 같은 평균 전달률로 전달된다.

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta t}\right)_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{4}\mu v \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 = \left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\mathrm{avg}}$$

파동의 평균 일률

- 그러므로 파동의 **평균 일률** P_{avg}(파동에 의해 전달되는 평균 에너지의 시간변화율)은 다음과 같다.

$$P_{\mathrm{avg}} = \left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\mathrm{avg}} = \left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\mathrm{avg}} + \left(\frac{\Delta U}{\Delta t}\right)_{\mathrm{avg}} = 2\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2$$

※ 선밀도 μ와 파동속력 v은 줄을 구성하는 물질과 줄에 작용하는 장력에 의존한다.

※ 각진동수 ω와 진폭 y_{m}은 파동을 생성하는 과정에 의존한다.