

# Determinación de Órbitas Elípticas

## El Método de Laplace

Simón López Vico

Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática  
Universidad de Granada

Septiembre de 2020

# Índice

- 1 Introducción
- 2 El Método de Laplace
- 3 Órbita completa del cuerpo
- 4 Bondad del método
- 5 Conclusiones

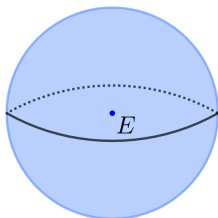
# Introducción

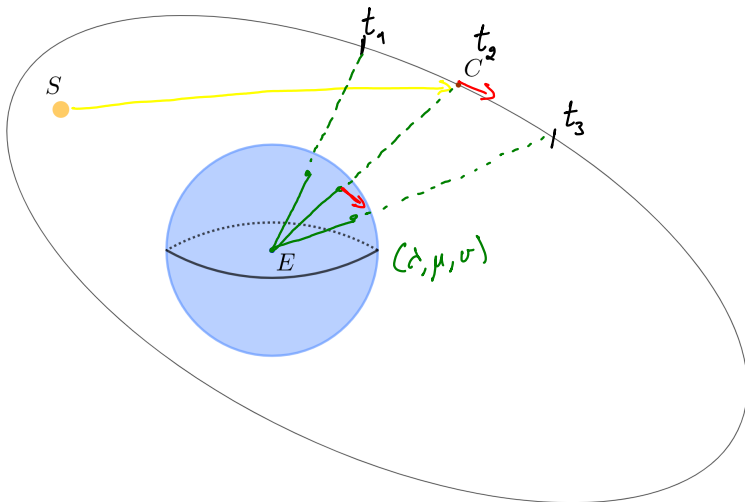
$S$



A diagram showing two points in a 2D space. Point  $S$  is represented by a yellow dot in the upper-left quadrant. Point  $E$  is represented by a blue dot in the lower-right quadrant. The labels  $S$  and  $E$  are placed directly above and to the right of their respective dots.

$E$

$S$   




## El Método de Laplace

# Aproximando las derivadas

Tres observaciones:  $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ ,  $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ ,  $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ .



## Aproximando las derivadas

Tres observaciones:  $(\lambda_1, \overset{t_1}{\mu_1}, \nu_1)$ ,  $(\lambda_2, \overset{t_2}{\mu_2}, \nu_2)$ ,  $(\lambda_3, \overset{t_3}{\mu_3}, \nu_3)$ .

**Diferencia regresiva** ( $t_2 > t_1$ )

$$\lambda'_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}$$

**Diferencia progresiva** ( $t_2 < t_3$ )

$$\lambda'_{23} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{t_3 - t_2}$$

**Diferencia centrada** ( $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ )

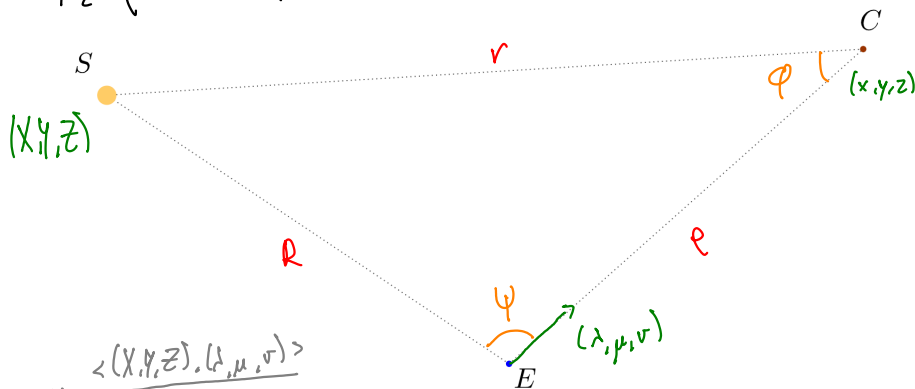
$$\lambda'_2 = \frac{\lambda'_{12} + \lambda'_{23}}{2}$$

# Cálculo de las distancias

$$\begin{cases} x = \rho \lambda - X \\ y = \rho \mu - Y \\ z = \rho v - Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \rho' \lambda' + \rho \lambda' - X' \\ y' = \dots \\ z' = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = R \cdot \frac{\sin(\psi + \phi)}{\sin \phi} \\ r = R \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \phi} \end{cases} + \text{Ley de Gravitación Universal}$$



$$\cos \psi = \frac{\langle (X, Y, Z), (\lambda, \mu, \nu) \rangle}{R \cdot 1}$$

Soluciones para  $\phi$ :

$$\sin^4 \phi = M \sin(\phi + m)$$

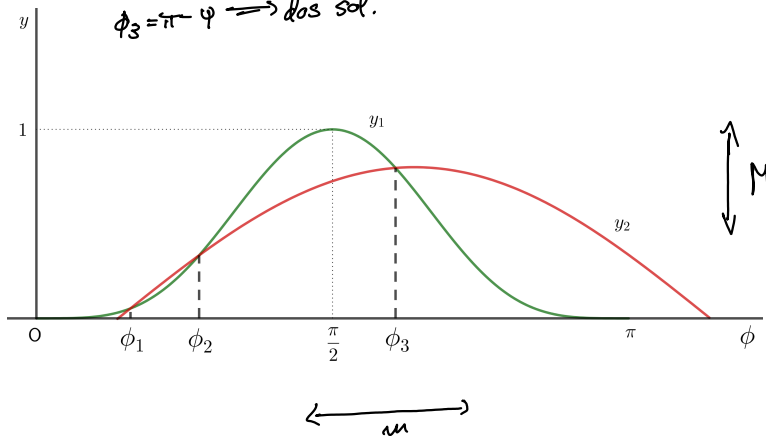
Soluciones para  $\phi$ :

$$\underset{\substack{\parallel \\ \gamma_1}}{\sin^4} \phi = M \sin(\phi + m) \underset{\substack{\parallel \\ \gamma_2}}{\phantom{\sin}}$$

Condiciones: 
$$\begin{cases} \phi \in (0, \pi) \\ \phi < \pi - \psi \end{cases}$$

## Valores para $\phi$

$\phi_1 = \pi - \psi \Rightarrow$  no sol  
 $\phi_2 = \pi - \psi \Rightarrow \phi_1$  sol única  
 $\phi_3 = \pi - \psi \Rightarrow$  dos sol.



## Utilizamos los valores calculados

$$\rho = R \frac{\sin(\psi + \phi)}{\sin \psi}$$

$$\rho' = \frac{D_2}{D} \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

# Utilizamos los valores calculados

$$\rho = R \frac{\sin(\psi + \phi)}{\sin \psi}$$

$$\rho' = \frac{D_2}{D} \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

**Posición:**

$$\begin{cases} x = \rho\lambda - X \\ y = \rho\mu - Y \\ z = \rho\nu - Z \end{cases}$$

**Velocidad:**

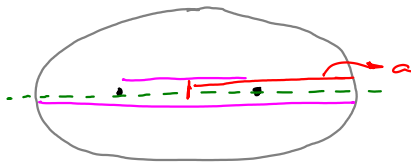
$$\begin{cases} x' = \rho'\lambda + \rho\lambda' - X' \\ y' = \rho'\mu + \rho\mu' - Y' \\ z' = \rho'\nu + \rho\nu' - Z' \end{cases}$$

$$t = t_2$$

$$(a, e, i, \omega, \Omega)$$

ángulos

## Órbita completa del cuerpo





# Elementos orbitales

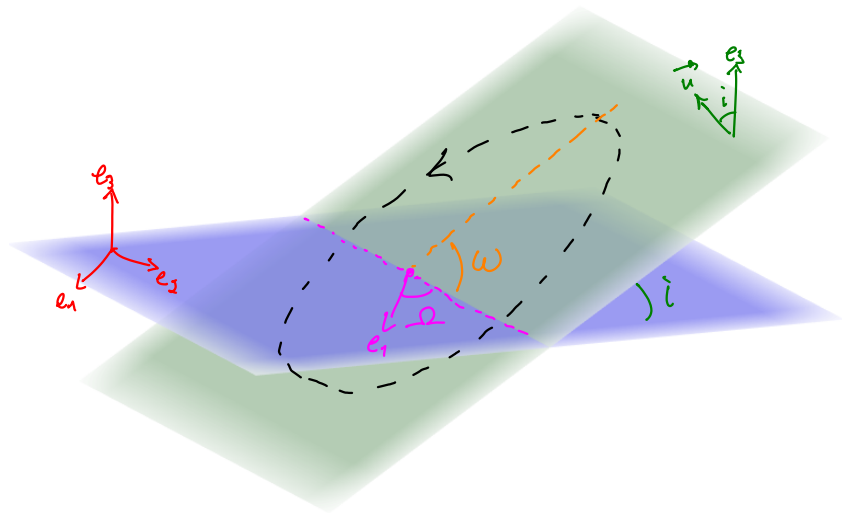
Utilizando  $r = (x, y, z)$  y  $v = r'$  podemos obtener  $(a, e, i, \omega, \Omega)$ .

# Elementos orbitales

Utilizando  $r = (x, y, z)$  y  $v = r'$  podemos obtener  $(a, e, i, \omega, \Omega)$ .

**Elipse:**  $(a \cos \theta + ae, a\sqrt{1 - e^2} \sin \theta, 0), \quad \theta \in (0, 2\pi)$

# Posición de la órbita



## Bondad del método

# Herramientas para el desarrollo

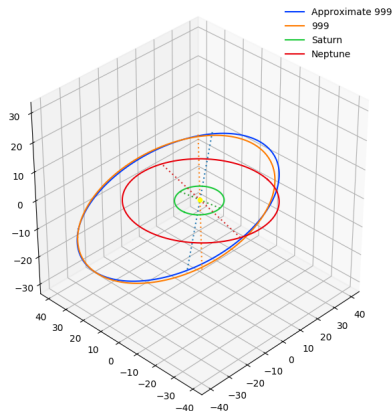
- **Python:** Numpy, Matplotlib, Astropy, etc.
- **Tkinter**
- **Jet Propulsion Laboratory (JPL)**
- **Web Scraping**

# Cuerpos lejanos

**Plutón (999)**, observaciones 6 de marzo, 6 de abril, 6 de mayo.

	Real	Aproximado
$x$	13.26236291	13.59730661
$y$	-31.31779618	-32.05011445
$z$	-0.48455854	-0.4966634

	Real	Aproximado
$x'$	0.0029688	0.00291106
$y'$	0.00056318	0.00065941
$z'$	-0.00090387	-0.00093223

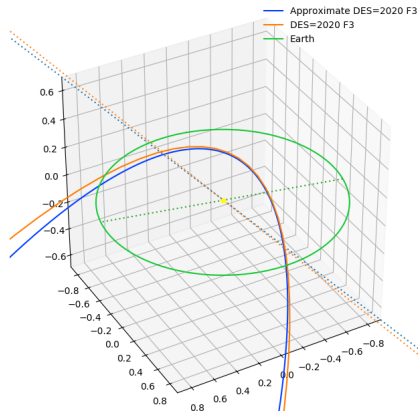


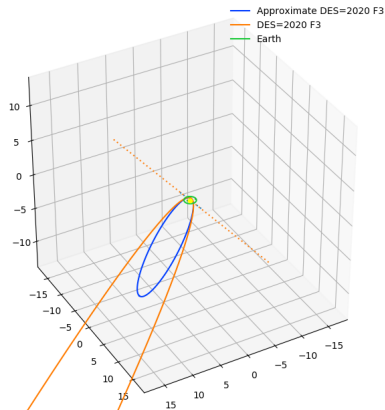
# Cuerpos muy excéntricos

**Neowise** (DES=2020 F3), observaciones con 8 horas de diferencia.

	Real	Aproximado
$x$	0.16652972	0.16854806
$y$	-0.24402154	-0.25029356
$z$	0.32665628	0.32362519

	Real	Aproximado
$x'$	-0.01084886	-0.0106734
$y'$	-0.03392851	-0.03331783
$z'$	0.00860642	0.00864502





	Real	Aproximado
$e$	0.9992401080381	0.9623385094824
$i$	128.9372837890	129.87582386324
$\omega$	37.28105014282	34.302810750239
$\Omega$	61.01063124644	60.32375719162

$$a_{real} = 387,7566248050 \text{ UA}$$

$$a_{aprox} = 7,640204712942 \text{ UA}$$



## Conclusiones

# Conclusiones

- El método de Laplace obtiene buena aproximación.
- Cuerpos cercanos  $\longrightarrow$  observaciones cercanas.  
Cuerpos lejanos  $\longrightarrow$  observaciones lejanas.
- Implementación software funciona al completo.

Muchas gracias por su atención

Correo de contacto: *[simondelosbros@correo.ugr.es](mailto:simondelosbros@correo.ugr.es)*