UNIVERSIDAD EAFIT

GESTIÓN DE RIESGOS FINANCIEROS

Stephanía Mosquera López

smosqueral@eafit.edu.co

Escuela de Economía y Finanzas

2022-I

Modelos de Covarianza y Correlación

Aunque modelar el riesgo agregado de un portafolio directamente es útil para realizar una gestión del riesgo pasiva, **no es útil para una gestión activa.**

Si queremos hacer **análisis de sensibilidad** (¿cómo cambiaría el riesgo de mi portafolio si compro una acción más de Tesla?) y para evaluar los beneficios de la **diversificación**, debemos **modelar la dependencia entre los retornos individuales.**

¡Necesitamos modelar la matriz de Varianza-Covarianza!

Varianza y Covarianza del Portafolio

El retorno del portafolio el día $t+1$ es igual a:

$$\boldsymbol{r_{PF,\,t+1} = \sum_{i=1}^{n} w_{i,t} r_{i,t+1}}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el número de activos en el portafolio, y $\boldsymbol{w_{i,t}}$ denota el peso relativo del activo $\boldsymbol{i}$ al final del día $\boldsymbol{t}$. Así, la varianza del portafolio es:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{PF,t+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{i,t} w_{j,t} \sigma_{ij,t+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{i,t} w_{j,t} \sigma_{i,t+1} \sigma_{j,t+1} \rho_{ij,t+1}}$$

donde $\boldsymbol{\sigma_{ij,t+1}}$ y $\boldsymbol{\rho_{ij,t+1}}$ es la covarianza y la correlación entre $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ el día $\boldsymbol{t+1}$, respectivamente.

Varianza y Covarianza del Portafolio

Utilizando notación matricial:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{PF,t+1} = w_t' \Sigma_{t+1} w_t}$$

donde $\boldsymbol{w_t}$ es el vector $\boldsymbol{n \text{ x } 1}$ de los pesos del portafolio y $\boldsymbol{\Sigma_{t+1}}$ es la matriz de varianza covarianza $\boldsymbol{n \text{ x } n}$. Si $\boldsymbol{n = 2}$, tenemos:

$$\sigma^2_{PF,t+1} = \begin{bmatrix} w_{1,t} & w_{2,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2_{1,t+1} & \sigma_{12,t+1} \\ \sigma_{12,t+1} & \sigma^2_{2,t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,t} \\ w_{2,t} \end{bmatrix}$$

$$= w^2_{1,t}\sigma^2_{1,t+1} + w^2_{2,t}\sigma^2_{2,t+1} + 2w_{1,t}w_{2,t}\sigma_{12,t+1}$$

Varianza y Covarianza del Portafolio

Si estamos dispuestos a asumir que los retornos se distribuyen normal multivariado, entonces el retorno del portafolio, que es una combinación lineal de los retornos de los activos, también se distribuirá normal, y tendríamos:

$$\boldsymbol{VaR_{(1-\alpha),t+1} = \sigma_{PF,t+1}\Phi^{-1}(1-\alpha)}$$

$$\boldsymbol{ES_{(1-\alpha),t+1} = \sigma_{PF,t+1}\frac{\phi(\Phi^{-1}(1-\alpha))}{\alpha}}$$

Covarianzas Condicionales

Supongamos que tenemos un portafolio de $\boldsymbol{n}$ activos, o de $\boldsymbol{n_f}$ factores de riesgo, y queremos estimar la matriz de varianza-covarianza, $\boldsymbol{\Sigma_t}$, que sea variante en el tiempo.

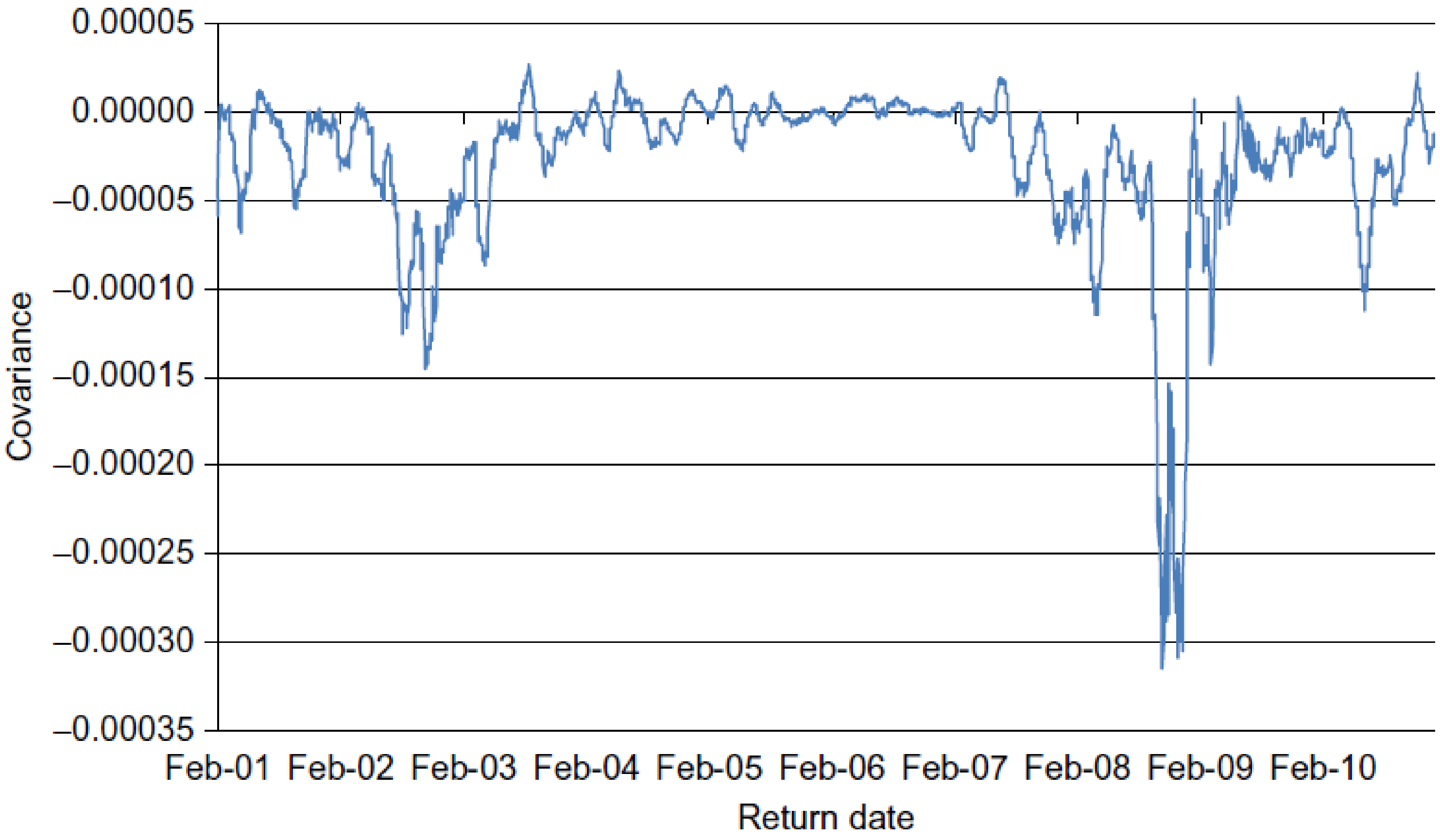
La forma más fácil de modelar las covarianzas variantes en el tiempo es realizar promedios móviles simples. Así, la covarianza entre el activo $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$, podemos estimar:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij,t+1} = \frac{1}{m}\sum_{\tau=1}^{m} R_{i,t+1-\tau} R_{j,t+1-\tau}}$$

donde $\boldsymbol{m}$ es el número de días utilizado en la estimación de la ventana móvil.

Covarianzas Condicionales

Figure 7.1 Rolling covariance between S&P 500 and 10-year treasury note index.



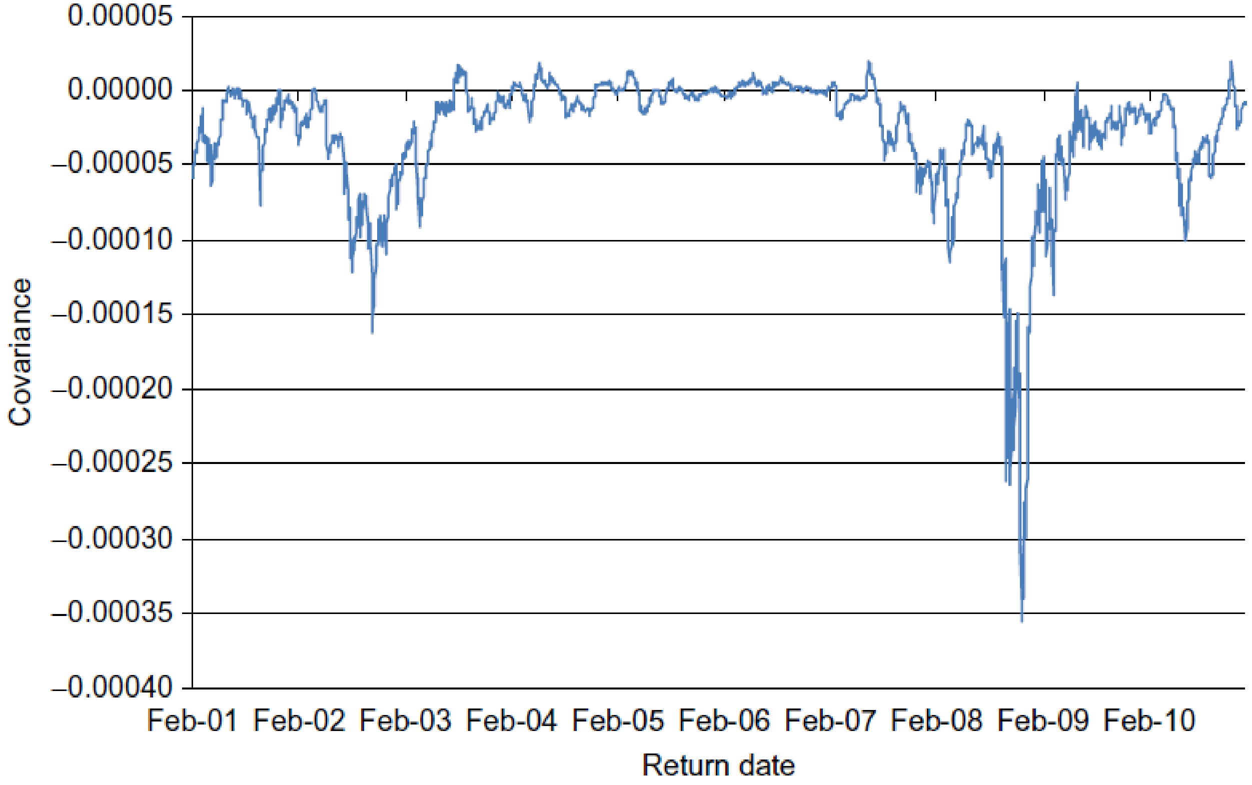
Notes: We plot the rolling covariance computed on a moving window of 25 trading days.

Covarianzas Condicionales

Para evitar darle el mismo peso a los retornos podemos utilizar el modelo de **suavizamiento exponencial**:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij,t+1} = (1-\lambda)R_{i,t}R_{j,t} + \lambda\sigma_{ij,t}}$$

Figure 7.2 Exponentially smoothed covariance between S&P 500 and 10-year treasury note index.



Notes: We use the RiskMetrics exponential smoother with $\lambda = 0.94$ on the cross product of returns.

Covarianzas Condicionales

Al igual que en el caso de la modelación de la varianza, no es deseable que el parámetro de persistencia sea igual a uno, pues implica que **no existe reversión a la media en covarianza.**

Una solución es realizar una especificación del tipo **GARCH** para la covarianza:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij,t+1} = \omega_{ij} + \alpha R_{i,t} R_{j,t} + \beta \sigma_{ij,t}}$$

que va a tender a revertir a su valor de largo plazo, que sería igual a:

$$\sigma_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{(1 - \alpha - \beta)}$$

Correlación Condicional Dinámica (DCC)

Ahora vamos a modelar la **correlación** en vez de la varianza. Esto está motivado por la necesidad de eliminar la restricción de que varianzas y covarianzas deban tener los mismos parámetros de persistencia.

Empíricamente, se ha evidenciado que las correlaciones se incrementan en momentos de incertidumbre financiera haciendo que el riesgo se incremente aún más.

Retomando la definición de correlación:

$$\boldsymbol{\rho_{ij,t+1} = \frac{\sigma_{ij,t+1}}{\sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}}}$$

Correlación Condicional Dinámica (DCC)

Podemos reorganizar la definición de correlación para descomponer la covarianza entre volatilidad y correlación:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij,t+1} = \sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}\rho_{ij,t+1}}$$

En términos matriciales:

$$\boldsymbol{\Sigma_{t+1} = D_{t+1}H_{t+1}D_{t+1}}$$

donde $\boldsymbol{D_{t+1}}$ es una matriz de desviaciones estándar, $\boldsymbol{\sigma_{i,t+1}}$, en la diagonal y cero por fuera de ésta, y $\boldsymbol{H_{t+1}}$ es una matriz de correlaciones, $\boldsymbol{\rho_{ij,t+1}}$, con unos en la diagonal.

Correlación Condicional Dinámica (DCC)

En el caso de dos activos, tenemos:

$$\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{t+1}} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t+1}^2 & \sigma_{12,t+1} \\ \sigma_{12,t+1} & \sigma_{2,t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t+1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,t+1} \\ \rho_{12,t+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t+1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t+1} \end{bmatrix}$$

Así, primero debemos estimar la volatilidad condicional de cada activo a través de un modelo **GARCH** o **EWMA**. Luego, estandarizamos cada retorno por su desviación dinámica:

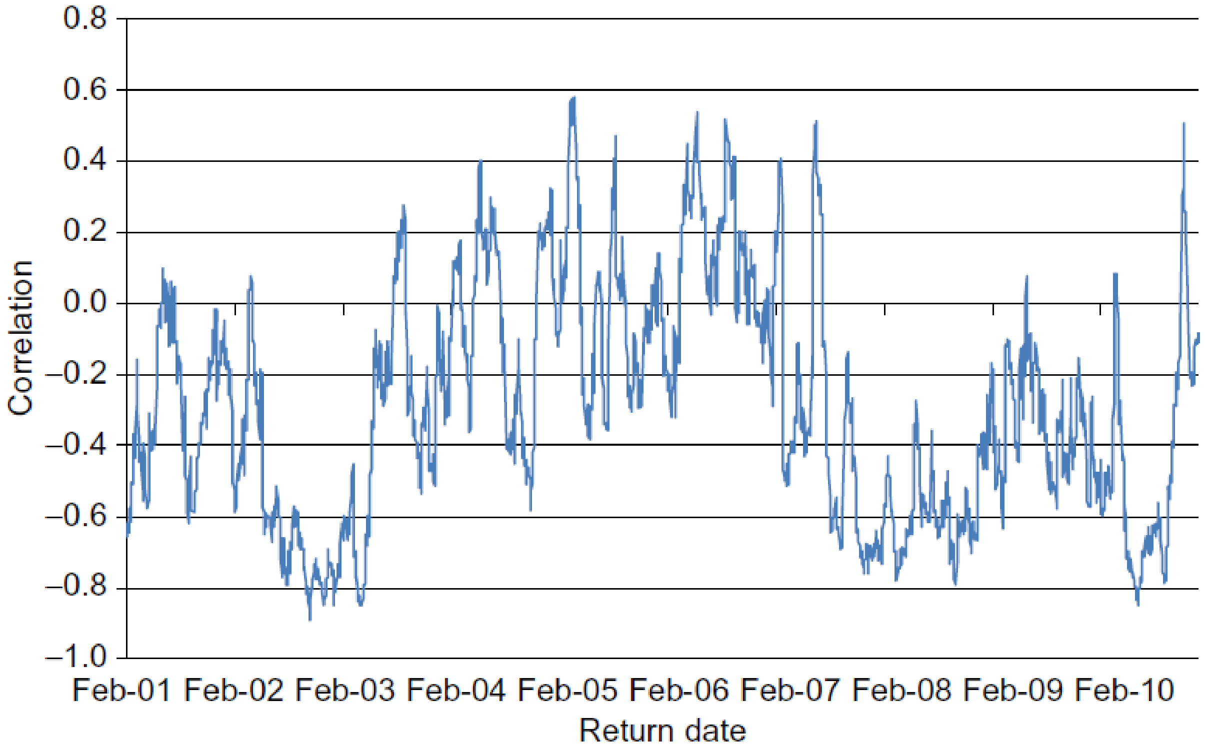
$$\boldsymbol{z_{i,t+1}} = \frac{\boldsymbol{R_{i,t}}}{\boldsymbol{\sigma_{i,t+1}}}$$

Correlaciones Suavizamiento Exponencial

Si la dinámica de las correlaciones está descrita por $q_{ij,t+1}$, y ésta se actualiza con los retornos estandarizados $z_{i,t}$ y $z_{j,t}$, tenemos:

$$q_{ij,t+1} = (1 - \lambda) z_{i,t} z_{j,t} + \lambda q_{ij,t}$$

Figure 7.3 Exponentially smoothed correlation between S&P 500 and 10-year treasury note index.



Notes: We use the DCC model with exponential smoother dynamics to plot the dynamic correlation. The individual variances are modeled using NGARCH.

Correlaciones Reversión a la Media

Generalizando el modelo de suavizamiento exponencial, podemos considerar que las correlaciones se revierten a su correlación de largo plazo, $\boldsymbol{p_{ij} = E\left[z_{i,t} z_{j,t}\right]}$.

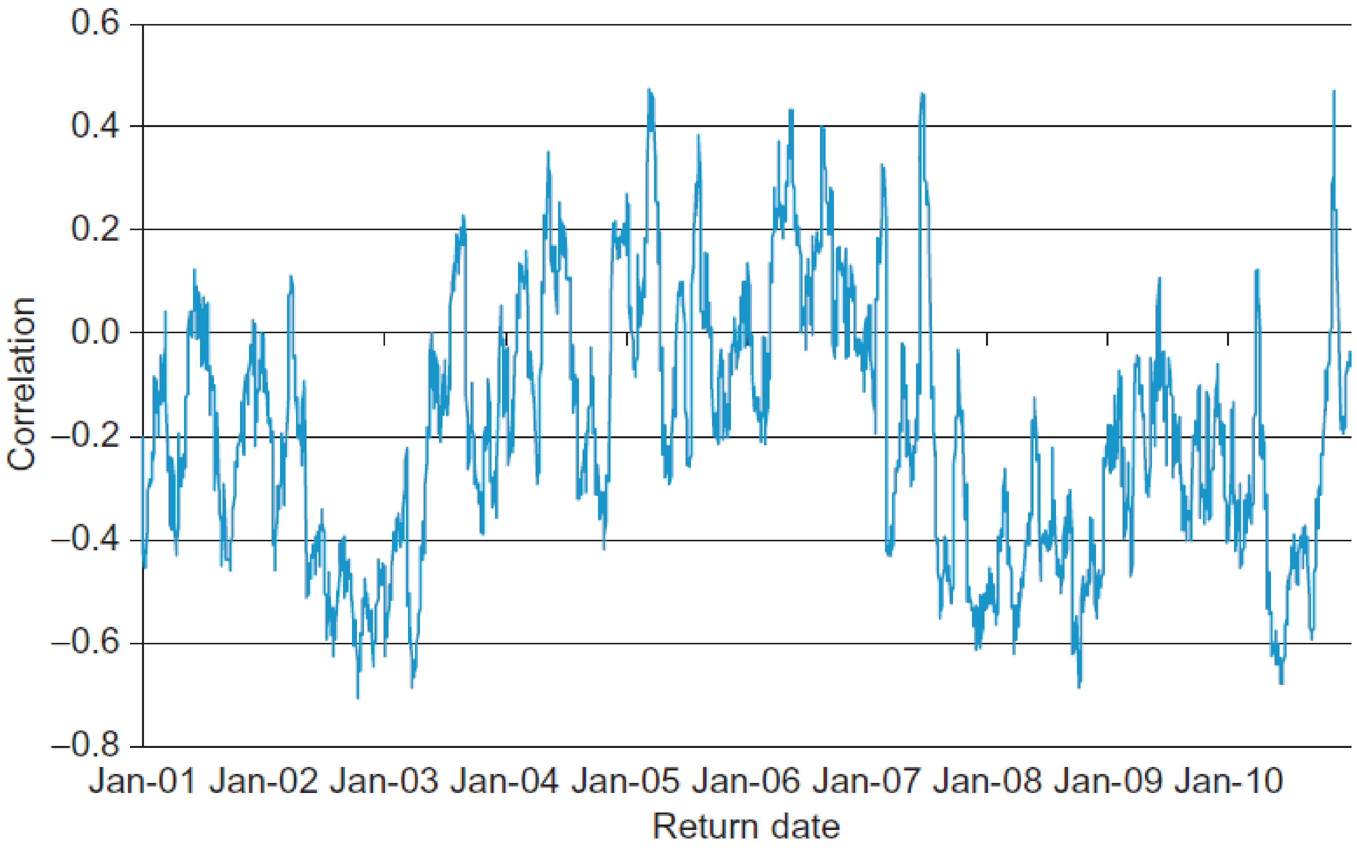
Así, podemos considerar una especificación de tipo $\mathbf{GARCH(1,1)}$ de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{q_{ij,t+1} = p_{ij} + \alpha(z_{i,t} z_{j,t} - p_{ij}) + \beta(q_{ij,t} - p_{ij})}$$

El modelo implica que la persistencia de la correlación es la misma entre cualquier par de activos del portafolio, pero no implica que el nivel de la correlación sea el mismo a través de pares de activos.

Correlaciones Reversión a la Media

Figure 7.4 Mean-reverting correlation between S&P 500 and 10-year treasury note.



Notes: We use the DCC model with mean-reverting dynamics to plot the dynamic correlation. The individual variances are modeled using NGARCH.

VaR Multivariado

Ejemplo 1:

Un portafolio que tiene un valor actual de $100 millones, está compuesto por un activo $\boldsymbol{X}$ y un activo $\boldsymbol{Y}$. En el activo $\boldsymbol{X}$ tiene invertido el 60% y el resto en el activo $\boldsymbol{Y}$. Las volatilidades diarias de $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ son 1% y 2% (std.dev.), respectivamente. Para un nivel de confianza del 99%, calcule el VaR diario para los siguientes casos:

$$\rho_{XY} = 1, \rho_{XY} = 0.8, \rho_{XY} = 0, \rho_{XY} = -0.8, \rho_{XY} = -1$$

Recuerde: $\sigma_{PF} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$

VaR Multivariado

Solución:

$$\sigma_{PF} = \sqrt{0.6^2 * 0.01^2 + 0.4^2 * 0.02^2 + 2 * 0.6 * 0.4 * 0.01 * 0.02 * \rho_{xy}}$$

Correlación	Sigma Port	VaR99
1	1.40%	3.257%
0.8	1.33%	3.093%
0	1.00%	2.326%
-0.8	0.48%	1.121%
-1	0.20%	0.465%

Agregando el VaR

En algunas ocasiones podemos tener VaRs calculados para diferentes grupos de activos (subportafolios, clases de activos, segmentos de operación, etc) y queremos **agregarlos para encontrar el VaR total**. La fórmula para hacer esto es:

$$VaR_{total} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} VaR_i VaR_j \rho_{ij}}$$

Por ejemplo, para un portafolio de 2 activos:

$$VaR_{total} = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12} VaR_1 VaR_2}$$

Beneficio por Diversificación

El **beneficio por diversificación (BD)** se estima como la diferencia entre la suma de los VaRs individuales y el VaR total:

$$BD = \sum_{i=1}^{n} VaR_i - VaR_{total}$$

Beneficio por Diversificación

Ejemplo 2:

Un portafolio que tiene un valor actual de $100 millones, está compuesto por un activo $\boldsymbol{X}$ y un activo $\boldsymbol{Y}$. En el activo $\boldsymbol{X}$ tiene invertido el 60% y el resto en el activo $\boldsymbol{Y}$. Las volatilidades diarias de $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ son 1% y 2% (std.dev.), respectivamente. Para un nivel de confianza del 99%, calcule el Beneficio por Diversificación para los siguientes casos:

$$\rho_{XY} = 1, \rho_{XY} = 0.8, \rho_{XY} = 0, \rho_{XY} = -0.8, \rho_{XY} = -1$$

Beneficio por Diversificación

Solución:

Correlación	Sigma Port	VaR99	VaR x	VaR y	VaR x+y	BD
1	1.40%	3.257%	2.326%	4.653%	6.979%	3.722%
0.8	1.33%	3.093%	2.326%	4.653%	6.979%	3.886%
0	1.00%	2.326%	2.326%	4.653%	6.979%	4.653%
-0.8	0.48%	1.121%	2.326%	4.653%	6.979%	5.859%
-1	0.20%	0.465%	2.326%	4.653%	6.979%	6.514%

VaR Marginal

Las variaciones sobre las posiciones de los componentes del portafolio tienen un efecto directo sobre el VaR del portafolio e indirecto a través de las correlaciones con los demás componentes de la cartera.

Suponga que el peso del activo $\boldsymbol{i}$ en el portafolio es $\boldsymbol{w_i}$, el VaR marginal del activo es la **sensibilidad del VaR** a la cantidad invertida en $\boldsymbol{i}$:

$$\frac{\partial VaR_P}{\partial w_i}$$

VaR Marginal

- Para un portafolio bien diversificado, el VaR marginal está relacionado con el **beta del modelo CAPM**. Si el beta de un activo es alto, su VaR marginal también será alto. Si el beta es bajo, el VaR marginal va a tender a ser bajo.

- El **VaR Marginal** se puede interpretar como el cambio que sufre el VaR cuando cambia la asignación de capital de un componente $\boldsymbol{i}$ en un delta.

- La derivada parcial del VaR del portafolio respecto a algún peso $\boldsymbol{w_i}$ se puede expresar en términos del VaR del portafolio y la relación lineal, $\boldsymbol{B_{i,P}}$, entre los rendimientos del componente $\boldsymbol{i}$ y los rendimientos del portafolio completo.

VaR Marginal

$$\frac{\partial VaR_P}{\partial w_i} = B_{i,P} VaR_P$$

Alternativamente, se puede expresar en términos del VaR del activo $\boldsymbol{i}$ y la correlación entre los rendimientos del componente $\boldsymbol{i}$ y los rendimientos del portafolio al que pertenece:

$$\frac{\partial VaR_P}{\partial w_i} = \rho_{i,P} VaR_i$$

Escalamiento del VaR

Normalmente la frecuencia de observación de los datos para el cálculo del VaR es diaria y requiere ser escalado para la estimación del VaR para un **horizonte de tiempo más largo**.

En el caso más simple, donde los retornos del portafolio están normalmente distribuidos y se tiene una varianza constante, $\boldsymbol{\sigma_{PF}^2}$, los retornos sobre los siguientes $\boldsymbol{K}$ días también se distribuyen normal, pero con varianza $\boldsymbol{K\sigma_{PF}^2}$. En este caso el VaR para los siguientes $\boldsymbol{K}$ días es igual a:

$$\boldsymbol{VaR_{(1-\alpha),t+1:t+k} = \sqrt{k}\sigma_{PF}\Phi^{-1}(1-\alpha) = \sqrt{k}VaR_{(1-\alpha),t+1}}$$

Backtesting del VaR

- El backtesting consiste en probar si efectivamente se cumple que los retornos (o residuales estandarizados) sobrepasan el pronóstico de la medida del riesgo el $\boldsymbol{\alpha * 100\%}$ del tiempo, como lo promete el $\boldsymbol{VaR_{(1-\alpha),t+1}}$ (unconditional coverage test).

- Además, también se debe probar si las observaciones que exceden al VaR **no están agrupadas** (independence test).

Backtesting del VaR

El $\boldsymbol{VaR}_{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{t}}$ promete que los retornos o los residuales estandarizados $\{\boldsymbol{Z}\}$ solo sobrepasarán el pronóstico de la medida de riesgo el $\boldsymbol{\alpha} * \mathbf{100}\%$ de las veces. Si el residual es mayor al VaR, se considera una violación o excedencia.

Así, la secuencia de excedencias (***hit sequence***) del VaR es igual a:

$$I_{\mathrm{t}+1} = \begin{cases} 1 \; si \; z_{t+1} < -VaR_{(1-\alpha)}^{t} \\ 0 \; si \; z_{t+1} > -VaR_{(1-\alpha)}^{t} \end{cases} \; para \; t = 1, \ldots, T.$$

Backtesting del VaR

Para probar si la proporción de violaciones obtenida del VaR es significativamente diferente de la proporción prometida $\boldsymbol{\alpha}$, utilizamos el test de ***likelihood-ratio***:

$$LR_{uc} = -2ln\left[\frac{(1-\alpha)^{T_0}\alpha^{T_1}}{(1-T_1/T)^{T_0}(T_1/T)^{T_1}}\right] \sim \chi_1^2,$$

donde $\boldsymbol{T}$ es el número de observaciones en $\{\boldsymbol{Z}\}$, y $\boldsymbol{T_0}$ y $\boldsymbol{T_1}$ son la cantidad de 0s y 1s en la secuencia de hits $\boldsymbol{I_{t+1}}$, respectivamente.

Este test se conoce como ***unconditional coverage test*** porque solo prueba si el VaR presenta el número de violaciones correcto.

Backtesting del VaR

Es importante evaluar también si las excedencias no están agrupadas (***clusters***).

Para esto podemos utilizar el **test de independencia** que busca determinar si las violaciones están agrupadas o se distribuyen de manera independiente a lo largo de la secuencia de hits. El test de **likelihood-ratio** es igual a:

$$LR_{ind} = -2ln\left[\frac{(1-T_1/T)^{T_0}(T_1/T)^{T_1}}{(1-\pi_{01})^{T_{00}}\pi_{01}^{T_{01}}(1-\pi_{11})^{T_{10}}\pi_{11}^{T_{11}}}\right] \sim \chi_1^2,$$

Backtesting del VaR

donde $\pi_{01} = T_{01}/(T_{00}+T_{01})$; $\pi_{11} = T_{11}/(T_{10}+T_{11})$; $\pi_{00} = 1 - \pi_{01}$; $\pi_{10} = 1 - \pi_{11}$. T_{00} es el número de no-violaciones seguido de una no-violación; T_{01} es el número de no-violaciones seguido de una violación; T_{10} es el número de violaciones seguido de una no-violación; y T_{11} es el número de violaciones seguida de una violación.

El ***conditional coverage test*** determina simultáneamente si las violaciones del VaR son independientes y si la proporción de éstas es igual la esperada. El estadístico es igual a:

$$\boldsymbol{LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}}$$