Homework 14

李云志 2015K8009929014

2017 年 11 月 29 日

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(f(x_i) \neq y_i) \leq exp(-2\sum_{m=1}^{M}\gamma_m^2)$$

Step1——证明：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(f(x_i) \neq y_i) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} exp(-y_i f(x_i))$$

(1)当$f(x_i) = y_i$时，$I(f(x_i) \neq y_i) = 0$，而不等式右边相对应的值大于0.
(2)当$f(x_i) \neq y_i$时，$I(f(x_i) \neq y_i) = 1$，而此时$y_i f(x_i < 0$，所以$exp(-y_i f(x_i)) > 1$，即不等式依然成立。
综上，不等式

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(f(x_i) \neq y_i) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} exp(-y_i f(x_i))$$

成立。
Step2——证明：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} exp(-y_i f(x_i)) = \prod_{m=1}^{M} Z_m$$

首先我们有式1：

$$f(x_i) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m y_i G_m(x_i)$$

。
其次，由权值变换公式我们知道：

$$\omega_{m+1,i} = \frac{\omega_{m,i}}{Z_m} exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i))$$

继而进一步得到式2：

$$Z_m \omega_{m+1,i} = \omega_{m,i} exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i))$$

所以：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} exp(-y_i f(x_i)) \\
=&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} exp(-\sum_{m=1}^{M}\alpha_m y_i G_m(x_i)) \\
=&\omega_{1,i}\sum_{i=1}^{N} exp(-\sum_{m=1}^{M}\alpha_m y_i G_m(x_i)) \\
=&\omega_{1,i}\sum_{i=1}^{N}\prod_{m=1}^{M} exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i)) \\
=&\sum_{i=1}^{N}\omega_{1,i}\prod_{m=1}^{M} exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i)) \\
=&Z_1\sum_{i=1}^{N}\omega_{2,i}\prod_{m=2}^{M} exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i)) \\
=&...... \\
=&Z_1 Z_2 ... Z_{M-1}\sum_{i=1}^{N} exp(-\alpha_M y_i G_M(x_i)) \\
=&\prod_{m=1}^{M} Z_m
\end{aligned}
$$

Step3——证明对于二分类：

$$\prod_{m=1}^{M} Z_m \leq exp(-2\sum_{m=1}^{M}\gamma_m^2)$$

首先我们知道误差率

$$e_m = P(y_i \neq G(x_i))$$

其次，我们根据定义知道

$$\alpha_m = \frac{1}{2}\log\frac{1-e_m}{e_m}$$

则：

$$
\begin{aligned}
Z_m =& \sum_{i=1}^{N}\omega_{m,i} exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i)) \\
=& \sum_{y_i = G_m(x_i)}\omega_{m,i}e^{-\alpha_m} + \sum_{y_i \neq G_m(x_i)}\omega_{m,i}e^{\alpha_m} \\
=&(1-e_m)e^{-\alpha_m} + e_m e^{\alpha_m} \\
=&2\sqrt{e_m(1-e_m)} \\
=&\sqrt{1-4\gamma_m^2}
\end{aligned}
$$

由不等式：

$$1 - x \leq e^{-x}$$

得到：

$$\sqrt{1-4\gamma_m^2} \leq e^{-2\gamma_m^2}$$

所以最终得到：

$$\prod_{m=1}^{M} Z_m \leq exp(-2\sum_{m=1}^{M}\gamma_m^2)$$

证毕!

综上所述，我们知道对于二分类有如下不等式：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(f(x_i) \neq y_i) \leq exp(-2\sum_{m=1}^{M}\gamma_m^2)$$