

Notes of Cryptography

Squirrel

March 12, 2025

Preface

Course

密碼學設計與分析 Cryptography Design and Analysis (11320IIS500900) in NTHU

1 L1

1.1 Merkle 的故事

Merkle 在大學部修了一個課，然後要交一個 project。他在交這個作業的時候，提到了 Public Key Cryptography 的想法。當時的導師並不看好這個東西，所以 reject 了，最後他也退掉了這門課。之後他找到另一個很欣賞他的老師，覺得應該要「Publish it, win fame and fortune」，所以他將這篇文章那個投到了 CACM (Communications of the ACM)。第一次投期刊就因為「這個想法不是當今的主流想法」而被拒絕。在 Merkle 的某些堅持之下，過了快三年終於讓 CACM 接受了這篇文章。

這邊的故事及當時的論文，可以在 <https://ralphmerkle.com/1974/> 找到。

另外影片中的 link 有誤，應該改成 <https://ralphmerkle.com>，不然你只會找到一間搞 CRM 和賣資料的公司。

1.2 Conventions

- 離散且有限的時間 (discrete and finite world)
⇒ 因為我們正在討論 computer science
- Data v.s. Information
- Machine (function/algorithm) 需要在 polynomial time 下執行
⇒ 因為我們需要能在一定時間內看到結果，不想要等到天荒地老
⇒ 不一定強制要求 polynomial time，但這堂課大部分會是這樣
- Alice and Bob：就是 sender 和 receiver，通常是 Alice 要傳訊息給 Bob
⇒ 還有其他角色，可以參見 Wikipedia：
https://en.wikipedia.org/wiki/Alice_and_Bob
- 計算 (computation)：任何遵循 well-defined model (例如 algorithm、protocol) 的 calculation。
- Efficiency
Input size: $|x| = n$ bits
其他的就拿 complexity 概念來作為 efficiency 的概念
- Crypto 像是信仰 (Faith)？
密碼學不一定總是對的，但我們需要相信某些東西才能繼續在密碼學上前進
這些東西包含：
 - ⇒ 某些數學問題很難被解決
 - ⇒ 某些假設無法被打破 (通常指在 poly-time 底下)
 - ⇒ 某些底層的密碼工具 (underlying crypto primitives) 是安全的
 - ⇒ $P \neq NP$
 - ⇒ 亂數/隨機 (randomness)，因為我們不知道真的亂數長什麼樣，所以無法驗證

1.3 Overview

§ 什麼是密碼學？

如果我們不在意安全，那麼我們不需要密碼學。
(If do not care security, we won't need crypto.)

安全 (security) 可以由以下兩點來定義：

- 目的 (purpose)：我們需要達到什麼效果
- 需求 (requirements)：為了達到目的，我們需要達成哪些目標

一些密碼學相關的內容：

- 加密 (encryption)
- 數位簽章 (signature)
- 零知識 (zero knowledge)
- 安全計算 (secure computation)

1.4 Notations

Private key encryption (or “secret key encryption”)

就是對稱式加密，加密和解密皆使用同一個 key

Public key encryption

公鑰系統。一個公鑰會對應一個私鑰。公鑰會公開，私鑰不公開。

若 Alice 要傳訊息給 Bob，則 Alice 會使用自己的公鑰加密，並且讓 Bob 使用「與 Alice 的公鑰相對應的」私鑰進行解密。

Zero knowledge

A 想向 B 證明某件事情，但不想透漏任何其他的額外資訊。

Ex1：我想向你證明我有 100 萬，但不想真的放 100 萬現金在你眼前（以免被你搶走），所以我可以要求銀行開立證明來達到這個目的。Ex2: 我想向你證明我真的知道「威利在哪裡」。我可以用一張比原圖更大張的紙，並且在上面挖一個威利形狀的洞，以此來達到目的。

1.5 Story of solving impossibility

(這邊的例子經過一點點調整)

你的上司要求你解決一個問題 Q ，並且告知你如果無法解決問題就會被炒魷魚，並被另一個比你聰明的傢伙取代。你雖然不知道怎麼解決 Q ，但你知道另一個**相關的**知名問題 \tilde{Q} (Q tilde) 在現今根本就沒人會解。最後你告訴你的上司，由於「現在根本沒人知道如何解 \tilde{Q} 」，所以「也沒人會解 Q 」，因此這問題解不了，而另一個自稱聰明的傢伙其實是騙子。

重點就是

If there's a good algorithm for Q , then there exists a good one for another well-known problem \tilde{Q} .

這句話的逆否命題就是

If there's no algorithm for \tilde{Q} , then there's no algorithm for Q either.

這背後的概念就是 reduction (就演算法的那個 reduction)。

1.6 Principle of modern crypto

Kerckhoff's principle

「加密方法不能被要求是保密的，就算它落入敵人手中也不應該造成麻煩」
意即，整套加密方法的安全性只仰賴金鑰的保密。

(原文：It should not require secrecy, and it should not be a problem if it falls into enemy hands.)

Principle of modern crypto

1. Formal definition

- System framework (model)：系統長什麼樣子
- Security definition：如何定義安全

2. Precise assumption Π'

通常會是已知難題

從上一節的重點可以知道，我們通常會將加密法與某個已經被研究過的難題 (well-studied hardness) 做連結。若難題不是 well-studied，一來無法說服別人這個加密法安全，二來代表可能有人知道這個問題如何解決。

3. Construction Π

加密法的步驟是什麼

4. Security proof

基本上就是上一節的 reduction

如果假象的攻擊者可以在 definition (即第一個要素) 底下破解 Π ，那麼我可以構造另一個攻擊者，使其破解已知難題 Π' 。

上面逆否命題的推論可以寫成：如果 Π' 是安全的 (意即不被破解)，那麼 Π 就是安全的。

加密系統 = 產生 key (key generation) + 加密 (encryption) + 解密 (decryption)

1.7 History of cryptography

§ Shift cipher

使用 private key encryption。

Key 是每個字母需要做 shift 的次數。

Key generation：選擇一個 $key \in \{0, 1, \dots, 25\}$

Encryption：將每個字母對應的數字 shift key 位

Decryption：將每個字母對應的數字反方向 shift key 位

破解：最多嘗試 26 次就可以找到答案

§ Substitution cipher

使用 private key encryption。

Key generation：將每個字母逐一對應到另一個字母，以此這個 mapping 作為 key

Encryption：將明文中的字母按照 key 逐一對應過去 Decryption：將密文中的字母按照 key 逐一對應回來

破解：字典攻擊（常用詞）+ 頻率分析（「E」在英文中出現的次數比較多）

加強：明文中不使用頻率較高的字母

§ Stronger cipher?

Vigenère cipher：設定偏移量為字母在明文中所在的位置。

DES (first published in 1975, and standardized in 1977)

AES

§ History about PKC

1974: Merkle proposed the notion

1976: Diffie-Hellman proposed the key exchange solution (Turing Award 2015)

1977: Rivest-Shamir-Adleman proposed the first PKE (Turing Award 2002)

UK claimed their Government Communications Headquarters proposed such PKC idea before them.

Other improvements: ID-based encryption from Weil Pairing

使用了不同的 assumption，所以概念上較簡單，執行起來也較有效率（關於 ID-based 的概念，之後如果有時間，可能會提到）

2 L2: Perfect Secrecy

2.1 Encryption definition

三個 space :

- \mathcal{M} : message space
- \mathcal{C} : ciphertext space
- \mathcal{K} : key space

三種動作 :

- Gen (key generation): probabilistic algorithm .
 $\text{Gen}(1^\lambda) \rightarrow k \in \mathcal{K}$, where λ is security parameter, or a symbol length (usually related to enc/dec execution time).
- Enc (encryption): probabilistic algorithm .
For $m \in \mathcal{M}$, $\text{Enc}_k(m) \rightarrow c \in \mathcal{C}$
- Dec (decryption): deterministic algorithm .
For $c \in \mathcal{C}$, $\text{Dec}_k(c) := m \in \mathcal{M}$

注意上述使用 \rightarrow 表示 probabilistic algorithm ; 使用 $:=$ 表示 deterministic algorithm . Probabilistic algorithm 就是每次執行都有可能產生不同結果 , 而 deterministic algorithm 則代表每次執行必定產生出相同結果 .

正確性 (Correctness) 定義 :

$$\Pr[\text{Dec}_k(c) := m : c \leftarrow \text{Enc}_k(m), k \leftarrow \text{Gen}(1^\lambda)] = 1$$

即由正確的金鑰一定可以成功進行解密 .

對於某些系統 , 我們不一定會要求其機率是 1 , 可能會是接近 1 (即 ≈ 1)

2.2 Notations

Distribution over \mathcal{K} : denoted as $\text{dist}(\mathcal{K})$, which is defined by running Gen, and taking the output key .

一個好的 key generation algorithm 應該要均勻地 (uniformly) 選擇 key (即選擇 key space 中的每個 key 的機率都是相等的) . 因為如果我們有意地提高某些 key 的選擇機率 , 那麼攻擊者便可以藉由頻率分析知道我們的偏好 , 進而增加破解的機率 .

K : a random variable, denoting the value of key generated by Gen.

$\Pr[K = k]$: for all $k \in \mathcal{K}$, it denotes the probability that the key generated by Gen is equal to k .

上面三項皆可以套用至明文 ($\text{dist}(\mathcal{M})$ 、 M 、 $\Pr[M = m]$) 和密文 ($\text{dist}(\mathcal{C})$ 、 C 、 $\Pr[C = c]$) .

當我們固定一個 encryption scheme $\Pi = (\text{Gen}, \text{Enc}, \text{Dec})$ 且 $\text{dist over } \mathcal{M}$, 這就可以根據所給定的 $k \in \mathcal{K}$ 和 $m \in \mathcal{M}$, 確定 $\text{dist}(\mathcal{C})$.

2.3 Example of notations

§ Example 1

一個 adversary A 知道訊息是「attack today」的機率是 70%、「not attack」的機率是 30%，所以

$$\Pr[M = A.T.] = 0.7, \quad \Pr[M = N.A.] = 0.3$$

Random variables K 和 M 會假設沒有關係 (independent)。因為 $\text{dist}(\mathcal{K})$ 由 Gen 決定，而 $\text{dist}(M)$ 由我們想要加密的 context 決定。

§ Example 2 - Shift cipher

$K = \{0, 1, 2, \dots, 25\}$ with $\Pr[K = k] = \frac{1}{26}$ (aka uniformly distributed).

Let distribution of \mathcal{M}

$$\text{dist}(\mathcal{M}) = \begin{cases} \Pr[M = 'a'] = 0.7 \\ \Pr[M = 'z'] = 0.3 \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned} \Pr[C = 'b'] &= \Pr[M = 'a' \wedge K = 1] + \Pr[M = 'z' \wedge K = 2] \\ &= \Pr[M = 'a'] \cdot \Pr[K = 1] + \Pr[M = 'z'] \cdot \Pr[K = 2] \quad (\text{By independence}) \\ &= 0.7 \cdot \frac{1}{26} + 0.3 \cdot \frac{1}{26} \\ &= \frac{1}{26} \end{aligned}$$

Condition probability

$$\begin{aligned} \Pr[M = 'a' | C = 'b'] &= \frac{\Pr[C = 'b' | M = 'a'] \cdot \Pr[M = 'a']}{\Pr[C = 'b']} \\ &= \frac{\frac{1}{26} \cdot 0.7}{\frac{1}{26}} \end{aligned}$$

where $\Pr[C = 'b' | M = 'a']$ means $K = 1$, and $\Pr[K = 1] = \frac{1}{26}$

[Bayes' theorem]

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[B|A] \cdot \Pr[A]}{\Pr[B]} \quad \text{if } \Pr[B] \neq 0$$

2.4 Intuition for security

Adversary 通常在收發兩端的中間進行竊聽 (eavesdrop)。

Adversary 知道 $\text{dist}(\mathcal{M})$ 和 encryption scheme $\Pi = (\text{Gen}, \text{Enc}, \text{Dec})$ ，而不知道 key。

A scheme Π meets **perfect secrecy** means observation (usually from adversary) on ciphertext c should give no additional information.

意即密文 c 不能給攻擊者有更多的資訊可以更準確地進行猜測，也可以說 c 不會洩漏更多的資訊。

2.5 Perfect secrecy

Formal definition of perfect secrecy (Definition 1)

An encryption scheme $\Pi = (\text{Gen}, \text{Enc}, \text{Dec})$ with message space \mathcal{M} is perfect secrecy if for every probability distribution over \mathcal{M} , every message $m \in \mathcal{M}$ and every ciphertext $c \in \mathcal{C}$ for $\Pr[C = c] > 0$

$$\Pr[M = m|C = c] = \Pr[M = m]$$

簡單來說，就是在觀察 c 之後，所得知的 $\text{dist}(\mathcal{M})$ 與在觀察 c 之前相等。
若 c 洩漏了某些資訊，則上式中的等號 (=) 應該改成大於符號 (>)。

Example: shift cipher

這邊用和前面一樣的例子：

$$\begin{aligned}\Pr[C = 'b'] &= \Pr[M = 'a' \wedge K = 1] + \Pr[M = 'z' \wedge K = 2] \\ &= \Pr[M = 'a'] \cdot \Pr[K = 1] + \Pr[M = 'z'] \cdot \Pr[K = 2] \quad (\text{By independence}) \\ &= 0.7 \cdot \frac{1}{26} + 0.3 \cdot \frac{1}{26} \\ &= \frac{1}{26}\end{aligned}$$

$$\Pr[C = 'b'] = \frac{1}{26}$$

$$\begin{aligned}\Pr[M = 'a'|C = 'b'] &= \frac{\Pr[C = 'b'|M = 'a'] \cdot \Pr[M = 'a']}{\Pr[C = 'b']} \\ &= \frac{\frac{1}{26} \cdot 0.7}{\frac{1}{26}} \\ &= 0.7 \\ &= \Pr[M = 'a']\end{aligned}$$

由此可知，shift cipher 是 perfect secrecy。

3 L3

3.1 Perfect secrecy II

Formal definition of perfect secrecy (Definition 2)

For every $m, m' \in \mathcal{M}$ and every $c \in \mathcal{C}$,

$$\Pr[\text{Enc}_K(m) = c] = \Pr[\text{Enc}_K(m') = c]$$

Example: shift cipher

$$\Pr[M = 'a'] = 0.7$$

$$\Pr[M = 'z'] = 0.3$$

Let $m = 'a'$, and $m' = 'z'$.

Then

$$\Pr[\text{Enc}_K('a') = 'b'] = \frac{1}{26} = \Pr[\text{Enc}_K('z') = 'b']$$

(For further explanation, if $\text{Enc}_K('a') = 'b'$, K must be 1, where probability is $\frac{1}{26}$; similarly, if $\text{Enc}_K('z') = 'b'$, K must be 2. That's why their probabilities are same.)

Lemma

An encryption scheme $\Pi = (\text{Gen}, \text{Enc}, \text{Dec})$ with message space is perfectly secret (which means Π satisfies Def. 1), the above equation (which is Def. 2) holds for every $m, m' \in \mathcal{M}$ and every $c \in \mathcal{C}$.

意即 Def. 1 等價 (equivalent) 於 Def. 2.

Proof of Def. 2 to Def. 1

Fix a $\text{dist}(\mathcal{M})$, a message m and a ciphertext c for which $\Pr[C = c] > 0$.

If $\Pr[M = m] = 0$, then $\Pr[M = m|C = c] = \Pr[M = m]$. It always holds.

If $\Pr[M = m] > 0$:

(i) $\Pr[C = c|M = m] = \Pr[\text{Enc}_K(m) = c|M = m] = \Pr[\text{Enc}_K(M) = c] = \alpha$

(ii) For every $m' \in \mathcal{M}$,

$$\Pr[C = c|M = m'] = \Pr[\text{Enc}_K(M) = c|M = m'] = \Pr[\text{Enc}_K(m') = c] = \alpha$$

(iii) By Bayes' Theorem,

$$\begin{aligned} \Pr[M = m|C = c] &= \frac{\Pr[C = c|M = m] \cdot \Pr[M = m]}{\Pr[C = c]} \\ &= \frac{\Pr[C = c|M = m] \cdot \Pr[M = m]}{\sum_{m' \in \mathcal{M}} \Pr[C = c|M = m'] \cdot \Pr[M = m']} && \text{(by (i) and (ii))} \\ &= \frac{\alpha \cdot \Pr[M = m]}{\sum_{m' \in \mathcal{M}} \alpha \cdot \Pr[M = m']} \\ &= \frac{\alpha \cdot \Pr[M = m]}{\alpha \cdot \sum_{m' \in \mathcal{M}} \Pr[M = m']} \\ &= \frac{\cancel{\alpha} \cdot \Pr[M = m]}{\cancel{\alpha} \cdot \sum_{m' \in \mathcal{M}} \Pr[M = m']} \\ &= \Pr[M = m] \end{aligned}$$

Proof of Def. 1 to Def. 2 (Quiz)

Fix a $\text{dist}(\mathcal{M})$, a message m and a ciphertext c for which $\Pr[C = c] > 0$.

If $\Pr[C = c] = 0$, then $\Pr[C = c|M = m] = \Pr[C = c|M = m'] = 0$. It always holds. For $\Pr[\text{Enc}_K(m) = c]$,

$$\begin{aligned}\Pr[\text{Enc}_K(m) = c] &= \Pr[C = c|M = m] \\ &= \frac{\Pr[M = m|C = c] \cdot \Pr[C = c]}{\Pr[M = m]} \\ &= \frac{\Pr[M = m] \cdot \Pr[C = c]}{\Pr[M = m]} && \text{(by Def. 1)} \\ &= \frac{\cancel{\Pr[M = m]} \cdot \Pr[C = c]}{\cancel{\Pr[M = m]}} \\ &= \Pr[C = c]\end{aligned}$$

For $\Pr[\text{Enc}_K(m') = c]$,

$$\begin{aligned}\Pr[\text{Enc}_K(m) = c] &= \Pr[C = c|M = m'] \\ &= \frac{\Pr[M = m'|C = c] \cdot \Pr[C = c]}{\Pr[M = m']} \\ &= \frac{\Pr[M = m'] \cdot \Pr[C = c]}{\Pr[M = m']} && \text{(by Def. 1)} \\ &= \frac{\cancel{\Pr[M = m']} \cdot \Pr[C = c]}{\cancel{\Pr[M = m']}} \\ &= \Pr[C = c]\end{aligned}$$

From above, we know that

$$\Pr[\text{Enc}_K(m) = c] = \Pr[\text{Enc}_K(m') = c]$$

3.2 Perfect secrecy III

Adversarial indistinguishability

Adversarial indistinguishable experiment

$$\text{Priv}K_{A,\Pi}^{\text{eav}}$$

其中 A 代表 adversary, Π 代表 scheme, and eav 代表 eavesdropper.

Perfect Secrecy

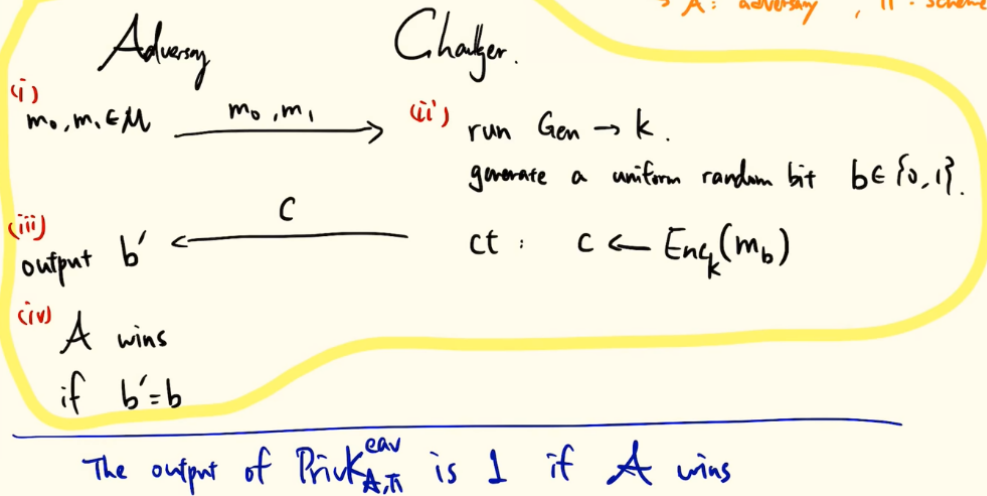
Adversarial indistinguishability

Adversarial indistinguishable experiment

$\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}$

eav = eavesdropper.

↳ A: adversary, Π : scheme.



這個 experiment 有兩個人：adversary 和 Challenger。

Step 1：Adversary 會從 message space 中選出兩份訊息 m_0 和 m_1 ，並這兩份訊息發送給 Challenger。

Step 2：Challenger 會執行 key generation algorithm Gen 來產生 key k ，並 generate 一個 uniform random bit $b \in \{0, 1\}$ 。最後產生出 ciphertext $c \leftarrow \text{Enc}_k(m_b)$ ，再將 c 回傳給 adversary。

Step 3：Adversary 會 output 一個 b' 來代表它猜測 b 的結果。

Step 4：若 $b' = b$ ，則 adversary 成功猜對了。

這個 experiment $\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}$ 的 output 就是 adversary 是否猜對；也可以說，當 $\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}} = 1$ ，則 $b' = b$ 。

Formal definition of perfect secrecy (Definition 3, defined by perfect indistinguishability)

$\Pi = (\text{Gen}, \text{Enc}, \text{Dec})$ with message space \mathcal{M} is perfectly indistinguishable if for every adversary A , it holds

$$\Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}} = 1] = \frac{1}{2}$$

意思：猜中的機率為 $\frac{1}{2}$ ，和沒有 c 的前提下，隨便亂猜的機率（即 $\Pr[(\text{randomly output } b') \wedge (b' = b)] = \frac{1}{2}$ ）是一樣的。代表 c 並沒有洩漏任何額外資訊。

這個命題和 $\Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}} = 0] = \frac{1}{2}$ 是等價的。

注意：若 $\Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}} = 1] < \frac{1}{2}$ 並不代表攻擊者更不會猜。因為 $\Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}} = 1] + \Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}} = 0] = 1$ ，所以 $\Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}} = 0] > \frac{1}{2}$ 。因此猜另一種情況的正確機率會更高。

Lemma

Π is perfectly secret if and only if it is perfectly indistinguishable.

Proof of Def. 2 to Def. 3

由 Def. 2 可知

$$\Pr[\text{Enc}_K(m_0) = c] = \Pr[\text{Enc}_k(m_1) = c]$$

又因為 $c \leftarrow \text{Enc}_k(m_b)$ ，所以

$$\Pr[\text{Enc}_K(m_0) = c] = \Pr[b = 0]$$

$$\Pr[\text{Enc}_K(m_1) = c] = \Pr[b = 1]$$

因此 $\Pr[b = 0] = \Pr[b = 1] = \frac{1}{2}$ (因為在本例中 $\Pr[b = 0] + \Pr[b = 1] = 1$)。

$$\begin{aligned} \Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}] &= \Pr[b' = b] \\ &= \Pr[b' = b \wedge b = 0] + \Pr[b' = b \wedge b = 1] && \text{(rewrite)} \\ &= \Pr[b' = b | b = 0] \times \Pr[b = 0] + \Pr[b' = b | b = 1] \times \Pr[b = 1] && \text{(rewrite)} \\ &= \Pr[b' = 0] \times \Pr[b = 0] + \Pr[b' = 1] \times \Pr[b = 1] \\ &= \Pr[b' = 0] \times \frac{1}{2} + \Pr[b' = 1] \times \frac{1}{2} && \text{(by Def. 2 denoted above)} \\ &= \frac{1}{2}(\Pr[b' = 0] + \Pr[b' = 1]) \\ &= \frac{1}{2} && (\because \Pr[b' = 0] + \Pr[b' = 1] = 1) \end{aligned}$$

Proof of Def. 3 to Def. 2 (Bonus)

3.3 One-Time Pad (OTP)

Construction of OTP

Fix an integer $l > 0$, $|\mathcal{M}| = |\mathcal{C}| = |\mathcal{K}| = l$.

(which means all are length- l binary strings, such as $\{0, 1\}^l$)

Key generation algorithm Gen: uniformly randomly chooses a key $k \in \mathcal{K}$, k is l -bits.

Encryption algorithm Enc: given $k \in \{0, 1\}^l$ and a message $m \in \{0, 1\}^l$, Enc outputs a ciphertext $c = m \oplus k$.

Decryption algorithm Dec: given k, c , Dec outputs message $m = c \oplus k$.

Prove that OTP is perfectly secret

Prove by Def. 1

(i) For an arbitrary $c \in \mathcal{C}$ and $m \in \mathcal{M}$

$$\Pr[C = c|M = m] = \Pr[\text{Enc}_K(m) = c] = \Pr[m \oplus K = c] = \Pr[K = m \oplus c] = \frac{1}{2^l}$$

(ii) Fix any $\text{dist}(\mathcal{M})$, for any $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\Pr[C = c] &= \sum_{m' \in \mathcal{M}} \Pr[C = c|M = m'] \cdot \Pr[M = m'] \\ &= \sum_{m' \in \mathcal{M}} \frac{1}{2^l} \cdot \Pr[M = m'] \\ &= 2^{-l} \left(\sum_{m' \in \mathcal{M}} \Pr[M = m'] \right) \\ &= 2^{-l}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\Pr[M = m|C = c] &= \frac{\Pr[C = c|M = m] \cdot \Pr[M = m]}{\Pr[C = c]} \\ &= \frac{2^{-l} \cdot \Pr[M = m]}{2^{-l}} \\ &= \Pr[M = m]\end{aligned}$$