UNIVERSIDAD EAFIT

GESTIÓN DE RIESGOS FINANCIEROS

Stephanía Mosquera López
smosqueral@eafit.edu.co

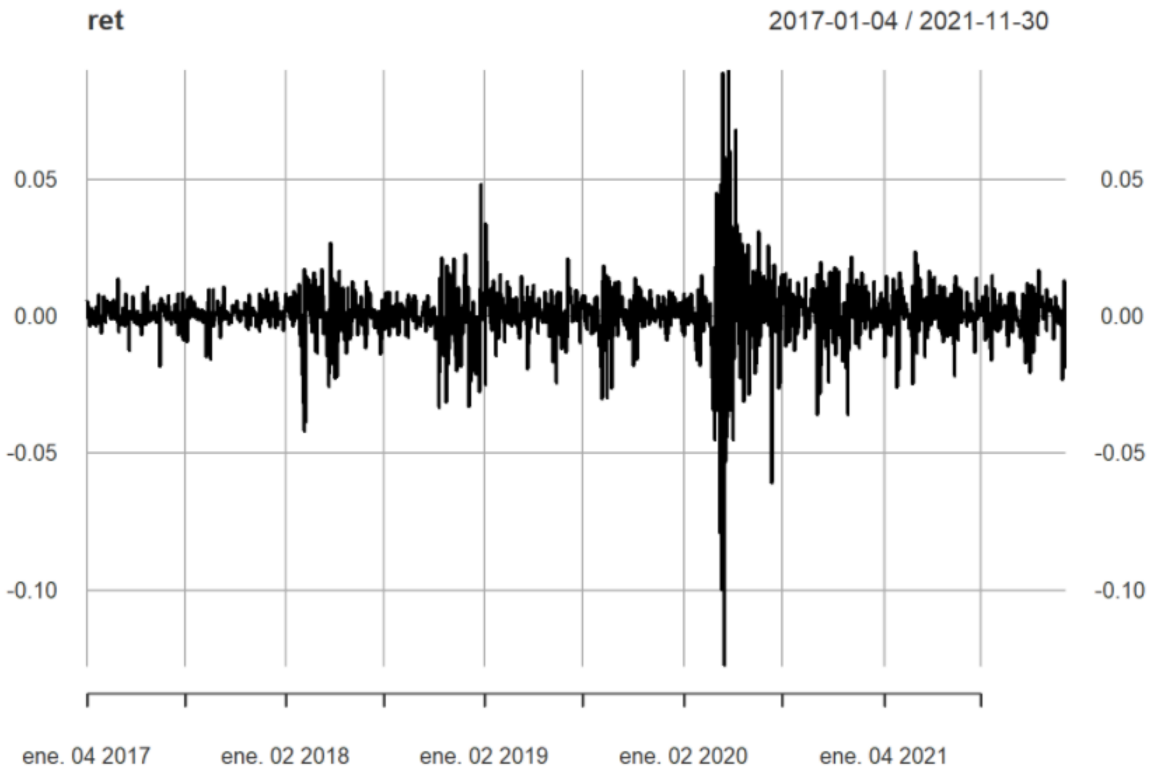
Escuela de Economía y Finanzas

2022-I

Modelación de la Volatilidad

La **volatilidad** es un indicador fundamental para la cuantificación del riesgo de mercado.

Representa una medida de dispersión de los rendimientos con respecto al promedio o la media de los mismos en un periodo determinado.



Modelación de la Volatilidad

La volatilidad tiene dos características:

1. Es **no observable** (necesita ser estimada)
2. **No es constante** en el tiempo (depende de las condiciones del mercado)

Así, la volatilidad relevante para el análisis financiero es la **condicional** al conjunto de información disponible.

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_t^2} \Rightarrow$$ **Volatilidad Condicional**

Modelación de la Volatilidad

Existen dos aproximaciones para estimar la volatilidad:

Volatilidad Implícita: ignora la historia – resuelve para la volatilidad implícita en los precios de mercado.

e.g.: VIX

Volatilidad Histórica: utiliza el pasado.

e.g.: volatilidad histórica simple, EWMA, GARCH, volatilidad realizada, volatilidad estocástica.

Volatilidad Implícita

Los **modelos de valoración de opciones** constituyen uno de los aspectos más importantes de la teoría financiera ⟹ tienen una gran influencia sobre la forma como se realizan coberturas sobre activos financieros.

- La teoría bajo la cual se desarrolla la modelación de los precios de las opciones comenzó con los aportes realizados por Fisher Black y Myron Scholes (1973).

- Es la base de numerosas generalizaciones y extensiones por parte de académicos y profesionales de las finanzas.

Volatilidad Implícita

El supuesto subyacente del modelo BS es que el precio de las acciones sigue una **caminata aleatoria** (random walk).

Cambios porcentuales en el precio de las acciones en un periodo corto de tiempo siguen una **distribución normal**.

La derivación de **BS** se basa en la noción de que es posible formar un portafolio con acciones y bonos que constituyen una réplica perfecta de una **opción de compra europea**.

$$Market\ option\ price = C(S, K, \hat{\sigma}, r, T)$$

Volatilidad Implícita

De modo que la **volatilidad implícita** de una opción es la volatilidad para la cual el precio de BS es igual al precio de mercado.

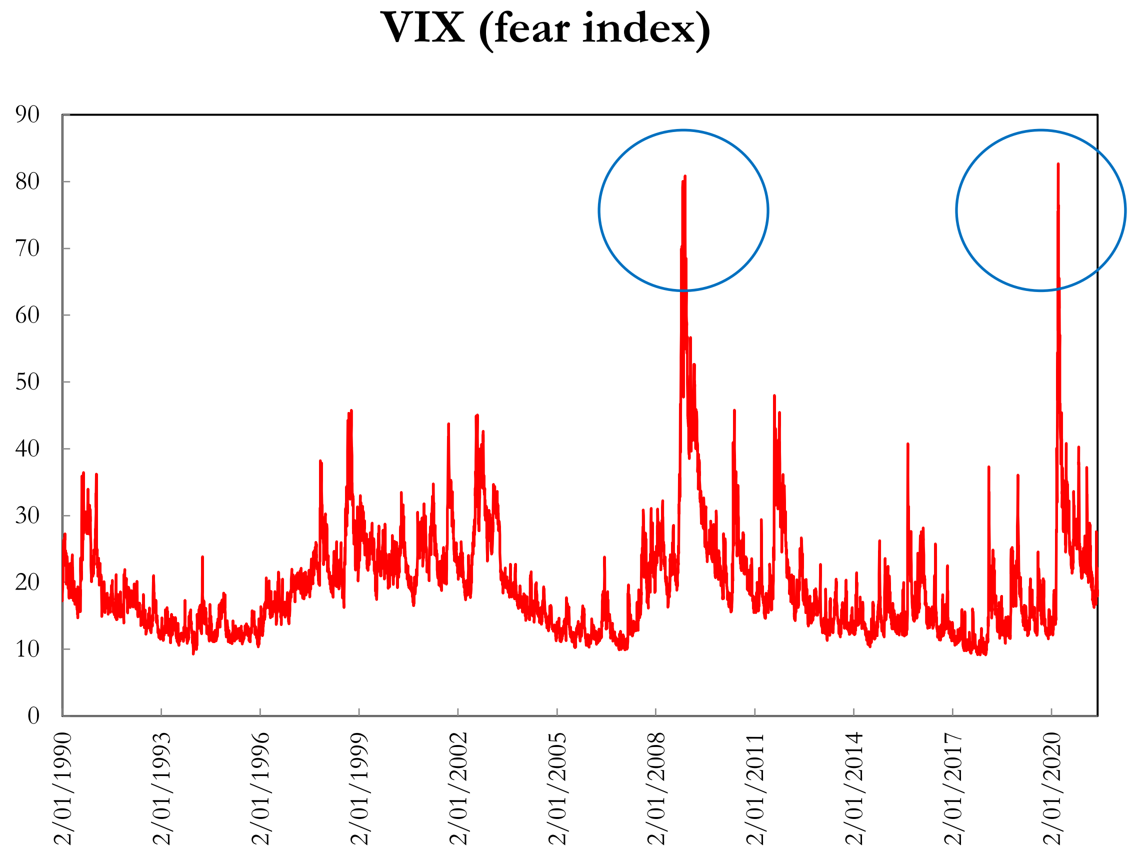
La justificación para usar opciones radica en que proveen una fuente rica de información sobre el sentimiento del mercado (Forward-looking)

Podemos estimar la volatilidad implícita de cualquier opción individual.

McDonald (2013)

Volatilidad Implícita

- El VIX rastrea **la volatilidad implícita (IV) en el tiempo.**
- Es la IV del índice **S&P 500** (promedio de puts y calls con diferentes strikes).
- El IV resulta superando en promedio la volatilidad realizada en el futuro.



Volatilidad Histórica

Sabemos de los hechos estilizados de los retornos financieros que la varianza medida como los retornos al cuadrado exhibe una alta autocorrelación.

Conglomerados de volatilidad: si tenemos un período reciente de alta varianza, entonces es posible que tengamos mañana una varianza alta también.

La forma más sencilla de capturar este fenómeno es estimando la varianza de mañana como el promedio simple de las $\boldsymbol{m}$ observaciones más cercanas:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_{t-i}^2 = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}R_{t-i}^2$$

Volatilidad Histórica

A pesar de ser una metodología sencilla no es buena para pronosticar la volatilidad condicional (al conjunto de información disponible).

Al otorgar el mismo peso a todas las observaciones, no captura el dinamismo de la volatilidad.

Tiene más sentido darles más peso a los datos más recientes:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, R_{t-i}^2$$

La variable $\boldsymbol{\alpha_i}$ es el peso dado a la observación de $\boldsymbol{i}$ días atrás, donde $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

EWMA

El modelo de volatilidad dinámica o con suavizamiento exponencial – **EWMA** (exponentially weighted moving average) es un caso particular de la ecuación anterior.

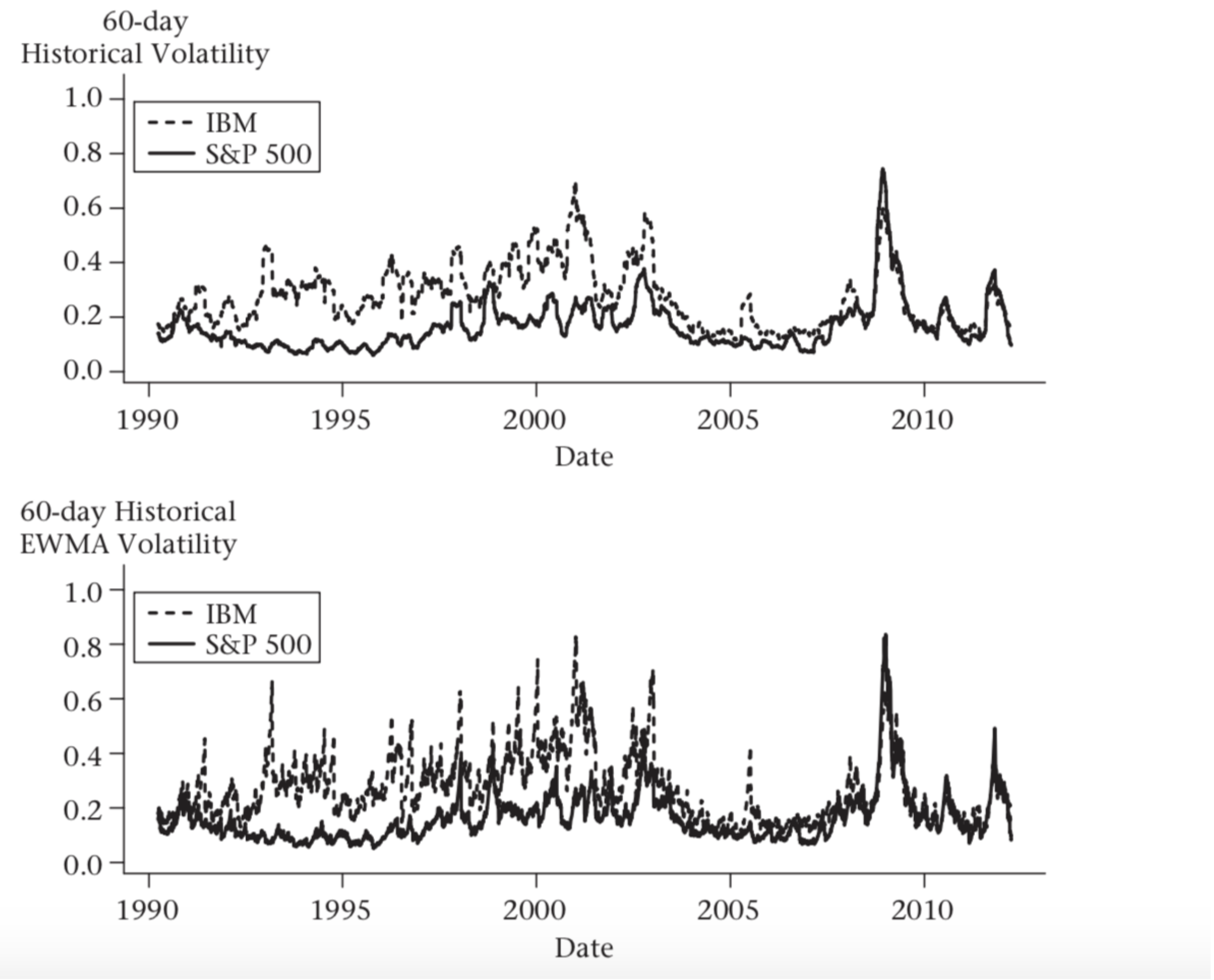
Los pesos, $\boldsymbol{\alpha_i}$, **decrecen exponencialmente** al movernos hacía atrás en el tiempo. Específicamente, $\boldsymbol{\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i}$ donde $\boldsymbol{\lambda}$ es igual a una constante entre cero y uno. En este caso, la volatilidad sería igual a:

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)\, R_{t-1}^2$$

El pronóstico de la varianza hoy es un promedio ponderado entre la varianza de ayer y el retorno de ayer al cuadrado.

EWMA vs Volatilidad Histórica

El estimador EWMA muestra más variabilidad que el de volatilidad histórica.



McDonald (2013)

Ventajas EWMA

- Los retornos más recientes tienen **mayor peso** sobre la varianza de mañana que los más distantes.

- Sólo hay un parámetro desconocido: $\boldsymbol{\lambda}$. RiskMetrics encontró que λ es muy similar entre acciones y que puede usarse igual a $\lambda = 0.94$.

- No requiere el almacenamiento de gran cantidad de datos para calcular la varianza de mañana.

Sin embargo, el modelo de RiskMetrics tiene ciertas desventajas que nos llevan a modelos más elaborados, como el **GARCH**.

El Modelo GARCH(1,1)

El modelo **GARCH** (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) fue propuesto por Bollerslev (1986). El modelo más simple es un $\mathrm{GARCH}(1,1)$:

$$\boldsymbol{\sigma_t^2 = \omega + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}$$

Note que el modelo de RiskMetrics puede verse como un caso especial del $\mathrm{GARCH}(1,1)$, donde $\alpha = 1 - \lambda$, $\beta = \lambda$, de tal forma que $\alpha + \beta = 1$, y $\omega = 0$.

El modelo GARCH, a diferencia del de RiskMetrics, separa el pronóstico de la varianza entre un componente de corto plazo y otro de largo.

El Modelo GARCH(1,1)

Podemos entonces diferenciar entre una varianza de:

- **“corto plazo”** que cambia marcadamente siguiendo un patrón recurrente autorregresivo,

- y una varianza de **“largo plazo”** o de largos intervalos, que parece seguir cumpliendo con el supuesto de ser la misma en distintos tramos de la muestra y que por lo tanto es consistente con el supuesto de estacionariedad.

El Modelo GARCH(1,1)

Diferenciando los momentos condicionales de los NO condicionales:

- Un **momento condicional** se refiere a un valor esperado, sujeto a diferentes conjuntos de información. Lo podríamos asimilar con el "*corto plazo*", la estimación del día a día.

- Un **momento no condicional** no está sujeto a ningún conjunto de información específico. Lo podemos asimilar con el "*largo plazo*", a estimaciones más estructurales.

El Modelo GARCH(1,1)

El momento **no condicional**, o la **varianza de largo plazo**, en el modelo GARCH es igual a:

$$\sigma^2 \equiv E[\sigma_t^2] = \omega + \alpha E[R_{t-1}^2] + \beta E[\sigma_{t-1}^2]$$

$$\sigma^2 = \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \omega/(1 - \alpha - \beta)$$

Si $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}$, como en el modelo de RiskMetrics, la varianza de largo plazo no está definida. Así, el EWMA ignora el hecho de que la varianza de largo plazo tiende a ser estable en el tiempo.

El Modelo GARCH(1,1)

Reemplazando ω en el $\text{GARCH}(1{,}1)$ tenemos que:

$$\sigma_t^2 = (1 - \alpha - \beta)\sigma^2 + \alpha R_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

La varianza de hoy es un promedio ponderado entre la varianza de largo plazo, los retornos de ayer al cuadrado, y la varianza de ayer.

El término $\boldsymbol{\alpha + \beta}$ se conoce como la **persistencia del modelo**. Una alta persistencia, $\boldsymbol{\alpha + \beta}$ cercano a uno, implica que los choques que mueven la varianza de su promedio de largo plazo van a persistir por un período largo de tiempo, pero eventualmente el pronóstico será igual a la varianza de largo plazo.

El Modelo GARCH(1,1)

En el caso del modelo de RiskMetrics la persistencia es igual a uno.

Un choque a la varianza persiste por siempre: un incremento en la varianza incrementa el pronóstico de la varianza en la misma cantidad para todos los horizontes de pronóstico futuros.

- En otras palabras, el EWMA ignora la varianza de largo plazo al momento de pronosticar.
- Si $\alpha + \beta$ es cercano a uno, ambos modelos pueden arrojar pronósticos similares, pero sólo para horizontes cortos de tiempo.

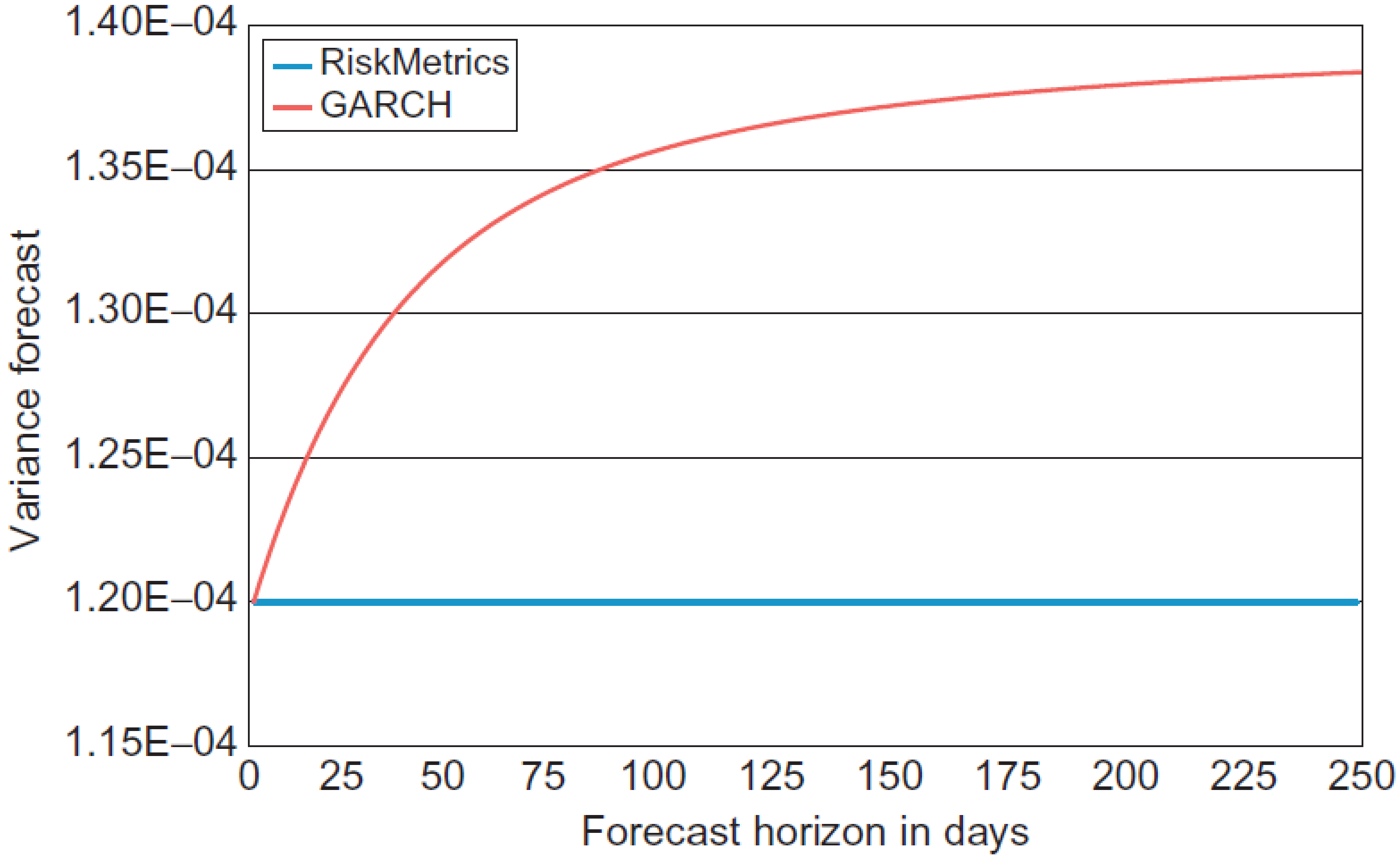
El Modelo GARCH(1,1)

- Si la varianza de hoy es alta, el modelo de **RiskMetrics** predice que todos los días futuros serán de varianza alta. El **GARCH** es más realista y asume que eventualmente la varianza futura va a converger a su valor promedio de largo plazo.

- Si el modelo RiskMetrics y el GARCH tienen la misma σ_t^2, y $\sigma_t^2 < \sigma^2$, entonces el pronóstico del GARCH será una varianza más alta que la de RiskMetrics.

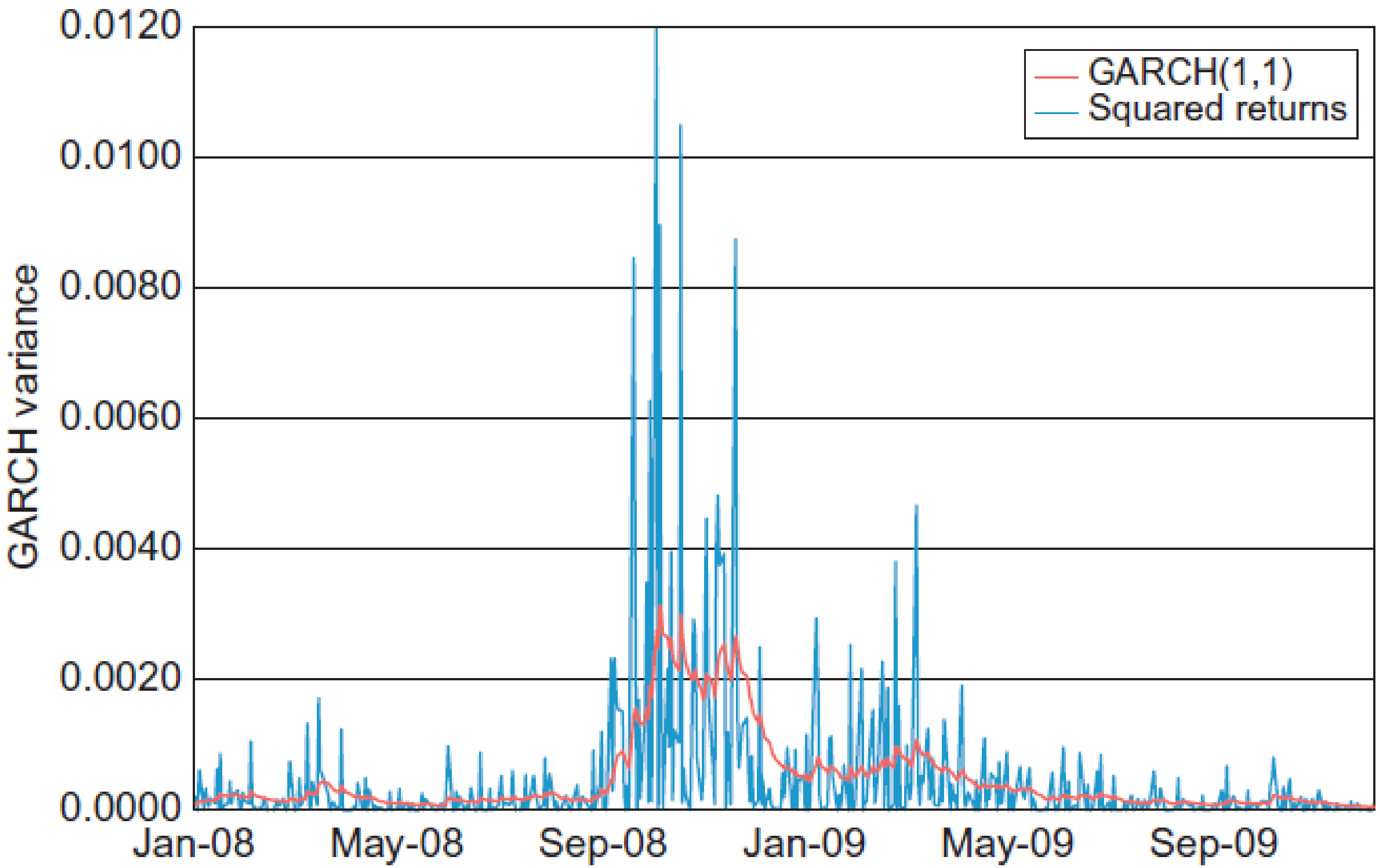
- Así, asumir el modelo RiskMetrics cuando los datos siguen más a un modelo GARCH **le puede dar al *risk manager* una falsa sensación de tranquilidad en el mercado en el futuro.**

Figure 4.2 Variance forecast for 1–250 days cumulative returns.



Notes: Assuming a common and low initial variance the plot shows the variance forecast for 1 through 250 trading days when using the RiskMetrics and GARCH model, respectively. The GARCH forecast converges to a long-run forecast that is above the current variance.

Figure 4.3 Squared S&P 500 returns with GARCH variance parameters estimated using QMLE.



Notes: The plot shows the daily squared return along with the daily GARCH variance forecast. The GARCH(1,1) model is used. The plots shows the 2008–2009 period.

Generalización al Modelo GARH(p,q)

Un modelo **GARCH** $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$**,** donde $\boldsymbol{p}$ es el orden del término GARCH $(\boldsymbol{\sigma_t^2})$ y $\boldsymbol{q}$ es el orden del término ARCH $(\boldsymbol{R_t^2})$, es igual a:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-i}^2$$

$\omega > 0$; $\alpha_i, \beta_j \geq 0, i = 1, \ldots, q; j = 1, \ldots, p; \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_j < 1$**,** para asegurar la no negatividad de la varianza no condicional y que los choques se desvanezcan en el tiempo.

Algoritmo de Estimación

1. Modele la media de los datos.

2. Realice pruebas de efectos ARCH.

3. Con los residuales al cuadrado del paso 1 construya las funciones de autocorrelación simple y parcial. Detecte el orden del GARCH como detectaba el orden del ARMA.

4. Las barras por fuera de la línea de confianza de la ACF de los residuales al cuadrado darán el orden de la parte ARCH, la PACF dará el orden de la parte GARCH.

Algoritmo de Estimación

5. Estime primero un GARCH(1,1), generalmente es un buen modelo.

6. Pruebe que los retornos estandarizados, R_i^2/σ_i^2 , no estén autocorrelacionados (el modelo logró explicar satisfactoriamente las autocorrelaciones de los retornos al cuadrado).

Extensiones al Modelo GARCH

Leverage Effect: un retorno negativo incrementa la varianza más que un retorno positivo de la misma magnitud.

Podemos modificar los modelos GARCH para que el peso dado al retorno dependa de si el retorno es positivo o negativo.

Por ejemplo, si tomamos una variable indicador:

$$I_t = \begin{cases} 1, & si\ R_t < 0 \\ 0, & si\ R_t \geq 0 \end{cases}$$

Extensiones al Modelo GARCH

La dinámica de la varianza puede especificarse como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha R_{t-1}^2 + \alpha\theta I_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$$

Si θ es mayor que cero, entonces se capturaría el **efecto apalancamiento**. A este modelo se le conoce como el GJR-GARCH.

Hay muchas extensiones motivadas por la generalización de la forma en que los choques de hoy afectan la varianza de mañana. A esta relación se le conoce como la ***news impact function*** **(NIF).**