



TRABAJO FIN DE GRADO

DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA

# Determinación de Órbitas

---

El método de Laplace

**Autor**

Simón López Vico

**Directores**

Rafael Ortega Ríos

Sergio Alonso Burgos



Facultad de  
Ciencias



FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE  
TELECOMUNICACIÓN

---

Granada, septiembre de 2020

## Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Una breve historia de la determinación de órbitas. . . . .	2
1.2. Familiarizándonos con el problema. . . . .	3
1.3. Elementos Orbitales y Coordenadas Ecuatoriales . . . . .	4
1.3.1. Elementos Orbitales . . . . .	5
1.3.2. Situando la elipse que describe un cuerpo mediante sus coordenadas astronómicas. . . . .	10
1.3.3. Coordenadas Ecuatoriales . . . . .	11
1.4. Caminos e ideas para desarrollar el método de determinación	13
1.5. Preparación y Corrección de las Observaciones . . . . .	15
1.6. Argumentación General para la Determinación . . . . .	16
<b>2. Método Laplaciano de Determinación</b>	<b>19</b>
2.1. Determinación de las derivadas de $\lambda, \mu, \nu$ en algún momento $t$ .	19
2.2. Imponer la condición de que $C$ gira en torno a $S$ de acuerdo a la ley de gravitación. . . . .	21
2.3. Determinación de las distancias de $C$ a $E$ y $S$ . . . . .	22
2.4. Determinación de las componentes de velocidad de $C$ . . . . .	24
2.5. Determinación de los elementos orbitales a partir de la posi- ción y velocidad del cuerpo observado. . . . .	24
2.6. Determinación de las derivadas de $\lambda, \mu, \nu$ mediante interpo- lación. . . . .	25

<b>3. Número de soluciones admisibles</b>	<b>31</b>
3.1. Ecuaciones fundamentales en el método de Laplace. . . . .	31
3.2. Ecuaciones para la determinación de las distancias $r$ y $\rho$ . . . .	32
3.3. Aproximación numérica mediante el método de Newton. . . .	38
3.4. Unicidad de la solución. . . . .	40
3.5. Límites en $m$ y $M$ . . . . .	46

## Índice de figuras

1.1.	Representación de una elipse junto a sus focos y el vector $\vec{e}$ . . . . .	6
1.2.	Elementos geométricos de la elipse. . . . .	7
1.3.	Órbita elíptica de la Tierra con focos $F$ y el Sol, mostrando el sistema de referencia. En la órbita terrestre real, el foco $F$ se encuentra dentro del Sol. . . . .	8
1.4.	Plano de movimiento del cuerpo definido por sus elementos orbitales. . . . .	9
1.5.	La Tierra, en el centro, junto a la ascensión recta y declinación de cierto objeto. El círculo rojo define el camino aparente del Sol en el cielo, que define el plano de la eclíptica. . . . .	12
1.6.	Notación utilizada para nuestro problema . . . . .	17
3.1.	Triángulo formado por $S$ , $E$ y $C$ junto a las distancias y ángulos generados. . . . .	33
3.2.	Representación gráfica de $y_1$ e $y_2$ ( $\frac{D_1}{D} > 0$ ). . . . .	35
3.3.	Representación gráfica de $y_1$ e $y_2$ ( $\frac{D_1}{D} < 0$ ). . . . .	37
3.4.	Representación gráfica de $y_1 - y_2$ cuando $\frac{D_1}{D} > 0$ . . . . .	41
3.5.	Distintas posiciones del cuerpo $C$ , todas con las mismas distancias, $r$ y $\rho$ , desde éstas al Sol y la Tierra. . . . .	43
3.6.	Superficie formada por los límites donde cambia la unicidad de la solución. . . . .	44

3.7. Sección de la superficie de revolución junto a los casos en los que se da la unicidad y los que no. La región rosa se sigue extendiendo hasta el infinito. . . . .	45
3.8. Variación de $m$ en la figura 3.2 hasta obtener una solución doble. . . . .	47
3.9. Variación de $m$ en la figura 3.3 hasta obtener una solución doble. . . . .	47
3.10. Variación de $M$ en la figura 3.2 hasta obtener una solución doble. . . . .	48
3.11. Variación de $M$ en la figura 3.3 hasta obtener una solución doble. . . . .	48

## Introducción

En este trabajo nos vamos a centrar en el problema de determinación de órbitas, que consiste en determinar los elementos orbitales de un cuerpo observado a partir de  $N$  observaciones y así poder situar dicho cuerpo en la bóveda celeste en cualquier momento. Concretamente, se estudiará el método de determinación Laplaciano, el cuál fue desarrollado en 1780 y que sirvió como base para los métodos que fueron apareciendo posteriormente. Dado que vamos a trabajar con observaciones tomadas desde la Tierra, no conoceremos una parametrización del movimiento real del cuerpo cuya órbita determinar y por tanto nos serviremos del cálculo numérico con el fin de aproximar las cantidades que necesitemos para nuestro trabajo. Además, haremos un repaso de la mecánica celeste comentando los principales elementos que necesitaremos para nuestro estudio de determinación.

Una vez estudiado el método de Laplace, discutiremos el número de soluciones del problema que podemos obtener, buscando asegurar la unicidad y teniendo en cuenta que no todas las soluciones son válidas para nuestro problema físico. Por último, se desarrollará un programa que sea capaz de calcular la órbita de un cuerpo a partir de los datos introducidos de sus observaciones desde la Tierra, facilitando así la aplicación del método de Laplace.

El trabajo desarrollado en esta memoria está basado principalmente en el estudio de “*An Introduction to Celestial Mechanics*”, escrito por Forest Ray Moulton [1], así como en “*Introducción a la Mecánica Celeste*” de Rafael Ortega Ríos y Antonio Ureña [2] y en los conocimientos adquiridos durante

la carrera de cálculo numérico [11]. Todas las imágenes utilizadas han sido construidas utilizando la herramienta online que proporciona el software matemático Geogebra [15]. Para el desarrollo informático se ha utilizado el lenguaje de programación Python, estudiado durante la carrera.

Pero, antes de entrar de lleno en las matemáticas, veamos un poco de historia sobre la determinación de órbitas.

### 1.1. Una breve historia de la determinación de órbitas.

En 1687, Isaac Newton publica la primera edición de su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, más comúnmente llamado *Principia*, dando el primer método de determinación de órbitas mediante tres observaciones, concretamente de órbitas parabólicas. Dicho método dependía de una construcción gráfica y una serie de aproximaciones sucesivas. Años más tarde, en 1705, Edmund Halley utilizó dicho método para calcular la órbita del cometa que lleva su mismo nombre, junto a otros cuerpos.

El primer método que apareció el cuál no dependía de una construcción gráfica fue dado en 1744 por Leonhard Euler. Aún así, hasta este momento los métodos estaban basados en mayor parte en suposiciones no del todo ciertas, por lo que Johann Heinrich Lambert intenta eliminar estas suposiciones y extiende el trabajo de Euler. Además, estudia la determinación para órbitas hiperbólicas y elípticas.

Durante años se siguen estudiando y desarrollando estos métodos, hasta que en 1780 Pierre-Simon Laplace publica un método completamente nuevo, el cual estudiamos en este trabajo, que se convierte en la base para muchos trabajos posteriores.

En el año 1801, Giuseppe Piazzi observa por primera vez el planeta enano Ceres durante un mes, obteniendo unas 20 observaciones de éste, aunque pronto se pierde su pista. Este hecho llama la atención al matemático Carl Friedrich Gauss, que comienza a desarrollar un método para encontrar los elementos orbitales de un objeto a partir de simples observaciones hechas desde la Tierra. Rápidamente Gauss resuelve el problema y un año más tarde H. W. Olbers y F. Von Zach, aplicando el método desarrollado, recuperan

la órbita de Ceres ayudando a situar el cuerpo en la bóveda celeste de nuevo. Al igual que con el método de Laplace, este trabajo se convierte en un pilar para la determinación de órbitas [1].

Todos estos métodos son de hace siglos, por lo que la tecnología en ese entonces era muy limitada y las observaciones eran hechas con telescopios ópticos, tomando dos ángulos para situar el cuerpo observado pero sin poder conocer a priori la distancia del objeto. Actualmente, además de telescopios ópticos (mucho más avanzados que los que usaban Gauss o Laplace) se utilizan telescopios radar, y realizando las observaciones con estos dos tipos de telescopio en conjunto podemos conseguir la posición del objeto que observamos con mucha precisión, e incluso conocer la distancia y velocidad de éste gracias a los telescopios radar [9]. Esta mejora en las tecnologías de observación ha causado que se desarrollen nuevos problemas de determinación, en su mayor parte debido a la ingente cantidad de datos que se pueden obtener [4].

La determinación de órbitas es un campo de estudio que tiene continuidad y actualmente sigue en uso, aunque con métodos mucho más modernos que el que desarrollaremos en este trabajo [5]. Uno de sus usos es para cartografiar el cinturón de asteroides, trabajo que (aparte de ser bonito) será muy importante en un futuro cuando comience la navegación espacial.

## 1.2. Familiarizándonos con el problema.

Como hemos comentado anteriormente, el método de Laplace fue desarrollado en el siglo XVIII, por lo que la instrumentación para la observación era limitada y surge una dificultad: observando un cuerpo desde la Tierra, la cuál se encuentra en continuo movimiento, podremos obtener la dirección del objeto percibida por el observador, sin ninguna información sobre su distancia. Al no disponer de esta distancia no podremos determinar su posición exacta, por lo que las componentes de la velocidad no podrán ser calculadas. Así, habremos de tomar observaciones complementarias. Pero, ¿cuántas necesitaremos, como poco, para obtener todos los elementos de la órbita?

A lo largo de esta memoria veremos que una órbita se define por seis elementos, por lo que nos bastará con que las observaciones nos proporcionen al menos seis valores independientes entre ellos. A partir de una observación



completa obtenemos dos cantidades, referentes a las coordenadas angulares del cuerpo observado; por lo tanto, serán suficientes tres observaciones del objeto a determinar su órbita para comenzar nuestro proceso. Por otra parte, hay que tener en cuenta que, previo a nuestro estudio, podemos conocer algunos elementos de la órbita. Por ejemplo, si la órbita es parabólica<sup>1</sup>, conocemos su excentricidad ( $e = 1$ ), por lo que no serán necesarios seis elementos, sino cinco, y de esta manera una de las observaciones realizada puede ser dejada a medias, proporcionando solo una de las coordenadas angulares.

Las coordenadas angulares del cuerpo que observemos serán obtenidas en ascensión recta y declinación, un método de medida similar a la latitud y longitud utilizada sobre la superficie de la Tierra. Utilizaremos dichas coordenadas ya que la posición del cuerpo será determinada midiendo las distancias angulares y direcciones respecto a las estrellas vecinas, que se suponen fijas y están catalogadas en este tipo de coordenadas. Aún así, podremos cambiar a cualquier otro tipo de sistema de coordenadas cuando lo requiramos.

Comencemos viendo cuáles son los distintos elementos de una órbita, así como qué es la ascensión recta y declinación, que en conjunto llamaremos coordenadas ecuatoriales.

### 1.3. Elementos Orbitales y Coordenadas Ecuatoriales

En este apartado estudiaremos los diferentes parámetros que identifican una órbita (de manera única) así como las coordenadas ecuatoriales, elementos que forman un sistema que nos permite ubicar el objeto observado respecto al ecuador celeste y al equinoccio vernal (que definiremos más adelante) en un momento preciso.

---

<sup>1</sup>En este trabajo no se tratan las órbitas parabólicas de los objetos observados, y este ejemplo solo es ilustrativo de cómo podríamos utilizar menos de 3 observaciones completas a la hora de realizar la determinación de la órbita.

### 1.3.1. Elementos Orbitales

Comencemos por los elementos orbitales, los cuales necesitarán sostenerse en las dos primeras leyes de Kepler para ser desarrollados. Dichas leyes son:

1. *Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos de dicha elipse.*
2. *Cada objeto barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Pues bien, con esto comencemos a desarrollar nuestros elementos entendiendo qué es una elipse y como se comporta matemáticamente.

**Definición 1** *La elipse es una curva plana, simple y cerrada, que consta de dos focos (puntos fijos) de manera que para cualquier punto de la curva que tomemos, la suma de las distancias de los focos a dicho punto es la misma.*

Llamando a nuestra elipse  $E$  y a los focos de ésta  $F_1$  y  $F_2$ , podemos escribir la definición superior de la siguiente manera:

$$|x - F_1| + |x - F_2| = d, \forall x \in E \implies d > |F_1 - F_2|$$

Notar que en el caso de que  $d = |F_1 - F_2|$  estaremos ante un segmento que unirá los focos, mientras que si  $0 = |F_1 - F_2|$ , es decir, los dos focos son el mismo, nos encontraremos con que nuestra curva es una esfera.

Tomando uno de los focos como el origen de nuestro sistema de coordenadas, comencemos a desarrollar las ecuaciones anteriores. Sea  $x$  un punto de la elipse, tenemos:

$$|x| - |x - F| = d \implies |x - F| = d - |x| \implies |x - F|^2 = (d - |x|)^2$$

Como estamos trabajando con vectores, tenemos que  $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle$ , denotando con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar de dos vectores. Por tanto, continuando el resultado anterior:

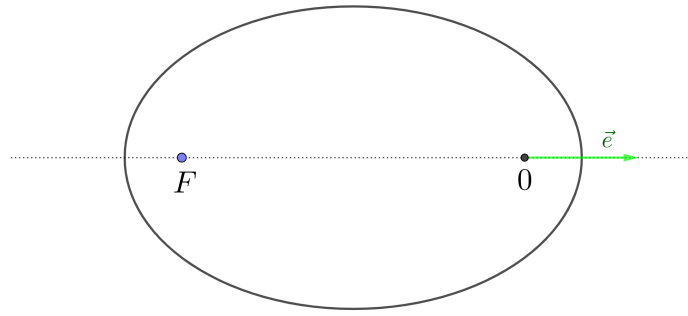
$$|F|^2 - 2\langle x, F \rangle = d^2 + 2d|x| \implies |x| - \frac{\langle x, F \rangle}{d} = \frac{d^2 - |F|^2}{2d}$$

Definimos así los valores  $k \in \mathbb{R}$ , que se corresponde con el factor de la derecha,  $k = \frac{d^2 - |F|^2}{d}$ , y  $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{e} = -\frac{1}{d}F$ . Por la desigualdad triangular,

$|F| < |x| + |x - F| = d$ , obtenemos que  $|\vec{e}| < 1$  y  $k > 0$ . Por tanto, llegamos a la ecuación:

$$|x| + \langle \vec{e}, x \rangle = k, \quad (1.1)$$

que será la ecuación que describe todas las elipses con un foco en el origen.



**Fig. 1.1:** Representación de una elipse junto a sus focos y el vector  $\vec{e}$ .

Llamaremos a  $|\vec{e}| = e$  la **excentricidad de la elipse**, tomando valores en  $[0, 1[$ . A mayor valor de excentricidad, mayor separación entre los focos, y viceversa. Si el valor de  $e$  es 0, la curva que trazará el objeto será circular, los dos focos son iguales. Fuera del intervalo donde hemos definido la excentricidad, si  $e = 1$  la órbita del objeto es una parábola, y si es mayor que 1, el objeto describirá una órbita hiperbólica.

Si trazamos una recta que pase por los dos focos de nuestra elipse, como podemos ver en la figura 1.1, dicha recta se intersectará con la elipse, obteniendo así dos puntos a los que llamaremos perihelio ( $P$ , más cercano a  $0$ ) y afelio ( $A$ , más cercano a  $F$ ). Si tomamos el centro de la elipse como el punto medio entre los dos focos y medimos la distancia desde el centro hasta el perihelio (o, equivalentemente, hasta el afelio), obtendremos el **semieje mayor** de la elipse, al que notaremos por  $a$ . Por otra parte, si trazamos una perpendicular a la recta que pasa por los focos que pase por el centro de la elipse, la distancia desde una de las intersecciones con la elipse hasta el centro nos dará el semieje menor, al que representaremos por  $b$ . Podemos entender más fácilmente estos valores en la siguiente figura.

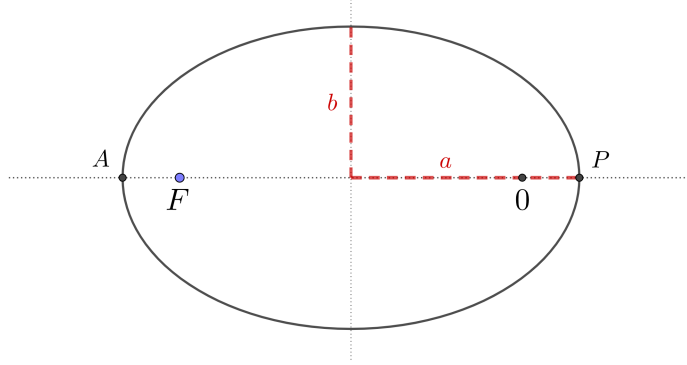


Fig. 1.2: Elementos geométricos de la elipse.

Notemos dos relaciones interesantes entre los elementos de la elipse comentados anteriormente y su excentricidad:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad e = \frac{\text{distancia entre los focos}}{\text{eje mayor}} = \frac{\overline{OF}}{2a}$$

El punto donde se intersecan el semieje mayor y menor será el centro de la elipse,  $C$ , y podremos obtener una expresión de la distancia de cada uno de los focos a éste a partir de la segunda ecuación superior, sabiendo así que  $\overline{OC} = \overline{FC} = ae$ .

Por último, notemos por  $\omega \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  al **argumento del periastro**<sup>2</sup>, que representará el ángulo formado entre el eje polar (equivalente al eje  $x$  en el sistema cartesiano) y la dirección del vector  $\vec{r}$ . Así, tenemos que:

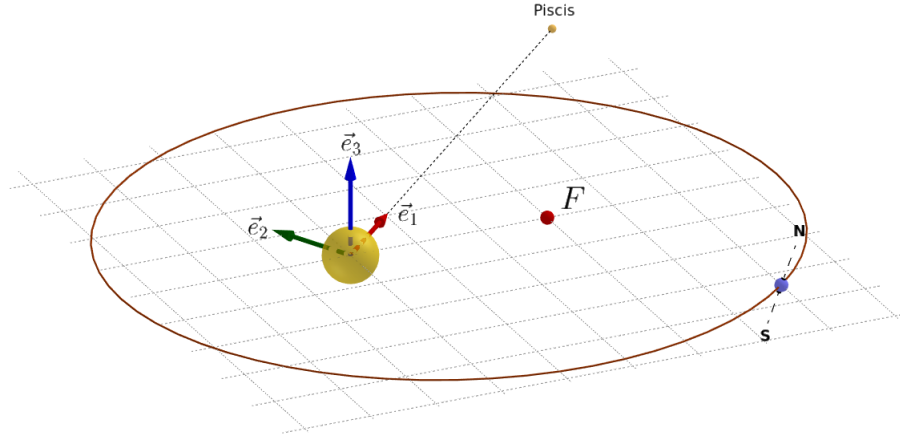
$$a = e(\cos \omega, \sin \omega)$$

Llamemos  $\mathcal{E}_0$  al espacio de elipses con foco en el origen, donde cada elipse queda determinada de manera única por su ecuación cartesiana. Los parámetros  $a$ ,  $e$  y  $\omega$  dan lugar a sistema de coordenadas en  $\mathcal{E}_0$ , que está definido sobre  $\mathbb{R}^2$ . Aquí surge un problema, pues las órbitas de los planetas son elipses en el espacio, cada una situada en un plano distinto, con un sentido de giro. Por tanto, será necesario definir un nuevo conjunto de parámetros para obtener un sistema de coordenadas sobre tres dimensiones.

<sup>2</sup>El periastro toma diferentes nombres en función de qué objeto ocupe el foco 0, por ejemplo, si en dicho foco se encuentra el Sol lo llamaremos perihelio, si se encuentra la Tierra el perigeo, etc.

Para empezar, definamos un sistema de referencia ortonormal en el espacio, que situará al Sol en el origen, y el plano  $z = 0$ , en el que se encontrará el recorrido de la órbita de la Tierra, llamado plano de la eclíptica.

Empezamos definiendo el vector unitario  $\vec{e}_3$ , el cuál fijaremos como el normal al plano de la eclíptica. Dado que hay dos opciones (el normal positivo y el normal negativo), lo fijaremos a partir de la orientación que da el eje terráqueo de Sur a Norte. A continuación definimos  $\vec{e}_1$ , que tomamos en la recta formada por la intersección del plano del ecuador celeste con el plano de la eclíptica y dirección el punto vernal, situado en la constelación de Piscis<sup>3</sup>. Para terminar, escogemos el vector  $\vec{e}_2$  como el vector ortonormal a  $\vec{e}_1$  que está también en el plano de la eclíptica. Como de nuevo hay dos opciones, tomaremos el que de sentido positivo al giro de la Tierra (giro antihorario).



**Fig. 1.3:** Órbita elíptica de la Tierra con focos  $F$  y el Sol, mostrando el sistema de referencia. En la órbita terrestre real, el foco  $F$  se encuentra dentro del Sol.

Así, tenemos un sistema ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  de manera que la orientación del movimiento de la Tierra se corresponde con la orientación  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  del plano de la eclíptica.

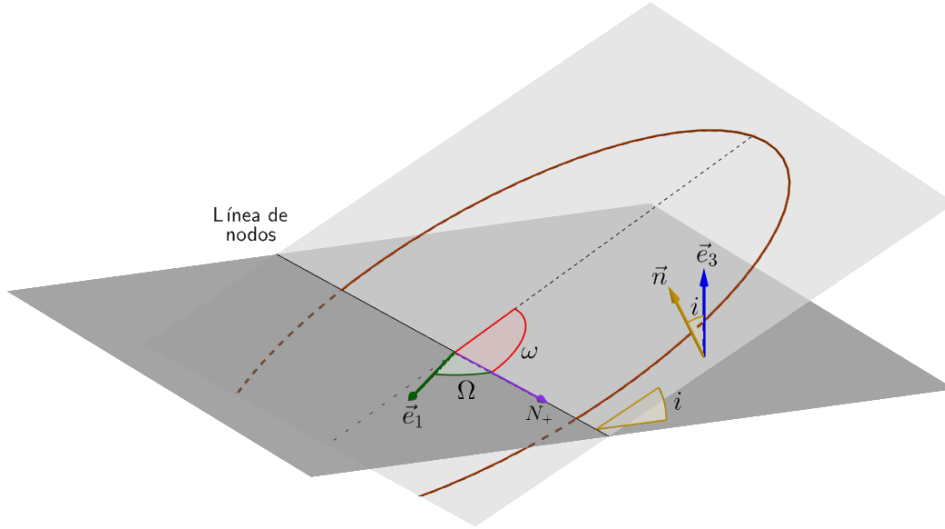
<sup>3</sup>Antiguamente al punto vernal se le llamaba punto Aries debido a que la constelación a la que apuntaba era la constelación de Aries, pero durante los años dicho punto ha ido desplazándose hasta encontrarse apuntando a Piscis [7].

Para determinar una órbita elíptica por completo necesitaremos cinco elementos;  $a$ ,  $e$  y  $\omega$  definidos anteriormente, y dos más que introduciremos a continuación que definirán el plano de movimiento: la inclinación respecto al plano de la eclíptica ( $i$ ) y el argumento del nodo ascendente ( $\Omega$ ).

Fijemos la línea de nodos como la recta que interseca el plano de movimiento del objeto observado y el plano de la eclíptica; sean  $\vec{n}$  el vector normal al plano de movimiento, que es unitario y su sentido es el del momento angular, y  $\mathcal{N}_+$  el lado positivo de la línea de nodos. Entonces:

$$\begin{cases} i = \angle(\vec{e}_3, \vec{n}), & i \in ]0, \pi[ \\ \Omega = \angle(\vec{e}_1, \mathcal{N}_+), & \Omega \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Una vez hayamos definido el plano de movimiento con estos dos valores, encontramos la elipse usando la línea de nodos como eje de rotación para el argumento del perihelio,  $\omega$ .



**Fig. 1.4:** Plano de movimiento del cuerpo definido por sus elementos orbitales.

Al conjunto de estas cinco coordenadas lo llamaremos **Coordenadas Astronómicas**, y están bien definidas y son unívocas en la región  $i \in ]0, \pi[$ ,  $e \in ]0, 1[$ , excluyendo así las órbitas circulares y las definidas sobre el plano

de la eclíptica.

A estas cinco coordenadas podremos añadirle una sexta que por medio de la ecuación de Kepler nos permita determinar la posición del planeta para un momento  $t$ . Ese sexto elemento puede ser el valor  $T$ , que se define como el momento de paso por el perihelio, la fecha concreta del momento en el que el objeto está en el perihelio de su órbita. También es usada la anomalía media,  $M = n(t - T)$ , con  $n = \frac{2\pi}{p}$  el movimiento medio y  $p$  el período de la órbita. Ésta representa la fracción del período de una órbita que transcurre desde que el cuerpo pasa por el perihelio hasta el momento  $t$ ; obteniendo este ángulo podemos situar el objeto en el punto exacto de la órbita en el que se encuentra.

Cuando añadamos un sexto elemento a las coordenadas astronómicas tendremos que señalar una diferencia: si disponemos de cinco elementos estaremos tratando la órbita como un lugar geométrico, mientras que añadiendo el paso por el perihelio (o la anomalía media) la estaremos tratando como una curva parametrizada donde se está describiendo el movimiento del cuerpo observado. Aún así, dado que para nuestro estudio lo que queremos es cartografiar las elipses, no necesitaremos el momento exacto del cuerpo en su órbita y utilizaremos solo cinco elementos. Veamos a continuación como, dadas estas coordenadas, podemos situar la elipse en el espacio.

### 1.3.2. Situando la elipse que describe un cuerpo mediante sus coordenadas astronómicas.

Supongamos que se nos dan las coordenadas astronómicas  $(a, e, i, \omega, \Omega)$  de un objeto y queremos situar su órbita en el espacio. Comenzaremos dibujando la elipse que forma su movimiento en el plano de la eclíptica, teniendo en cuenta que hemos de desplazar uno de sus focos para que éste se corresponda con el origen. Así, la ecuación para todos los puntos de la elipse en el plano se corresponderá con:

$$(a \cos \theta + c, b \sin \theta, 0), \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

donde  $a$  será el semieje mayor,  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  el semieje menor y  $c = ae$  la distancia de cada uno de los focos al centro de la elipse.

Por otra parte,  $i, \Omega, \omega$  serán los ángulos de Euler [12], un conjunto de coordenadas angulares que utilizaremos para especificar la orientación del

sistema de referencia del cuerpo con dichas coordenadas astronómicas en términos del sistema de referencia  $\{e_1, e_2, e_3\}$  del plano de la eclíptica. Así, llamaremos  $R$  al producto de las tres matrices de rotación siguientes:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y para situar la elipse en su plano de movimiento nos bastará multiplicar cada punto de ésta por la matriz  $R$ , obteniendo así que la órbita que sigue nuestro objeto en el espacio será:

$$\text{Órbita} = R \begin{pmatrix} a \cos \theta + c \\ b \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, si quisiéramos conocer el punto exacto de la elipse donde se encuentra el objeto en un momento  $t$  habríamos de utilizar la anomalía media,  $M$ .

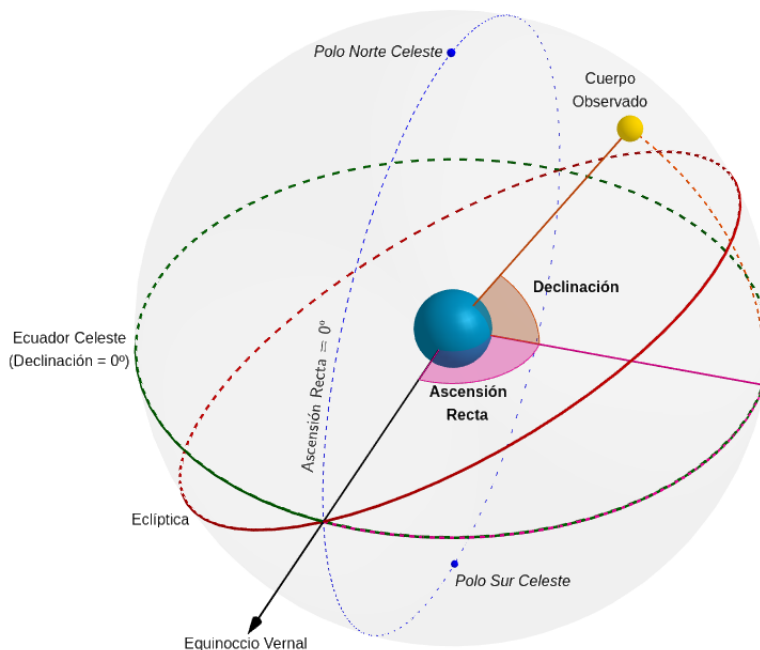
### 1.3.3. Coordenadas Ecuatoriales

Cada lugar en la Tierra puede ser localizado conociendo su latitud (ángulo en grados sobre el ecuador) y su longitud (ángulo en grados sobre el meridiano cero, el meridiano de Greenwich). De la misma manera, podemos definir ciertos valores para fijar la localización de todo objeto en la bóveda celeste, a los que llamaremos ascensión recta,  $\alpha$ , equivalente a la longitud, y declinación,  $\delta$ , equivalente a la latitud. A dichas coordenadas les acompañará un valor  $\rho$  que determinará la distancia desde el observador hasta el objeto observado, aunque, como es de esperar, éste no puede ser obtenido con una simple observación del cuerpo.

Al igual que utilizamos una localización física en la Tierra como referencia para la longitud, utilizaremos el equinoccio vernal como referencia para la ascensión recta, que se encontrará en el punto de la eclíptica donde el Sol pasa del hemisferio sur al hemisferio norte, es decir, en la intersección del plano que pasa por el ecuador de la Tierra y del plano de la eclíptica. En dicho punto, la ascensión recta y declinación son nulas. A partir de la recta que une el centro de la Tierra con este punto se tomará el ángulo que forma con nuestro objeto observado. Para la declinación tomaremos el ecuador celeste, un gran círculo en la bóveda celeste en el mismo plano que pasa por



el ecuador de la Tierra[8].



**Fig. 1.5:** La Tierra, en el centro, junto a la ascensión recta y declinación de cierto objeto. El círculo rojo define el camino aparente del Sol en el cielo, que define el plano de la eclíptica.

La declinación es medida en grados, como la latitud. Pero, a diferencia de la longitud, la ascensión recta es medida en horas, minutos y segundos en dirección este. Como en un día hay 24 horas, cada hora de ascensión recta corresponderá a una veinticuatroava parte de la rotación total de la Tierra, y por tanto, una hora será igual a  $\frac{360}{24} = 15^\circ$ .

Al conjunto de estas dos coordenadas junto a la distancia al objeto se les llama **Coordenadas Ecuatoriales**, y con ellas podremos definir la posición exacta de un objeto en cierto momento.

Dado que en ocasiones necesitaremos la posición del objeto en coordenadas cartesianas, veamos unas simples ecuaciones con las que pasaremos de

coordenadas ecuatoriales a cartesianas.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \delta \cos \alpha \\ y = \rho \cos \delta \sin \alpha \\ z = \rho \sin \delta \end{cases}$$

Nótese que antes de aplicar estas ecuaciones deberemos pasar  $\delta$  y  $\alpha$  a radianes para utilizar las funciones trigonométricas. Las coordenadas  $(x, y, z)$  tendrán la misma unidad que la distancia  $\rho$ .

## 1.4. Caminos e ideas para desarrollar el método de determinación

Una vez obtenidas las coordenadas ecuatoriales de un objeto mediante tres observaciones, las podemos escribir como un grupo de funciones de los elementos orbitales del cuerpo en el momento de las observaciones,  $t_1, t_2, t_3$ . Así, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \phi(a, e, \omega, i, \Omega, T; t_1) \\ \alpha_2 = \phi(a, e, \omega, i, \Omega, T; t_2) \\ \alpha_3 = \phi(a, e, \omega, i, \Omega, T; t_3) \\ \delta_1 = \psi(a, e, \omega, i, \Omega, T; t_1) \\ \delta_2 = \psi(a, e, \omega, i, \Omega, T; t_2) \\ \delta_3 = \psi(a, e, \omega, i, \Omega, T; t_3) \end{cases} \quad (1.2)$$

Pues bien, el problema de determinación de órbitas consistirá en resolver todas estas ecuaciones para los seis elementos desconocidos, pero, las funciones de ascensión recta y declinación involucran a los elementos muy enrevesadamente, además de que son altamente trascendentales, es decir, no se pueden expresar en términos de funciones elementales.

La órbita a determinar podrá ser una elipse, una hipérbola o una parábola, y en los tres casos las coordenadas respecto a la Tierra se obtendrán mediante una serie de transformaciones trigonométricas, de manera que no dispondremos de soluciones directas para estas ecuaciones mediante métodos ordinarios.

El objetivo final del método de determinación es obtener la órbita del cuerpo observado, es decir, las coordenadas astronómicas que definen su movimiento. Pero, antes de todo, habremos de tratar el problema de encontrar

cantidades intermedias con las que definir estas coordenadas, y como veremos más adelante (en 1.3.1), a partir de la posición y la velocidad de un objeto en un instante  $t$  se podrán obtener todos los elementos orbitales de éste.

Volvamos a las ecuaciones (1.2), y supongamos que queremos encontrar las coordenadas polares y sus derivadas, por ejemplo, en  $t = t_2$ . Podemos reescribir las ecuaciones como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = f(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha'_2, \delta'_2, \rho'_2; t_1, t_2) \\ \alpha_2 = \alpha_2 \\ \alpha_3 = f(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha'_2, \delta'_2, \rho'_2; t_2, t_3) \\ \delta_1 = g(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha'_2, \delta'_2, \rho'_2; t_1, t_2) \\ \delta_2 = \delta_2 \\ \delta_3 = g(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha'_2, \delta'_2, \rho'_2; t_2, t_3) \end{array} \right. \quad (1.3)$$

donde  $\rho$  es la distancia al planeta en  $t_2$  y:

$$\alpha'_2 = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \delta'_2 = \frac{d\delta}{dt}, \quad \rho'_2 = \frac{d\rho}{dt} \quad \text{en } t = t_2$$

Así, solo tendremos que resolver cuatro ecuaciones para cuatro incógnitas, pues  $\alpha_2$  y  $\delta_2$  son conocidas. Podremos modificar estas ecuaciones para hacer que sean más manejables a la hora de determinarlas, y, de hecho, este es el camino que toma **Laplace** a la hora de desarrollar su método, que fue aplicado por primera vez en 1780.

Por otra parte, podemos tomar tres coordenadas en dos momentos diferentes,  $t_1$  y  $t_3$ , para así obtener otro conjunto de elementos a determinar, y haciéndonos así con dos ecuaciones con solamente dos incógnitas, que podrán ser resueltas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = F(\alpha_1, \delta_1, \rho_1, \alpha_3, \delta_3, \rho_3; t_1, t_2, t_3) \\ \alpha_3 = \alpha_3 \\ \delta_1 = \delta_1 \\ \delta_2 = G(\alpha_1, \delta_1, \rho_1, \alpha_3, \delta_3, \rho_3; t_1, t_2, t_3) \\ \delta_3 = \delta_3 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Este es el camino que siguió Lagrange para resolver el problema en 1778, y que retomó **Gauss** en 1801.

A pesar de la cantidad de estudios que se han realizado tras la publicación de estos métodos, muy poco de lo que es realmente nuevo o teóricamente importante se ha añadido a las determinaciones que desarrollaron Laplace y Gauss, a menos que se usen más de tres observaciones.

## 1.5. Preparación y Corrección de las Observaciones

Independientemente del método que queramos seguir para determinar la órbita del objeto observado, habremos de efectuar algunas correcciones en los datos obtenidos antes de comenzar a realizar cálculos, pues hay distintos factores que pueden hacer que la ascensión recta y declinación observadas difieran de su valor real.

En el equinoccio de primavera, que se corresponde con el punto Aries como comentamos anteriormente, la ascensión recta y declinación es nula, pues el plano de la eclíptica y el del ecuador de la Tierra se intersectan en dicho momento. Debido a la protuberancia de la Tierra en el ecuador, la Luna y el Sol causarán una ligera oscilación periódica y un lento cambio secular en la posición del plano de su ecuador. Así, los equinoccios no se corresponderán con un punto fijo y habrá pequeñas oscilaciones periódicas y lentos cambios de la posición de la Tierra a lo largo de la eclíptica, llamadas nutación y precesión. En este caso, se acostumbra a utilizar el equinoccio medio (equinoccio prescindiendo de la nutación) y la posición del ecuador al comienzo del año en el que se estén haciendo las observaciones para evitar el error en la ascensión recta y declinación.

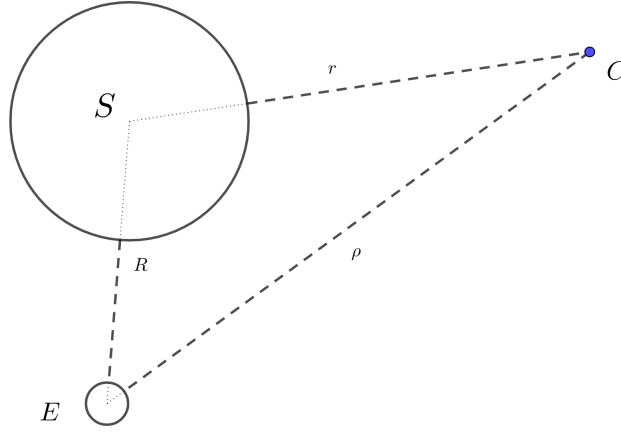
Por otra parte, la observación del objeto cuya órbita queremos determinar también puede ser afectada por la aberración de la luz, es decir, la diferencia entre la posición observada del objeto y su posición real, causada por la combinación de la velocidad del observador (por la rotación de la Tierra) y la velocidad de la luz. Tendremos que corregir dos aberraciones: la anual, debida a la rotación de la Tierra alrededor del Sol, y la aberración diurna, debida a la rotación de la Tierra sobre su eje. Aún así, debido a que la velocidad de rotación sobre su eje es muy pequeña en comparación con la velocidad de traslación, la aberración diurna será relativamente pequeña, y podrá ser obviada, especialmente en el caso de que las observaciones tomadas no sea demasiado precisas.

Aunque no veamos la manera de hacer las correcciones sobre nuestras observaciones en este trabajo, es un paso a la hora de determinación muy importante y que deberá de ser gestionado en el momento que se quiera hacer una determinación de la órbita de un objeto mediante observaciones por telescopio.

## 1.6. Argumentación General para la Determinación

Los dos métodos más importantes para la determinación (Laplace y Gauss) siguen una estrategia similar, que expondremos a continuación. Para empezar, supongamos que solo disponemos de tres observaciones de nuestro objeto en tres momentos diferentes,  $t_1, t_2, t_3$ , de manera que conocemos la ascensión recta y declinación en cada uno de estos instantes. A continuación, definamos algunos términos:

- Definimos  $C$ ,  $S$  y  $E$  como el cuerpo observado, el Sol (alrededor del cual gira  $C$ ) y la Tierra respectivamente.
- Sean  $(\xi, \eta, \zeta)$  las coordenadas (cartesianas) de  $C$  respecto a  $E$ ,  $(X, Y, Z)$  las coordenadas de  $S$  respecto a  $E$ , y  $(x, y, z)$  coordenadas de  $C$  respecto a  $S$ .
- $\rho$  es la distancia de  $E$  a  $C$ ,  $r$  la distancia de  $S$  a  $C$  y  $R$  la distancia de  $E$  a  $S$ .



**Fig. 1.6:** Notación utilizada para nuestro problema

Con todo esto, podemos escribir:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \delta \cos \alpha = \rho \lambda \\ \eta = \rho \cos \delta \sin \alpha = \rho \mu \\ \zeta = \rho \sin \delta = \rho \nu \end{cases} \quad (1.5)$$

donde  $(\lambda, \mu, \nu)$  es un vector unitario conocido que apunta de la Tierra al cuerpo observado, y el fin del estudio del problema será determinar  $\rho$ .



## Método Laplaciano de Determinación

En este capítulo se estudiará el método de Laplace para determinar la posición y velocidad de un objeto en un instante a utilizando tres observaciones, y a partir de ellas determinaremos los elementos orbitales del cuerpo, pudiendo obtener así la elipse que describe en el espacio.

Los pasos a seguir consistirán en aproximar las derivadas del vector unitario  $(\lambda, \mu, \nu)$ , así como las del vector  $\overrightarrow{SE}$ , determinar las distancias entre los tres cuerpos  $S$ ,  $E$ ,  $C$ , y con todo ello poder determinar la posición y velocidad del cuerpo respecto al Sol.

### 2.1. Determinación de las derivadas de $\lambda$ , $\mu$ , $\nu$ en algún momento $t$ .

Dado que no podemos calcular el valor exacto de las derivadas de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , utilizaremos fórmulas de derivación numérica con dos nodos para obtener un valor aproximado de éstas. Tomemos, por ejemplo,  $t = t_2$ , que por el momento nos bastará para demostrar que se puede realizar una buena aproximación. Supongamos que el valor de  $\lambda'$  no cambia muy rápido; entonces, el valor de la derivada en  $t_2$  en el intervalo  $[t_1, t_2]$  será muy cercano al valor de:

$$\lambda'_{12} = \frac{\lambda(t_2) - \lambda(t_1)}{t_2 - t_1},$$

y ya que los nodos elegidos cumplen  $t_2 > t_1$ , estaremos ante una diferencia regresiva. Análogamente podremos aproximar el valor de la derivada en  $t_2$



mediante una diferencia progresiva, a la que llamaremos  $\lambda'_{23}$ .

El error de estas aproximaciones, suponiendo que  $\lambda$  sea de clase 2 en el intervalo de aproximación, es del orden de  $(t_2 - t_1)$  y  $(t_3 - t_2)$  para  $\lambda'_{12}$  y  $\lambda'_{23}$  respectivamente. Por tanto, cuanto más pequeño sea el intervalo donde realizamos las operaciones, es de esperar que la aproximación obtenida sea mejor. Además, si la longitud del intervalo  $[t_1, t_2]$  es igual a la longitud de  $[t_2, t_3]$ , podremos calcular el valor aproximado de  $\lambda'$  en  $t_2$  mediante una diferencia centrada, obteniendo:

$$\lambda'_2 = \frac{\lambda'_{12} + \lambda'_{23}}{2}$$

Si los intervalos tienen una longitud diferente, podremos ajustar la disparidad entre ellos para realizar la aproximación o utilizar un método diferente para aproximar la derivada, como veremos en 2.6.

Análogamente podremos definir la derivada segunda de  $\lambda$  en  $t_2$ , en la que utilizaremos los valores de la primera derivada obtenidos anteriormente:

$$\lambda''_2 = \frac{\lambda'_{23} - \lambda'_{12}}{\frac{1}{2}(t_3 - t_1)}$$

Dicha aproximación será de orden  $(t_3 - t_1)^2$  siempre que  $\lambda \in \mathcal{C}^4[t_1, t_3]$ . Mediante este mismo método calcularemos la primera y segunda derivada de  $\mu$  y  $\nu$ ; además, podemos suponer que las tres funciones son de clase infinito en todo  $\mathbb{R}$ .

Como hemos comentado antes, las aproximaciones obtenidas de esta manera es razonable que sean más cercanas cuanto menor sea la longitud de los intervalos entre las observaciones, y generalmente, en la práctica, los intervalos que utilizaremos serán cortos.

Finalmente, necesitaremos tener los valores de la primera y segunda derivada de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , correspondientes al vector de  $S$  a  $E$ , aunque no tendremos por qué calcularlos de manera aproximada. Para obtener dichas cantidades exactas utilizaremos la efemérides proporcionada por el *Jet Propulsion Laboratory* en su página web, que nos dará el valor de estas variables para cualquier día del año, a cualquier hora y desde cualquier coordenada terrestre. Notar que aquí solo aparecerá la posición y velocidad, pero dado que  $E$  gira alrededor de  $S$  en concordancia con la ley de Gravitación Universal,

---

## 2.2. $C$ gira en torno a $S$ de acuerdo a la ley de gravitación.

---

podremos calcular la segunda derivada mediante:

$$\begin{cases} X'' = -\frac{k^2 X}{R^3} \\ Y'' = -\frac{k^2 Y}{R^3} \\ Z'' = -\frac{k^2 Z}{R^3} \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $k^2 = GM^1$ , parámetro gravitacional estándar,  $G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$  constante de gravitación y  $M = 1,989 \times 10^{30}$  kg masa del Sol. Tomamos solo la masa del Sol,  $M$ , ya que la masa de nuestro cuerpo es despreciable en comparación con ésta usando como modelo el problema de Kepler.

## 2.2. Imponer la condición de que $C$ gira en torno a $S$ de acuerdo a la ley de gravitación.

Asumiendo que el cuerpo observado  $C$  no está alterado por la interacción con otros cuerpos cercanos, podemos asegurar que cumplirá el problema de Kepler, dando lugar a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k^2 x}{r^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k^2 y}{r^3} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k^2 z}{r^3} \end{cases} \quad (2.2)$$

análogas a las que hemos visto para  $S$  y  $E$  en (2.1).

Además, utilizando las relaciones entre  $E$ ,  $C$  y  $S$ , así como los resultados vistos anteriormente, llegamos a:

$$\begin{cases} x = \rho\lambda - X \\ y = \rho\mu - Y \\ z = \rho\nu - Z \end{cases} \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Es más común ver este valor como  $\mu$ , pero para evitar confusiones con la segunda coordenada del vector unitario  $\overrightarrow{EC}$  utilizaremos el nombre de  $k^2$ .

y sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones (2.2), obtenemos:

$$\begin{cases} (\rho\lambda)'' - X'' = \frac{-k^2(\rho\lambda - X)}{r^3} \\ (\rho\mu)'' - Y'' = \frac{-k^2(\rho\mu - Y)}{r^3} \\ (\rho\nu)'' - Z'' = \frac{-k^2(\rho\nu - Z)}{r^3} \end{cases} \quad (2.4)$$

Desarrollando la segunda derivada de  $\rho\lambda$  llegamos a:

$$(\rho\lambda)'' = (\rho'\lambda + \rho\lambda')' = \rho''\lambda + 2\rho'\lambda' + \rho\lambda'',$$

valor que utilizaremos más adelante.

Utilizando el resultado (2.1), sustituyendo en la ecuación (2.4) y desarrollando llegamos a lo siguiente:

$$\begin{cases} \lambda\rho'' + 2\lambda'\rho' + [\lambda'' + \frac{k^2\lambda}{r^3}]\rho = -k^2X[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \\ \mu\rho'' + 2\mu'\rho' + [\mu'' + \frac{k^2\mu}{r^3}]\rho = -k^2Y[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \\ \nu\rho'' + 2\nu'\rho' + [\nu'' + \frac{k^2\nu}{r^3}]\rho = -k^2Z[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \end{cases} \quad (2.5)$$

a las que llamaremos ecuaciones fundamentales. Así, las incógnitas de las ecuaciones a resolver pasan a ser  $r$ ,  $\rho$ ,  $\rho'$  y  $\rho''$ .

### 2.3. Determinación de las distancias de $C$ a $E$ y $S$ .

Actualmente disponemos de un vector unitario  $(\lambda, \mu, \nu)$  que apunta desde la Tierra hacia el cuerpo observado, pero desconocemos la distancia que hay entre estos dos cuerpos. Para determinar tanto esta distancia como la que hay desde  $S$  hasta  $C$ , utilizaremos las ecuaciones fundamentales obtenidas al final del paso anterior, (2.5), y una condición geométrica que cumplirán los tres cuerpos. Para llevar a cabo esto, tomaremos el sistema (2.5) como un sistema lineal en  $\rho$ ,  $\rho'$  y  $\rho''$  y resolveremos utilizando la regla de Cramer. Comencemos definiendo el siguiente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda' & \lambda'' + \frac{k^2\lambda}{r^3} \\ \mu & 2\mu' & \mu'' + \frac{k^2\mu}{r^3} \\ \nu & 2\nu' & \nu'' + \frac{k^2\nu}{r^3} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix} = 2W(\lambda, \mu, \nu)$$

siendo  $W(\lambda, \mu, \nu)$  el Wronskiano de las coordenadas angulares. La segunda forma del determinante ha sido obtenida mediante la transformación  $C_3 - \frac{k^2\lambda}{r^3}C_1$  sobre la matriz, donde  $C_i$  representará la columna  $i$ -ésima. Una vez hayamos sustituido las derivadas exactas por su valor aproximado calculado anteriormente, conoceremos todas las cantidades de este determinante.

Por otra parte, definiremos el determinante  $D_1$ , que utilizaremos para calcular  $\rho$  mediante la regla de Cramer, reemplazando la tercera columna por los términos independientes del sistema (2.5) y omitiendo el factor  $[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}]$ , que añadiremos más adelante. De nuevo, conocemos todas las cantidades utilizadas. Así, obtenemos el siguiente determinante:

$$D_1 = -2k^2 \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & X \\ \mu & \mu' & Y \\ \nu & \nu' & Z \end{vmatrix}$$

Con todo esto, la distancia  $\rho$  será determinada por:

$$\rho = \frac{D_1}{D} [\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}],$$

El valor de  $r$  es desconocido, por lo que añadiremos la siguiente ecuación formando con la anterior un sistema de ecuaciones en  $r$  y  $\rho$ .

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi, \quad (2.6)$$

donde  $\psi$  es el ángulo formado en  $E$  trazando una línea imaginaria hasta el Sol y hasta el cuerpo observado, es decir, entre  $R$  y  $\rho$ ; esta ecuación expresa el hecho de que  $S$ ,  $E$  y  $C$  forman un triángulo como vimos en la figura 1.

Dado que disponemos de los valores  $\overrightarrow{SE} = (X, Y, Z)$  y  $\overrightarrow{EC} = (\lambda, \mu, \nu)$ , vector unitario, podremos obtener el coseno de  $\psi$  con:

$$\cos \psi = \frac{\langle \overrightarrow{SE}, \overrightarrow{EC} \rangle}{|\overrightarrow{SE}| |\overrightarrow{EC}|} = \frac{\langle (X, Y, Z), (\lambda, \mu, \nu) \rangle}{R}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones al que hemos llegado obtendremos los valores de  $\rho$  y  $r$ , habiendo terminado este paso. Más adelante discutiremos la unicidad de la solución en el sistema con  $r, \rho > 0$  (3). Al encontrar la solución de este sistema podremos calcular las coordenadas de  $C$  mediante las ecuaciones (2.3) de las relaciones entre  $S$ ,  $E$  y  $C$ .

## 2.4. Determinación de las componentes de velocidad de $C$ .

Se sigue de las ecuaciones (2.3) que:

$$\begin{cases} x' = \rho' \lambda + \rho \lambda' - X' \\ y' = \rho' \mu + \rho \mu' - Y' \\ z' = \rho' \nu + \rho \nu' - Z' \end{cases}$$

En estas ecuaciones solo tenemos una incógnita,  $\rho'$ , que podremos determinar resolviendo por Cramer en (2.5) a partir de:

$$\rho' = +\frac{D_2}{D} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \quad \text{con } D_2 = -k^2 \begin{vmatrix} \lambda & X & \lambda'' \\ \mu & Y & \mu'' \\ \nu & Z & \nu'' \end{vmatrix}$$

Notar que en  $D_2$  también hemos realizado la operación  $C_3 - \frac{k^2 \lambda}{r^3} C_1$ , como en  $D$ , para obtener un determinante más simple.

Dado que ya conocemos el valor de  $r$  podremos calcular directamente  $\rho'$ , y de esta manera  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  se vuelven conocidas.

## 2.5. Determinación de los elementos orbitales a partir de la posición y velocidad del cuerpo observado.

Una vez conocida tanto la posición como la velocidad del cuerpo en un instante determinado, nos dispondremos a calcular los elementos orbitales mediante las distintas fórmulas estudiadas en el manual de Mecánica Celeste[2]. Denotemos por  $r(t) = (x, y, z)(t)$  la posición del objeto y  $v(t)$  su derivada, la velocidad.

Comencemos determinando la energía que tiene nuestro cuerpo en un instante  $t$ . Para ello utilizaremos:

$$h = \frac{|v(t)|^2}{2} - \frac{\mu}{|r(t)|}$$

donde  $\mu = GM$  una constante positiva. Con el valor de la energía podemos pasar a calcular la primera de nuestros elementos astronómicos, la longitud

del semieje mayor,  $a$ , utilizando la siguiente ecuación:

$$a = -\frac{\mu}{2h}$$

Pasemos ahora a calcular el momento angular de nuestro objeto. Dado que la masa del objeto observado es despreciable frente a la masa del Sol, podremos obviar su valor, obteniendo así el vector del momento angular mediante:

$$c = r(t) \wedge v(t)$$

Calculado el momento angular, podremos obtener el vector de excentricidad para la órbita del cuerpo observado:

$$\vec{e} = -\frac{r(t)}{|r(t)|} - \frac{1}{\mu}(c \wedge v(t))$$

y la excentricidad de la órbita será  $e = |\vec{e}|$ .

Una vez obtenidos estos valores, podemos utilizaremos la tercera ley de Kepler para obtener el período mínimo (suponiendo que nuestra órbita se corresponda con la de una elipse). Si el momento angular del objeto observado  $c \neq 0$  y su energía  $h < 0$ , entonces la órbita es periódica y su período mínimo valdrá:

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

Sabemos que el vector del momento angular, del que disponemos, es el vector normal al plano orientado de la órbita, pudiendo calcular así la inclinación del plano de movimiento. Además, calculando la intersección de éste con el plano de la eclíptica obtenemos la línea de nodos y con ella el nodo ascendente  $\mathcal{N}_+$ , con la que podremos determinar  $\Omega$ .

$$\begin{cases} i = \angle(\vec{e}_3, \vec{n}), & i \in ]0, \pi[ \\ \Omega = \angle(\vec{e}_1, \mathcal{N}_+), & \Omega \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Finalmente usaremos el vector de excentricidad  $\vec{e}$  para calcular  $\omega$ , utilizando el nodo ascendente como eje de rotación.

## 2.6. Determinación de las derivadas de $\lambda$ , $\mu$ , $\nu$ mediante interpolación.

Tal y como hemos visto en la sección 2.1, hemos de calcular la primera y segunda derivada de las coordenadas angulares  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . El problema es

que no siempre los intervalos de tiempo en los que hacemos la medida del objeto en el cielo son equiespaciados, y por tanto no podremos obtener una aproximación mediante diferencias centradas. Por tanto, busquemos un nuevo método para obtener las derivadas aproximadas de nuestras coordenadas angulares.

Comencemos recordando las ecuaciones (2.2):

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2z}{r^3} \end{cases} \quad (2.7)$$

La solución para estas ecuaciones diferenciales de segundo orden puede ser expandida como serie de Taylor en  $t$ , y esta convergerá siempre que el valor de  $t$  no sea especialmente grande.

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_0t + \frac{1}{2}(\frac{d^2x}{dt^2})_0t^2 + \dots + \frac{1}{n!}(\frac{d^nx}{dt^n})_0t^n + \dots \\ y = y_0 + y'_0t + \frac{1}{2}(\frac{d^2y}{dt^2})_0t^2 + \dots + \frac{1}{n!}(\frac{d^ny}{dt^n})_0t^n + \dots \\ z = z_0 + z'_0t + \frac{1}{2}(\frac{d^2z}{dt^2})_0t^2 + \dots + \frac{1}{n!}(\frac{d^nz}{dt^n})_0t^n + \dots \end{cases} \quad (2.8)$$

En las ecuaciones superiores el subíndice 0 indicará que tomamos el valor  $t = 0$  en la función. Podemos sustituir la segunda derivada que aparece en estas series por su valor en (2.7), la tercera derivada por la derivada de ésta y a partir de la cuarta derivada repetimos este proceso, teniendo así que las series estarán solo en función de la  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y la primera derivada de cada una de estas, todas ellas tomadas en  $t = 0$ .

Los tres valores  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , a los que en conjunto llamaremos  $r(t)$ , forman una solución del problema de Kepler. Además, sabemos que la fórmula de las soluciones para el problema de Kepler es:

$$r(t) = a(\cos u(t) - e, \sqrt{1 - e^2} \sin u(t))$$

donde  $u(t)$  es la anomalía. Dado que la ecuación está formada por funciones trigonométricas, que son analíticas, y la anomalía es una función analítica

por el teorema de la función implícita, llegamos a que  $r(t)$  será también una función analítica.

Hemos de tener en cuenta que el valor de estas series no siempre tiene valor práctico, pues el intervalo de tiempo para la convergencia puede ser demasiado grande; notar que los límites serán más pequeños cuanto más pequeña sea la distancia del perihelio y más grande la excentricidad de nuestra órbita.

En el caso de la Tierra, expandiendo sus coordenadas en series de potencias, obtendremos una convergencia durante largos intervalos de tiempo debido a la pequeña excentricidad de la órbita terrestre ( $e \approx 0,0167$ ). Así, se sigue de la ecuación (2.3), que relaciona las coordenadas de la Tierra, el Sol y el cuerpo observado que las ecuaciones de  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  también son funciones analíticas y por ello podrán ser expandidas como series de Taylor, con el mismo rango de utilidad que el de las series para  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

Veamos las series para  $\lambda$ , pues las de  $\mu$  y  $\nu$  serán simétricamente similares. Tomando los valores  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$ , las series para  $\lambda$  serán:

$$\begin{cases} \lambda(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots \\ \lambda(t_1) = c_0 + c_1 t_1 + c_2 t_1^2 + \dots \\ \lambda(t_2) = c_0 + c_1 t_2 + c_2 t_2^2 + \dots \\ \lambda(t_3) = c_0 + c_1 t_3 + c_2 t_3^2 + \dots \end{cases} \quad (2.9)$$

donde los valores  $c_0, c_1, c_2, \dots$  son constantes. Si estas series terminan tras los términos elevados al cuadrado, podremos determinar  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  resolviendo como un sistema de ecuaciones, ya que conocemos las cantidades  $\lambda(t_1)$ ,  $\lambda(t_2)$ ,  $\lambda(t_3)$ . Así, tenemos que cuantas más observaciones tengamos disponibles, más coeficientes podrán ser determinados.

Tomamos ahora el sistema de ecuaciones (2.9); si queremos que sea compatible, su determinante ha de ser 0, pues tenemos tres incógnitas y cuatro ecuaciones, es decir, nos “sobra” una ecuación (sistema compatible indeterminado). Así, podemos obtener la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} \lambda(t) & 1 & t & t^2 \\ \lambda(t_1) & 1 & t_1 & t_1^2 \\ \lambda(t_2) & 1 & t_2 & t_2^2 \\ \lambda(t_3) & 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$



Si resolvemos este determinante desarrollando por la primera columna y despejamos  $\lambda$  obtenemos:

$$\lambda(t)_L = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\lambda(t_1) + \frac{(t-t_3)(t-t_1)}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)}\lambda(t_2) + \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\lambda(t_3) \quad (2.11)$$

Utilizamos el subíndice  $L$  para denotar que esta función es aproximada y no proporcionará el valor exacto de  $\lambda$  (salvo en ciertos casos).

Dicho polinomio corresponderá al polinomio de interpolación de Lagrange con el que obtendremos un valor aproximado de  $\lambda$ . Hemos de tener en cuenta que los valores en los nodos  $t_1, t_2, t_3$  han de ser diferentes entre sí para que no se anulen los denominadores.

Con esto, somos capaces de obtener  $\lambda$  de manera exacta en  $t_1, t_2$  y  $t_3$ ; para otros valores diferentes de  $t$  obtendremos  $\lambda$  de forma aproximada. Para obtener un valor exacto de  $\lambda$  habremos de tomar la primera ecuación de (2.9), una serie infinita, dentro de su rango de convergencia.

Como comentamos anteriormente, el polinomio de interpolación de Lagrange obtenido nos proporcionará valores aproximados de  $\lambda$ , por lo que será conveniente estudiar el error de éste, que tomando la primera ecuación de (2.9) será:

$$|\lambda(t) - \lambda_L(t)|$$

Dado que en anteriores secciones hemos supuesto que  $\lambda, \mu, \nu$  son de clase infinito, podemos aplicar el teorema de error de interpolación, que nos dará una fórmula para obtener el error para todo  $t$ . Utilizando los tres nodos  $t_1, t_2, t_3$  obtenemos:

$$|\lambda(t) - \lambda_L(t)| = \frac{\lambda^{iv}(\xi)}{4!} |t-t_1||t-t_2||t-t_3| \quad (2.12)$$

donde  $\min(t, t_1, t_2, t_3) < \xi < \max(t, t_1, t_2, t_3)$ . El cálculo de  $\xi$  es complicado, pero podremos tomar una cota superior para  $\lambda^{iv}$ . Sea  $K_4$  dicha cota, con  $|\lambda^{iv}(x)| \leq K_4$ , entonces el error de la interpolación será:

$$|\lambda(t) - \lambda_L(t)| \leq \frac{K_4}{4!} |t-t_1||t-t_2||t-t_3| \quad (2.13)$$

---

## 2.6. Derivadas de $\lambda$ , $\mu$ , $\nu$ mediante interpolación.

---

Utilizando un mayor número de observaciones dispondremos de más nodos; así, si hemos realizado  $N$  observaciones, la ecuación para el error será:

$$|\lambda(t) - \lambda_L(t)| \leq \frac{K_N}{(N+1)!} |t - t_1| \dots |t - t_N| \quad (2.14)$$

Con el estudio del error y todo lo visto anteriormente, podemos justificar que la diferencia entre los valores de  $t$  ha de ser pequeña en la práctica para que las cantidades aproximadas calculadas sean lo más cercanas a su valor original. Además, no tendría sentido una diferencia de tiempo muy grande entre las observaciones del objeto, pues pasaríamos mucho tiempo para determinar una única órbita.

Por último, ya que necesitamos la primera y segunda derivada de  $\lambda$ , nos bastará con derivar del polinomio (2.11).

$$\begin{aligned} \lambda'(t)_L &= \frac{2t - (t_2 + t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} \lambda(t_1) + \frac{2t - (t_3 + t_1)}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} \lambda(t_2) + \frac{2t - (t_1 + t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \lambda(t_3) \\ \lambda''(t)_L &= \frac{2}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} \lambda(t_1) + \frac{2}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} \lambda(t_2) + \frac{2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \lambda(t_3) \end{aligned}$$

Tal y como comentamos anteriormente, se procederá al cálculo de  $\mu$  y  $\nu$  y al estudio de su error de aproximación de manera similar a la desarrollada en este apartado.



## Número de soluciones admisibles

Tal y como comentamos en 2.3, al obtener el valor de  $\rho$  y  $r$  puede que obtengamos más de una solución posible, por lo que es conveniente estudiar cuál de estas soluciones es válida para nuestro problema y cuál no, y dentro de las válidas determinar cuál es la solución que nos lleva a la órbita real del cuerpo observado.

También trataremos de acotar el intervalo de valores donde la solución del problema de determinación es única.

### 3.1. Ecuaciones fundamentales en el método de Laplace.

Para terminar la explicación del método de determinación con tres observaciones, recapitulemos viendo las principales ecuaciones utilizadas para obtener la órbita del objeto observado. Las ecuaciones fundamentales serán las de (2.5), que involucrarán las coordenadas angulares  $\lambda, \mu, \nu$  y sus derivadas, las cuáles conocemos su valor aproximado por 2.1 o 2.6. Por otra parte, el valor de  $\rho$  y sus derivadas se obtendrá resolviendo las ecuaciones fundamentales utilizando la regla de Cramer, como vimos en anteriores apartados, aunque discutiremos más adelante otro método para su cálculo.

Hasta ahora disponemos de  $\rho$  y  $\rho'$ ; nos faltaría por calcular  $\rho''$ . Comen-

ceamos definiendo el determinante  $D_3$ :

$$D_3 = -2k^2 \begin{vmatrix} X & \lambda' & \lambda'' \\ Y & \mu' & \mu'' \\ Z & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}$$

Tras ello, calculemos el determinante  $D$  cambiando la primera columna por el término independiente de (2.5), sin tomar  $[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}]$ .

$$\begin{vmatrix} -k^2 X & 2\lambda' & \lambda'' + \frac{k^2 \lambda}{r^3} \\ -k^2 Y & 2\mu' & \mu'' + \frac{k^2 \mu}{r^3} \\ -k^2 Z & 2\nu' & \nu'' + \frac{k^2 \nu}{r^3} \end{vmatrix} = -2k^2 \begin{vmatrix} X & \lambda' & \lambda'' \\ Y & \mu' & \mu'' \\ Z & \nu' & \nu'' \end{vmatrix} - \frac{2k^4}{r^3} \begin{vmatrix} X & \lambda' & \lambda \\ Y & \mu' & \mu \\ Z & \nu' & \nu \end{vmatrix} = D_3 - \frac{k^2 D_1}{r^3}$$

El signo negativo delante del determinante  $D_1$  aparece por intercambiar la primera y la tercera columna del determinante inmediatamente anterior.

Así, tenemos que los valores de  $\rho$  y sus derivadas pueden ser calculados mediante:

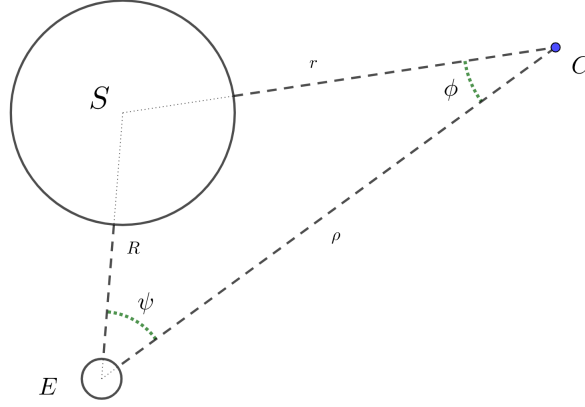
$$\begin{cases} \rho = \frac{D_1}{D} [\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \\ \rho' = \frac{D_2}{D} [\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \\ \rho'' = \frac{1}{D} [D_3 - \frac{k^2 D_1}{r^3}] [\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}] \end{cases} \quad (3.1)$$

con  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$  definidos anteriormente.

Notar que los determinantes  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  están sujetos a pequeños errores dado que los valores implicados en ellos no pueden ser calculados de forma exacta, procediendo a obtenerlos de manera aproximada. Además, trabajamos bajo el supuesto de que las observaciones al objeto son realizadas desde el centro de la Tierra, y no desde un punto concreto de ella. Tras haber calculado de forma aproximada las distancias podremos corregir dichas observaciones por los efectos de la posición del observador sobre un punto en la superficie de la Tierra.

### 3.2. Ecuaciones para la determinación de las distancias $r$ y $\rho$ .

Recordemos la imagen 1.6 en la que mostrábamos el triángulo formado por los tres cuerpos  $S$ ,  $E$  y  $C$  junto a sus distancias. Definamos  $\psi$  y  $\phi$ , ángulos formados en  $E$  y  $C$  respectivamente.



**Fig. 3.1:** Triángulo formado por  $S$ ,  $E$  y  $C$  junto a las distancias y ángulos generados.

Nos encontramos ahora ante un problema de resolución de triángulos. A partir de la figura superior y del teorema de los senos ( $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ ), podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \rho = R \frac{\sin(\psi + \phi)}{\sin \phi} \\ r = R \frac{\sin \psi}{\sin \phi} \end{cases} \quad (3.2)$$

Además, recordemos que podemos obtener el ángulo  $\psi$  mediante:

$$R \cos \psi = X\lambda + Y\mu + Z\nu$$

obteniendo así que el valor de  $\psi$  estará en el primer o cuarto cuadrante, pues  $R > 0$  y el producto escalar de  $(X, Y, Z)$  por  $(\lambda, \mu, \nu)$  es positivo. Pero, como nos encontramos en un triángulo, se ha de cumplir que  $\psi < \pi$ , y suponemos que el ángulo  $\psi$  es agudo.

Si sustituimos las ecuaciones (3.2) en la ecuación de  $\rho$  en (3.1), esta pasará a ser:

$$R \sin \psi \cos \phi + \left( R \cos \psi - \frac{D_1}{DR^3} \right) \sin \phi = \frac{-D_1}{DR^3 \sin^3 \psi} \sin^4 \phi$$

de manera que, ya que podemos obtener el valor de  $\psi$  utilizando la primera ecuación de (3.2), nos queda una ecuación con una única incógnita,  $\phi$ .

Ahora, consideramos el vector en el plano  $(R \cos \psi - \frac{D_1}{DR^3}, R \sin \psi)$  y suponemos que es distinto del origen. Realmente esto ocurre siempre, ya que, como el ángulo  $\psi$  es agudo y distinto de 0,  $R \sin \psi$  será distinto de 0. Como consecuencia, al no ser el origen, podremos expresar dicho punto en coordenadas polares de la forma  $N(\cos m, \sin m)$ , con  $N \neq 0$  y pudiendo escoger el valor de  $m$  en  $(0, 2\pi)$ .

Con el fin de simplificar esta ecuación, definimos las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} N \sin m = R \sin \psi \\ N \cos m = R \cos \psi - \frac{D_1}{DR^3} \\ M = \frac{-NDR^3 \sin^3 \psi}{D_1} \end{cases} \quad (3.3)$$

Las dos primeras ecuaciones vienen dadas de la forma polar comentada anteriormente. Respecto a la tercera ecuación, la utilizaremos para darle un signo al valor  $N$ , de manera que podamos reducir el intervalo donde escoger el valor de  $m$  a  $(0, \pi)$ . El signo de  $N$  será elegido de tal manera que  $M$  sea positivo, y como  $\sin \psi > 0$ ,  $R > 0$ , el valor  $N$  será positivo cuando  $\frac{D_1}{D}$  sea negativo y viceversa.

Hay ciertos casos excepcionales en las ecuaciones superiores. Si el término de la izquierda de la primera ecuación se anulase, llegaríamos a que  $R \sin \psi = 0$ ; como  $R > 0$  por definición,  $\sin \psi = 0$  y  $\psi = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pero esta situación no es válida, pues entonces el sistema formado por el Sol, la Tierra y el objeto observado no formaría un triángulo tal y como queremos.

Fijado el signo de  $M$ , las dos primeras ecuaciones de (3.3) determinarán unívocamente los valores  $N$  y  $m$ , y la expresión que queríamos simplificar pasa a ser simplemente:

$$\begin{aligned} N \sin m \cos \phi + N \cos m \sin \phi &= N \sin(\phi + m) = \frac{N}{M} \sin^4 \phi \implies \\ \implies \sin^4 \phi &= M \sin(\phi + m) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aunque la ecuación (3.4) podría estar definida para  $\phi \in \mathbb{R}$ , solo nos interesará en el intervalo  $(0, \pi)$ ; es más, dicho intervalo se puede seguir reduciendo. Ya que  $\phi$  es uno de los tres ángulos, y teniendo en cuenta cómo hemos definido  $m$ , podremos asegurar que  $\phi = \pi - \psi$  es una solución válida

### 3.2. Ecuaciones para la determinación de las distancias $r$ y $\rho$ .

(se puede comprobar sustituyendo en (3.4)), aunque no es de valor práctico ya que ésta corresponde a la posición del observador en la Tierra. Por tanto, dado que la solución ha de pertenecer al problema físico y que nos encontramos en un triángulo, podemos asegurar que:

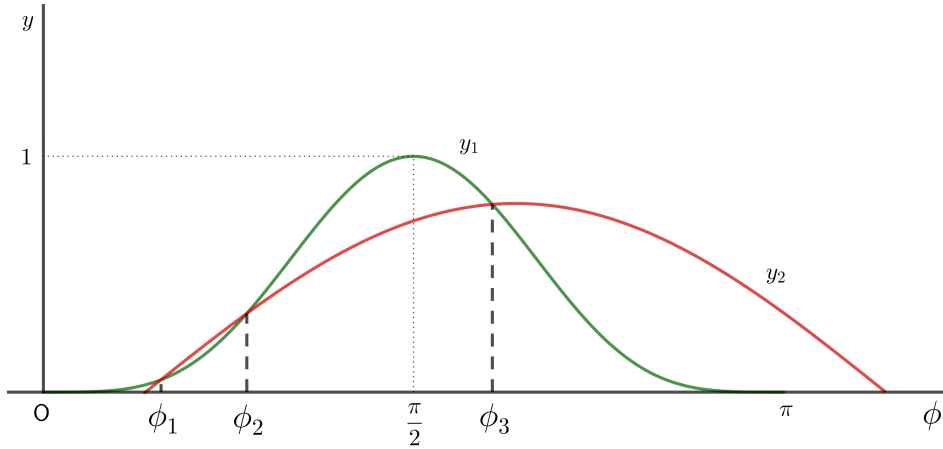
$$\phi < \pi - \psi$$

y por tanto buscaremos una solución para la ecuación (3.4), no en todos los puntos que está definida, sino con  $\phi$  estrictamente entre 0 y  $\pi - \psi$ .

Así, las soluciones de (3.4) han de ser las intersecciones entre las curvas que definen las ecuaciones de la izquierda y de la derecha, es decir, la intersección entre:

$$\begin{cases} y_1 = \sin^4 \phi \\ y_2 = M \sin(\phi + m) \end{cases}$$

Si el valor de  $m$  es negativo cercano a cero y  $M$  es ligeramente menor que 1, podemos ver la relación entre ambas curvas  $y_1$ ,  $y_2$  en la figura inferior:



**Fig. 3.2:** Representación gráfica de  $y_1$  e  $y_2$  ( $\frac{D_1}{D} > 0$ ).

A partir de dicha imagen podemos observar que obtenemos tres intersecciones de las curvas, correspondientes cada una a una solución de (3.4) y con  $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$ , sabiendo que una de ellas ha de ser  $\pi - \psi$ .

Discutamos ahora según el signo de  $\frac{D_1}{D}$  los valores de  $r$ ,  $R$  y  $m$ . Comencemos considerando que  $\frac{D_1}{D}$  es positivo. Es claro que  $\rho$  y  $r$  han de ser positivos, por lo que deducimos de la primera ecuación de (3.1) que  $r$  ha de



ser mayor que  $R$ . Por tanto, como  $\psi$  ha de ser menor que  $180^\circ$  (pues estamos en un triángulo), utilizando las ecuaciones (3.3) tenemos:

$$M = \frac{-NDR^3 \sin^3 \psi}{D_1} > 0 \implies N < 0$$

$$R \sin \psi > 0 \implies N \sin m > 0 \implies \sin m < 0 \implies m \in (\pi, 2\pi)$$

Por tanto,  $N$  es negativo y  $m$  estará en el tercer o cuarto cuadrante.

Si  $m$  está en el cuarto cuadrante, la rama ascendente de la curva  $y_2$  atraviesa el eje de abscisas  $\phi$  en el primer cuadrante y, si  $M < 1$ , las relaciones entre las dos curvas serán las que podemos ver en la figura 3.2. Si el valor de  $m$  es cercano a  $180^\circ$  tendremos tres soluciones disponibles  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , una de las cuales corresponderá al observador ( $\phi_i = \pi - \psi$ ). Discutamos según cuál de las tres soluciones toma este valor:

- Si  $\phi_1 = \pi - \psi$ , entonces el problema no tendría solución dado que cualquiera de las otras dos soluciones sería mayor que  $\pi - \psi$ .
- Si  $\phi_2 = \pi - \psi$ , se sigue del hecho de que  $\phi < \pi - \psi$  que la solución ha de ser  $\phi_1$  y es única.
- Si  $\phi_3 = \pi - \psi$ , las otras dos soluciones cumplirán todas las condiciones del problema, no pudiendo determinar cuál de las dos pertenece a la órbita real del cuerpo observado (siempre que no tengamos información adicional). Si tuviéramos una cuarta medición, repetiríamos el proceso anterior eliminando una de las mediciones tomadas y añadiendo ésta nueva; la solución que se repita (aproximadamente) será la perteneciente al problema real.

Pero, si solo dispusiésemos de tres mediciones, podría darse el caso de que los valores de  $r$  y  $\rho$  proporcionados por la solución  $\phi_1$  fueran demasiado grandes como para que el objeto fuera visible para el observador, llegando así a la conclusión de que  $\phi_2$ , el cuál proporcionaría un  $r$  más pequeño, pertenecería al problema físico.

A medida que la rama ascendente de la curva  $y_2$  se mueve hacia la derecha, es decir, fijando  $M$  hacemos decrecer  $m$ , las soluciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  tienden a coincidir, y en estas condiciones el problema no tendría solución. Por tanto:

### 3.2. Ecuaciones para la determinación de las distancias $r$ y $\rho$ .

Si  $\frac{D_1}{D} > 0$ , la distancia  $r$  es mayor que  $R$ , el ángulo  $m$  estará en el cuarto cuadrante y disponemos de una o dos soluciones del problema físico en función de que  $\phi_2$  o  $\phi_3$  sea igual a  $\pi - \psi$ .

Veamos ahora el caso contrario.

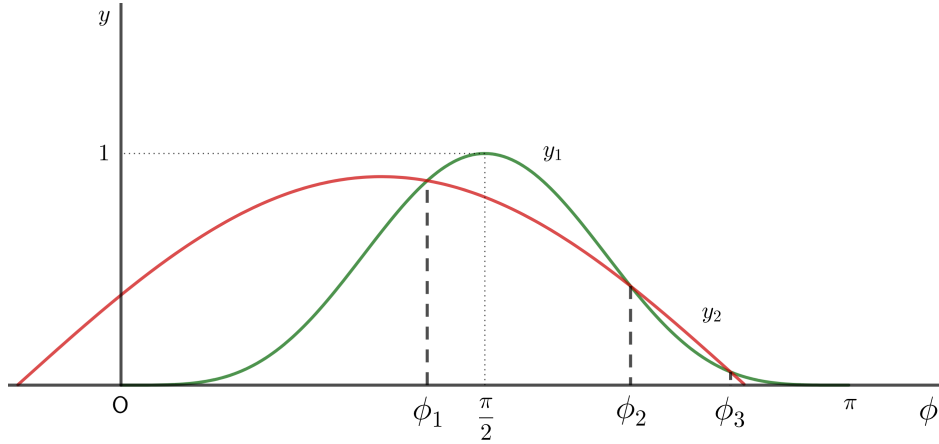


Fig. 3.3: Representación gráfica de  $y_1$  e  $y_2$  ( $\frac{D_1}{D} < 0$ ).

Supongamos que  $\frac{D_1}{D}$  es negativo, de tal manera que, procediendo como en el caso positivo, llegamos a que  $r < R$  y que  $m$  está en el primer o segundo cuadrante. Si  $m$  está en el primer cuadrante, la rama descendente de la curva  $y_2$  atraviesa el eje de abscisas  $\phi$  en el segundo cuadrante, y para un  $m$  pequeño y  $M < 1$ , las relaciones entre las dos curvas serán las que podemos ver en la gráfica 3.3. En este caso, la solución será única o doble en función de que  $\phi_2$  o  $\phi_3$  valgan  $\pi - \psi$ . Por último, si  $m$  estuviera en el segundo cuadrante, la rama descendente de  $y_2$  cortaría el eje de abscisas en el primer cuadrante, por lo que  $\phi_2$  y  $\phi_3$  no serían reales y el problema no tendría solución. Así, tenemos que:

Si  $\frac{D_1}{D} < 0$ , la distancia  $r$  es menor que  $R$ , el ángulo  $m$  estará en el primer cuadrante y disponemos de una o dos soluciones del problema físico en función de que  $\phi_2$  o  $\phi_3$  sea igual a  $\pi - \psi$ .

Como consecuencia de toda esta discusión concluimos que, en determinadas situaciones, según las medidas que se nos den y el número de estas, nos encontraremos ante una única respuesta o dos respuestas, y en este segundo

caso tendremos que discernir sobre cuál de las dos soluciones pertenecerá al problema físico.

### 3.3. Aproximación numérica mediante el método de Newton.

Tras haber realizado un estudio teórico de la ecuación (3.4), pasemos a buscar un método de resolución para ésta. Dado que no podemos encontrar valores exactos de  $\phi$  que satisfagan la ecuación, pues no hay una fórmula explícita para la solución, utilizaremos el método de Newton para obtener un valor aproximado.

Considerando una función  $f$  derivable y  $x_0$  un valor inicial, definimos el método de Newton para cada  $n$  como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0$$

Para no aplicar la operación superior de forma infinita, impondremos una tolerancia  $\delta$  a la hora de aplicar el método de manera que cuando  $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ , la solución será  $x_{k+1}$ . Es necesario que  $f'(x) \neq 0$  para poder llevar este método a la práctica.

En nuestro caso, tomando  $f(x) = \sin^4 x - M \sin(x + m)$ , tenemos que su derivada será  $f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x - M \cos(x + m)$  de manera que la sucesión para la aproximación mediante el método de Newton será:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin^4 x_n - M \sin(x_n + m)}{4 \sin^3 x_n \cos x_n - M \cos(x_n + m)}, \quad n \geq 0 \quad (3.5)$$

El método de Newton no siempre es convergente, por lo que es conveniente mencionar los teoremas de convergencia de este método.

**Teorema 2** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase 2 en un intervalo abierto  $I$ . Supongamos que existe  $x^*$  tal que  $f(x^*) = 0$  y  $f'(x^*) \neq 0$ ; entonces, existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $x_0 \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ , el método de Newton permite definir la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $x^*$ . Además, cuando  $f''(x^*) \neq 0$ , dicha sucesión tiene orden de convergencia 2.

### 3.3. Aproximación numérica mediante el método de Newton.

---

Dado que la función que queremos aproximar con el método de Newton es infinito-derivable por ser una función trigonométrica, podremos aplicar el teorema superior encontrado así el valor de  $\phi$  para el que se cumple la ecuación (3.4).

Notemos que este teorema solo nos garantiza la convergencia supuesto que el punto  $x_0$  sea cercano a la raíz, por lo que será buena idea separar las raíces por Bolzano y elegir el valor intermedio de los intervalos obtenidos como valor inicial para aplicar el método de Newton. La separación de raíces consiste en escoger un número adecuado de puntos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in [a, b]$  y aplicar el teorema de Bolzano para cada par  $(\alpha_j, \alpha_{j+1})$ , acotando así los intervalos donde buscar las raíces de una función. Ya que en nuestro caso buscamos la solución en el intervalo  $[0, \pi]$  podremos escoger los puntos de la manera  $\frac{j \cdot \pi}{n}$ , con  $j = 0, \dots, n$ , y una vez acotemos la raíz quedarnos como valor inicial:

$$x_0 = \frac{\frac{j \cdot \pi}{n} + \frac{(j+1) \cdot \pi}{n}}{2} = \frac{(2j+1) \cdot \pi}{2n}$$

Veamos ahora un caso práctico de la aplicación de este método para determinar las soluciones de (3.4). Tomemos  $M = 0,6$  y  $m = 6$ , por lo que  $m$  estará en el cuarto cuadrante y nos encontraremos en el caso de 3.2. Escojamos  $n = 8$  y separemos las raíces en intervalos para escoger el valor de  $x_0$ .

$\alpha_j$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\pi$
$f(\alpha_j)$	+	-	-	+	+	+	-	-	-

Tomamos, por ejemplo, el intervalo  $[0, \frac{\pi}{8}]$  en el que nuestra función cambia de signo entre sus extremos. Calculamos el valor medio del intervalo, lo elegimos como valor inicial,  $x_0 = \frac{\pi}{16}$ , y aplicamos el método de Newton con una tolerancia de  $10^{-5}$ . Veamos en una tabla cómo va convergiendo la solución.

		$x_i - x_{i-1}$
$x_0$	$\pi/16$	
$x_1$	0,2904116552751586	0,0940621144257965
$x_2$	0,295092645742656	0,00468099046749737
$x_3$	0,29511191583666796	$1,92700940119805 \cdot 10^{-5}$
$x_4$	0,29511191616986304	$3,33195082635740 \cdot 10^{-10}$

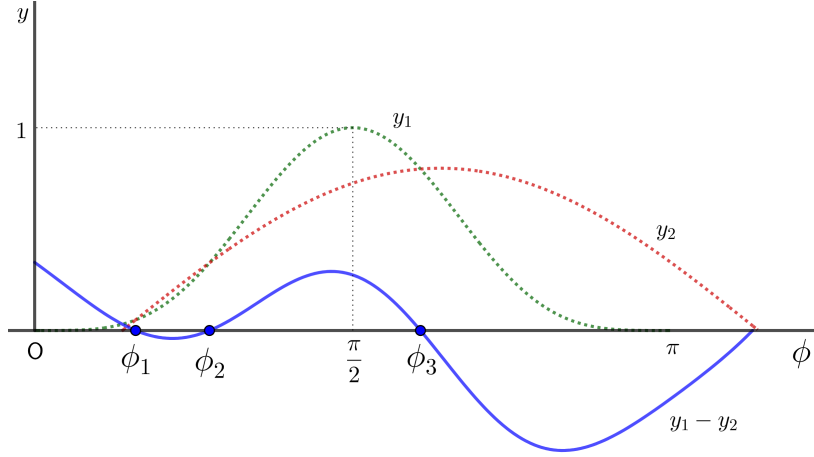
Por tanto, en cuatro iteraciones del método la diferencia entre las soluciones obtenidas es menor a la tolerancia que hemos fijado, obteniendo así que  $\phi_1 = 0,29511191616986304$  es una solución de (3.4). De la misma manera calcularemos las raíces  $\phi_2$  en  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}]$  y  $\phi_3$  en  $[\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ .

Tras aplicar el método de Newton y haber obtenido todas las soluciones de (3.4) en el intervalo  $[0, \pi]$ , nos faltará comprobar cuál de las soluciones obtenidas es igual a  $\pi - \psi$ , pudiendo determinar así si hay o no unicidad para el problema físico. Aún así, es posible determinar la unicidad de la solución sin necesidad de resolver la ecuación (3.4), como veremos a continuación.

### 3.4. Unicidad de la solución.

Tal y como hemos visto en la sección anterior, la solución del problema físico será única si  $\phi_2 = \pi - \psi$ , independientemente del signo de  $\frac{D_1}{D}$ ; en otro caso, la solución será doble o no existirá.

Fijémonos en la figura 3.2, donde aparecen tres intersecciones entre las curvas  $y_1$  e  $y_2$ . La observación fundamental en esta gráfica reside en el hecho de que  $\phi_2$  es un cero positivo, entendiendo por esto que la derivada en dicho punto es positiva, es decir, la función es creciente, y  $\phi_1$  y  $\phi_3$  son ceros negativos. Podemos ver esto más fácilmente en la siguiente imagen:



**Fig. 3.4:** Representación gráfica de  $y_1 - y_2$  cuando  $\frac{D_1}{D} > 0$ .

Por otra parte, calculemos la derivada de  $y_1 - y_2$ :

$$(y_1 - y_2)'(x) = 4 \sin^3 \phi \cos \phi - M \cos(\phi + m)$$

Pues bien, para que nuestra solución sea única tendrá que cumplirse que la derivada de  $y_1 - y_2$  en el punto  $\pi - \psi$  sea positiva, es decir, que  $\phi_2 = \pi - \psi$ . Desarrollemos la derivada en este punto para comprobar más fácilmente en qué casos se cumple la unicidad.

$$\begin{aligned} & 4 \sin^3(\pi - \psi) \cos(\pi - \psi) - M \cos(\pi - \psi + m) = \\ &= -4 \sin^3(\pi - \psi) \cos \psi + M \cos(-\psi + m) = \\ &= \left[ \frac{4MD_1}{NDR^3} \cos \psi + M(\cos \psi \cos m + \sin \psi \sin m) \right] = \\ &= \frac{4MD_1}{NDR^3} \cos \psi + M \left( \frac{R \cos^2 \psi}{N} - \frac{D_1 \cos \psi}{NDR^3} + \frac{R \sin^2 \psi}{N} \right) = \\ &= \frac{4MD_1}{NDR^3} \cos \psi - \frac{MD_1}{NDR^3} \cos \psi + \frac{MR}{N} (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = \\ &= \frac{MR}{N} \left( 1 + \frac{3D_1}{DR^4} \cos \psi \right) \end{aligned}$$

Dado que  $M$  y  $R$  son valores positivos podremos obviarlos a la hora de escribir la desigualdad. Así, tenemos una condición de unicidad para el caso de la figura 3.2, es decir, cuando  $\frac{D_1}{D}$  sea positivo, facilitando así un estudio

previo en la determinación del ángulo  $\phi$ .

El razonamiento para  $\frac{D_1}{D} < 0$  es análogo; en este caso,  $\phi_2$  será un cero negativo y las otras dos soluciones serán ceros positivos, por lo que tendremos que comprobar que la derivada en  $\pi - \psi$  sea negativa.

Así, con las dos desigualdades que hemos obtenido, llegamos a la conclusión de que la condición para que el problema físico tenga solución única es:

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \left[ 1 + \frac{3D_1}{DR^4} \cos \psi \right] > 0 & \text{si } \frac{D_1}{D} > 0 \\ \frac{1}{N} \left[ 1 + \frac{3D_1}{DR^4} \cos \psi \right] < 0 & \text{si } \frac{D_1}{D} < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Dado que todos los valores de estas ecuaciones están dados por simples observaciones, no será necesario resolver la ecuación (3.4) para determinar la unicidad de la solución.

Sabemos que  $N \neq 0$ , y por tanto el límite de las dos desigualdades será:

$$\left[ 1 + \frac{3D_1}{DR^4} \cos \psi \right] = 0$$

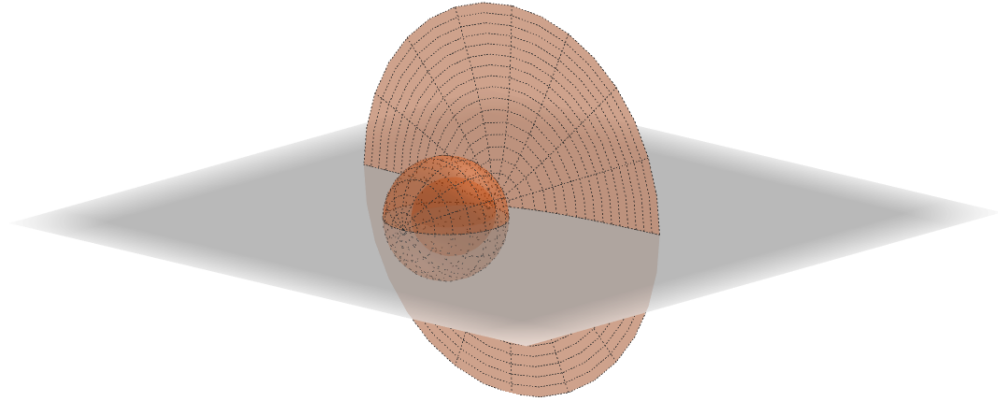
Ahora, utilicemos (3.1) y la relación (2.6) para eliminar  $\cos \psi$  y  $\frac{D_1}{D}$  de la expresión superior.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos \psi = \frac{r^2 - \rho^2 - R^2}{-2\rho R} \\ \frac{D_1}{D} = \frac{\rho}{\left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)} \end{cases} \\ & 1 + \frac{3}{R^4} \frac{\rho}{\left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)} \frac{r^2 - \rho^2 - R^2}{-2\rho R} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{3\rho}{\left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)} (r^2 - \rho^2 - R^2) = 2\rho R^5 \\ & \Rightarrow r^2 - \rho^2 - R^2 = \frac{2}{3} R^5 \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \end{aligned}$$



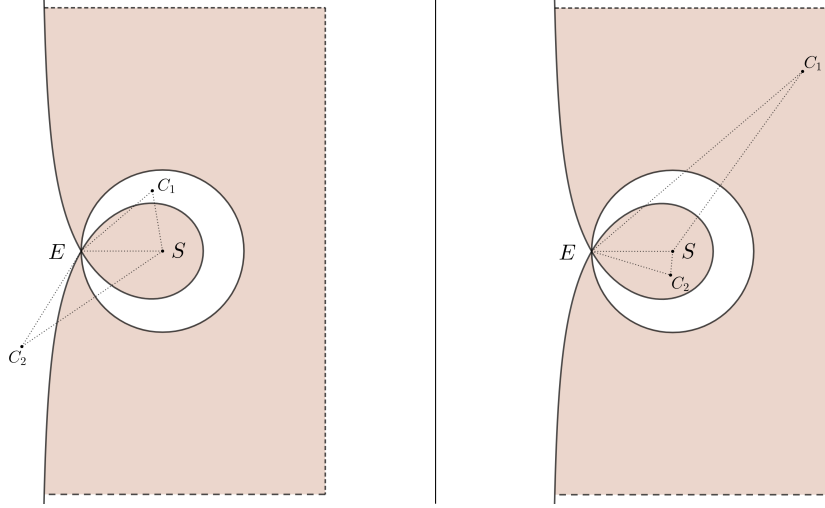


Dado que  $r$  y  $\rho$  son distancias del Sol y la Tierra al cuerpo observado, habrá infinitos puntos en el espacio tridimensional donde estos valores se mantengan. En la imagen superior podemos ver como, girando en torno a un círculo cuyo eje es el vector  $\overrightarrow{SE}$ , la distancia de cada  $C_i$  es la misma independientemente de en qué punto del círculo se encuentre. Por tanto, volviendo a lo comentado anteriormente, podremos formar una superficie de revolución para el límite de las regiones donde la solución pasa a ser única tomando los pares  $(\rho, r)$  en dicho límite y girando alrededor de vector  $\overrightarrow{SE}$ .



**Fig. 3.6:** Superficie formada por los límites donde cambia la unicidad de la solución.

En la imagen superior el círculo grande se extenderá hasta el infinito. A continuación, para obtener una imagen más visual en la que estudiar el cambio en la unicidad de la solución al atravesar las regiones límite, representamos una sección de la superficie con un plano que pase por la recta  $SE$ .



**Fig. 3.7:** Sección de la superficie de revolución junto a los casos en los que se da la unicidad y los que no. La región rosa se sigue extendiendo hasta el infinito.

En la imagen superior podemos ver que los límites para la condición de unicidad dividen el espacio en cuatro partes diferentes, dos sombreadas y las otras dos en blanco, de manera que las desigualdades de (3.6) mantienen el signo dentro de cada una de estas regiones y cambian de signo al cruzar la frontera de alguna de ellas.

Estudiemos ahora en cuál de estas regiones obtenemos una solución única y en cual doble. Para ello, tomemos un punto a la izquierda de  $E$  en la recta  $SE$ , en el cuál se cumplirá que  $r = \rho + R$  y  $\psi = \pi$ . Con esto, comprobemos la unicidad con (3.6):

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{3D_1}{DR^4} \cos \psi &= 1 - \frac{3D_1}{DR^4} = 1 - \frac{3}{R^4} \left( \frac{\rho}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}} \right) = \\
 &= 1 - \frac{3\rho}{R - \frac{R^4}{r^3}} = 1 - \frac{3\rho}{R - \frac{R^4}{(\rho + R)^3}} = 1 - \frac{3\rho}{\frac{R(\rho + R)^3 - R^4}{(\rho + R)^3}} = \\
 &= 1 - \frac{3\rho(\rho + R)^3}{\rho^3 R + 3\rho^2 R^2 + 3\rho R^3 + R^4 - R^4} = 1 - \frac{3(\rho + R)^3}{R(\rho^2 + 3\rho R + 3R^2)}
 \end{aligned}$$

Podemos ver fácilmente que esta última igualdad es negativa para un valor grande de  $\rho$ , y ya que hemos supuesto previamente que  $r > R$ , se sigue

que  $\frac{D_1}{D} > 0$  y  $N < 0$ , por lo que estamos en la primera desigualdad de (3.6). Ya que esta desigualdad está satisfecha, podemos concluir que la solución del problema será única si el objeto observado se encuentra en el área no sombreada a la izquierda de  $E$ .

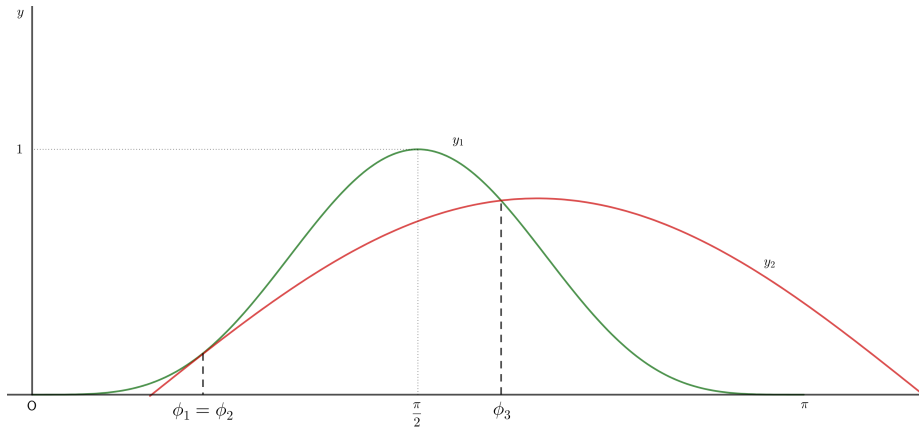
Cuando el objeto cruce de la región no sombreada a la izquierda de 3.7 a una región sombreada, manteniendo que  $r > R$ , la función cambiará de signo mientras que el signo de  $N$  no cambie, en cuyo caso la primera desigualdad de (3.6) no se cumplirá y estaremos en el caso de una solución doble. En esta región, la primera función de (3.6) es positiva y  $N$  es negativo, por lo que si cruzamos al área pequeña sin sombra la función pasa a ser negativa y  $N$  positivo, satisfaciendo así la segunda desigualdad y deduciendo así que la solución es única. De manera similar, podremos comprobar que la solución es doble en la región sombreada pequeña.

Por tanto, el problema físico tiene solución única en los casos que vemos en la primera imagen de 3.7, es decir, en las regiones blancas, y solución doble en los casos de la segunda imagen, las regiones sombreadas.

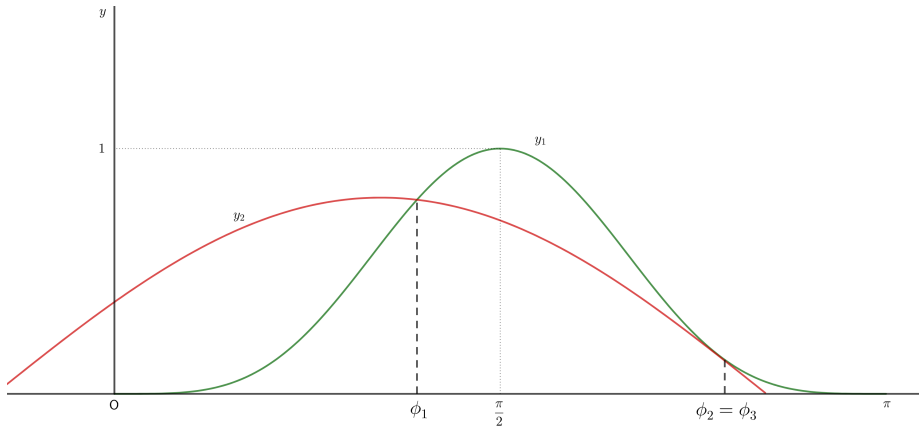
### 3.5. Límites en $m$ y $M$ .

A la hora de determinar una órbita en un problema real, hemos de tener en cuenta que los valores  $m$  y  $M$  han de cumplir que las soluciones reales de la ecuación (3.4) estén entre 0 y  $\pi$ , pues sino el Sol, la Tierra y el objeto observado no formarían un triángulo. Por tanto, hemos de determinar los límites para que esta condición se satisfaga, y dichos límites pueden ser determinados mediante las condiciones para que obtengamos raíces dobles.

Para empezar, supongamos que  $M$  es un valor fijo mientras  $m$  varía. En el primer caso, que podemos ver en 3.2, se observan tres intersecciones de las curvas. Mientras  $m$  vaya disminuyendo, la curva  $y_2$  irá desplazándose hacia la derecha hasta que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  pasen a ser iguales, teniendo así una raíz doble. De la misma manera, en 3.3 observamos tres soluciones y, conforme  $m$  aumente y desplace  $y_2$  a la izquierda,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  se igualarán.

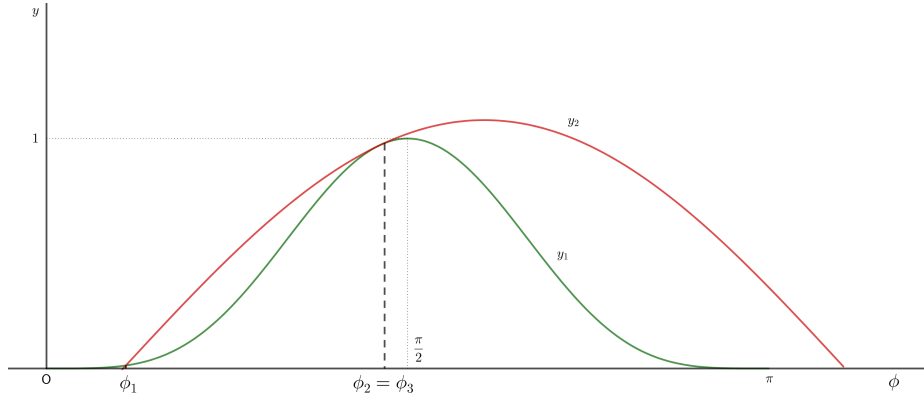


**Fig. 3.8:** Variación de  $m$  en la figura 3.2 hasta obtener una solución doble.

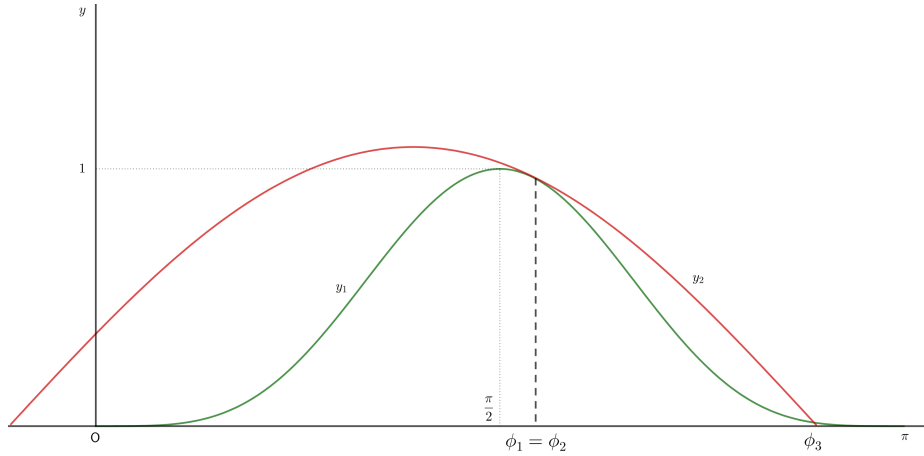


**Fig. 3.9:** Variación de  $m$  en la figura 3.3 hasta obtener una solución doble.

Veamos ahora el otro caso; fijamos  $m$  y vamos aumentando  $M$  empezando desde un valor pequeño. Conforme  $M$  aumente, la amplitud de  $y_2$  aumentará, dejando fijo, en el primer caso (figura 3.2),  $\phi_1$  y llegando a un punto donde  $\phi_2$  y  $\phi_3$  serán iguales. Funcionará análogamente con el segundo caso.



**Fig. 3.10:** Variación de  $M$  en la figura 3.2 hasta obtener una solución doble.



**Fig. 3.11:** Variación de  $M$  en la figura 3.3 hasta obtener una solución doble.

Las condiciones en las que la ecuación (3.4) tendrá una solución doble son:

$$\begin{cases} \sin^4 \phi = M \sin(\phi + m) \\ 4 \sin^3 \phi \cos \phi = M \cos(\phi + m) \end{cases} \quad (3.8)$$

Con el fin de encontrar las condiciones a las que esté sujeto  $m$  para que la raíz sea doble, dividamos las dos ecuaciones superiores y resolvamos para

la  $\tan \phi$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^4 \phi}{4 \sin^3 \phi \cos \phi} &= \frac{M \sin(\phi + m)}{M \cos(\phi + m)} \implies \frac{1}{4} \tan \phi = \tan(\phi + m) \\
 \implies \frac{1}{4} \tan \phi &= \frac{\tan m + \tan \phi}{1 - \tan m \tan \phi} \implies \tan \phi - (\tan \phi)^2 \tan m = 4 \tan m + 4 \tan \phi \\
 \implies \tan^2 \phi \tan m + 3 \tan \phi + 4 \tan m &= 0 \implies \tan \phi = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16 \tan^2 m}}{2 \tan m}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Así, para que  $\tan \phi$  tenga soluciones reales  $m$  ha de estar sujeto a la condición:

$$9 - \tan^2 m \geq 0,$$

y resolviendo esta inecuación para  $m$  obtendremos:

$$\begin{cases} 0 \leq m \leq 36^\circ 52' \\ 323^\circ 8' \leq m \leq 360^\circ \end{cases} \tag{3.10}$$

El primer rango de valores pertenecerá al segundo caso comentado, representado en la figura 3.3, y viceversa.

Utilizando este rango de valores, para cada  $m$  habrá dos soluciones de (3.9) en el intervalo  $(0, \pi)$ . Si tomamos  $m$  entre  $323^\circ 8'$  y  $360^\circ$ , la tangente de  $m$  será negativa y  $\tan \phi$  será positiva independientemente de qué signo tomemos antes de la raíz; además,  $\tan \phi$  será menor cuando cojamos el signo negativo. De tal manera, si tomamos el radical positivo estaremos en el caso  $\phi_1 = \phi_2$  (figura 3.8) y si lo tomamos negativo estaremos en el caso  $\phi_2 = \phi_3$  (figura 3.10). Por último, si tomamos  $m$  como un valor límite del intervalo estaremos ante el caso  $9 - \tan^2 m = 0$ , por lo que  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ . Si tomamos el caso  $0 \leq m \leq 36^\circ 52'$  tendremos que  $\tan m > 0$  y la discusión será análoga a la anterior.

Los valores límite de  $\phi$  definidos por (3.9) según el rango de valores para  $m$  serán:

$$\phi = \arctan\left(\frac{-3}{2 \tan m}\right) \implies \begin{cases} \phi = 116^\circ 34' \\ \phi = 63^\circ 26' \end{cases} \tag{3.11}$$

Utilizando estos valores de  $\phi$  podemos obtener un valor para  $M$  mediante las ecuaciones (3.8),  $M = 1,431$ , y dicho valor se corresponderá con el máximo  $M$  para el cuál (3.4) tiene tres soluciones en el intervalo  $(0, \pi)$ .

Supongamos que  $m$  toma el valor límite  $323^{\circ}8'$  y va aumentando hasta su límite superior,  $360^{\circ}$ . Como hemos visto anteriormente, comenzaremos teniendo una raíz doble y los dos valores de  $\phi$  se corresponderán con  $63^{\circ}26'$ , y conforme  $m$  aumente, una de las soluciones irá hacia  $0^{\circ}$  mientras la otra irá hacia  $90^{\circ}$ . Respecto a como cambian las soluciones en función de  $M$ , comenzaremos en el límite,  $M = 1,431$ , e iremos reduciendo su valor hasta cero. Si  $m = 36^{\circ}52'$ , conforme vaya decreciendo  $M$  la solución irá hasta 0, y si  $m = 323^{\circ}8'$  nuestra solución crecerá hasta  $\pi$ . Notar que para cada  $m$  que tomemos en los intervalos definidos en (3.10) existirán dos límites de  $M$  de manera que (3.4) tenga tres soluciones reales; por tanto, estos límites han de ser tenidos en cuenta con el fin de reducir el trabajo lo máximo posible.

## Bibliografía

- [1] MOULTON, F.R., (1914), *An Introduction to Celestial Mechanics*, University of Chicago (USA), Macmillan (second revised edition).
- [2] ORTEGA RÍOS, R. & UREÑA ALCÁZAR, A.J., (2010), *Introducción a la Mecánica Celeste*, Granada (España), Editorial Universidad de Granada.
- [3] ORTEGA RÍOS, R., *Mecánica Celeste*, Universidad de Granada (España), apuntes del curso 2018-2019.
- [4] MILANI, A. & GRONCHI, G.F., (2010), *Theory of orbit determination*, University of Pisa (Italy), Cambridge University Press.
- [5] GRONCHI, G.F., Orbit Determination, en *UNESCO Encyclopedia of Life Support Systems, Vol. 6.119.55 Celestial Mechanics*, Eolss Publishers Co Ltd, link.
- [6] VETTER, J.R., (2007), *Fifty Years of Orbit Determination: Development of Modern Astrodynamics Methods*, Johns Hopkins Apl Technical Digest, link.
- [7] RIDPATH, I., (2012), *A Dictionary of Astronomy (2 rev. ed.)*, Oxford (UK), Oxford University Press.
- [8] KING, B., (2019), *Right Ascension and Declination: Celestial Coordinates For Beginners*, Sky & Telescope, link.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [9] WILSON, B.R., (2016), *Initial orbit determination through optical observations*, Brigham Young University, Idaho (USA), [link](#) (el archivo se descarga automáticamente).
- [10] *Solution of triangles*, en Wikipedia. Recuperado el 6 de agosto de 2020, [link](#).
- [11] GARRALDA GUILLEM, A.I., *Métodos Numéricos II*, Universidad de Granada (España), apuntes de clase.
- [12] CURTIS, H.D., (2014), *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Oxford (United Kingdom), Butterworth-Heinemann (third edition).
- [13] SEIDELMANN, P.K. & KOVALEVSKY, J., (2002), *Application of the new concepts and definitions (ICRS, CIP and CEO) in fundamental astronomy*, University of Virginia (USA) & Observatoire de la Côte d’Azur (France), EDP Sciences.
- [14] PARK, R.S. (SITE MANAGER) & CHAMBERLIN A.B. (WEBMASTER), (2020), *HORIZONS Web-Interface* [ephemerides], NASA (USA), [link](#).
- [15] HOHENWARTER, M., (2001), GeoGebra (6.0.600.0-w) [software]. Obtenido de [link](#).