

## 1. Método Laplaciano de Determinación

1.1. *Determinar el valor de la primera y segunda derivada de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  en algún momento  $t$ .*

Dado que no podemos calcular el valor exacto de la derivada de  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$ , utilizaremos fórmulas de derivación numérica con dos nodos para obtener un valor aproximado de éstas. Tomemos, por ejemplo,  $t = t_2$ , que por el momento nos bastará para demostrar que se puede realizar una buena aproximación. Supongamos que el valor de  $\lambda'$  no cambia muy rápido; entonces, el valor de ésta en medio del intervalo  $[t_1, t_2]$  será muy cercano al valor de:

$$\lambda'_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1},$$

y dado que los nodos elegidos cumplen  $t_2 > t_1$ , estaremos ante una diferencia regresiva. Análogamente podremos determinar el valor de  $\lambda'_{23}$ .

El error de estas aproximaciones, suponiendo que  $\lambda$  sea de clase 2 en el intervalo de aproximación, es del orden de  $(t_2 - t_1)$  y  $(t_3 - t_2)$  para  $\lambda'_{12}$  y  $\lambda'_{23}$  respectivamente. Por tanto, cuanto más pequeño sea el intervalo donde realizamos las operaciones, mejor será la aproximación obtenida. Además, si la longitud del intervalo  $[t_1, t_2]$  es igual a la longitud de  $[t_2, t_3]$ , podremos calcular el valor aproximado de  $\lambda'$  en  $t_2$  mediante una diferencia centrada, obteniendo:

$$\lambda'_2 = \frac{\lambda'_{12} + \lambda'_{23}}{2}$$

es decir, la media de los dos valores calculados anteriormente. Si los intervalos tienen una longitud diferente, podremos ajustar la disparidad entre ellos para realizar la aproximación.

Análogamente, podremos definir la derivada segunda de  $\lambda$  en  $t_2$  de manera aproximada como:

$$\lambda''_2 = \frac{\lambda'_{23} - \lambda'_{12}}{\frac{1}{2}(t_3 - t_1)}$$

de orden  $(t_3 - t_1)^2$  siempre que  $\lambda \in \mathcal{C}^4[t_1, t_3]$ . Utilizaremos el mismo método para calcular la primera y segunda derivada de  $\mu$  y  $\nu$ , y podemos suponer que las tres funciones son de clase infinito en todo  $\mathbb{R}$ .

Como hemos comentado antes, las aproximaciones obtenidas de esta manera serán más cercanas cuanto menor sea la longitud de los intervalos entre

las observaciones, y generalmente, en la práctica, los intervalos que utilizaremos serán cortos.

Finalmente, para calcular la primera y segunda derivada de  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  utilizaremos la efemérides proporcionada por el *Jet Propulsion Laboratory* en su página web, que nos dará el valor de estas variables para cualquier día del año<sup>1</sup>.

### 1.2. Imponer la condición de que $C$ gira en torno a $S$ de acuerdo a la ley de gravitación.

Asumiendo que el cuerpo observado  $C$  no está alterado por la interacción con otros cuerpos cercanos, podemos asegurar que cumplirá siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2z}{r^3} \end{cases} \quad (1)$$

donde  $k^2 = GM$ ,  $G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$  constante de gravitación y  $M = 1,989 \times 10^{30}$  kg masa del Sol. Tomamos solo la masa del Sol,  $M$ , ya que la masa de nuestro cuerpo es despreciable en comparación con ésta usando como modelo el problema de Kepler.

Además, utilizando las relaciones entre  $E$ ,  $C$  y  $S$ , así como los resultados vistos anteriormente, llegamos a:

$$\begin{cases} x = \rho\lambda - X \\ y = \rho\mu - Y \\ z = \rho\nu - Z \end{cases} \quad (2)$$

y sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones (1), obtenemos lo

---

<sup>1</sup>Mientras que el JPL proporciona una herramienta para generar efemérides, hemos de tener en cuenta que no podemos escoger una posición exacta de observación en la Tierra. Para ello, podemos utilizar *esta* página.

siguiente:

$$\begin{cases} (\rho\lambda)'' - X'' = \frac{-k^2(\rho\lambda - X)}{r^3} \\ (\rho\mu)'' - Y'' = \frac{-k^2(\rho\mu - Y)}{r^3} \\ (\rho\nu)'' - Z'' = \frac{-k^2(\rho\nu - Z)}{r^3} \end{cases} \quad (3)$$

Desarrollando la segunda derivada de  $\rho\lambda$  conseguimos:

$$(\rho\lambda)'' = (\rho'\lambda + \rho\lambda')' = \rho''\lambda + 2\rho'\lambda' + \rho\lambda'',$$

valor que utilizaremos más adelante.

De la misma manera que hemos hecho con  $C$ , escribimos las ecuaciones de gravitación para  $E$ , que gira alrededor de  $S$  en concordancia con la ley de gravitación universal.

$$\begin{cases} X'' = -\frac{k^2 X}{R^3} \\ Y'' = -\frac{k^2 Y}{R^3} \\ Z'' = -\frac{k^2 Z}{R^3} \end{cases} \quad (4)$$

Utilizando este resultado, sustituyendo en la ecuación (3) y desarrollando llegamos a lo siguiente:

$$\begin{cases} \lambda\rho'' + 2\lambda'\rho' + [\lambda'' + \frac{k^2\lambda}{r^3}]\rho = -k^2X[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \\ \mu\rho'' + 2\mu'\rho' + [\mu'' + \frac{k^2\mu}{r^3}]\rho = -k^2Y[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \\ \nu\rho'' + 2\nu'\rho' + [\nu'' + \frac{k^2\nu}{r^3}]\rho = -k^2Z[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \end{cases} \quad (5)$$

Así, las incógnitas de las ecuaciones pasan a ser  $r$ ,  $\rho$ ,  $\rho'$  y  $\rho''$ .

### 1.3. Determinar la Distancia de $C$ desde $E$ y $S$

Para resolver este paso, utilizaremos las ecuaciones que hemos acabado obteniendo del paso anterior, (5), y una condición geométrica que cumplirán los tres cuerpos. Para ello, tomaremos el sistema (5) como un sistema lineal en  $\rho, \rho'$  y  $\rho''$  y resolveremos utilizando la regla de Cramer. Comencemos definiendo el siguiente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda' & \lambda'' + \frac{k^2\lambda}{r^3} \\ \mu & 2\mu' & \mu'' + \frac{k^2\mu}{r^3} \\ \nu & 2\nu' & \nu'' + \frac{k^2\nu}{r^3} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix} = 2W(\lambda, \mu, \nu)$$

siendo  $W(\lambda, \mu, \nu)$  el Wronskiano de las coordenadas angulares.

Esta segunda forma del determinante la obtenemos mediante la transformación  $C_3 - \frac{k^2\lambda}{r^3}C_1$  sobre la matriz, donde  $C_i$  representará la columna  $i$ -ésima. Una vez hayamos sustituido las derivadas exactas por su valor aproximado calculado anteriormente, conoceremos todas las cantidades de este determinante.

Por otra parte, definiremos el determinante  $D_1$ , que utilizaremos para calcular  $\rho$  mediante la regla de Cramer, reemplazando la tercera columna por los términos independientes del sistema (5) y omitiendo el factor  $[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}]$ , conociendo de nuevo todas las cantidades utilizadas. Así, obtenemos el siguiente determinante:

$$D_1 = -2k^2 \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & X \\ \mu & \mu' & Y \\ \nu & \nu' & Z \end{vmatrix}$$

Con todo esto, la distancia  $\rho$  se determina por

$$\rho = \frac{D_1}{D} [\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}],$$

El valor de  $r$  es desconocido, por lo que añadiremos la siguiente ecuación formando con las dos un sistema de ecuaciones en  $r$  y  $\rho$ .

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\psi),$$

donde  $\psi$  es el ángulo formado en  $E$  trazando una línea imaginaria hasta el Sol y hasta el cuerpo observado, es decir, entre  $R$  y  $\rho$ ; esta ecuación expresa

el hecho de que  $S$ ,  $E$  y  $C$  forman un triángulo como vimos en la figura 1.

Dado que disponemos de los valores  $\overrightarrow{SE} = (X, Y, Z)$  y  $\overrightarrow{EC} = (\lambda, \mu, \nu)$ , vector unitario, podremos obtener el coseno de  $\psi$  con:

$$\cos \psi = \frac{\langle \overrightarrow{SE}, \overrightarrow{EC} \rangle}{|\overrightarrow{SE}| |\overrightarrow{EC}|} = \frac{\langle (X, Y, Z), (\lambda, \mu, \nu) \rangle}{R}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones al que hemos llegado obtendremos los valores de  $\rho$  y  $r$ , habiendo terminado este paso. Más adelante discutiremos la unicidad de la solución en el sistema con  $r, \rho > 0$  (??). Al solucionar este problema, podremos calcular las coordenadas de  $C$  mediante las ecuaciones (2) de las relaciones entre  $S$ ,  $E$  y  $C$ .

#### 1.4. Determinación de las Componentes de Velocidad de $C$

Se sigue de las ecuaciones (2) que:

$$\begin{cases} x' = \rho' \lambda + \rho \lambda' - X' \\ y' = \rho' \mu + \rho \mu' - Y' \\ z' = \rho' \nu + \rho \nu' - Z' \end{cases}$$

En estas ecuaciones solo tenemos una incógnita,  $\rho'$ , que podremos determinar resolviendo por Cramer en (5) a partir de:

$$\rho' = + \frac{D_2}{D} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \quad \text{con } D_2 = -k^2 \begin{vmatrix} \lambda & X & \lambda'' \\ \mu & Y & \mu'' \\ \nu & Z & \nu'' \end{vmatrix}$$

Notar que en  $D_2$  también hemos realizado la operación  $C_3 - \frac{k^2 \lambda}{r^3} C_1$ , como en  $D$ , para obtener un determinante más simple.

Así,  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  se vuelven conocidas.

#### 1.5. Determinar los elementos de la órbita a partir de la posición y los componentes de velocidad del cuerpo observado

Una vez conocida tanto la posición como la velocidad del cuerpo en un instante determinado, nos dispondremos a calcular los elementos orbitales mediante las distintas fórmulas estudiadas en el manual de Mecánica

Celeste[2]. Denotemos por  $x(t) = (x, y, z)(t)$  la posición del objeto y  $x'(t)$  su derivada, la velocidad.

Comencemos determinando la energía que tiene nuestro cuerpo en un instante  $t$ . Para ello utilizaremos:

$$h = \frac{|x'(t)|^2}{2} - \frac{\mu}{|x(t)|}$$

donde  $\mu = GM$  una constante positiva. Con el valor de la energía podemos pasar a calcular la primera de nuestros elementos astronómicos, la longitud del semieje mayor,  $a$ , utilizando la siguiente ecuación:

$$a = -\frac{\mu}{2h}$$

Pasemos ahora a calcular el momento angular de nuestro objeto. Dado que la masa del objeto observado es despreciable frente a la masa del Sol, podremos obviar su valor, obteniendo así el vector del momento angular mediante:

$$c = x(t) \wedge x'(t)$$

Calculado el momento angular, podremos obtener el vector de excentricidad para la órbita del cuerpo observado:

$$\vec{e} = -\frac{x(t)}{|x(t)|} - \frac{1}{\mu}(c \wedge x'(t))$$

y la excentricidad de la órbita será  $e = |\vec{e}|$ .

Una vez obtenidos estos valores, podemos utilizar la tercera ley de Kepler para obtener el período mínimo (suponiendo que nuestra órbita se corresponda con la de una elipse). Si el momento angular del objeto observado  $c \neq 0$  y su energía  $h < 0$ , entonces la órbita es periódica y su período mínimo valdrá:

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

Sabemos que el vector del momento angular, del que disponemos, es el vector normal al plano orientado de la órbita, pudiendo calcular así la inclinación del plano de movimiento. Además, calculando la intersección de éste con el plano de la eclíptica obtenemos la línea de nodos y con ella el nodo ascendente  $\mathcal{N}_+$ , con la que podremos determinar  $\Omega$ .

$$\begin{cases} i = \angle(\vec{e}_3, \vec{n}), & i \in ]0, \pi[ \\ \Omega = \angle(\vec{e}_1, \mathcal{N}_+), & \Omega \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Finalmente usaremos el vector de excentricidad  $\vec{e}$  para calcular  $\omega$ , utilizando el nodo ascendente como eje de rotación.

### 1.6. Determinación de $\lambda$ , $\mu$ y $\nu$ y sus derivadas mediante series de potencias

Tal y como hemos visto en la sección 1.1, hemos de calcular la primera y segunda derivada de las coordenadas angulares o de  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$ . Definimos el valor  $\tau = k(t - t_0)$  con el que podemos reescribir las ecuaciones (1) como vemos a continuación:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3} \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3} \end{cases} \quad (6)$$

La solución para estas ecuaciones diferenciales de segundo orden puede ser expandida como serie de Taylor en  $\tau$ , y esta convergerá si el valor de  $\tau$  no es especialmente grande.

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_0\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}\right)_0\tau^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nx}{d\tau^n}\right)_0\tau^n + \dots \\ y = y_0 + y'_0\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0\tau^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^ny}{d\tau^n}\right)_0\tau^n + \dots \\ z = z_0 + z'_0\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{d\tau^2}\right)_0\tau^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nz}{d\tau^n}\right)_0\tau^n + \dots \end{cases} \quad (7)$$

donde con el subíndice 0 estaremos indicando que los valores se toman en  $\tau = 0$ . Podemos sustituir la segunda derivada que aparece en estas series por su valor en (??), la tercera derivada por la derivada de ésta y a partir de la cuarta derivada repetimos este proceso, teniendo así que las series estarán solo en función de la  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y la primera derivada de cada una de estas, todas ellas tomadas en  $\tau = 0$ . De esta manera llegamos al hecho de que la solución  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del problema de Kepler es una función analítica, pues su serie de Taylor centrada en  $\tau$  converge a la función en un entorno de éste para cualquier  $\tau$  que elijamos.

Hemos de tener en cuenta que el valor de estas series no siempre tiene valor práctico, pues el intervalo de tiempo para la convergencia puede ser demasiado grande; notar que los límites serán más pequeños cuanto más pequeña sea la distancia del perihelio y más grande la excentricidad de nuestra

órbita, y dependerán de la posición del cuerpo en  $\tau = 0$ .

En el caso de la Tierra, expandiendo sus coordenadas en series de potencias, obtendremos una convergencia durante largos intervalos de tiempo debido a la pequeña excentricidad de la órbita terrestre ( $e \approx 0,0167$ ). Así, se sigue de la ecuación (2), que relaciona las coordenadas de la Tierra, el Sol y el cuerpo observado que las ecuaciones de  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  también son funciones analíticas y por ello podrán ser expandidas como series de Taylor, con el mismo rango de utilidad que el de las series para  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

Veamos las series para  $\lambda$ , pues las de  $\mu$  y  $\nu$  serán simétricamente similares. Definimos  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$  como los valores de  $\tau$  tomando  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$  respectivamente. Así, las series para  $\lambda$  son:

$$\begin{cases} \lambda = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \dots \\ \lambda_1 = c_0 + c_1\tau_1 + c_2\tau_1^2 + \dots \\ \lambda_2 = c_0 + c_1\tau_2 + c_2\tau_2^2 + \dots \\ \lambda_3 = c_0 + c_1\tau_3 + c_2\tau_3^2 + \dots \end{cases} \quad (8)$$

donde los valores  $c_0, c_1, c_2, \dots$  son constantes. Si estas series terminan tras los términos elevados al cuadrado, podremos determinar  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  resolviendo como un sistema de ecuaciones, ya que conocemos las cantidades  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Así, tenemos que cuantas más observaciones tengamos disponibles, más coeficientes podrán ser determinados.

Para expresar  $\lambda$  en términos de  $\tau$  tomando solo coeficientes conocidos, igualaremos a 0 la resultante de 1,  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$ , y obtendremos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \tau & \tau^2 \\ \lambda_1 & 1 & \tau_1 & \tau_1^2 \\ \lambda_2 & 1 & \tau_2 & \tau_2^2 \\ \lambda_3 & 1 & \tau_3 & \tau_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Resolvemos este determinante desarrollando por la primera columna y despejando  $\lambda$  obtenemos:

$$\lambda = \frac{(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)}\lambda_1 + \frac{(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)}\lambda_2 + \frac{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)}\lambda_3 \quad (10)$$

obteniendo así el polinomio de interpolación de Lagrange para  $\lambda$ . Hemos de tener en cuenta que los valores de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$  han de ser diferentes entre sí



para que no se anulen los denominadores.

Con esto, somos capaces de obtener  $\lambda$  de manera exacta en  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ ; para otros valores más pequeños de  $\tau$  obtendremos  $\lambda$  de forma aproximada. Para obtener un valor exacto de  $\lambda$  habremos de tomar la primera ecuación de (8), una serie infinita, dentro de su rango de convergencia. Considerando esta serie geométricamente podemos definir una curva que llamaremos  $C$ ; por otra parte definiremos la curva  $C_2$  como la que produce el polinomio de interpolación (10). Representando las dos en una misma gráfica podemos visualizar la diferencia entre el valor real y el aproximado mediante interpolación de las funciones estudiadas:

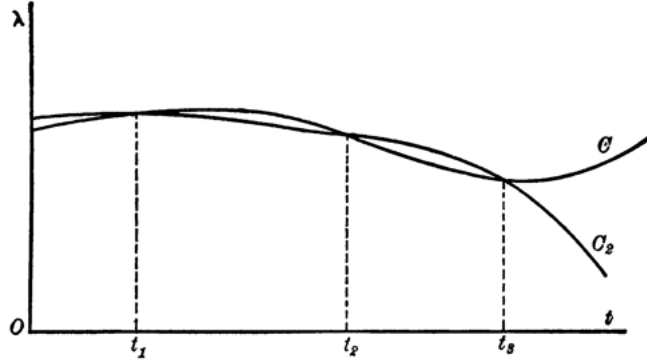


Fig. 31.

Dichas curvas se intersecan en  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ , y en general en ningún otro punto; tomando valores pequeños de  $\tau$  las dos curvas casi coincidirán.

Con el hecho anterior y todos los vistos anteriormente, podemos justificar que los valores de  $\tau$  han de ser pequeños en la práctica para que las cantidades aproximadas calculadas sean lo más cercanas a su valor original. Además, no tendría sentido una diferencia de tiempo muy grande entre las observaciones del objeto, pues pasaríamos mucho tiempo para determinar una única órbita.

Por último, ya que necesitamos la primera y segunda derivada de  $\lambda$ , nos

bastará con derivar del polinomio (10).

$$\lambda' = \frac{2\tau - (\tau_2 + \tau_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)}\lambda_1 + \frac{2\tau - (\tau_3 + \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)}\lambda_2 + \frac{2\tau - (\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)}\lambda_3$$

$$\lambda'' = \frac{2}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)}\lambda_1 + \frac{2}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)}\lambda_2 + \frac{2}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)}\lambda_3$$

Tal y como comentamos anteriormente, se procederá al cálculo de  $\mu$  y  $\nu$  de manera similar a la desarrollada anteriormente.

## Referencias

- [1] FOREST RAY MOULTON, AN INTRODUCTION TO CELESTIAL MECHANICS, *second edition*.
- [2] R. ORTEGA, A.J. UREÑA, INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA CELESTE.
- [3] SKY & TELESCOPE, RIGHT ASCENSION AND DECLINATION: CELESTIAL COORDINATES FOR BEGINNERS, <https://skyandtelescope.org/astronomy-resources/right-ascension-declination-celestial-coordinates/>
- [4] SOLUTION OF TRIANGLES, [https://en.wikipedia.org/wiki/Solution\\_of\\_triangles#A\\_side\\_and\\_two\\_adjacent\\_angles\\_given\\_\(ASA\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Solution_of_triangles#A_side_and_two_adjacent_angles_given_(ASA))