LECTURE 16

물리학의 오랜 목표 중 하나는 중력을 이해하는 것이다. 그러나 아직도 중력은 완전히 이해되지 못한 채로 남아 있다. 이 단원에서는 Newton의 중력 법칙에 대해 알아본다.

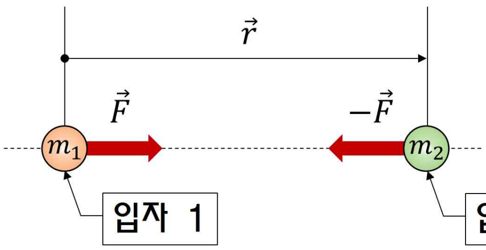
13.1 Newton의 중력 법칙

학습목표

☞ 두 입자 사이에 작용하는 중력을 이해한다.

Newton의 중력 법칙

질량이 m_1인 입자 1과 질량이 m_2인 입자 2가 r의 거리 만큼 떨어져 존재하는 경우를 고려하자.



- 두 입자 사이에는 다음 크기의 **중력**이 작용한다.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(Newton의 중력 법칙)}$$

- 여기서 G는 **중력상수**이다.

$$G = 6.67\times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2} = 6.67\times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2}$$

- 입자 1에 작용하는 중력 $\vec{F}$은 입자 1의 위치부터 입자 2의 위치까지의 변위벡터 $\vec{r}$와 같은 방향을 갖는다.

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \quad \text{또는} \quad G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

- $\hat{r}$은 $\vec{r}$의 단위벡터이다.
- 입자 1에 작용하는 중력과 입자 2에 작용하는 중력은 힘의 쌍을 이룬다. 즉, 두 힘의 크기는 같지만, 두 힘의 방향은 반대이다.
- 두 입자 사이에 다른 물체가 있다고 하더라도 둘 사이의 중력 법칙은 변하지 않는다.
- 엄격하게, Newton의 중력 법칙은 입자에만 적용되지만, 물체의 크기가 물체 간의 거리에 비해 매우 작으면 실제 물체에도 적용될 수 있다.

13.2 중력과 중첩원리

학습목표

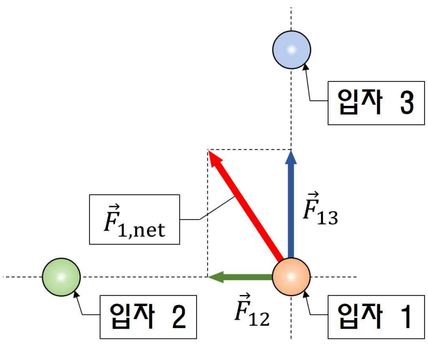
☞ 여러 개의 입자 중 한 입자에 작용하는 알짜 중력을 이해한다.

중력의 중첩

- n개의 입자 중에 한 입자(입자 1)에 작용하는 알짜 중력 $\vec{F}_{1,\text{net}}$은 **중첩원리**를 써서 구할 수 있다.

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}$$

- 여기서 $\vec{F}_{1i}$은 입자 i가 입자 1에 작용하는 중력이다.



- 유한한 크기의 물체가 한 입자(입자 1)에 작용하는 알짜 중력 $\vec{F}_1$은 다음과 같은 적분 형태로 나타낼 수 있다.

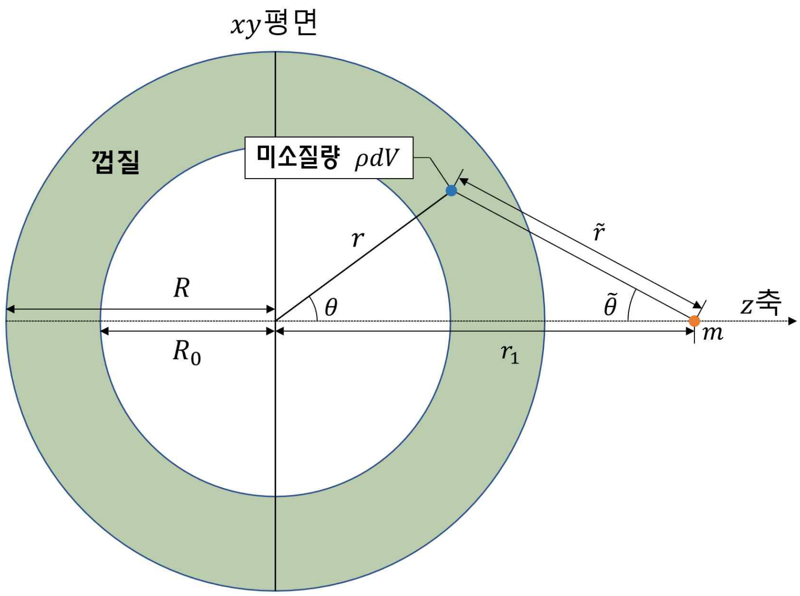
$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}$$

- 여기서 $d\vec{F}$은 미소질량 dm이 입자 1에 가하는 미소힘이다.

예제

어떤 껍질 밖에 있는 한 입자를 고려하자.

- ❖ 껍질은 그 중심으로부터 반지름 R_0까지 비어있다.
- ❖ 껍질의 반지름은 R이다.
- ❖ 반지름 R_0으로부터 R까지의 껍질 밀도는 ρ로 균일하다.
- ❖ 껍질중심에서 입자로 향하는 방향을 $+z$축 방향으로 둔다.
- ❖ 입자의 질량을 m로 표기한다.
- ❖ 입자는 껍질중심에서 $r_1(>R)$만큼 떨어진 곳에 있다고 가정한다.
- ❖ 껍질중심에서 미소질량까지의 변위벡터가 주어졌을 때 그 크기를 r로 표기하고 $+z$축 방향과 이루는 각도를 θ로 표기한다.
- ❖ 입자로부터 미소질량까지의 변위벡터가 주어졌을 때 그 크기를 $\tilde{r}$로 표기하고 $-z$축 방향과 이루는 각도를 $\tilde{\theta}$로 표기한다.



- $r, \tilde{r}, \theta, \tilde{\theta}$은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\tilde{r} = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos\theta} \quad \& \quad \tilde{r}\cos\tilde{\theta} + r\cos\theta = r_1$$

- 구형의 균일한 껍질 물질은 마치 모든 질량이 중심에 모여 있는 것처럼 외부의 입자를 끌어당긴다.

$$\begin{aligned} F_{\text{net},z} &= \int dF_z = \int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} -\frac{Gm(\rho dV)}{\tilde{r}^2}\cos\tilde{\theta} \\ &= -Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{r^2\cos\tilde{\theta}\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi}{\tilde{r}^2} \\ &= -2\pi Gm\rho\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^2\cos\tilde{\theta}\sin\theta}{\tilde{r}^2}\, drd\theta\right] \\ &= -2\pi Gm\rho\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^2\sin\theta(r_1 - r\cos\theta)}{(r_1^2+r^2-2r_1r\cos\theta)^{3/2}}\, drd\theta\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\pi G m\rho\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r_1 r^2\sin\theta - r^3\sin\theta\cos\theta}{(r_1^2+r^2-2r_1 r\cos\theta)^{3/2}}\,dr d\theta\right] \\
&= -2\pi G m\rho\int_{r=R_0}^{r=R_1} dr\left[\frac{r^3 - r_1 r^2\cos\theta}{r_1^2(r_1^2+r^2-2r_1 r\cos\theta)^{1/2}}\right]\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= -2\pi G m\rho\int_{r=R_0}^{r=R_1}\left[\frac{r^2(r+r_1)}{r_1^2(r+r_1)}+\frac{r^2(r_1-r)}{r_1^2(r_1-r)}\right]dr \\
&= -\frac{4\pi G m\rho}{r_1^2}\int_{r=R_0}^{r=R_1} r^2 dr = \frac{G m\rho}{r_1^2}\left[\frac{4\pi R_1^3}{3}-\frac{4\pi R_0^3}{3}\right] \\
&= -G\frac{Mm}{r_1^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{net},x} &= \int dF_x = \int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{Gm(\rho dV)}{\tilde{r}^2}\sin\tilde{\theta}\cos\phi \\
&= Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{r^2\sin\tilde{\theta}\sin\theta\cos\phi\,dr\,d\theta\,d\phi}{\tilde{r}^2} \\
&= \frac{Gm\rho}{2}\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^2\sin\tilde{\theta}\sin\theta}{\tilde{r}^2}\,dr d\theta\right]\left[\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\cos\phi d\phi\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{net},y} &= \int dF_x = \int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{Gm(\rho dV)}{\tilde{r}^2}\sin\tilde{\theta}\sin\phi \\
&= Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{r^2\sin\tilde{\theta}\sin\theta\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi}{\tilde{r}^2} \\
&= \frac{Gm\rho}{2}\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^2\sin\tilde{\theta}\sin\theta}{\tilde{r}^2}\,dr d\theta\right]\left[\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\sin\phi d\phi\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

13.3 지면 근처의 중력

학습목표

☞ 지면 근처에서 있는 입자에 중력이 어떻게 작용하는지를 알아보고 자유낙하 가속도가 어떻게 결정되는지를 알아본다.

지면 근처의 중력

지구가 질량과 반지름이 각각 M와 R인 균일한 구라고 가정한다.

- 질량이 m인 입자가 지구 중심에서 r의 거리만큼 떨어진 외부에 있으면 그 입자에 작용하는 중력의 크기 F는 다음과 같다.

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

- 입자의 가속도 크기 a_g는 Newton의 제2법칙($F = ma_g$)로 말미암아 다음처럼 결정된다.

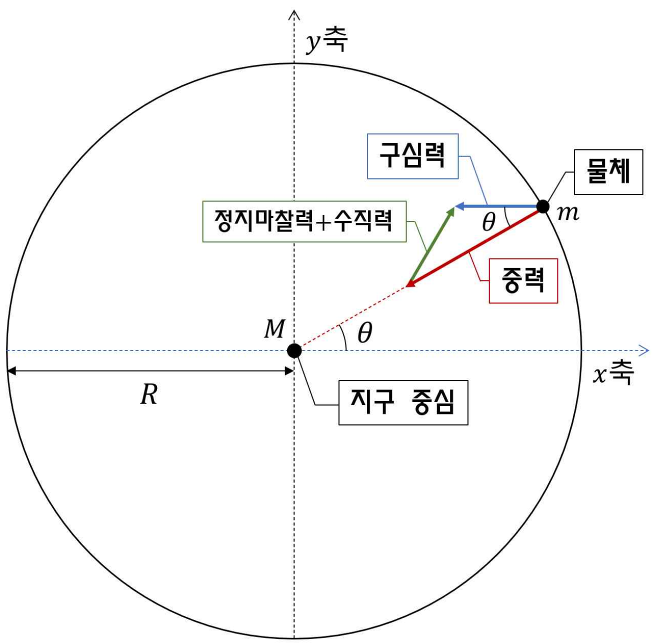
$$a_g = \frac{GM}{r^2}$$

- 자유낙하 가속도의 크기 g는 아래와 같은 대표적인 이유로 a_g와 다르다.
  - ✓ 지구의 질량은 균일하게 분포되어 있지 않다.
  - ✓ 지구의 형태는 완전한 구가 아니다.
  - ✓ 지구는 자전을 한다.

자유낙하 가속도

지구가 다음과 같다고 가정하자.

❖ 지구의 밀도가 균일하다.
❖ 지구의 형태가 완전한 구이다.
❖ 지구가 각속도 ω로 자전한다.



- 위도 θ의 지면 위에 있는 물체에 작용하는 알짜힘 $\vec{F}_{\text{net}}$은 구심력과 같다.

$$\vec{f}_s + \vec{F}_{\text{N}} + \vec{F}_{\text{g}} = \vec{F}_{\text{net}} \quad = m(-\omega^2 R\cos\theta)\,\hat{\mathrm{i}} = -m\omega^2 R\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}}$$

- m은 물체의 질량이고 R은 지구의 반지름이다.
- $\vec{f}_{\mathrm{s}}$, $\vec{F}_{\mathrm{N}}$, $\vec{F}_{\mathrm{g}}$은 차례대로 정지마찰력, 수직력, 중력이다.
- 지구가 물체에 작용하는 중력은 다음처럼 표현될 수 있다.

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} = - m a_{\mathrm{g}} \cos\theta\,\hat{\mathrm{i}} - m a_{\mathrm{g}} \sin\theta\,\hat{\mathrm{j}}$$

- 자유낙하 가속도 $\vec{g}$는 정지마찰력 $\vec{f}_{\mathrm{s}}$과 수직력 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$으로 측정된다.

$$m\vec{g} = -\vec{f}_s - \vec{F}_{\mathrm{N}} = - m(a_{\mathrm{g}} - \omega^2 R)\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}} - m a_{\mathrm{g}} \sin\theta\,\hat{\mathrm{j}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{g} = - (a_{\mathrm{g}} - \omega^2 R)\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}} - a_{\mathrm{g}} \sin\theta\,\hat{\mathrm{j}}$$

- 자유낙하 가속도의 크기 g는 지구의 자전 때문에 중력 가속도의 크기 a_{g}보다 작게 측정된다.

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{a_{\mathrm{g}}^2 - 2a_{\mathrm{g}}\omega^2 R\cos^2\theta + \omega^4 R^2 \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{a_{\mathrm{g}}^2 - \omega^2 R\cos^2\theta(2a_{\mathrm{g}} - \omega^2 R)} \end{aligned}$$

- 두 가속도 g와 a_{g}의 차이는 위도 θ가 증가할수록 작아진다.
- 그 차이는 적도($\theta = 0$)에서 최대가 된다.

$$g = a_{\mathrm{g}} - \omega^2 R \quad (\theta = 0)$$

- 북극($\theta = 90^\circ$)에서 g와 a_{g}은 같다.

13.4 지구 내부의 중력

학습목표	☞ 지구 내부 안에 입자가 있을 때 입자의 알짜 중력을 이해한다.

균일한 껍질과 중력

어떤 껍질 안에 있는 한 입자를 고려하자.

❖ 껍질은 그 중심으로부터 반지름 R_0까지 비어있다.

❖ 껍질의 반지름은 R이다.

❖ 반지름 R_0으로부터 R까지의 껍질 밀도는 ρ로 균일하다.

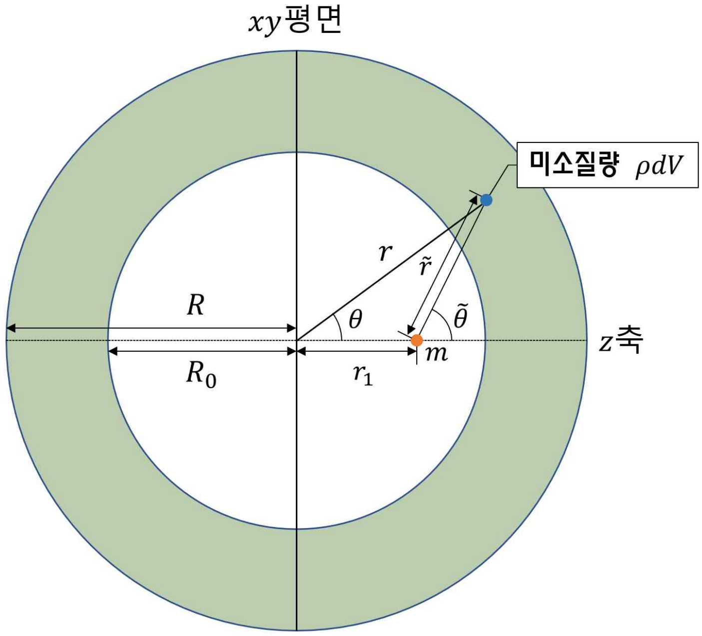
❖ 껍질중심에서 입자로 향하는 방향을 $+z$축 방향으로 둔다.

❖ 입자의 질량을 m로 표기한다.

❖ 입자는 껍질중심에서 $r_1(< R_0)$만큼 떨어진 곳에 있다고 가정한다.

❖ 껍질중심에서 미소질량까지의 변위벡터가 주어졌을 때 그 크기를 r로 표기하고 $+z$축 방향과 이루는 각도를 θ로 표기한다.

❖ 입자로부터 미소질량까지의 변위벡터가 주어졌을 때 그 크기를 $\tilde{r}$로 표기하고 $+z$축 방향과 이루는 각도를 $\tilde{\theta}$로 표기한다.



- $r, \tilde{r}, \theta, \tilde{\theta}$은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\tilde{r} = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos\theta} \quad \& \quad \tilde{r}\cos\tilde{\theta} + r_1 = r\cos\theta$$

- 입자에 작용하는 알짜 중력 $\vec{F}_{\text{net}}$의 z성분은 0이다.

$$\begin{aligned}
F_{\text{net},z} &= \int dF_z = \int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{Gm(\rho dV)}{\tilde{r}^2}\cos\tilde{\theta} \\
&= Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{r^2\cos\tilde{\theta}\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi}{\tilde{r}^2} \\
&= 2\pi Gm\rho\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^2\cos\tilde{\theta}\sin\theta}{\tilde{r}^2}\, dr d\theta\right] \\
&= 2\pi Gm\rho\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^2\sin\theta(r\cos\theta - r_1)}{(r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos\theta)^{3/2}}\, dr d\theta\right] \\
&= 2\pi Gm\rho\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^3\sin\theta\cos\theta - r_1 r^2\sin\theta}{(r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos\theta)^{3/2}}\, dr d\theta\right] \\
&= 2\pi Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R_1} dr\left[\frac{r_1 r^2\cos\theta - r^3}{r_1^2(r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos\theta)^{1/2}}\right]\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= 2\pi Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R_1}\left[-\frac{r^2(r_1 + r)}{r_1^2(r_1 + r)} + \frac{r^2(r - r_1)}{r_1^2(r - r_1)}\right] dr \\
&= 2\pi Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R_1} 0\, dr = 0
\end{aligned}$$

- 알짜 중력 $\vec{F}_{\text{net}}$의 x,y성분도 0이다.

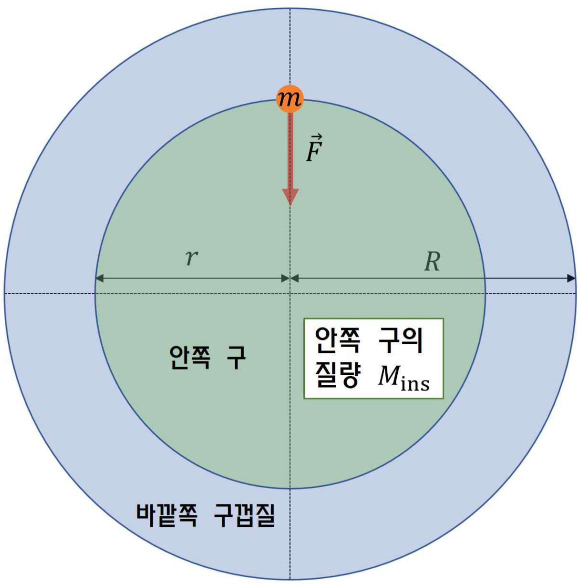
$$\begin{aligned} F_{\text{net},x} &= \int dF_x = \int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{Gm(\rho dV)}{\tilde{r}^2}\sin\tilde{\theta}\cos\phi \\ &= Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{r^2\sin\tilde{\theta}\sin\theta\cos\phi\, dr\, d\theta\, d\phi}{\tilde{r}^2} \\ &= \frac{Gm\rho}{2}\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^2\sin\tilde{\theta}\sin\theta}{\tilde{r}^2}drd\theta\right]\left[\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\cos\phi d\phi\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{net},y} &= \int dF_x = \int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{Gm(\rho dV)}{\tilde{r}^2}\sin\tilde{\theta}\sin\phi \\ &= Gm\rho\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{r^2\sin\tilde{\theta}\sin\theta\sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi}{\tilde{r}^2} \\ &= \frac{Gm\rho}{2}\left[\int_{r=R_0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{r^2\sin\tilde{\theta}\sin\theta}{\tilde{r}^2}drd\theta\right]\left[\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\sin\phi d\phi\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 껍질 내부에 있는 입자의 알짜 중력 $\vec{F}_{\text{net}}$은 0이다.

지구 내부의 중력

다음과 같은 지구의 내부에 입자가 있는 경우를 고려하자.
❖ 지구의 형태는 반지름이 R인 구이다.
❖ 지구의 밀도는 균일하다.
❖ 지구와 입자의 질량은 각각 M과 m이다.



- 지구 중심으로부터 입자까지의 거리가 r이면 입자의 알짜 중력 $\vec{F}$은 반지름 r을 기준으로 안쪽 구의 질량 M_{ins}에만 의존하고 바깥쪽 구껍질의 질량에는 의존하지 않는다.

$$\vec{F} = -\frac{GM_{\text{ins}}m}{r^2}\hat{r} \quad \& \quad M_{\text{ins}} = \left[\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)/\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)\right]M = \frac{M}{R^3}r^3$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F} = -K\vec{r} \quad \& \quad K = \frac{GMm}{R^3}$$

- 여기서 $\vec{r}$은 지구 중심으로부터 입자까지의 변위벡터이고 $\hat{r}$은 $\vec{r}$의 단위벡터이다.
- 지구 내부 안에 있는 입자가 받는 중력은 용수철 상수가 K인 용수철 힘으로 고려될 수 있다.