Notes of Cryptography

Squirrel

March 17, 2025

Preface

Course

密碼學設計與分析 Cryptography Design and Analysis (11320IIS500900) in NTHU

5 L5

5.1 Basics

§ Scenario

Sender S 和 receiver R 彼此有有一把相同的 key k，且 S 想要發送訊息給 R。
在發送訊息前，S 會先使用 k 將明文 m 加密為密文 c（$c \leftarrow \mathrm{Enc}_k(m)$），之後 S 將 c 傳送給 R。
R 在收到 c 後，使用同一把 key k 將 c 解密（$m := \mathrm{Dec}_k(c)$）來得到 m。

關於這個 scenario 的正式的定義可以參見 Definition 5 Private key encryption。

§ 安全性定義

使用前面提到的 $PrivK^{eav}_{A,\Pi}$，參見 3.2 Perfect secrecy III。

5.2 EAV-security

EAV = eavesdropping

Definition 6 (EAV-secruity of private key encryption)
A private key encryption scheme Π is **EAV-secure** if for all PPT adversary A, there is a negligible function negl such that for all n,

$$\Pr[PrivK^{eav}_{A,\Pi}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$$

(The probability is taken over randomness used by adversary and used in experiment.)

§ Equivalent Formulation of EAV-security

前一節 EAV-security 的定義等價於下面這句話：
「無論 PPT adversary A 看到由 m_0 或 m_1 加密過後的密文，其表現都相同。」
(Every PPT adversary behaves the same whether it sees ciphertext of m_0 or m_1.)

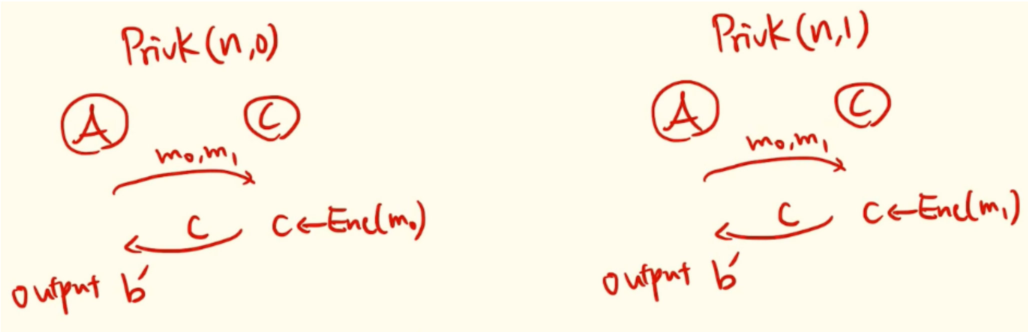
更精確的定義是：

- 修改之前的定義為 $PrivK^{eav}_{A,\Pi}(n,b)$，其定義都和之前一樣，除了 b 是固定的，而不是隨機選擇的。
- 定義 $out_A(PrivK^{eav}_{A,\Pi}(n,b)) = b'$，其中 b' 是 A 的 output。
- 沒有 PPT adversary A 可以知道現在是 experiment $PrivK^{eav}_{A,\Pi}(n,b)$ 或 $PrivK^{eav}_{A,\Pi}(n,b)$。

正式定義如下：

Definition 7 (equivalent formulation of EAV-security)
Π is EAV-secure if for all PPT adversary A, there is a negligible function negl such that

$$|\Pr[out_A(PrivK^{eav}_{A,\Pi}(n,0)) = 1] - \Pr[out_A(PrivK^{eav}_{A,\Pi}(n,1)) = 1] \leq \mathrm{negl}(n)$$



Quiz

In $PrivK$, we define A to choose two messages with the same length.
Please write your thought for the impossibility to support arbitrary-length messages.

5.3 Private Key Encryption

§ Pseudorandom Generator

Definition 8 (pseduorandom generator, PRG)
Let l be a polynomial and G is a deterministic polynomial-time algorithm. For any n and input $s \in \{0,1\}^n$, the output of $G(s)$ is $l(n)$-length.
We say G is a PRG if:

- Exapnsion: for every n, it holds $l(n) > n$. l is a so-called expansion factor of G.
- Pseudorandomness: for any PPT algorithm D (aka distinguisher), there is a negligible function negl such that

$$|\Pr[D(G(s)) = 1] - \Pr[D(r) = 1]| \leq \mathrm{negl}(n)$$

where $s \in \{0,1\}^n$ and $r \in \{0,1\}^{l(n)}$ is a turly random variable.

§ PRG-based Construction of Fixed-length Private Key Encryption

Let G be a PRG with expansion factor l.
Scheme $\Pi = \mathrm{Gen}, \mathrm{Enc}, \mathrm{Dec}$.

- $\mathrm{Gen}(1^n)$: on input 1^n, choose uniform $k \in \{0,1\}^n$.
- $\mathrm{Enc}(k, m)$: with input of a message $m \in \{0,1\}^{l(n)}$ and outputs a ciphertext $c = G(k) \oplus m$
- $\mathrm{Dec}(k, c)$: with input of a ciphertext $c \in \{0,1\}^{l(n)}$ and outputs a message $m = G(k) \oplus c$

這種構造法和 OTP (見 3.3 One-Time Pad (OTP)) 很像。那時候的 OTP 會遇到 pefect secrecy 的限制，也就是 key 的長度至少要和 message 一樣長 ($|\mathcal{K}| \geq |\mathcal{M}|$)。在這裡，我們通過 PRG 來將原本的 key 長度 n 擴展成 $l(n)$，藉此來降低 key 的長度。而其代價就是，這種使用 PRG 的方法一定不是 perfect secrecy。

P.S. 由於 private key encryption 要求雙方要事先使用安全通道交換同一把 key。若在這種情景下使用和 message 一樣長的 key，那我們就可以直接使用這個安全通道交換訊息本身了，而無需進行加密。

§ PRG-based construction is EAV-secure

Theorem 3
If G is a pseudorandom generator, then the construction Π is a EAV-secure.

其逆否命題為「如果 Π 不是 EAV-secure，則 G 也不是 PRG」。

證明思路

1. If w is uniform chosen form $\{0,1\}^{l(n)}$,

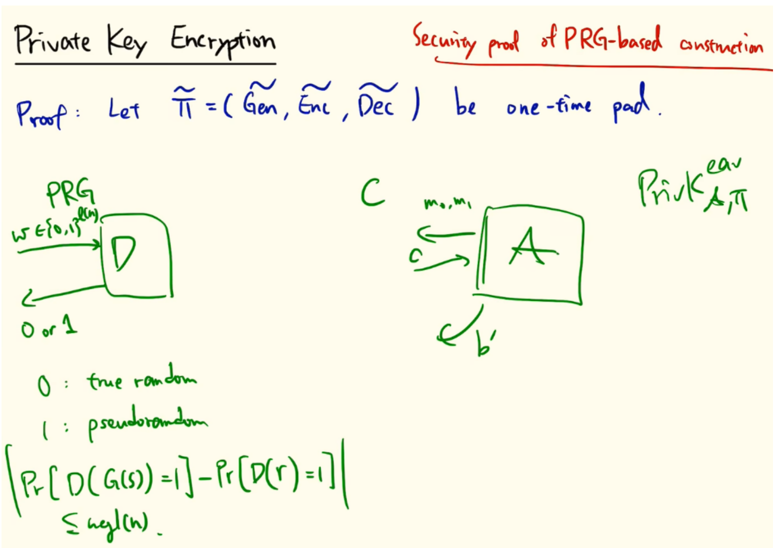
$$\Pr[D(w)=1] = \Pr[PrivK^{eav}_{A,\tilde{\Pi}}(n)=1] = \frac{1}{2}$$

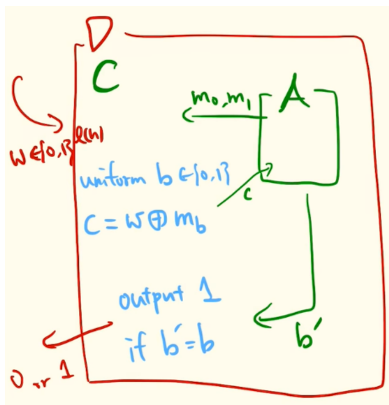
   這種情況下是 one-time pad 的情況，也就是使用 ture randomness。
2. If $w = G(k)$ by choosing uniform $k \in \{0,1\}^n$,

$$\Pr[D(G(k))=1] = \Pr[PrivK^{eav}_{A,\Pi}(n)=1]$$

   這種情況下是使用 pseudorandomness。
   這個機率是我們所要證明的，可以透過第三點來反推其機率為 $\leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$
3. If G is PRG,

$$|\Pr[D(G(s))=1] - \Pr[D(w)=1]| \;\leq\; \mathrm{negl}(n)$$





Proof

Let $\widetilde{\Pi} = (\widetilde{\mathrm{Gen}}, \widetilde{\mathrm{Enc}}, \widetilde{\mathrm{Dec}})$ be one-time pad.

$\square$