LECTURE 15

물체에 여러 힘의 작용에도 불구하고 그 물체가 안정성을 유지할 수 있는 이유는 물체에 작용하는 힘과 토크가 평형을 이루기 때문이다. 이 단원에서는 물체의 안정성과 관련된 두 가지 중요한 측면에 대해 알아본다.

12.1 평형

학습목표

☞ 평형상태의 정의를 이해하고 물체가 평형상태에 있고자 갖추어야 할 조건을 알아본다.

평형상태

다음 두 조건을 만족하면 물체가 **평형상태**에 있다고 한다.

- 질량중심의 선운동량 $\vec{P}$가 일정하다.

$$\vec{P} = \text{상수 (병진운동에 대한 평형상태)}$$

- 질량중심이나 임의의 점에 대한 각운동량 $\vec{L}$도 일정하다.

$$\vec{L} = \text{상수 (회전운동에 대한 평형상태)}$$

특히, 다음 조건을 만족하면 물체가 **정적 평형상태**에 있다고 한다.

$$\vec{P} = 0 \quad \& \quad \vec{L} = 0$$

- 물체가 평형상태에 있을 때 작은 외력에 물체가 평형상태를 유지하거나 다시 평형상태로 되돌아온다면 물체가 안정한 평형상태에 있다고 말한다.
- 물체가 평형상태에 있을 때 작은 외력으로도 물체가 평형상태에서 벗어나면 물체가 불안정한 평형상태에 있다고 말한다.

평형조건

- 물체의 병진운동에 대한 Newton의 제2법칙에 말미암아 물체가 병진운동에 대해 평형상태에 있으면 다음 관계식이 성립한다.

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \;\; \& \;\; \vec{P} = \text{상수} \;\; \Rightarrow \;\; \therefore \;\; \vec{F}_{\text{net}} = 0 \text{ (힘의 균형)}$$

- 즉, 물체에 작용하는 모든 외부력의 벡터합은 0이다.

- 물체의 회전운동에 대한 Newton의 제2법칙에 말미암아 물체가 회전운동에 대해 평형상태에 있으면 다음 관계식이 성립한다.

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \& \quad \vec{L} = \text{상수} \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \ \text{(토크의 균형)}$$

- 즉, 어느 점에 대해서도 물체에 작용하는 모든 외부 토크의 벡터 합은 0이다.
- 힘과 토크의 균형은 물체가 평형상태에 있고자 갖추어야 할 필요충분조건이다.
- 이 필요충분조건은 좌표축에 따라 각각 세 개씩의 독립적인 식으로 표현될 수 있다.

힘의 균형	토크의 균형
$F_{\text{net},x} = 0$	$\tau_{\text{net},x} = 0$
$F_{\text{net},y} = 0$	$\tau_{\text{net},y} = 0$
$F_{\text{net},z} = 0$	$\tau_{\text{net},z} = 0$

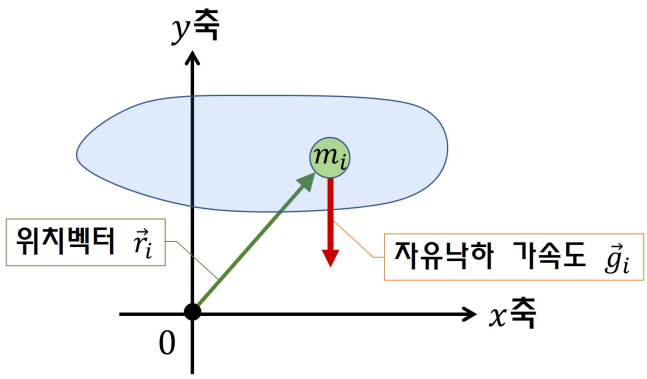
무게중심

중력의 영향에 있는 물체를 고려하자.

❖ 물체는 많은 입자 요소들로 이루어져 있다.

❖ i번째 요소의 질량과 위치벡터는 각각 m_i와 $\vec{r}_i$이다.

❖ i번째 요소에서의 자유낙하 가속도는 $\vec{g}_i$이다.



- i번째 요소에 작용하는 중력 $\vec{F}_{g,i}$은 $m_i\vec{g}_i$이다.
- 물체의 알짜힘 $\vec{F}_g$은 다음과 같다.

$$\vec{F}_g = \sum_i \vec{F}_{g,i} = \sum_i m_i \vec{g}_i$$

- i번째 요소에 작용하는 토크 $\vec{\tau}_i$은 $\vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i}$이다.
- 물체의 알짜 토크 $\vec{\tau}_{\text{net}}$는 다음과 같다.

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i})$$

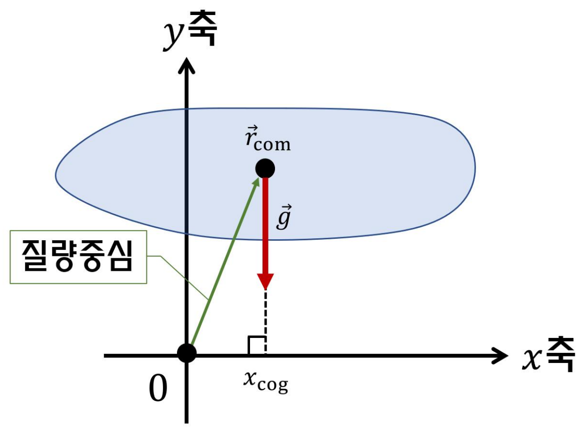
- 토크의 균형을 이루게 하는 물체의 작용점을 가리켜 **무게중심**(cog; center of gravity) $\vec{r}_{\rm cog}$이라고 말한다.

$$\vec{r}_{\rm cog} \times \vec{F}_{\rm g} = \vec{\tau}_{\rm net}$$

- 즉, $\vec{r}_{\rm cog}$에 대한 물체의 알짜 토크는 0이다.
- 물체의 모든 부분에서 자유낙하 가속도가 $\vec{g}$로 같을 때 위 조건은 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\left[\vec{r}_{\rm cog} - \vec{r}_{\rm com}\right] \times \vec{g} = 0$$

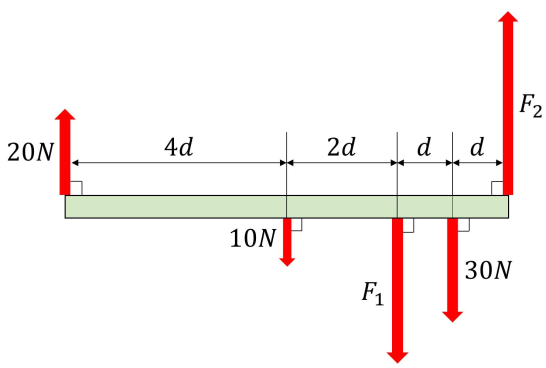
- 이때 질량중심 $\vec{r}_{\rm com}$과 무게중심 $\vec{r}_{\rm cog}$은 자유낙하 가속도 $\vec{g}$와 수직인 좌표평면에서 일치한다.



12.2 정적 평형의 몇 가지 보기

학습목표 ☞ 정적 평형상태에서 있는 몇 가지 보기를 살펴본다.

보기1 정적 평형상태에 있는 균일한 막대를 고려하자.



- 힘의 균형에 말미암아 다음 방정식을 얻을 수 있다.

$$20\,\mathrm{N} + F_2 - 10\,\mathrm{N} - F_1 - 30\mathrm{N} = 0 \text{ (힘의 균형)}$$

- 물체의 좌측 끝을 뚫고 나오는 축을 회전축으로 둘 때 토크의 균형에 말미암아 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$-(4d)(10\,\mathrm{N}) - (6d)(F_1) - (7d)(30\,\mathrm{N}) + (8d)(F_2) = 0 \text{ (토크의 균형)}$$

- 미지수 F_1와 F_2은 힘과 토크의 균형에 해당하는 두 방정식으로부터 유도될 수 있다.

$$F_2 - F_1 = 20\,\mathrm{N} \;\; \& \;\; 4F_2 - 3F_1 = 125\,\mathrm{N} \;\Rightarrow\; F_1 = 45\,\mathrm{N} \;\; \& \;\; F_2 = 65\,\mathrm{N}$$

- 힘 F_2이 작용하는 부분(물체의 우측 끝)을 회전축으로 둘 때 미지수 F_1은 토크의 균형에 대한 방정식만으로 유도될 수 있다.

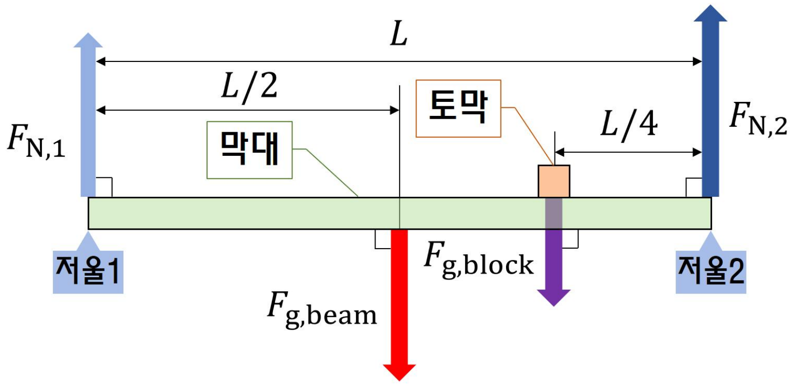
$$-(8d)(20\,\mathrm{N}) + (4d)(10\,\mathrm{N}) + (2d)(F_1) + (d)(30\,\mathrm{N}) = 0 \;\Rightarrow\; F_1 = 45\,\mathrm{N}$$

- 힘 F_1이 작용하는 부분을 회전축으로 둘 때 미지수 F_2은 토크의 균형에 대한 방정식만으로 유도될 수 있다.

$$-(6d)(20\,\mathrm{N}) + (2d)(10\,\mathrm{N}) - (d)(30\,\mathrm{N}) + (2d)(F_2) = 0 \;\Rightarrow\; F_2 = 65\,\mathrm{N}$$

보기2

정적 평형상태에 있는 균일한 막대와 토막을 고려하자.



❖ $F_{g,\mathrm{beam}}$은 막대의 질량중심에 작용하는 중력이다.
❖ $F_{g,\mathrm{block}}$은 토막의 질량중심에 작용하는 중력이다.
❖ $F_{N,1}$은 저울1로 말미암아 막대에 작용하는 수직력이다.
❖ $F_{N,2}$은 저울2로 말미암아 막대에 작용하는 수직력이다.

- 힘의 균형에 말미암아 다음 방정식을 얻을 수 있다.

$$F_{N,1} + F_{N,2} - F_{g,\mathrm{beam}} - F_{g,\mathrm{block}} = 0$$

- 저울2의 지점을 회전축으로 둘 때 저울1이 측정한 무게 $F_{N,1}$은 토크의 균형에 해당하는 방정식으로 말미암아 유도될 수 있다.

$$-(L)(F_{\mathrm{N},1})+(L/2)(F_{\mathrm{g,beam}})+(L/4)(F_{\mathrm{g,block}})=0$$

$$\Downarrow$$

$$F_{\mathrm{N},1}=\frac{F_{\mathrm{g,beam}}}{2}+\frac{F_{\mathrm{g,block}}}{4}$$

- 저울1의 지점을 회전축으로 둘 때 저울2이 측정한 무게 $F_{\mathrm{N},2}$은 토크의 균형에 해당하는 방정식으로 말미암아 유도될 수 있다.

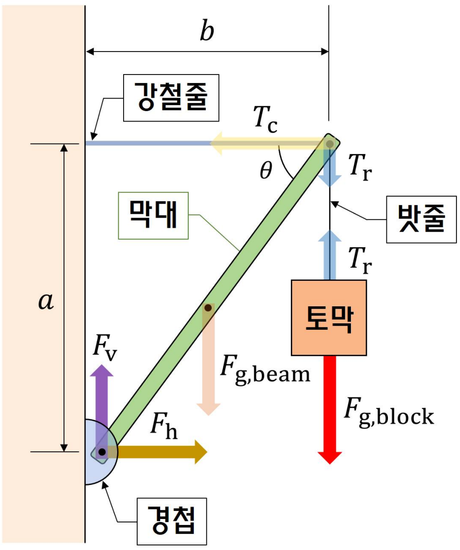
$$-(L/2)(F_{\mathrm{g,beam}})-(3L/4)(F_{\mathrm{g,block}})+(L)(F_{\mathrm{N},2})=0$$

$$\Downarrow$$

$$F_{\mathrm{N},2}=\frac{F_{\mathrm{g,beam}}}{2}+\frac{3F_{\mathrm{g,block}}}{4}$$

보기3

정적 평형상태에 있는 균일한 막대와 토막을 고려하자.



❖ $F_{\mathrm{g,beam}}$은 막대의 질량중심에 작용하는 중력이다.
❖ $F_{\mathrm{g,block}}$은 토막의 질량중심에 작용하는 중력이다.
❖ T_{r}은 막대와 토막을 연결하는 밧줄에 작용하는 장력이다.
❖ T_{c}은 막대와 수직벽을 연결하는 강철줄에 작용하는 장력이다.
❖ F_{h}와 F_{v}은 경첩이 막대에 가하는 수평력과 수직력이다.

- 토막에서의 힘의 균형으로 말미암아 장력 크기 T_{r}가 결정된다.

$$T_{\mathrm{r}}-F_{\mathrm{g,block}}=0 \quad\Rightarrow\quad T_{\mathrm{r}}=F_{\mathrm{g,block}}$$

- 경첩이 있는 부분을 회전축으로 둘 때 토크의 균형으로 말미암아 장력의 크기 T_{c}가 결정된다.

$$-(b/2)(F_{\mathrm{g,beam}})+(a)(T_{\mathrm{c}})-(b)(T_{\mathrm{r}})=0$$

$$\Downarrow$$

$$T_{\rm c} = \frac{b}{a}\left[F_{\rm g,\,block} + \frac{F_{\rm g,\,beam}}{2}\right]$$

- 막대에서의 수직힘의 균형으로 말미암아 $F_{\rm v}$이 결정된다.

$$F_{\rm v} - F_{\rm g,\,beam} - T_{\rm r} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\rm v} = F_{\rm g,\,beam} + F_{\rm g,\,blcok}$$

- 막대에서의 수평힘의 균형으로 말미암아 $F_{\rm h}$이 결정된다.

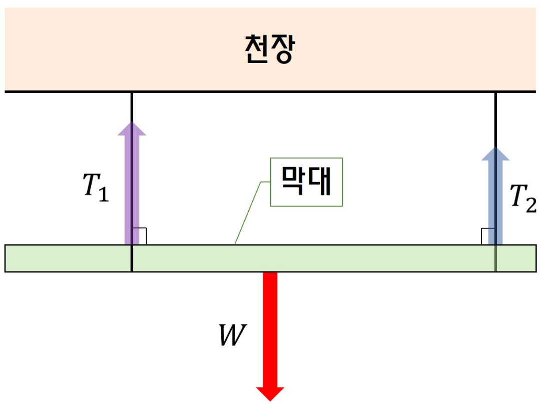
$$F_{\rm h} - T_{\rm c} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\rm h} = \frac{b}{a}\left[F_{\rm g,\,block} + \frac{F_{\rm g,\,beam}}{2}\right]$$

12.3 탄성

학습목표 ☞ 미확정 구조와 탄성이 무엇인지를 알아본다.

미확정 구조 어떤 구조물에 대한 평형 문제에서 힘과 토크의 균형식보다 미지수가 더 많으면 그 문제를 **미확정 문제**라고 한다.

예제 무게가 W인 균일한 막대가 두 줄로 연결되어 천장에 매달려 있는 경우를 고려하자.



- 두 줄에 작용하는 장력 크기 T_1와 T_2은 힘의 평형에 말미암아 다음 관계식을 만족한다.

$$T_1 + T_2 = W$$

- 막대의 무게중심에서 각 줄까지의 거리를 알 수 없으면 토크의 평형에 관련된 방정식을 얻을 수 없다.
- 이때 평형문제는 미확정 문제가 된다.

탄성과 변형력

- 각 원자가 가장 가까운 이웃 원자들과 일정한 평형 거리를 유지하면서 반복적으로 배열된 모양을 **격자**라고 한다.
- 고체 안에 있는 원자들은 3차원 격자에서 평형점을 찾아 안정되어 있다. 이때 원자들 사이에 작용하는 힘은 "매우 작은 용수철"로 묘사된다. 물체의 **탄성**은 이 용수철의 강도로 인해 결정된다.
- 모든 물체는 어느 정도의 탄성을 가지므로 물체를 잡아당기거나, 비틀거나, 누르면 그 크기와 모양을 약간씩 변화시킬 수 있다.
- 이처럼 힘이 작용하여 물체가 변형될 때 단위면적당 가해지는 힘을 **변형력**이라고 한다. ※변형력의 SI단위는 N/m^2 이다.
- **변형력**은 물체가 어떻게 변형되는지에 따라 세 가지 유형으로 분류된다. (a)**장력** 또는 **압축력**, (b)**층밀리기 변형력**, (c)**유압 변형력**.
- 일정 영역에서 변형력과 변형은 서로 비례관계에 있고, 그 비례상수를 **탄성률**이라 한다.

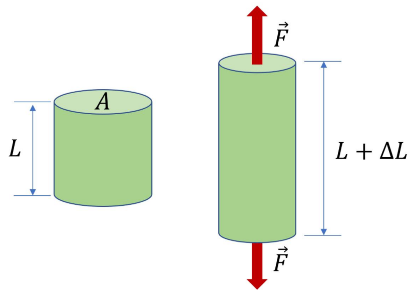
변형력 = 탄성률 × 변형

장력과 압축력

간단한 형태를 지닌 막대에서 변형력(**장력** 또는 **압축력**)과 그 변형은 다음처럼 정의된다.

$$\text{변형력} = \frac{F}{A} \ \& \ \text{변형} = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \therefore \ \frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

- A은 힘이 작용하는 물체의 면적이고 F은 면적에 수직인 방향의 힘의 크기이다.
- L은 원래 막대의 길이이고 ΔL은 늘어난 막대의 길이이다.
- E는 장력이나 압축력에 대한 탄성률(Young률)이다.
- 변형의 단위는 무차원이므로 탄성률은 변형력과 같은 단위(단위면적당 힘)를 갖는다.



항복점과 한계강도

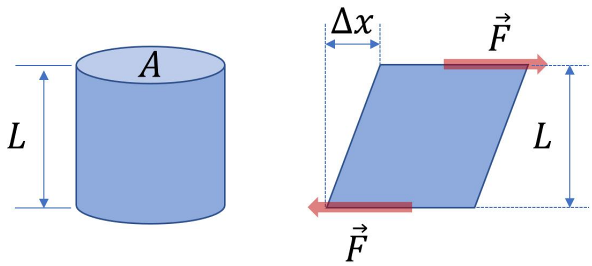
- 막대에 장력을 0에서부터 천천히 증가시킬 때 초기 일정 영역에서 변형력과 변형은 선형적 관계를 보이고 변형력을 제거하면 본래 형태로 되돌아온다.
- 그러나 변형력이 막대의 **항복점** 이상으로 증가하면 막대는 영구히 변형된다.
- 변형력이 계속 증가하여 **한계강도**에 도달하면 막대는 끊어진다.

층밀리기

간단한 형태를 지닌 막대에서 **층밀리기 변형력**(또는 **전단력**)과 그 변형은 다음처럼 정의된다

$$\text{변형력} = \frac{F}{A} \quad \& \quad \text{변형} = \frac{\Delta x}{L} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}$$

- A은 힘이 작용하는 물체의 면적이고 F은 면적에 수평인 방향의 힘의 크기이다.
- L은 막대의 길이이고 Δx은 찌그러진 정도이다.
- G는 층밀리기 변형력에 대한 탄성률(**층밀리기 탄성률**)이다.
- 변형의 단위는 장력과 마찬가지로 무차원이므로 층밀리기 탄성률은 변형력과 같은 단위를 갖는다.



유압압축

구에서 유압 변형력과 그 변형은 다음처럼 정의된다

$$\text{변형력} = p \quad \& \quad \text{변형} = \frac{\Delta V}{V} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad p = B\frac{\Delta V}{V}$$

- p은 구의 단위면적당 힘이다.
- V은 구의 초기 부피이고 ΔV은 부피 변화의 절대값이다.
- B는 유압 변형력에 대한 탄성률(**부피 탄성률**)이다.
- 변형의 단위는 무차원이므로 부피 탄성률은 유압 변형력과 같은 단위를 갖는다.