Ejercicios - Conjuntos Convexos

Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá
Introducción a la Optimización
2022-I

Sebastian Leonardo Molina Diaz
smolinad@unal.edu.co

2 Convex sets

Exercises

2.1 Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be a convex set, with $x_1, \ldots, x_k \in C$, and let $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ satisfy $\theta_i \geq 0$, $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$. Show that $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$. (The definition of convexity is that this holds for $k = 2$; you must show it for arbitrary k). *Hint*. Use induction on k.

Solución.

Sea C un conjunto convexo. Por definición de convexidad, se tiene el caso base con $k = 2$. Suponga que para k arbitrario se cumple que $\sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \in C$, con $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$, $\theta_i \geq 0$ y $x_i \in C$ para $1 \leq i \leq k$. Sean $\mu_j \geq 0$ y $x_j \in C$ con $1 \leq j \leq k+1$. Para el paso inductivo, observe que si $\mu_{k+1} = 0$, obtenemos el mismo caso de la hipótesis de inducción. Si $\mu_{k+1} = 1$, estamos considerando el caso trivial en el que $\mu_{k+1} x_{k+1} = 1 \cdot x_{k+1} = x_{k+1} \in C$. Consideremos el caso en el que $\mu_{k+1} \neq 0$ y $\mu_{k+1} \neq 1$. Observe que

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \sum_{j=1}^{k+1} \mu_j x_j \\
&= \left(\frac{1-\mu_{k+1}}{1-\mu_{k+1}}\right)(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_k x_k) + \mu_{k+1} x_{k+1} \\
&= (1-\mu_{k+1}) \cdot \left(\frac{\mu_1}{1-\mu_{k+1}} x_1 + \frac{\mu_2}{1-\mu_{k+1}} x_2 + \cdots + \frac{\mu_k}{1-\mu_{k+1}} x_k\right) + \mu_{k+1} x_{k+1} \\
&= (1-\mu_{k+1}) \cdot (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k) + \mu_{k+1} x_{k+1},
\end{aligned}$$

donde $\lambda_l = \frac{\mu_l}{1-\mu_{k+1}}$ con $1 \leq l \leq k$. De lo anterior, podemos notar que

$$\sum_{l=1}^{k} \lambda_l = \frac{\sum_{l=1}^{k} \mu_l}{1-\mu_{k+1}} = \frac{1-\mu_{k+1}}{1-\mu_{k+1}} = 1.$$

Si denotamos $\mathbf{x} = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k)$, por hipótesis de inducción $\mathbf{x} \in C$, ya que $\sum_{l=1}^{k} \lambda_l = 1$ y $\lambda_l \geq 0$ para $1 \leq l \leq k$. Por lo tanto, como C es convexo, $\mathbf{y} = (1-\mu_{k+1}) \cdot \mathbf{x} + \mu_{k+1} x_{k+1} \in C$.

$\square$

2.3 *Midpoint convexity.* A set C is midpoint convex if whenever two points a, b are in C, the average or midpoint $(a+b)/2$ is in C. Obviously a convex set is midpoint convex. It can be proved that under mild conditions midpoint convexity implies convexity. As a simple case, prove that if C is closed and midpoint convex, then C is convex. Considere el siguiente número binario, el cual codifica recursivamente

Solución.

Sean $a, b \in C$. Queremos ver que la combinación convexa $\theta + (1-\theta)b \in C$. Considere el coeficiente θ_k, resultado de aplicar la convexidad de punto medio k veces a los puntos a y b, recursivamente. Entonces, podemos expresar a θ_k como

$$\theta_k = \frac{\alpha_1}{2^1} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{2^k},$$

donde

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & |\theta| < |1-\theta| \\ 1 & |1-\theta| < |\theta| \end{cases}.$$

Observe que $\lim_{k\to\infty} \theta_k a + (1-\theta_k)b = \theta a + (1-\theta)b \in C$, ya que como C es cerrado, entonces contiene todos sus puntos límite. Por lo tanto, C es convexo.

$\square$

2.4 Show that the convex hull of a set S is the intersection of all convex sets that contain S. (The same method can be used to show that the conic, or affine, or linear hull of a set S is the intersection of all conic sets, or affine sets, or subspaces that contain S).

Solución.

Usando doble contenencia, probemos que $\textbf{conv}\, S = I$, donde $I = \bigcap\{C : S \subseteq C, C$ conjunto convexo$\}$. Sea $\mathbf{x} \in \textbf{conv}\, S$, luego $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$, $x_i \in S$ y $x_i \in S$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sea D un conjunto convexo arbitrario tal que $S \subseteq D$. Como D es convexo, cualquier combinación convexa de sus elementos está dentro de D, en particular $\mathbf{x}$. Como D es un conjunto arbitrario y $\mathbf{x} \in I$ es un elemento arbitrario, entonces $\textbf{conv}\, S \subseteq I$. Ahora, note que $S \subseteq \textbf{conv}\, S$ y $\textbf{conv}\, S$ es convexo por definición. Así, $\textbf{conv}\, S = C$ para algún C en la construcción de I. Luego $I \subseteq \textbf{conv}\, S$, y por lo tanto, $I = \textbf{conv}\, S$.

$\square$

2.5 What is the distance between two parallel hyperplanes $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_1\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_2\}$?

Solución.

Sean $\mathcal{H}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_1\}$ y $\mathcal{H}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_2\}$ dos hiperplanos paralelos. La distancia entre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ es la distancia entre dos puntos $x_1 \in \mathcal{H}_1$ y $x_2 \in \mathcal{H}_2$, los cuales están sobre la recta normal a los hiperplanos que pasa por el origen, como se puede ver en la Figura 1.

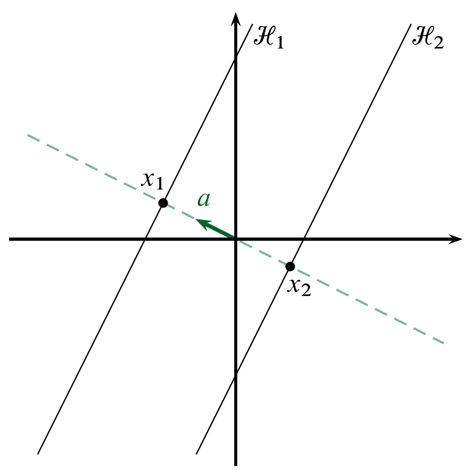

Figura 1: Distancia entre hiperplanos paralelos.

Por lo tanto, si a es el vector normal a los hiperplanos, x_1 y x_2 son multiplicaciones escalares de a. Luego, $x_1 = c_1 \cdot a$, con $c_1 \in \mathbb{R}$. Como $x_1 \in \mathcal{H}_1$, entonces $a^T x_1 = a^T(c_1 \cdot a) = b_1$. Despejando, obtenemos que $c_1 = b_1/a^T a = b_1/\|a\|^2$, por lo que $x_1 = (b_1/\|a\|^2)a$. Similarmente, $x_2 = (b_2/\|a\|^2)a$. Así, la distancia entre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ es

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \left\| \frac{b_1}{\|a\|^2} a - \frac{b_2}{\|a\|^2} a \right\| = \left\| (b_1 - b_2) \frac{a}{\|a\|^2} \right\| \\ &= \frac{1}{\|a\|^2} |b_1 - b_2| \|a\| \\ &= \frac{|b_1 - b_2|}{\|a\|}. \end{aligned}$$

$\square$

2.8 Which of the following sets S are polyhedra? If possible, express S in the form $S = \{x : Ax \preceq b, Fx = g\}$.

a) $S = \{y_1 a_1 + y_2 a_2 : -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$, where $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$.

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0,\ \mathbf{1}^T x = 1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\right\}$, where $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ and $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0,\ x^T y \leq 1 \text{ for all } y \text{ with } \|y\|_2 = 1\right\}$.

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0,\ x^T y \leq 1 \text{ for all } y \text{ with } \sum_{i=1}^n |y_i| = 1\right\}$.

2.9 *Voronoi sets and polyhedral decomposition.* Let $x_0, \ldots, x_K \in \mathbb{R}^n$. Consider the set of points that are closer (in Euclidean norm) to x_0 than the other x_i, i.e.,

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_2 \leq \|x - x_i\|_2,\ i = 1, \ldots, K\}$$

V is called the Voronoi region around x_0 with respect to $x_1, \ldots, x_K$.

a) Show that V is a polyhedron. Express V in the form $V = \{x : Ax \preceq b\}$.

Solución.
Sean $x, x_0, \ldots, x_K \in \mathbb{R}^n$. Observe que x está mas cerca con la norma euclidiana a x_0 que x_i, donde $1 \leq i \leq K$, si

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\|_2 \leq \|x - x_i\|_2 &\therefore \|x - x_0\|_2^2 \leq \|x - x_i\|_2^2 \\
&\therefore (x - x_0)^T (x - x_0) \leq (x - x_i)^T (x - x_i) \\
&\therefore x^T x - x^T x_0 - x_0^T x + x_0^T x_0 \leq x^T x - x^T x_i - x_i^T x + x_i^T x_i \\
&\therefore x^T x - 2x_0^T x - x_0^T x_0 \leq x^T x - 2x_i^T x + x_i^T x_i \\
&\therefore 2x_i^T x - 2x_0^T x \leq x_i^T x_i - x_0^T x_0 \\
&\therefore 2(x_i - x_0)^T x \leq x_i^T x_i - x_0^T x_0,
\end{aligned}$$

lo cual define un poliedro o un sistema de desigualdades lineales, donde $V = \{x : Ax \preceq b\}$ con

$$A = 2 \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ x_1 - x_0 \\ \vdots \\ x_1 - x_K \end{bmatrix}^T, \quad b = \begin{bmatrix} x_1^T x_1 - x_0^T x_0 \\ x_2^T x_2 - x_0^T x_0 \\ \vdots \\ x_K^T x_K - x_0^T x_0 \end{bmatrix}.$$

Intuitivamente, como se puede ver en la Figura 2, V es la intersección de los semiespacios definidos por los hiperplanos ortogonales a $x_i - x_0$, que pasan por el punto medio $m_i = \frac{x_0 + x_i}{2}$, con $1 \leq i \leq K$.

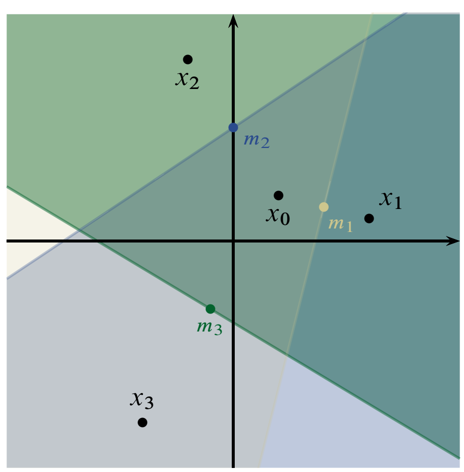

Figura 2: Región de Voronoi alrededor de x_0 como intersección de semiespacios.

$\square$

b) Conversely, given a polyhedron P with nonempty interior, show how to find $x_0, \dots, x_K$ so that the polyhedron is the Voronoi region of x_0 with respect to $x_1, \dots, x_K$.

Solución.

Sea $V = \{Ax \preceq b\}$ un poliedro con interior no vacío. Intuitivamente, tomando como referencia la Figura 2, para construir la región de Voronoi tome cualquier punto dentro del poliedro como x_0. Luego, tome el punto x_i, simétrico respecto a los hiperplanos definidos por $v_i^T x = b_i$. Para ello, debemos tomar a $x_i = x_0 + \delta a_i$ tal que su distancia al hiperplano es igual a la distancia de x_0 al hiperplano. Es decir

$$a_i^T x_i - b_i = b_i - a_i^T x_0.$$

Reemplazando x_i en la igualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} a_i^T(x_0 + \delta a_i) - b_i = b_i - a_i^T x_0 &\therefore 0 = 2b_i - a_i^T x_0 - a_i^T(x_0 + \delta a_i) \\ &\therefore 0 = 2b_i - 2a_i^T x_0 - \delta a_i^T a_i \\ &\therefore 2b_i - 2a_i^T x_0 = \delta a_i^T a_i \\ &\therefore \frac{2(b_i - a_i^T x_0)}{a_i^T a_i} = \frac{2(b_i - a_i^T x_0)}{\|a\|^2} = \delta. \end{aligned}$$

Así, $x_i = x_o + \frac{2(b_i - a_i^T x_0)}{\|a\|^2} a_i$. $\square$

c) We can also consider the sets

$$V_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_k\|_2 \leq \|x - x_i\|_2, i \neq k\}$$

The set V_k consists of points in $\mathbb{R}^n$ for which the closest point in the set $\{x_0, \dots, x_K\}$ is x_k. The sets $V_0, \dots, V_K$ give a polyhedral decomposition of $\mathbb{R}^n$. More precisely, the sets V_k are polyhedra, $\bigcup_{k=0}^K V_k = \mathbb{R}^n$, and $\operatorname{int} V_i \cap \operatorname{int} V_j = \emptyset$ for $i \neq j$, i.e., V_i and V_j intersect at most along a boundary. Suppose that $P_1, \dots, P_m$ are polyhedra such that $\bigcup_{i=1}^m P_i = \mathbb{R}^n$, and $\operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_j = \emptyset$ for $i \neq j$. Can this polyhedral decomposition of $\mathbb{R}^n$ be described as the Voronoi regions generated by an appropriate set of points?

Solución.

Considere dos hiperplanos $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset \mathbb{R}^2$, los cuales no son paralelos. Considere que el ángulo entre los hiperplanos θ es tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$. Sean $x_1 \in P_1$ y $x_2 \in P_2$ dos puntos arbitrarios. Note que el punto $\widehat{x_1}$, el cual es el reflejo de x_1 respecto a $\mathcal{H}_1$ está en $\widehat{P_1} \subset P_4$. Similarmente, el punto $\widehat{x_2}$, el cual es el reflejo de x_2 respecto a $\mathcal{H}_2$ está en $\widehat{P_2} \subset P_4$. Sin embargo, no es posible construir el punto $\widehat{x_3} \in P_4$, el cual debe ser la reflexión de x_1 y x_2 respecto a $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ simultáneamente, ya que $\widehat{P_1} \cap \widehat{P_2} = \emptyset$.

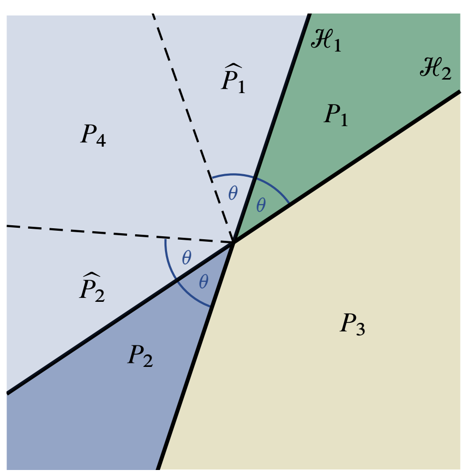

Figura 3: Descomposición de $\mathbb{R}^2$ en cuatro poliedros.

$\square$

2.10 *Solution set of a quadratic inequality.* Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be the solution set of a quadratic inequality,

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T A x + b^T x + c \le 0 \right\}$$

with $A \in \mathbf{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, and $c \in \mathbb{R}$. Are the converses of these statements true?

a) Show that C is convex if $A \succeq 0$.

Solución.
Un conjunto es convexo si su intersección con una línea arbitraria $y + tv$ es convexa. Considere entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(y+tv)^T A(y+tv) + b^T(y+tv) + c &= (y^T A + tv^T A)(y+tv) + b^T y + b^T tv + c \\
&= y^T Ay + 2y^T Atv + tv^T Atv + b^T y + b^T tv + c \\
&= (v^T Av)t^2 + (2y^T Atv + b^T tv) + (b^T y + y^T Ay + c) \\
&= (v^T Av)t^2 + (2y^T Av + b^T v)t + (b^T y + y^T Ay + c) \\
&= \gamma t^2 + \mu t + \phi.
\end{aligned}$$

Note que la intersección del conjunto solución C y la línea $y + tv$ es el conjunto $\{y + tv : \gamma t^2 + \mu t + \phi \le 0\}$, el cual es convexo si $\gamma \ge 0$, lo cual se tiene ya que $A \succeq 0$. La afirmación recíproca no se tiene, ya que se pueden construir ejemplos en los que $A \preceq 0$, sin embargo C es convexo.

$\square$

b) Show that the intersection of C and the hyperplane defined by $g^T x + h = 0$ (where $g \neq 0$) is convex if $A + \lambda gg^T \succeq 0$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución.
Sea $B = A + \lambda gg^T$, entonces $A = B - \lambda gg^T$. Reemplazando en la desigualdad cuadrática:

$$\begin{aligned}
x^T Ax + b^T x + c \le 0 &\therefore x^T(B - \lambda gg^T)x + b^T x + c \le 0 \\
&\therefore x^T Bx - \lambda x^T gg^T x + b^T x + c \le 0 \\
&\therefore x^T Bx + b^T x + (c - \lambda x^T gg^T x) \le 0.
\end{aligned}$$

Por el literal anterior sabemos que el conjunto solución de la desigualdad obtenida es convexo, ya que $B \succeq 0$. Justamente, esta desigualdad representa la intersección entre C y el hiperplano, el cual también es convexo.

$\square$

2.13 *Conic hull of outer products.* Consider the set of rank-k outer products, defined as $\left\{XX^T : X \in \mathbb{R}^{n\times k}, \mathbf{rank}\, X = k\right\}$. Describe its conic hull in simple terms.

Solución.
Sea $\mathcal{O} = \left\{XX^T : X \in \mathbb{R}^{n\times k}, \mathbf{rank}\, X = k\right\}$. Observe que XX^T es semidefinida positiva, ya que para un vector real y, $y^T XX^T y = z^T z = \|z\|^2 \ge 0$, con $z = X^T y$. Además, sabemos que $\mathbf{rank}\, XX^T = \mathbf{rank}\, X^T X = \mathbf{rank}\, X^T = \mathbf{rank}\, X = k$. Sean $A, B \in \mathcal{O}$ matrices semidefinidas positivas tal que $\mathbf{rank}\, A = \mathbf{rank}\, B = k$. Sea $v \in \ker(A + B)$, entonces

$$(A+B)v = 0 \quad \therefore \quad v^T(A+B)v = 0 \quad \therefore \quad v^T Av + v^T Bv = 0,$$

por lo que $v^T Av = v^T Bv = 0$, y en particular $Av = Bv = 0$. Por lo tanto, v está en los espacios nulos de A y B, es decir, $v \in \ker A$ y $v \in \ker B$. Así, $\dim(\ker A + B) \le \dim(\ker A), \dim(\ker B)$, y por el teorema de rango-nulidad, cualquier combinación $\gamma A + \delta B$ con $\gamma, \delta \ge 0$ debe tener rango mayor o igual que k, ya que al disminuir la nulidad, aumenta el rango. Por lo tanto, $\mathbf{cone}\, \mathcal{O} = \{A : A \text{ es semidefinida positiva}, \mathbf{rank}\, A \ge k\} \cup \{0_{n\times n}\}$.

$\square$

2.14 *Expanded and restricted sets.* Let $S \subseteq \mathbb{R}^n$, and let $\|\cdot\|$ be a norm on $\mathbb{R}^n$.

a) For $a \ge 0$ we define S_a as $\{x : \operatorname{dist}(x, S) \le a\}$, where $\operatorname{dist}(x, S) = \inf_{y\in S} \|x - y\|$. We refer to S_a as S expanded or extended by a. Show that if S is convex, then S_a is convex.

Solución.
Sean $x, z \in S_a$. Queremos ver que la combinación convexa $\theta x + (1-\theta)z \in S_a$. Note que

$$\operatorname{dist}(\theta x + (1-\theta)z, S) = \inf_{y \in S} \|\theta x + (1-\theta)z - y\|.$$

Como $y \in S$ y S es convexo, considere el caso particular $y = \theta y_1 + (1-\theta)y_2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\theta x + (1-\theta)z, S) &= \inf_{y_1, y_2 \in S} \|\theta x + (1-\theta)z - \theta y_1 - (1-\theta)y_2\| \\
&= \inf_{y_1, y_2 \in S} \|\theta(x - y_1) + (1-\theta)(z - y_2)\| \\
&\leq \theta \inf_{y_1 \in S} \|x - y_1\| + (1-\theta) \inf_{y_2 \in S} \|x - y_2\| \\
&\leq \big(\theta + (1-\theta)\big)a \\
&\leq a.
\end{aligned}$$

□

b) For $a \geq 0$ we define $S_{-a} = \{x : B(x,a) \subseteq S\}$, where $B(x,a)$ is the ball (in the norm $\|\cdot\|$), centered at x, with radius a. We refer to S_{-a} as S shrunk or restricted by a, since S_{-a} consists of all points that are at least a distance a from $\mathbb{R}^n \setminus S$. Show that if S is convex, then S_{-a} is convex.

Solución.
Sean $x, y \in S_{-a}$, y sea z tal que $|z| \leq a$. Entonces $x + z, y + z \in S$, por lo que para $0 \leq \theta \leq 1$ se tiene que $\theta x + (1-\theta)y + z \in S$, ya que S es convexo. Por lo tanto $\theta x + (1-\theta)y \in S_{-a}$.

□

2.15 *Some sets of probability distributions.* Let x be a real-valued random variable with $\mathbf{prob}\,(x = a_i) = p_i, i = 1, \ldots, n$, where $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Of course $p \in \mathbb{R}^n$ lies in the standard probability simplex $P = \{p : \mathbf{1}^T p = 1, p \succeq 0\}$. Which of the following conditions are convex in p ? (That is, for which of the following conditions is the set of $p \in P$ that satisfy the condition convex?)

a) $\alpha \leq \mathbf{E}\, f(x) \leq \beta$, where $\mathbf{E}\, f(x)$ is the expected value of $f(x)$, i.e., $\mathbf{E}\, f(x) = \sum_{i=1}^n p_i f(a_i)$. (The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given.)

Solución.
Esta condición es convexa en p, ya que es equivalente a la desigualdad lineal $\alpha \leq \sum_{i=1}^n p_i f(a_i) \leq \beta$. □

b) $\mathbf{prob}(x > \alpha) \leq \beta$.

Solución.
Esta condición es convexa en p, ya que es equivalente a la desigualdad lineal $\sum_{i\,:\,a_i \geq \alpha} p_i \leq \beta$. □

c) $\mathbf{E}\left|x^3\right| \leq \alpha\, \mathbf{E}\,|x|$.

Solución.
Esta condición es convexa en p, ya que es equivalente a la desigualdad lineal

$$\sum_{i=1}^n p_i |a_i|^3 \leq \alpha \sum_{i=1}^n p_i |a_i| = \sum_{i=1}^n p_i \left(|a_i|^3 - \alpha |a_i|\right) \leq 0.$$

□

d) $\mathbf{E}\, x^2 \leq \alpha$.

Solución.
Esta condición es convexa en p, ya que es equivalente a la desigualdad lineal $\sum_{i=1}^n p_i (a_i)^2 \leq \alpha$. □

e) $\mathbf{E}\, x^2 \geq \alpha$.

Solución.
Esta condición es convexa en p, ya que es similar a la del literal anterior. □

f) $\mathbf{var}(x) \le \alpha$, where $\mathbf{var}(x) = \mathbf{E}(x - \mathbf{E}\, x)^2$ is the variance of x.

Solución.
Considere la distribución de probabilidad $\{\mathbf{prob}(x = a_1 = 0) = 0, \mathbf{prob}(x = a_2 = 1) = 1\}$. Sea $\alpha = \frac{1}{8}$. Entonces

$$\mathbf{var}(x) = (0 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2) - (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1)^2 = 1 - 1 = 0 \le \frac{1}{8}.$$

Sin embargo, al considerar la distribución $\{\mathbf{prob}(x = a_1 = 0) = \frac{1}{3}, \mathbf{prob}(x = a_2 = 1) = \frac{2}{3}\}$, podemos ver que $\mathbf{var}(x)$ no es convexa en general, ya que

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{2}{3} \cdot 1^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1\right)^2 = \frac{2}{9} \not\le \frac{1}{8}.$$

□

g) $\mathbf{var}(x) \ge \alpha$.

Solución.
Observe que esta condición la podemos reescribir como

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (a_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^2 \ge \alpha \therefore -\sum_{i=1}^{n} p_i (a_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^2 \le \alpha$$
$$\therefore b^T p + p^T a a^T p \le \alpha,$$

donde $b = a_i^2$. Esto es un conjunto convexo dado que aa^T es semidefinida positiva. □

h) $\mathbf{quartile}(x) \ge \alpha$, where $\mathbf{quartile}(x) = \inf\{\beta : \mathbf{prob}(x \le \beta) \ge 0.25\}$.

Solución.

□

i) $\mathbf{quartile}(x) \le \alpha$.

Solución.

□

2.16 Show that if S_1 and S_2 are convex sets in $\mathbb{R}^{m+n}$, then so is their partial sum

$$S = \{(x, y_1 + y_2) : x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

Solución.
Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ tales que $x_1 = (\check{x}, \check{y_1} + \check{y_2})$, $x_2 = (\widehat{x}, \widehat{y_1} + \widehat{y_2})$ tal que $(\check{x}, \check{y_1}), (\widehat{x}, \widehat{y_1}) \in S_1$ y $(\check{x}, \check{y_2}), (\widehat{x}, \widehat{y_2}) \in S_2$. Considere la siguiente combinación convexa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 &= \theta(\check{x}, \check{y_1} + \check{y_2}) + (1-\theta)(\widehat{x}, \widehat{y_1} + \widehat{y_2}) \\
&= (\theta\check{x}, \theta\check{y_1} + \theta\check{y_2}) + \big((1-\theta)\widehat{x}, (1-\theta)\widehat{y_1} + (1-\theta)\widehat{y_2}\big) \\
&= (\theta\check{x} + (1-\theta)\widehat{x}, (\theta\check{y_1} + (1-\theta)\widehat{y_1}) + (\theta\check{y_2} + (1-\theta)\widehat{y_2}))
\end{aligned}$$

Como S_1 y S_2 son convexos, entonces $(\theta\check{x} + (1-\theta)\widehat{x}, \theta\check{y_1} + (1-\theta)\widehat{y_1}) \in S_1$ y $(\theta\check{x} + (1-\theta)\widehat{x}, \theta\check{y_2} + (1-\theta)\widehat{y_2}) \in S_2$. Por lo tanto, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in S$.

□

2.17 *Image of polyhedral sets under perspective function.* In this problem we study the image of hyperplanes, halfspaces, and polyhedra under the perspective function $P(x, t) = x/t$, with dom $P = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$. For each of the following sets C, give a simple description of

$$P(C) = \{v/t : (v, t) \in C, t > 0\}.$$

a) The polyhedron $C = \mathbf{conv}\{(v_1, t_1), \ldots, (v_K, t_K)\}$ where $v_i \in \mathbb{R}^n$ and $t_i > 0$.

b) The hyperplane $C = \{(v, t) : f^T v + gt = h\}$ (with f and g not both zero).

c) The halfspace $C = \{(v, t) : f^T v + gt \leq h\}$ (with f and g not both zero).

d) The polyhedron $C = \{(v, t) : Fv + gt \preceq h\}$.

2.18 *Invertible linear-fractional functions.* Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be the linear-fractional function

$$f(x) = (Ax + b)/\left(c^T x + d\right), \quad \mathbf{dom}\, f = \left\{x : c^T x + d > 0\right\}$$

Suppose the matrix

$$Q = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}$$

is nonsingular. Show that f is invertible and that f^{-1} is a linear-fractional mapping. Give an explicit expression for f^{-1} and its domain in terms of A, b, c, and d. *Hint.* It may be easier to express f^{-1} in terms of Q.

Solución.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Considere la función $\mathcal{P}(x) = \{s(x, 1) : s \geq 0\}$, la cual envía a vectores en $\mathbb{R}^n$ en rayos de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea P la función perspectiva, entonces f puede ser expresada como

$$\begin{aligned} P\left(Q\mathcal{P}(x)\right) &= P\left(Q \cdot s(x, 1)\right) \\ &= P\left(\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} sx \\ s \end{pmatrix}\right) \\ &= P\left(\begin{bmatrix} s(Ax + b) \\ s(c^T + d) \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{s(Ax + b)}{s(c^T + d)} = \frac{Ax + b}{c^T + d} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Como P, $\mathcal{P}$ y Q tienen inversas —Q tiene inversa ya que es no singular—, entonces la inversa de f es

$$f^{-1}(x) = \mathcal{P}^{-1}(Q^{-1}P^{-1}(x)).$$

□

Ejercicios adicionales

2. Implementar un algoritmo para determinar el cono convexo de un conjunto de puntos en cualquier dimensión.

3. Verificar que el conjunto de soluciones de un conjunto de desigualdades de matrices lineales es convexa.

Solución.

Sea $\mathcal{A}(x) = [A_1, A_2, \ldots, A_n]\,(x_i, x_2, \ldots, x_n)^T$. Considere la desigualdad lineal de matrices

$$\mathcal{A}(x) = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + \cdots + x_nA_n \preceq B.$$

Note que la solución de la desigualdad anterior es el conjunto $\{x : \mathcal{A}(x) \preceq B\} = f^{-1}(\mathbf{S}_+^m)$, donde f es la función afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbf{S}^m$ definida por $f(x) = B - \mathcal{A}(x)$. Que el conjunto $\{x : \mathcal{A}(x) \preceq B\}$ sea convexo sigue de que f es afín.

□

Referencias

[1] S. Boyd y L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2009.