



Discrete Mathematics - Counting

Exercises & Solutions

Sum Rule - I

- Giả sử khoa Toán chọn một người để đại diện tại hội đồng của trường. Đại diện có thể là một giảng viên hay là một sinh viên của khoa Toán. Có bao nhiêu cách chọn đại diện nếu khoa Toán có 37 giảng viên và 87 sinh viên?
- **Đáp án:** Có 37 cách chọn một giảng viên và có 83 cách chọn một sinh viên.
- Không có giảng viên nào đồng thời là sinh viên.
- Theo luật cộng, có $37 + 83 = 120$ cách chọn một đại diện.

Sum Rule - 2

- Một sinh viên có thể chọn một đồ án từ 3 danh sách. Các danh sách lần lượt gồm có 23, 15, và 19 đồ án. Không đồ án nào giống nhau trong 3 danh sách. Có bao nhiêu đồ án mà sinh viên có thể chọn lựa?
- **Đáp án:** Sinh viên có thể chọn một đồ án bằng cách chọn một từ danh sách thứ 1, danh sách thứ 2 hay thứ 3.
- Bởi vì không có đồ án nào có trong hơn một danh sách, theo luật cộng có $23 + 15 + 19 = 57$ cách chọn một đồ án.

Product Rule - I

- Một công ty có 2 nhân viên, Sanchez và Patel, thuê một tầng trong một tòa nhà có 12 văn phòng. Có bao nhiêu cách để gán các văn phòng trên cho 2 nhân viên trên?
- **Đáp án:** Quá trình gán các văn phòng cho 2 nhân viên bao gồm: gán 1 văn phòng cho Sanchez, có 12 cách; rồi gán 1 văn phòng cho Patel, có 11 cách.
- Sử dụng luật nhân, có $12 \cdot 11 = 132$ cách để gán văn phòng cho 2 nhân viên trên.

Product Rule - 2

- Các ghế ngồi của một hội trường được dán nhãn một chữ cái tiếng Anh, theo sau bởi một con số nguyên không vượt quá 100. Số lượng ghế tối đa sẽ là bao nhiêu?
- **Đáp án:** Quá trình dán nhãn bao gồm 2 bước, gán một chữ cái trong 26 kí tự tiếng Anh, rồi gán một trong 100 số nguyên.
- Áp dụng qui tắc nhân có $26 \cdot 100 = 2600$ cách khác nhau để gán nhãn cho các chiếc ghế.

Product Rule - 3

- Có bao nhiêu dãy các bit có chiều dài bằng 7?
- **Đáp án:** Mỗi bit của dãy 7 bit có 2 cách chọn, bởi vì mỗi bit chỉ có 2 giá trị là 0 hay 1.
- Vì vậy, theo qui tắc nhân (mở rộng), có $2^7 = 128$ dãy có 7 bit khác nhau.

Product Rule - 4

- Có bao nhiêu biến số khác nhau nếu biến số bao gồm một dãy 3 kí tự tiếng Anh theo sau bởi 3 kí số?
- **Đáp án:** Có 26 chọn lựa khác nhau cho mỗi kí tự tiếng Anh và 10 chọn lựa cho mỗi kí số.
- Vì vậy, theo qui tắc nhân có tổng cộng $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$ biến số khác nhau.

Product Rule – 5 - Functions

- Có bao nhiêu ánh xạ từ tập hợp có m phần tử vào tập có n phần tử?
- **Đáp án:** Một ánh xạ tương ứng một phần tử trong tập đích có n phần tử với một phần tử trong tập nguồn có m phần tử.
- Vì vậy, theo qui tắc nhân có $n.n...n = n^m$ ánh xạ khác nhau.
- Ví dụ có $5^3 = 125$ ánh xạ khác nhau từ tập 3 phần tử sang tập 5 phần tử.

Product Rule – 6 – 1-1 Functions

- Có bao nhiêu đơn ánh từ tập hợp có m phần tử vào tập có n phần tử?
- **Đáp án:** ($m \leq n$) Giả sử các phần tử trong tập nguồn là a_1, a_2, \dots, a_m . Có n cách chọn giá trị tương ứng với a_1 .
- Bởi vì do đơn ánh, giá trị tương ứng với a_2 chỉ có thể $n-1$ cách chọn (giá trị tương ứng với a_1 không thể sử dụng lại).
- Tổng quát, giá trị tương ứng với a_k có $n-k+1$ cách chọn. Theo qui tắc nhân, có $n(n-1)\dots(n-m+1)$ đơn ánh.

Product Rule – 7

- Đếm số tập con của một tập hữu hạn.
- **Đáp án:** Cho S là một tập hữu hạn. Liệt kê các phần tử của S theo thứ tự bất kì.
- Lúc đó, tồn tại một song ánh giữa các tập con của S và một dãy bit có chiều dài $|S|$.
- Do chúng ta có $2^{|S|}$ dãy bit khác nhau có độ dài $|S|$ nên $|P(S)| = 2^{|S|}$.

Sum + Product Rule - I

- Trong một phiên bản của ngôn ngữ BASIC, tên của một biến là một chuỗi có một hay hai chữ cái hay kí số (alphanumeric – một trong 26 chữ cái tiếng Anh hay một trong 10 kí số). Tên biến phải bắt đầu bằng một chữ cái và phải khác với 5 từ khóa có độ dài 2 khác dành sẵn. Có bao nhiêu tên biến khác nhau?
- **Đáp án:** Đặt V là số tên biến khác nhau. Đặt V_1 là số tên biến có độ dài là 1 và V_2 là số tên biến có độ dài là 2.
- Theo qui tắc cộng, $V = V_1 + V_2$
- $V_1 = 26$ vì biến có độ dài bằng 1 phải là một chữ cái
- Theo qui tắc nhân, có $26 \cdot 36$ tên biến bắt đầu bằng một chữ cái và kết thúc bằng một alphanumeric. Do phải loại bỏ 5, $V_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$.
- $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$

Sum + Product Rule - 2

- Mỗi người dùng trong máy tính đều có một mật khẩu, dài từ 6 đến 8 kí tự. Mỗi kí tự là một chữ cái hoa hay một kí số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất 1 kí số. Có bao nhiêu mật khẩu có thể?
- **Đáp án:** Đặt P là tổng số mật khẩu có thể có. P_6 , P_7 , và P_8 là số các mật khẩu có độ dài là 6, 7, và 8.
- Theo qui tắc cộng, $P = P_6 + P_7 + P_8$
- Để tìm P_6 , xác định số mật khẩu có độ dài là 6 kí tự bao gồm cả chữ cái và kí số, rồi trừ cho số mật khẩu có độ dài 6 mà chỉ có chữ cái mà thôi (không có kí số).
- Theo qui tắc nhân, $P_6 = 36^6 - 26^6$
- Tương tự cho P_7 , P_8

Subtraction Rule - I

- Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8 bắt đầu bằng bit 1 hay kết thúc bằng 2 bit 00?
- **Đáp án:** Theo qui tắc nhân, có $2^7 = 128$ cách tạo chuỗi bit có độ dài 8 bắt đầu bằng bit 1.
- Tương tự, có $2^6 = 64$ cách để tạo chuỗi bit có độ dài 8 kết thúc bằng 2 bit 00.
- Có một số chuỗi bit đồng thời bắt đầu từ bit 1 và kết thúc bằng 00. Theo qui tắc nhân, có $2^5 = 32$ chuỗi như vậy.
- Kết luận, có $128 + 64 - 32 = 160$ chuỗi bit.

Subtraction Rule - 2

- Một công ty nhận được 350 đơn xin việc. Giả sử rằng có 220 ứng viên tốt nghiệp ngành tin học, 147 ứng viên tốt nghiệp ngành quản trị, và 51 ứng viên thuộc cả 2 ngành trên. Có bao nhiêu ứng viên tốt nghiệp không thuộc vào cả 2 ngành trên?
- **Đáp án:** Đặt A_1 là các ứng viên thuộc ngành tin học, A_2 là các ứng viên thuộc ngành quản trị.
- **Số ứng viên thuộc ngành tin học hay quản trị**

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 220 + 147 - 51 = 316.$$

- **Kết quả, có $350 - 316 = 34$ ứng viên không thuộc 2 ngành trên.**

Pigeonhole Principle - I

- Một ánh xạ từ tập có nhiều hơn k phần tử vào tập có k phần tử không thể đơn ánh.
- **Đáp án:** Giả sử ứng với mỗi phần tử y trong tập đích chúng ta có một cái hộp chứa tất cả x là tạo ảnh của $y \Rightarrow$ có k hộp.
- Bởi vì tập nguồn có $k+1$ phần tử x hay nhiều hơn, theo nguyên lí chuồng bồ câu có một hộp chứa 2 hay nhiều hơn phần tử x .
- Như vậy tồn tại y có nhiều hơn 1 tạo ảnh.

Pigeonhole Principle - 2

- Trong bất cứ nhóm nào có 367 người, có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh nhật.
- ***Đáp án:*** Có 366 ngày sinh nhật khác nhau.

Pigeonhole Principle - 3

- Trong bất cứ nhóm nào có 27 từ tiếng Anh, có ít nhất 2 từ bắt đầu cùng một chữ cái.
- ***Đáp án:*** Có 26 chữ cái khác nhau trong tiếng Anh.

Pigeonhole Principle - 4

- Có bao nhiêu sinh viên trong một lớp để ít nhất có 2 sinh viên có cùng điểm trong một bài kiểm tra, nếu bài kiểm tra có thang điểm từ 0 đến 10?
- **Đáp án:** Có 11 điểm khác nhau.
- Theo nguyên lý Dirichlet phải có 12 sinh viên để có ít nhất 2 người trùng điểm nhau.