Determinación de Órbitas Elípticas

Simón López
Matemáticas e Ingeniería Informática
Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain
simondelosbros@correo.ugr.es

24 de agosto de 2020

1. Introducción

El problema de determinación de órbitas consiste en determinar los elementos orbitales de un cuerpo observado a partir de N observaciones con un grado de exactitud requerido. La dificultad surge del hecho de que una observación realizada desde la Tierra, la cuál se encuentra en continuo movimiento, nos proporcionará la dirección del cuerpo percibida por el observador, sin ninguna información sobre su distancia. Al no disponer de esta distancia no podremos determinar su posición exacta y las componentes de la velocidad no podrán ser determinadas. Así, habremos de disponer de observaciones complementarias. Pero, ¿cuántas necesitaremos, como poco, para obtener todos los elementos de la órbita?

A lo largo de esta memoria veremos que una órbita se define por seis elementos, por lo que nos bastará con que las observaciones nos proporcionen al menos seis valores independientes entre ellos. A partir de una observación completa obtenemos dos cantidades, referentes a las coordenadas angulares del cuerpo observado; por lo tanto, serán suficientes tres observaciones del objeto a determinar su órbita para comenzar nuestro proceso. Por otra parte, tener en cuenta que, previo a nuestro estudio, podemos conocer algunos elementos de la órbita; por ejemplo, si la órbita es parabólica, conocemos su excentricidad ($e = 1$), por lo que no serán necesarios seis elementos, sino cinco, y de esta manera una de las observaciones realizada puede ser dejada a medias, proporcionando solo una de las coordenadas angulares.

Las coordenadas angulares del cuerpo que observemos serán obtenidas en ascensión recta y declinación, un método de medida similar a la latitud y longitud utilizada sobre la superficie de la Tierra. Utilizaremos dichas coordenadas ya que la posición del cuerpo será determinada midiendo las distancias angulares y direcciones respecto a las estrellas vecinas, que se suponen fijas y están catalogadas en este tipo de coordenadas. Aún así, podremos cambiar a cualquier otro tipo de sistema de coordenadas en cualquier momento.

Comencemos viendo cuáles son los distintos elementos de una órbita, así como qué es la ascensión recta y declinación, que en conjunto llamaremos coordenadas ecuatoriales.

2. Elementos Orbitales y Coordenadas Ecuatoriales

En este apartado estudiaremos los diferentes parámetros que identifican una órbita (de manera única) así como las coordenadas ecuatoriales, elementos que forman un sistema que nos permite ubicar el objeto observado respecto al *ecuador celeste* y al *equinoccio vernal*, que definiremos más adelante, en un momento preciso.

2.1. Elementos Orbitales

Comencemos por los elementos orbitales, los cuales necesitarán sostenerse en las dos primeras leyes de Kepler para ser desarrollados. Dichas leyes son:

1. *Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos de dicha elipse.*
2. *Cada objeto barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Pues bien, con esto comencemos a desarrollar nuestros elementos entendiendo qué es una elipse y como se comporta matemáticamente.

Definición 1 *La elipse es una curva plana, simple y cerrada, que consta de dos focos (puntos fijos) de manera que para cualquier punto de la curva que tomemos, la suma de las distancias de los focos a dicho punto es la misma.*

Llamando a nuestra elipse E y a los focos de ésta F_1 y F_2, podemos escribir la definición superior de la siguiente manera:

$$|x - F_1| + |x - F_2| = d,\ \forall x \in E \implies d > |F_1 - F_2|$$

Notar que en el caso de que $d = |F_1 - F_2|$ estaremos ante un segmento que unirá los focos, mientras que si $0 = |F_1 - F_2|$, es decir, los dos focos son el mismo, nos encontraremos con que nuestra curva es una esfera.

Tomando uno de los focos como el origen de nuestro sistema de coordenadas, comencemos a desarrollar las ecuaciones anteriores. Sea x un punto de la elipse, tenemos:

$$|x| - |x - F| = d \implies |x - F| = d - |x| \implies |x - F|^2 = (d - |x|)^2$$

Como estamos trabajando con vectores, tenemos que $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle$, denotando con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar de dos vectores. Por tanto, continuando el resultado anterior:

$$|F|^2 - 2\langle x, F\rangle = d^2 + 2d|x| \implies |x| - \frac{\langle x, F\rangle}{d} = \frac{d^2 - |F|^2}{2d}$$

Definimos así los valores $k \in \mathbb{R}$, que se corresponde con el factor de la derecha, $k = \frac{d^2 - |F|^2}{d}$, y $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{e} = -\frac{1}{d}F$. Por la desigualdad triangular, $|F| < |x| + |x - F| = d$, obtenemos que $|\vec{e}| < 1$ y $k > 0$. Por tanto, llegamos a la ecuación:

$$|x| + \langle \vec{e}, x\rangle = k, \tag{1}$$

que será la ecuación que describe todas las elipses con un foco en el origen.

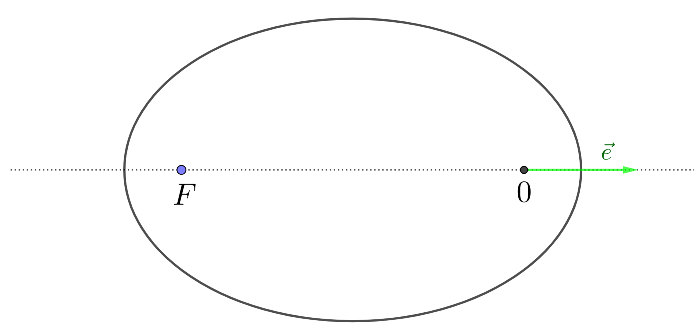

Fig. 1: Representación de una elipse junto a sus focos y el vector $\vec{e}$.

Llamaremos a $|\vec{e}| = e$ la **excentricidad de la elipse**, tomando valores en $[0, 1[$. A mayor valor de excentricidad, mayor separación entre los focos, y viceversa. Si el valor de e es 0, la curva que trazará el objeto será circula, los dos focos son iguales. Fuera del intervalo donde hemos definido la excentricidad, si $e = 1$ la órbita del objeto es una parábola, y si es mayor que 1, el objeto describirá una órbita hiperbólica.

Si trazamos una recta que pase por los dos focos de nuestra elipse, como podemos ver en la figura 1, dicha recta se intersecará con la elipse, obteniendo así dos puntos a los que llamaremos perihelio (P, más cercano a 0) y afelio (A, más cercano a F). Si tomamos el centro de la elipse como el punto medio entre los dos focos y medimos la distancia desde el centro hasta el perihelio (o, equivalentemente, hasta el afelio), obtendremos el **semieje mayor** de la elipse, al que notaremos por a. Por otra parte, si trazamos una perpendicular a la recta que pasa por los focos que pase por el centro de la elipse, la distancia desde una de las intersecciones con la elipse hasta el centro nos dará el semieje menor, al que representaremos por b. Podemos entender más fácilmente estos valores en la siguiente figura.

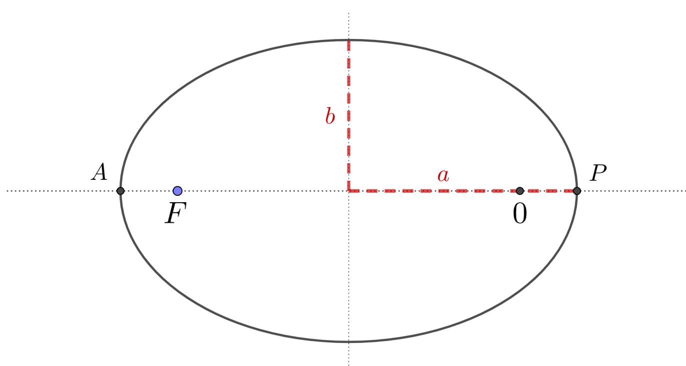

Fig. 2: Elementos geométricos de la elipse.

Notemos dos relaciones interesantes entre los elementos de la elipse comentados anteriormente y su excentridad:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \qquad\qquad e = \frac{\text{distancia entre los focos}}{\text{eje mayor}} = \frac{\overline{OF}}{2a}$$

El punto donde se intersecan el semieje mayor y menor será el centro de la elipse, C, y podremos obtener una expresión de la distancia de cada uno de los focos a éste a partir de la segunda ecuación superior, sabiendo así que

$\overline{0C} = \overline{FC} = ae.$

Por último, notemos por $\omega \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ al **argumento del periastro**[1], que representará el ángulo formado entre el eje polar (equivalente al eje x en el sistema cartesiano) y la dirección del vector $\vec{e}$. Así, tenemos que:

$$a = e(\cos\omega, \sin\omega)$$

Llamemos $\mathcal{E}_0$ al espacio de elipses con foco en el origen, donde cada elipse queda determinada de manera única por su ecuación cartesiana. Los parámetros a, e y ω dan lugar a sistema de coordenadas en $\mathcal{E}_0$, que está definido sobre $\mathbb{R}^2$. Aquí surge un problema, pues las órbitas de los planetas son elipses en el espacio, cada una situada en un plano distinto, con un sentido de giro. Por tanto, será necesario definir un nuevo conjunto de parámetros para obtener un sistema de coordenadas sobre tres dimensiones.

Para empezar, definamos un sistema de referencia ortonormal en el espacio, que situará al Sol en el origen, y el plano $z = 0$, en el que se encontrará el recorrido de la órbita de la Tierra, llamado plano de la eclíptica.

Empezamos definiendo el vector unitario $\vec{e}_1$ que tomamos en la recta que pasa por el sol con dirección la constelación de Aries, estrella fija que pertenece al plano de la eclíptica y que se corresponde con el punto donde el Sol pasa del hemisferio sur al hemisferio norte, es decir, el equinoccio de primavera. El vector $\vec{e}_2$ lo definimos como el vector ortonormal a $\vec{e}_1$ que está también en el plano de la eclíptica. Como hay dos opciones, tomaremos el que da sentido positivo al giro de la Tierra (giro antihorario). Por último escogemos el vector $\vec{e}_3$ como el perpendicular unitario a los dos anteriores, y al tener de nuevo dos opciones, lo fijamos a partir de la orientación que da el eje terráqueo de Sur a Norte.

[1] El periastro toma diferentes nombres en función de qué objeto ocupe el foco 0, por ejemplo, si en dicho foco se encuentra el Sol lo llamaremos perihelio, si se encuentra la Tierra el perigeo, etc.

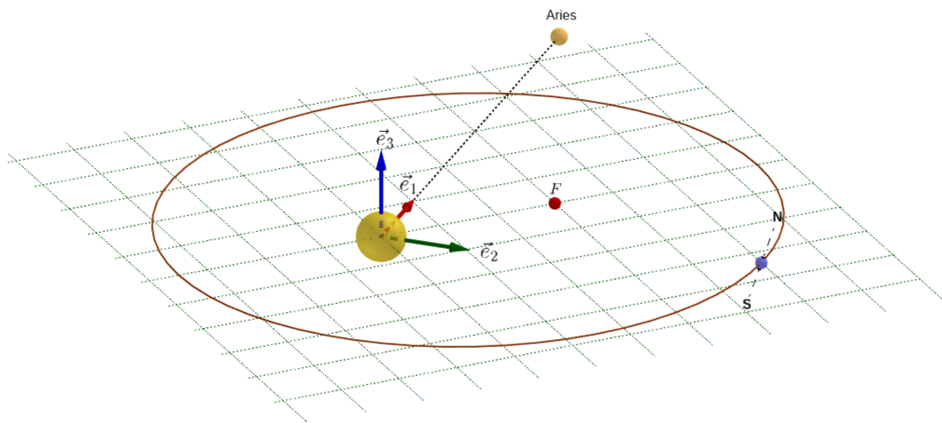

Fig. 3: Órbita elíptica de la Tierra con focos F y el Sol, mostrando el sistema de referencia. En la órbita terrestre real, el foco F se encuentra dentro del Sol.

Así, tenemos un sistema ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de manera que la orientación del movimiento de la Tierra se corresponde con la orientación $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ del plano de la eclíptica.

Para determinar una órbita elíptica por completo necesitaremos cinco elementos; a, e y ω definidos anteriormente, y dos más que introduciremos a continuación que definirán el plano de movimiento: la inclinación respecto al plano de la eclíptica (i) y el argumento del nodo ascendente (Ω).

Fijemos la línea de nodos como la recta que interseca el plano de movimiento del objeto observado y el plano de la eclíptica; sean $\vec{n}$ el vector normal al plano de movimiento y $\mathcal{N}_+$ el lado positivo de la línea de nodos. Entonces:

$$\begin{cases} i = \measuredangle(\vec{e}_3, \vec{n}), & i \in]0, \pi[\\ \Omega = \measuredangle(\vec{e}_1, \mathcal{N}_+), & \Omega \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Una vez hayamos definido el plano de movimiento con estos dos valores, encontramos la elipse usando la línea de nodos como eje de rotación para el argumento del perihelio, ω.

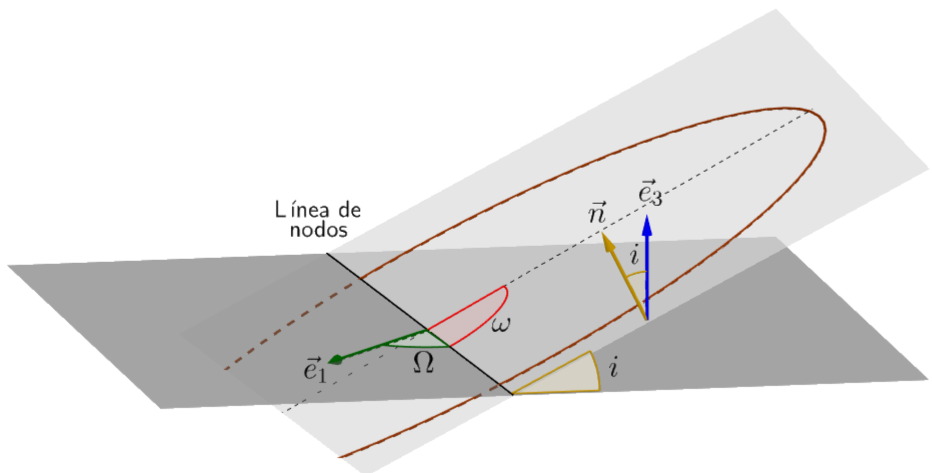

Fig. 4: Plano de movimiento definido por la inclinación y el argumento del nodo ascendente.

Al conjunto de estas cinco coordenadas lo llamaremos coordenadas astronómicas, y están bien definidas y son unívocas en la región $i \in]0, \pi[$, $e \in]0, 1[$, excluyendo así las órbitas circulares y las definidas sobre el plano de la eclíptica.

En ocasiones, a estas cinco coordenadas se les une una sexta referente a la rotación del objeto, por ejemplo, el período de la órbita, p, o el valor T, que se define como el momento de paso por el perihelio, la fecha concreta del momento en el que el objeto está en el perihelio de su órbita después del 31 de diciembre de 1899. También es usada la anomalía media, $M = n(t - t_0)$ (n movimiento medio), que representa la fracción del período de una órbita que transcurre desde que el cuerpo pasa por el perihelio hasta el momento t.

2.2. Situando la elipse que describe un objeto mediante sus coordenadas astronómicas.

Supongamos que se nos dan las coordenadas astronómicas $(a, e, i, \omega, \Omega)$ de un objeto y queremos situar éste en el espacio. Comenzaremos dibujando la elipse que forma la órbita en el plano de la eclíptica, teniendo en cuenta que hemos de desplazar uno de sus focos para que éste se corresponda con el origen. Así, la ecuación para todos los puntos de la elipse en el plano se corresponderá con:

$$(a\cos\theta + c, b\sin\theta, 0), \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

donde a será el semieje mayor, $b = a\sqrt{1-e^2}$ el semieje menor y $c = ae$ la distancia de cada uno de los focos al centro de la elipse.

Por otra parte, i, Ω, ω serán los ángulos de Euler, un conjunto de coordenadas angulares que utilizaremos para especificar la orientación del sistema de referencia del cuerpo con dichas coordenadas astronómicas en términos del sistema de referencia $\{e_1, e_2, e_3\}$ del plano de la eclíptica. Así, llamaremos R al producto de las tres matrices de rotación siguientes:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y para situar la elipse en su plano de rotación nos bastará multiplicar cada punto de ésta por la matriz R, obteniendo así que la elipse sobre la que rota nuestro objeto en el espacio será:

$$\text{Elipse} = R \begin{pmatrix} a\cos\theta + c \\ b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para conocer el punto exacto de la elipse donde se encuentra el objeto en un momento t habríamos de utilizar la anomalía media, M.

2.3. Coordenadas Ecuatoriales

Cada lugar en la Tierra puede ser localizado conociendo su latitud (ángulo en grados sobre el ecuador) y su longitud (ángulo en grados sobre el meridiano cero, el meridiano de Greenwich). De la misma manera, podemos definir ciertos valores para fijar la localización de todo objeto en la bóveda celeste, a los que llamaremos ascensión recta, α, equivalente a la longitud, y declinación, δ, equivalente a la latitud. A dichas coordenadas les acompañará un valor ρ que determinará la distancia desde el observador hasta el objeto observado, aunque, como es de esperar, éste no puede ser obtenido con una simple observación del cuerpo.

Al igual que utilizamos una localización física en la Tierra como referencia para la longitud, utilizaremos el equinoccio vernal como referencia para la ascensión recta, que se encontrará en el punto de la eclíptica donde el Sol pasa del hemisferio sur al hemisferio norte. A partir de la recta que une el centro de la Tierra con este punto se tomará el ángulo que forma con nuestro objeto observado. Para la declinación tomaremos el ecuador celeste, un gran círculo en la bóveda celeste en el mismo plano que el ecuador terrestre.

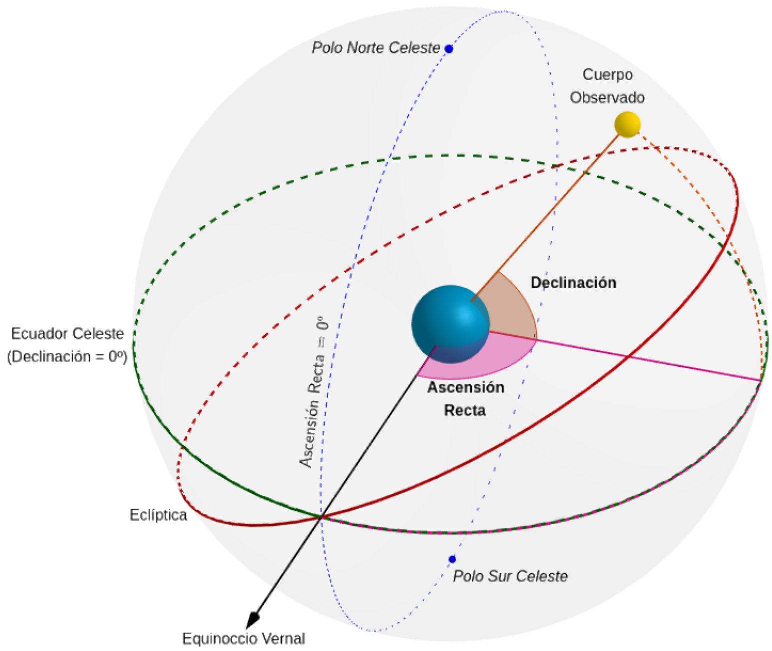

Fig. 5: La Tierra, en el centro, junto a la ascensión recta y declinación de cierto objeto. El círculo rojo define el camino aparente del Sol en el cielo, que define el plano de la eclíptica.

La declinación es medida en grados, como la latitud. Pero, a diferencia de la longitud, la ascensión recta es medida en horas, minutos y segundos en dirección este. Como en un día hay 24 horas, cada hora de ascensión recta corresponderá a una veinticuatroava parte de la rotación total de la Tierra, y por tanto, una hora será igual a $\frac{360}{24} = 15^{\circ}$.

Al conjunto de estas dos coordenadas junto a la distancia al objeto se les llama Coordenadas Ecuatoriales, y con ellas podremos definir la posición exacta de un objeto en cierto momento.

Dado que en ocasiones necesitaremos la posición del objeto en coordenadas cartesianas, tenemos unas simples ecuaciones con las que pasaremos de coordenadas ecuatoriales a cartesianas.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\delta \cos\alpha \\ y = \rho \cos\delta \sin\alpha \\ z = \rho \sin\delta \end{cases}$$

Notar que antes de aplicar estas ecuaciones deberemos pasar δ y α a radianes para utilizar las funciones trigonométricas. Las coordenadas (x, y, z) tendrán la misma unidad que la distancia ρ.

3. Caminos e ideas para desarrollar el método de determinación

ESTO HAY QUE REPASARLO

Una vez obtenidas las coordenadas ecuatoriales de un objeto mediante tres observaciones, las podemos escribir como un grupo de funciones de los elementos orbitales del cuerpo en el momento de las observaciones, t_1, t_2, t_3. Así, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \phi(a, e, \omega, i, \Omega; t_1) \\ \alpha_2 = \phi(a, e, \omega, i, \Omega; t_2) \\ \alpha_3 = \phi(a, e, \omega, i, \Omega; t_3) \\ \delta_1 = \psi(a, e, \omega, i, \Omega; t_1) \\ \delta_2 = \psi(a, e, \omega, i, \Omega; t_2) \\ \delta_3 = \psi(a, e, \omega, i, \Omega; t_3) \end{cases} \tag{2}$$

Pues bien, el problema de determinación de órbitas consistirá en resolver todas estas ecuaciones para los seis elementos desconocidos, pero, las funciones de ascensión recta y declinación involucran a los elementos muy enrevesadamente, además de que son altamente trascendentales.

La órbita a determinar podrá ser una elipse, una hipérbola o una parábola. Para el primer caso, encontraremos la posición de la órbita utilizando la ecuación de Kepler (*hablar sobre esto en algún punto*), y de manera similar para el segundo caso. Por otra parte, si la órbita es una parábola, hemos de utilizar una ecuación cúbica. Por tanto, ya que en los tres casos las coordenadas se obtienen mediante una serie de transformaciones trigonométricas, no dispondremos de soluciones directas para estas ecuaciones mediante métodos ordinarios.

(Aquí puede que ponga algo más)

Volvamos a las ecuaciones (2), y supongamos que queremos las coordenadas polares y sus derivadas, por ejemplo, en $t = t_2$. Estas ecuaciones cambian a:

$$\begin{cases} \alpha_1 = f(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha_2', \delta_2', \rho_2'; t_1, t_2) \\ \alpha_2 = \alpha_2 \\ \alpha_3 = f(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha_2', \delta_2', \rho_2'; t_2, t_3) \\ \delta_1 = g(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha_2', \delta_2', \rho_2'; t_1, t_2) \\ \delta_2 = \delta_2 \\ \delta_3 = g(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha_2', \delta_2', \rho_2'; t_2, t_3) \end{cases} \tag{3}$$

donde ρ es la distancia al origen en t_2 y:

$$\alpha_2' = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \delta_2' = \frac{d\delta}{dt}, \quad \rho_2' = \frac{d\rho}{dt} \quad \text{en} \;\; t = t_2$$

Así, solo tendremos que resolver cuatro ecuaciones para cuatro incógnitas, pues α_2 y δ_2 son conocidas. Pero, además, podemos modificar estas ecuaciones para hacer que sean más fáciles de determinar, y de esta manera aparece el método de **Laplace**, que fue desarrollado y aplicado por primera vez para determinar una órbita en 1780.

Por otra parte, podemos tomar tres coordenadas en dos momentos diferentes, t_1 y t_3, para así obtener otro conjunto de elementos a determinar, y haciéndonos así con dos ecuaciones con solamente dos incógnitas, que podrán ser resueltas.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = F(\alpha_1, \delta_1, \rho_1, \alpha_3, \delta_3, \rho_3; t_1, t_2, t_3 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \\ \delta_1 = \delta_1 \\ \delta_2 = G(\alpha_1, \delta_1, \rho_1, \alpha_3, \delta_3, \rho_3; t_1, t_2, t_3) \\ \delta_3 = \delta_3 \end{cases} \tag{4}$$

Este es el camino que siguió Lagrange para resolver el problema en 1778, y que retomó **Gauss** en 1801.

A pesar de la cantidad de estudios que se han realizado tras la publicación de estos métodos, muy poco de lo que es realmente nuevo o teóricamente importante se ha añadido a las determinaciones que desarrollaron Laplace y Gauss, a menos que se usen más de tres observaciones.

4. Preparación y Corrección de las Observaciones

Independientemente del método que queramos seguir para determinar la órbita del objeto observado, habremos de efectuar algunas correcciones en los datos obtenidos antes de comenzar a realizar cálculos, pues hay distintos factores que pueden hacer que la ascensión recta y declinación observadas difieran de su valor real.

En el equinoccio de primavera, que se corresponde con el punto Aries como comentamos anteriormente, la ascensión recta y declinación es nula, pues el plano de la eclíptica y el del ecuador de la Tierra se intersecan en dicho momento. Debido a la protuberancia de la Tierra en el ecuador, la Luna y el Sol causarán una ligera oscilación periódica y un lento cambio secular en la posición del plano de su ecuador. Así, los equinoccios no se corresponderán con un punto fijo y habrá pequeñas oscilaciones periódicas y lentos cambios de la posición de la Tierra a lo largo de la eclíptica, llamadas nutación y precesión. En este caso, se acostumbra a utilizar el equinoccio medio (equinoccio prescindiendo de la nutación) y la posición del ecuador al comienzo del año en el que se estén haciendo las observaciones para evitar el error en la ascensión recta y declinación.

Por otra parte, la observación del objeto cuya órbita queremos determinar también puede ser afectada por la aberración de la luz, es decir, la diferencia entre la posición observada del objeto y su posición real, causada por la combinación de la velocidad del observador (por la rotación de la Tierra) y la velocidad de la luz. Tendremos que corregir dos aberraciones: la anual, debida a la rotación de la Tierra alrededor del Sol, y la aberración diurna, debida a la rotación de la Tierra sobre su eje. Aún así, debido a que la velocidad de rotación sobre su eje es muy pequeña en comparación con la velocidad de traslación, la aberración diurna será relativamente pequeña, y podrá ser obviada, especialmente en el caso de que las observaciones tomadas no sea demasiado precisas.

Definamos como α_0 y δ_0 la ascensión recta y declinación del cuerpo observado en cierto momento, sin ninguna corrección previa. Entonces, sus valores referidos al equinoccio medio del comienzo del año, y corregidos para la aberración lumínica anual, son:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 - 15f - g\sin(G+\alpha_0)\tan(\delta_0) - h\sin(H+\alpha_0)\sec(\delta_0) \\ \delta = \delta_0 - i\cos(\delta_0) - g\cos(G+\alpha_0) - h\cos(H+\alpha_0)\sin(\delta_0) \end{cases}$$

donde f, g, h, G y H son cantidades auxiliares, a las que llamaremos *números interestelares independientes*, y cuyo valor aparece en el *American Ephemeris and Nautical Almanac* para cada día del año. Notar que estas correcciones serán expresadas en segundos de arco, pues en esta unidad son dadas las cantidades tomadas de la efemérides. Esta corrección será pequeña siempre que δ_0 no sea cercano a $\pm 90^{\text{o}}$, pues cerca de dichos valores tanto la secante como la tangente que aparece en la corrección para α diverge.

Por último, tendremos que corregir la aberración diurna a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \Delta\alpha = -0'',322\cos(\phi)\cos(\theta-\alpha_0)\sec(\delta_0) \\ \Delta\delta = -0'',322\cos(\phi)\sin(\theta-\alpha_0)\sin(\delta_0) \end{cases}$$

donde ϕ representará la latitud del observador y $\theta - \alpha_0$ representa el ángulo horario del objeto en el momento de la observación (*???*). La primera corrección será pequeña mientras que δ_0 no sea cercano a $\pm 90^{\text{o}}$, y la segunda no podrá exceder el valor de $0'',322$.

DUDAS: como se utilizan las dos correciones a la vez???? $0'',322$ *se refiere a 0.322 segundos??*

5. Argumentación General para la Determinación

Los dos métodos que vamos a estudiar a continuación (Laplace y Gauss) siguen una estrategia similar, que expondremos a continuación. Para empezar, supongamos que solo disponemos de tres observaciones de nuestro objeto en tres momentos diferentes, t_1, t_2, t_3, de manera que conocemos la ascensión recta y declinación en cada uno de estos instantes. A continuación, definamos algunos términos:

- Definimos C, S y E como el cuerpo observado, el Sol (alrededor del cual gira C) y la Tierra respectivamente.
- Sean (ξ, η, ζ) las coordenadas (cartesianas) de C respecto a S, (X, Y, Z) las coordenadas de S respecto a E, (x, y, z) coordenadas de C.
- ρ es la distancia de E a C, r la distancia de S a C y R la distancia de E a S.

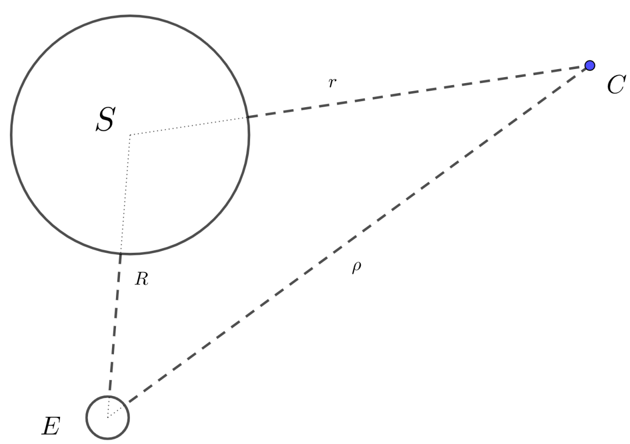

Fig. 6: Notación utilizada para nuestro problema

Con todo esto, podemos escribir:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos\delta \cos\alpha = \rho\lambda \\ \eta = \rho \cos\delta \sin\alpha = \rho\mu \\ \zeta = \rho \sin\delta = \rho\nu \end{cases} \tag{5}$$

Ya que conocemos el valor de α y δ, ascensión recta y declinación, en t_1, t_2 y t_3, también conoceremos el valor en dichos momentos de λ, μ y ν, que son los cosenos directores del vector que va de E a C. Por tanto, habremos de determinar la distancia ρ.

Referencias

[1] Forest Ray Moulton, An Introduction to Celestial Mechanics, *second edition*.

[2] R. Ortega, A.J. Ureña, Introducción a la Mecánica Celeste.

[3] Sky & Telescope, Right Ascension and Declination: Celestial Coordinates For Beginners, https://skyandtelescope.org/astronomy-resources/right-ascension-declination-celestial-coordinates/