Лабораторная работа №5. Модель хищник - жертва

Вариант 28

Смородова Дарья Владимировна

2022 March 12th

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Целью данной лабораторной работы является изучение особенностей модели хищник-жертва, построение графиков зависимости и изменения численности хищников от численности жертв при заданных начальных условиях, а также нахождение стационарного состояние системы.

2 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -0.69x(t) + 0.059x(t)y(t) \\
\dfrac{dy}{dt} = 0.49y(t) - 0.096x(t)y(t)
\end{cases}
$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 19$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

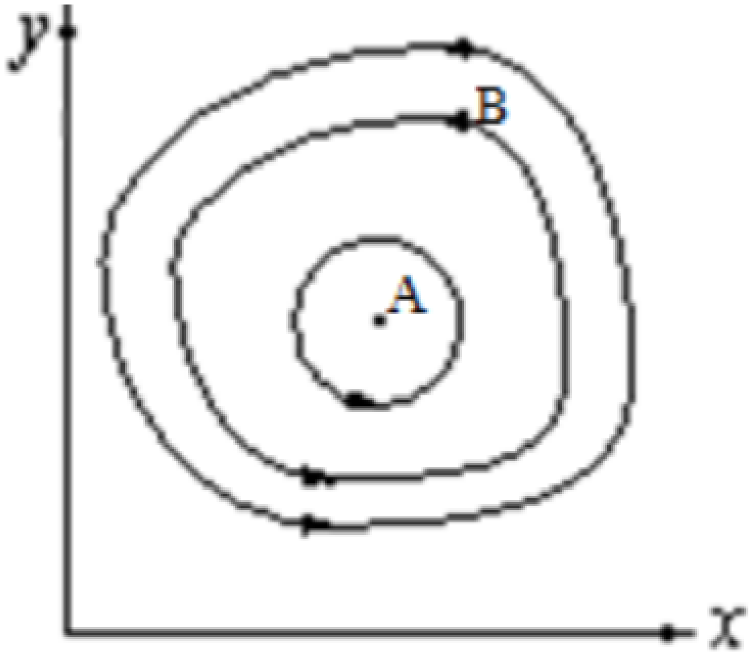

Figure 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис.3.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели (2):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 (рис.3.2).

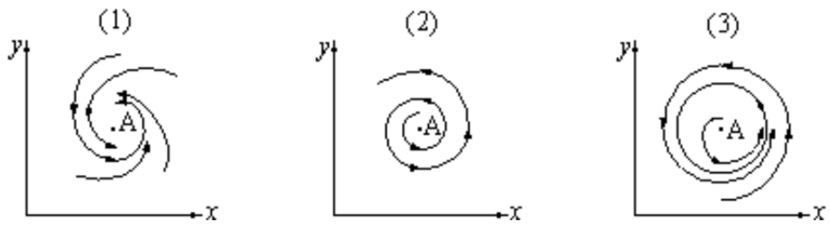

Figure 3.2: Мягкая модель борьбы за существование

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости. [1]

[1] Кулябов, Д.С. Модель хищник - жертва.

4 Выполнение лабораторной работы

1. Выполнять данную лабораторную работу я буду в программе OpenModelica.

2. Напишем программу для построения графика зависимости численности хищников от численности жертв, а также графика изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 19$ (fig.4.1):

```
model lab05
parameter Real a = -0.69;
parameter Real b = -0.059;
parameter Real c = -0.49;
parameter Real d = -0.096;
parameter Real x0 = 8;
parameter Real y0 = 19;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
Real static1;
Real static2;

equation

der(x) = a*x - b*x*y;
der(y) = -c*y + d*x*y;
static1 = c/d;
static2 = a/b;

end lab05;
```

Figure 4.1: Код программы

3. Получим график изменения численности хищников и численности жертв (fig.4.2):

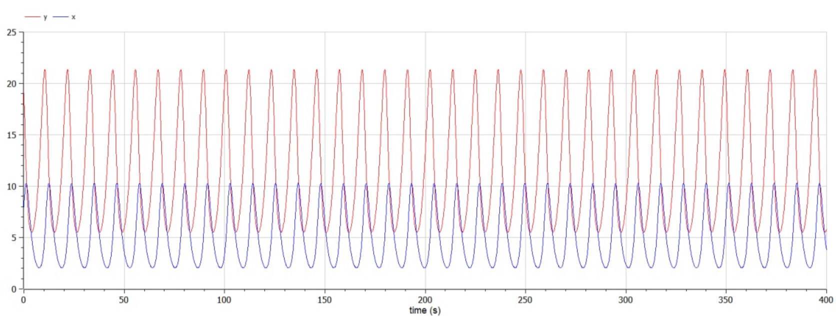

Figure 4.2: График изменения численности хищников и численности жертв

5. Получим график зависимости численности хищников от численности

жертв (fig.4.3):

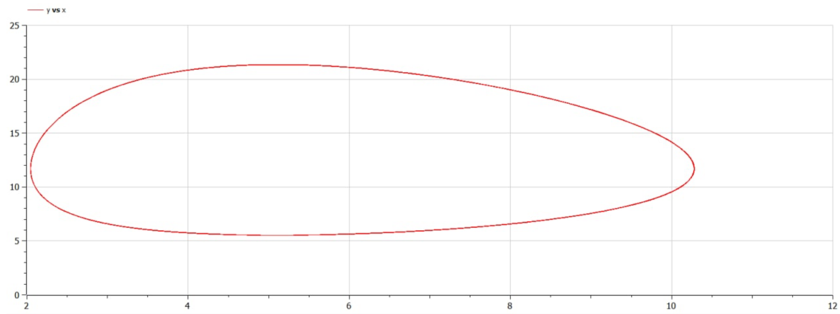

Figure 4.3: График зависимости численности хищников от численности жертв

6. Найдем стационарное состояние системы (fig.4.4):

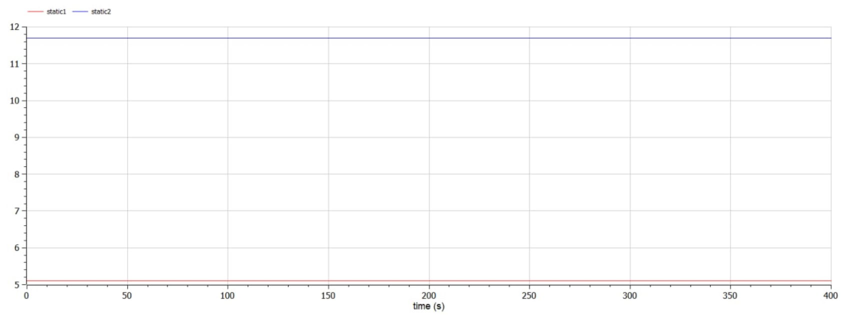

Figure 4.4: Стационарное состояние системы

5 Выводы

В ходе данной лабораторной работы, мы изучили особенностей модели хищник-жертва, построили графиков зависимости и изменения численности хищников от численности жертв при заданных начальных условиях, а также нашли стационарное состояние системы.

6 Список литературы

1. Кулябов, Д.С. Модель хищник - жертва / Д.С.Кулябов. - Москва: - 7 с.