< 공업수학 I : Homework #1 >

국방정보공학과 2학년 2020032306 송민영

1. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$, $y(0) = -2$

먼저, 위 방정식은 분리 가능한 형태 즉, seperable ODE 이다.

$$\frac{dy}{y^2-4} = dx \quad , \quad \left(\frac{1}{y^2-4}\right) dy = dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y^2-4}\right) dy = \int dx + C \quad , \quad \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right) dy = x + C$$

$$\frac{1}{4}(\ln|y-2| - \ln|y+2|) = x + C \quad , \quad \frac{\ln|y-2|}{\ln|y+2|} = 4x + 4C \quad , \quad \frac{|y-2|}{|y+2|} = e^{4x+4C}$$

$$\frac{y-2}{y+2} = e^{4x+4C}$$

$$y - 2 = e^{4x+4C}(y+2) \quad , \quad y - e^{4x+4C}y = 2e^{4x+4C} + 2$$

$y = \frac{2e^{4x+4C}+2}{1-e^{4x+4C}}$ 따라서, 위 방정식의 일반해는 $y = \frac{2e^{4x+4C}+2}{1-e^{4x+4C}}$ 이다.

문제에 주어진 초기조건 $y(0) = -2$를 대입하면,

$$y = \frac{2e^{4C}+2}{1-e^{4C}} = -2 \quad , \quad \cancel{2e^{4C}} + 2 = -2 + \cancel{2e^{4C}} \quad , \quad 2 = -2 \text{ 로}$$

C의 값을 구할 수 없으므로, 위 조건을 만족하는 특수해는 존재하지 않는다.

+) 위 방정식은 "비선형 상미분 방정식" 이기 때문에, 일반해 외의 해인 특이해가 존재할 가능성이 있다. 주어진 초기조건을 통해 유추해보면 "$y(x) = -2$"를 특이해로 갖는 것을 알 수 있다.

2. $x\frac{dy}{dx}+y=2x$, $y(1)=0$.

$\Rightarrow xy'+y=2x$

$y'+\frac{1}{x}y=2$, $y'+\frac{1}{x}y=2$ 이므로

주어진 방정식은 1계 선형 비제차 상미분 방정식이다.

($y'+p(x)y=r(x)$ 에서, $p(x)=\frac{1}{x}$, $r(x)=2\neq 0$)

1계 선형 비제차 상미분 방정식에서 $y=e^{-h}(\int re^{h}dx+c)$, $h(x)=\int p\,dx$ 이므로

$h(x)=\int p\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|$

$e^{h}=e^{\ln x}=x$, $e^{-h}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$, $re^{h}=2x$

따라서, 위 방정식의 일반해는,

$y=e^{-h}(\int re^{h}dx+c)$

$=\frac{1}{x}(\int 2x\,dx+c)=\frac{1}{x}(x^2+c)=x+\frac{c}{x}$ 이다.

초기 조건이 $y(1)=0$ 임을 이용해 특수해를 구하면,

$y(1)=1+\frac{c}{1}=1+c=0$ $\therefore c=-1$

따라서, 위 방정식의 특수해는 $y=x-\frac{1}{x}$ 이다.