UNIVERSIDAD EAFIT

GESTIÓN DE RIESGOS FINANCIEROS

Stephanía Mosquera López
smosqueral@eafit.edu.co
Escuela de Economía y Finanzas

2022-I

Conceptos básicos de probabilidad y estadística en la gestión de riesgos financieros

Contenido:

- Valores esperados
- Distribuciones de probabilidad y momentos
- Estimadores
- El modelo de regresión lineal
- Series de tiempo univariadas

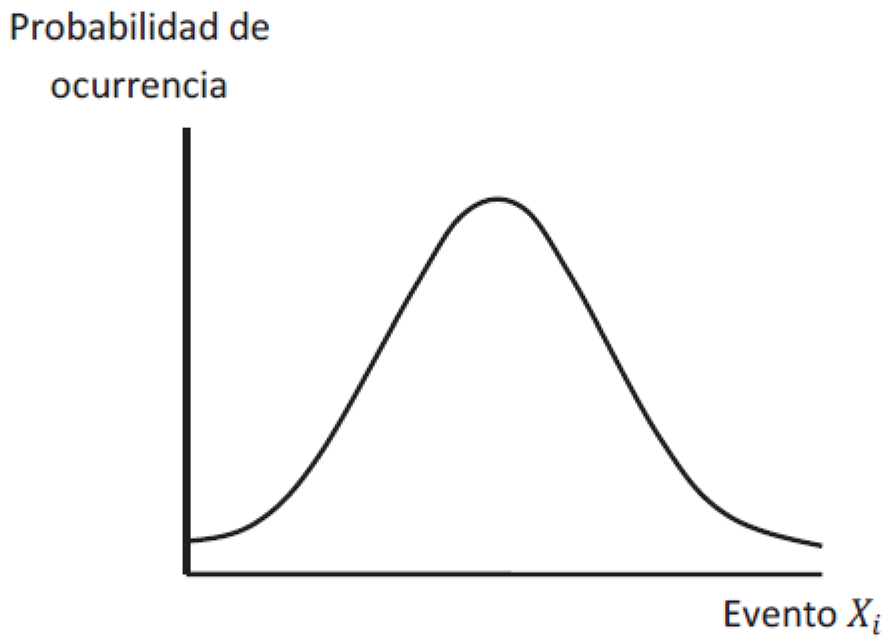
Variables Aleatorias

- Una **variable aleatoria** o **estocástica** es aquella que toma valores alternativos, cada uno con probabilidad de realización menor o igual que 1, no negativa. Lo anterior implica un error en la predicción de su valor, ya que es imposible conocer con exactitud qué valor tomará antes de que el evento efectivamente suceda.

- La **distribución de probabilidad** enumera todos los resultados posibles y la probabilidad de que ocurra cada uno.

Variables Aleatorias

- Una **variable aleatoria continua** puede tomar cualquier valor en la línea de números reales, mientras que una **variable aleatoria discreta** sólo puede tomar un valor específico de números reales.



Valores Esperados y Momentos

Generalmente se expresan los **momentos** (o momentos centrales) de las distribuciones utilizando el operador de valor esperado $\boldsymbol{E}(\cdot)$.

Los **valores esperados**, como su nombre lo indica, son las realizaciones que esperamos ocurran dentro del universo de posibilidades de las variables aleatorias.

Los **momentos centrales de las distribuciones**, expresados como valores esperados, constituyen una descripción exhaustiva de éstas.

Valores Esperados y Momentos

Los **momentos centrales** más importantes son:

1. Media (o valor esperado propiamente dicho)
2. Varianza
3. Sesgo
4. Curtosis

Todos de vital importancia en la modelación del riesgo en finanzas.

Media: primer momento o valor esperado

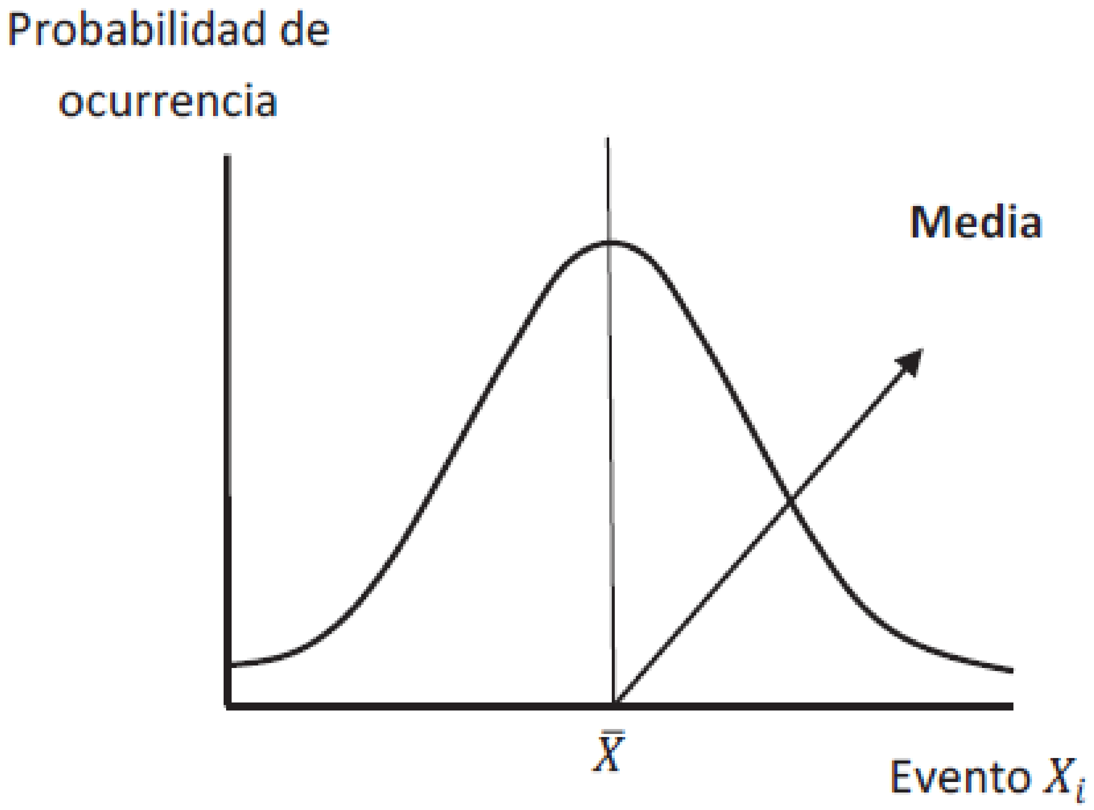
Sea $X_1, X_2, \cdots, X_N$ las N posibles realizaciones de la variable aleatoria X.

La **media** o **valor esperado** será igual a:

$$\mu_X = E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots p_n X_n = \sum_{i=1}^{N} p_i X_i$$

Donde p_i es la probabilidad de que ocurra X_i, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ y $E(\cdot)$ es el operador de valor esperado.

Media: primer momento o valor esperado



Varianza: segundo momento central

Sea $X_1, X_2, \cdots, X_N$ las N posibles realizaciones de la variable aleatoria X.

La **varianza** será igual a:

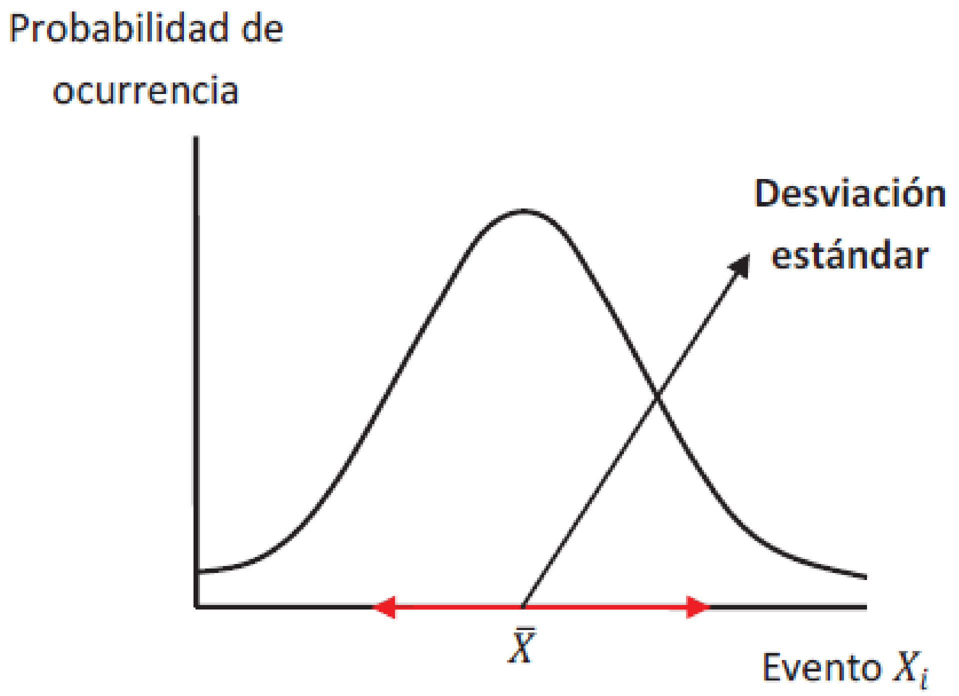
$$Var(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i[X_i - E(X)]^2$$

Proporciona una medida de dispersión. Es un promedio ponderado de los cuadrados de las desviaciones de los resultados de X de su valor esperado.

Varianza: segundo momento central

$$\sigma_X = \sqrt{+\sum_{i=1}^{N} p_i [X_i - E(X)]^2}$$

La raíz cuadrada positiva es la desviación estándar.



UNIVERSIDAD EAFIT

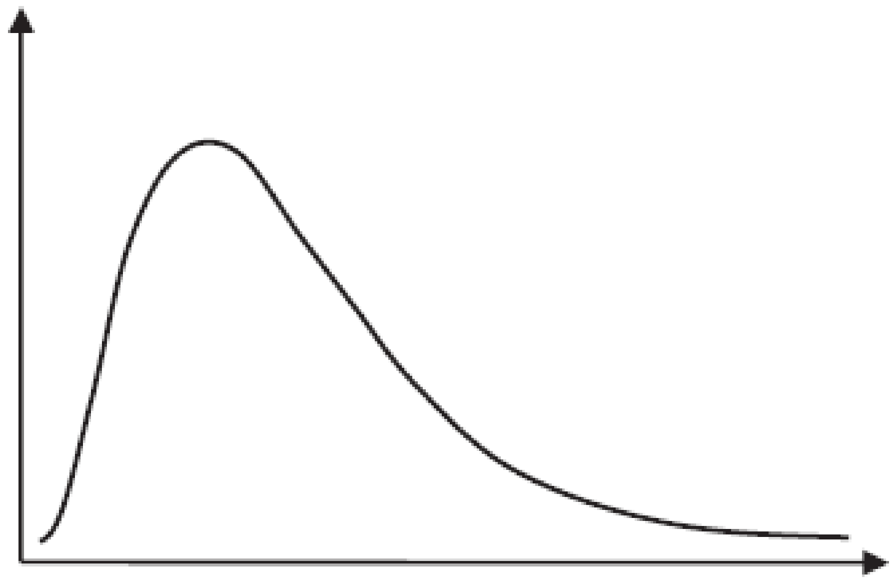
Sesgo: tercer momento central

El **sesgo** o **asimetría** es igual a:

$$Sesgo\ (X) = \sigma_X^3 = E[X - E(X)]^3$$

El sesgo señala la falta de simetría de la distribución. Para valores positivos de este momento la distribución estará sesgada hacia la derecha, es decir, la cola de la distribución se extenderá indefinidamente hacia la derecha.

Sesgo: tercer momento central



Distribución con sesgo positivo, es decir sesgada a la derecha
(el sesgo es del lado donde se extiende la cola)

Curtosis: cuarto momento central

La curtosis es igual a:

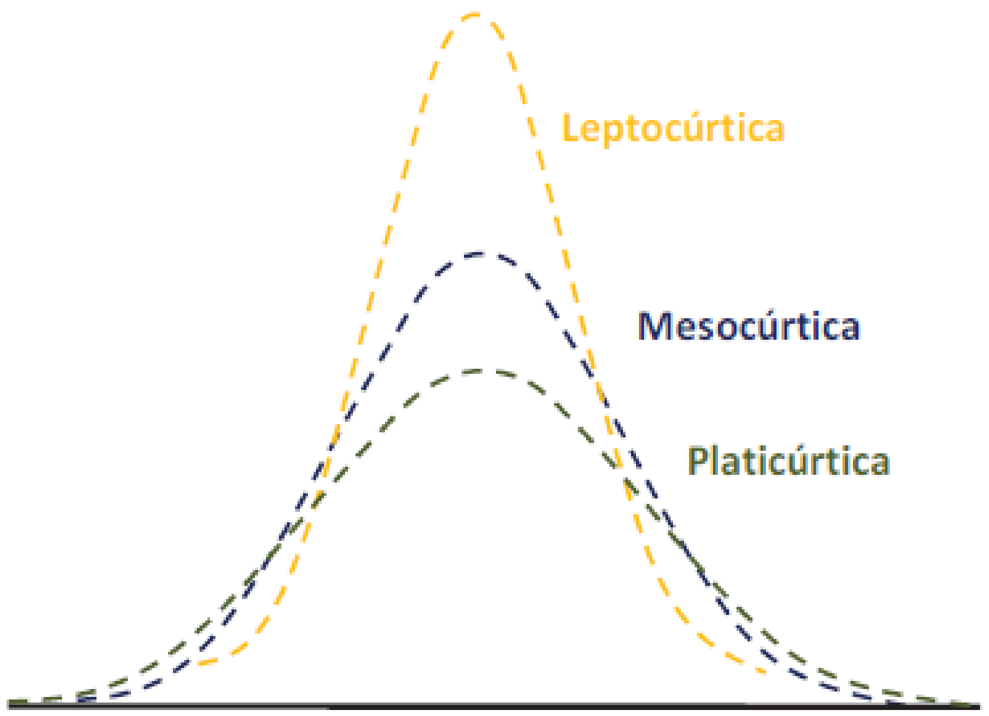
$$Curtosis\ (X) = \sigma_X^4 = E[X - E(X)]^4$$

La curtosis indica el grado de apuntamiento de la distribución. Entre mayor sea el valor de este momento, más puntuda será la distribución de probabilidad.

Una distribución con una curtosis mayor que la de la normal (que es 3) se denomina **leptocúrtica**, menor que la de la normal **platicúrtica**, y finalmente igual que la de la normal **mesocúrtica**.

Curtosis: cuarto momento central

La curtosis también está asociada con las colas de la distribución.



Momentos de las Distribuciones

Repasando:

1. Primer momento: $\bar{X} = E(X)$
2. Segundo momento: $\sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2$
3. Tercer momento: $\sigma_X^3 = E[X - E(X)]^3$
4. Cuarto Momento: $\sigma_X^4 = E[X - E(X)]^4$
5. En general, el r-ésimo momento: $\sigma_X^r = E[X - E(X)]^r$

Distribuciones Conjuntas de Variables Aleatorias

En finanzas rara vez se trabaja con un solo activo, en cambio se toman decisiones a menudo sobre portafolios. Conviene repasar algunas características de las variables aleatorias que se distribuyen conjuntamente.

Covarianza de X y Y: se define como el valor esperado del producto de las desviaciones alrededor de la media de ambas. Es una medida de la **asociación lineal** entre X y Y.

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[(X_i - E(X))(Y_j - E(Y))]$$

Distribuciones Conjuntas de Variables Aleatorias

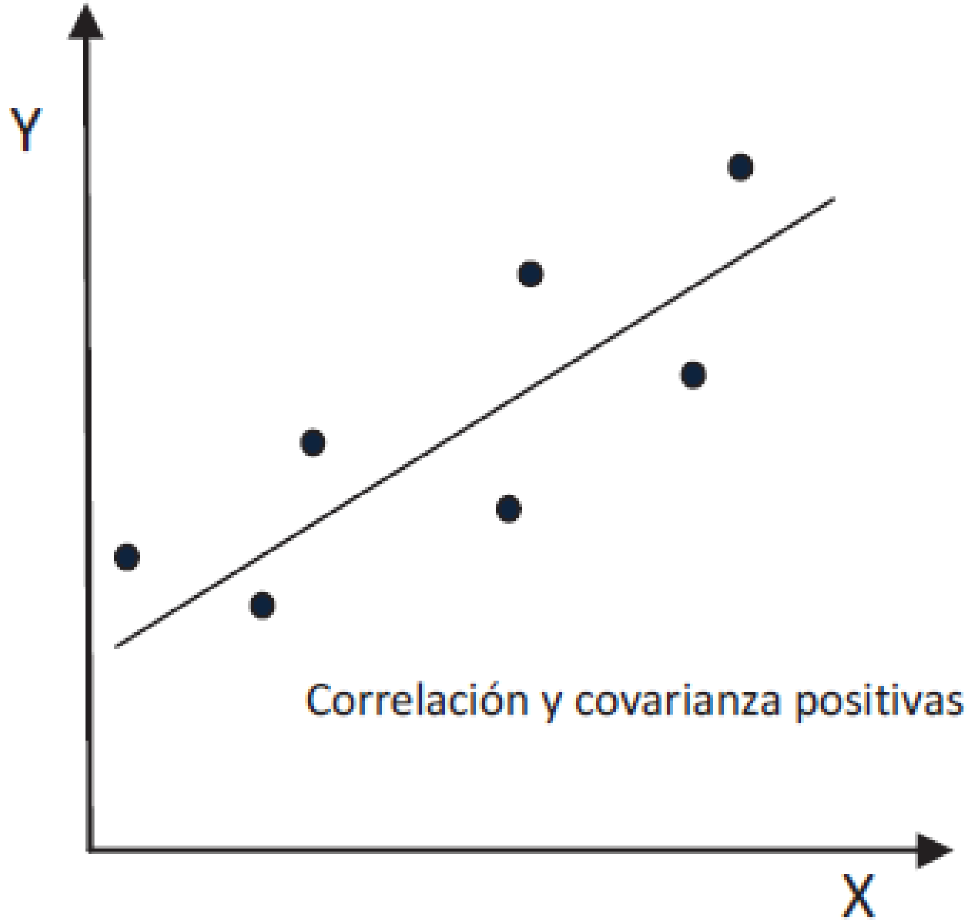
Coeficiente de correlación:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Este se ha normalizado y a diferencia de la covarianza la escala se encuentra entre -1 y 1. **Valores positivos** de esta medida indican que las variables tienden a estar por encima de sus medias al mismo tiempo. **Valores negativos** indican lo contrario.

Es importante resaltar que una covarianza o un coeficiente de correlación de cero no implica independencia de dos series. Solo implica que **no tienen una relación lineal.**

Distribuciones Conjuntas de Variables Aleatorias



Operador de Valor Esperado

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E[(aX)^2] = a^2E(X^2)$
- $Var(aX + b) = a^2Var(X)$
- Si X y Y son variables aleatorias, entonces $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- Si X y Y son independientes, entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Si X y Y son independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$

Estimación Momentos Centrales

Como no se trabaja con la **población** sino con una muestra, es necesario utilizar estimadores de los momentos poblaciones mediante el uso de momentos **muestrales**.

Los estimadores difieren de las estimaciones en que los primeros son **reglas** o métodos (una fórmula), en tanto que las segundas son **números**.

Estimación Momentos Centrales

- Media: $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$
- Varianza: $Var(X) = s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2$
- Covarianza: $Cov(X,Y) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$
- Coeficiente de correlación: $r_{xy} = \frac{\widehat{Cov(X,Y)}}{\sqrt{\widehat{Var(X)}\widehat{Var(Y)}}}$
- Sesgo: $S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^3 / s^3$
- Curtosis: $\mathrm{K} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^4 / s^4$

Donde $\boldsymbol{x_i}$ son desviaciones con respecto a la media y $\boldsymbol{s}$ es la desviación estándar.

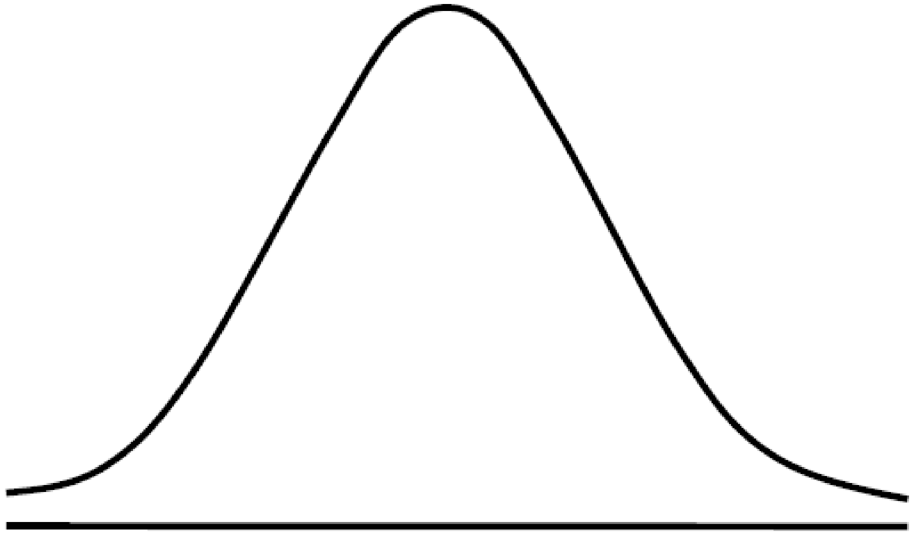
La Distribución Normal

Continua en forma de campana. La probabilidad de ocurrencia de un evento es cero.

Puede ser descrita completamente por su media y su varianza; la curtosis, sesgo y los demás momentos no son relevantes. De hecho, sabemos que todos los momentos impares de la distribución normal estándar son cero.

La **normal estándar** se construye restando la media y dividiendo entre la desviación estándar.

La Distribución Normal



Si $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

$$p(X = X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} exp\left[-\frac{1}{2\sigma_X^2}(X_i - \mu_X)^2\right]$$

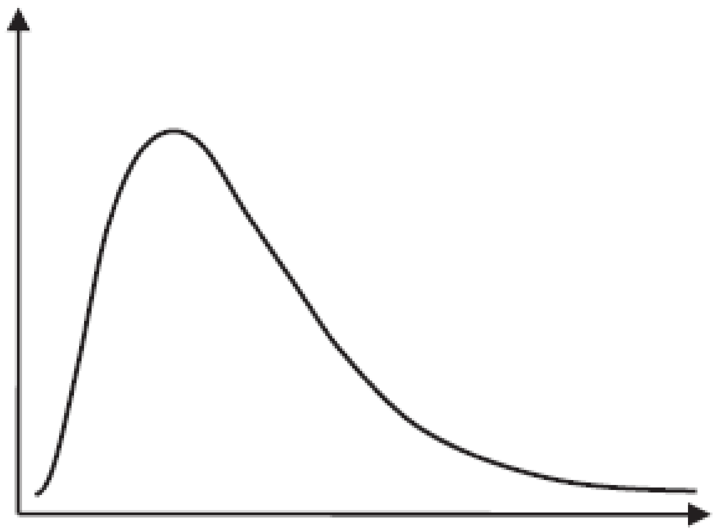
$$Prob(\mu_X - 1{,}96\sigma_x < X_i < \mu_X + 1{,}96\sigma_x) \approx ,95$$
$$Prob(\mu_X - 2{,}57\sigma_x < X_i < \mu_X + 2{,}57\sigma_x) \approx ,99$$

Cualquier suma ponderada de dos variables normales también se distribuye normal.

UNIVERSIDAD EAFIT

La Distribución Chi-Cuadrado

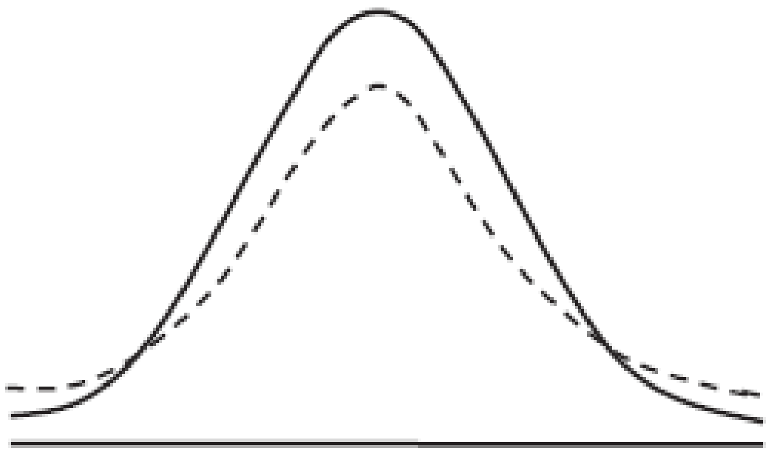
La suma de los cuadrados de N variables aleatorias distribuidas independientemente en forma normal (con media cero y varianza 1) está distribuida como **chi-cuadrado** con N grados de libertad.



Comienza en el origen y está sesgada hacia la derecha. La forma exacta depende del número de grados de libertad, se vuelve más simétrica conforme *N* crece.

La Distribución t-student

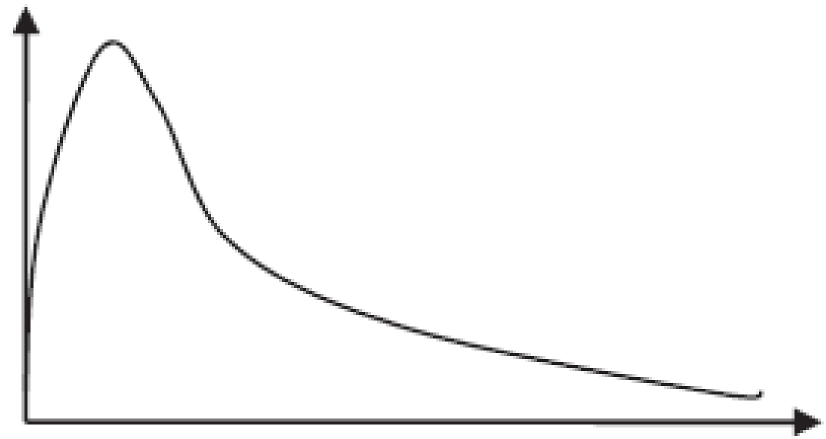
Supóngase que X está distribuida en forma normal con media 0 y varianza 1 y que Z está distribuida como chi cuadrado con N grados de libertad. Si X y Z son independientes, $X/\sqrt{Z/N}$ seguirá una distribución t con N grados de libertad.



La distribución t es como la normal, pero con colas más anchas. Se usa para probar si la media de una variable es igual a cualquier número en particular, aun cuando se desconozca la varianza de la variable aleatoria.

La Distribución F

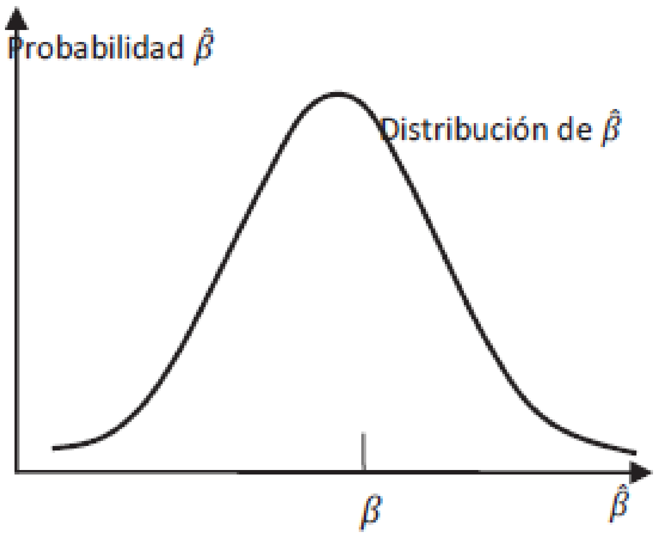
Si $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Z}$ son independientes y están distribuidas como chi cuadrado con $\boldsymbol{N_1}\, y\, \boldsymbol{N_2}$ grados de libertad, respectivamente, entonces $(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{N_1})/(\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{N_1})$ seguirá una distribución $\boldsymbol{F}$ con $\boldsymbol{N_1}\, y\, \boldsymbol{N_2}$ grados de libertad.



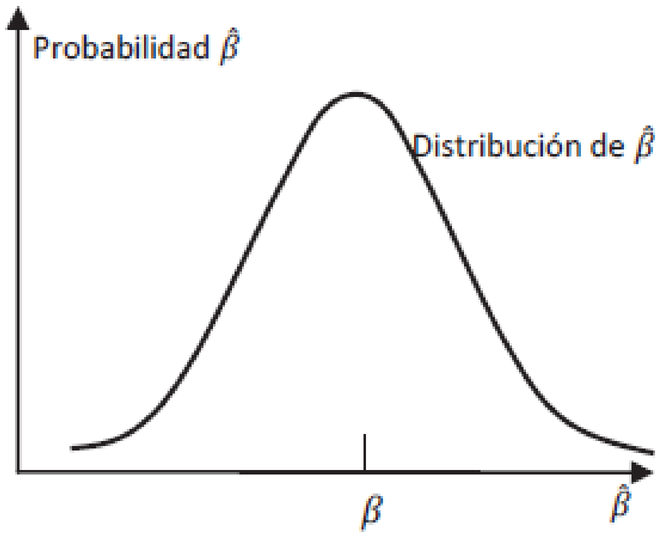
Las pruebas de igualdad de varianza se realizan generalmente con razones de varianzas, y se realizan con la ayuda de la distribución $\boldsymbol{F}$. Tienen grados de libertad diferentes en el numerador y en el denominador.

Propiedades Deseables de los Estimadores

Ausencia de sesgo: $E(\widehat{\beta}) = \beta$



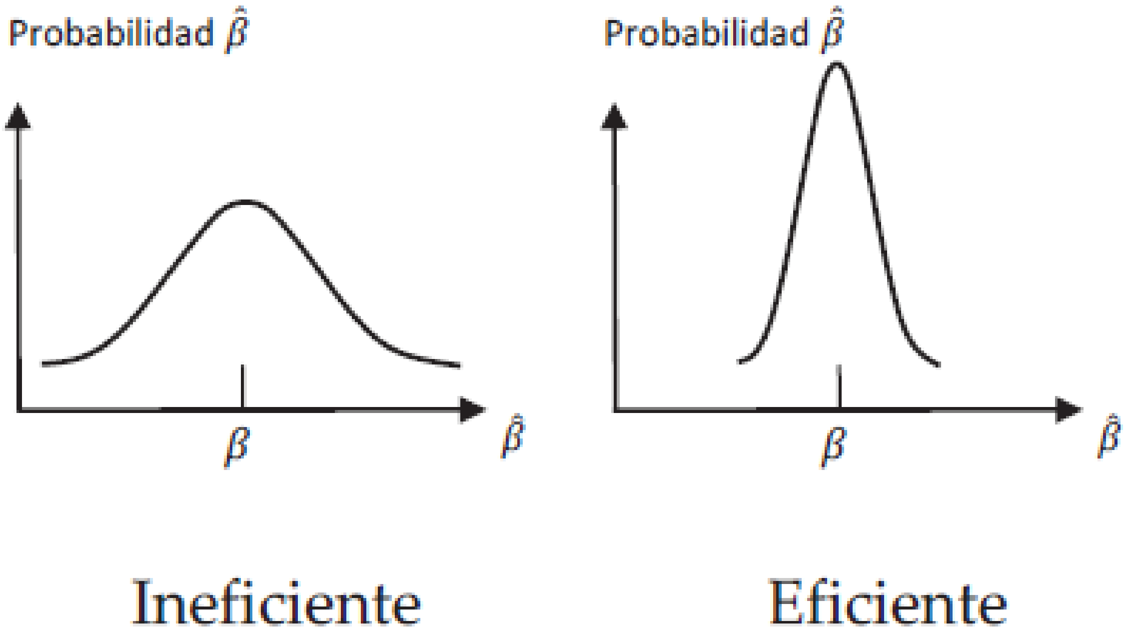
Sesgado



Insesgado

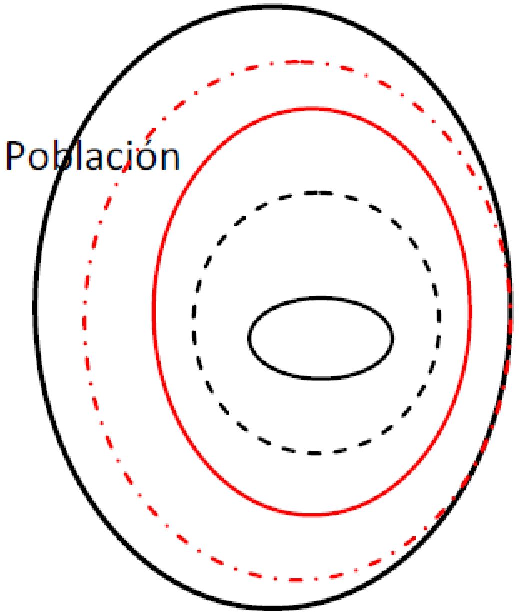
Propiedades Deseables de los Estimadores

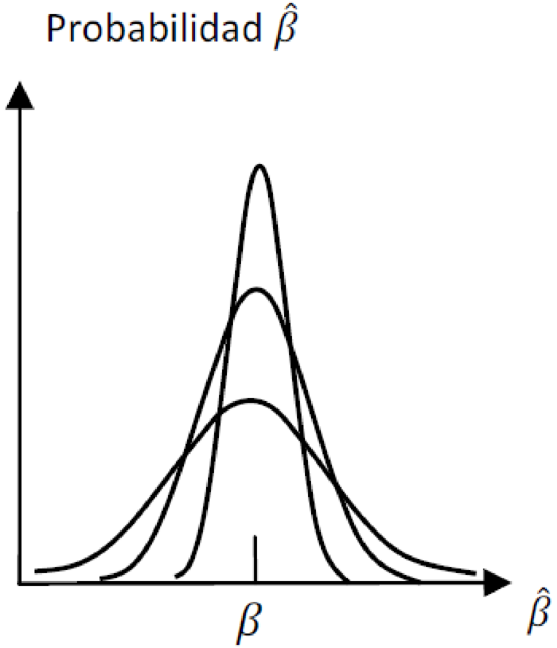
Eficiencia: para un tamaño muestral dado es el estimador que tiene la menor varianza.



Propiedades Deseables de los Estimadores

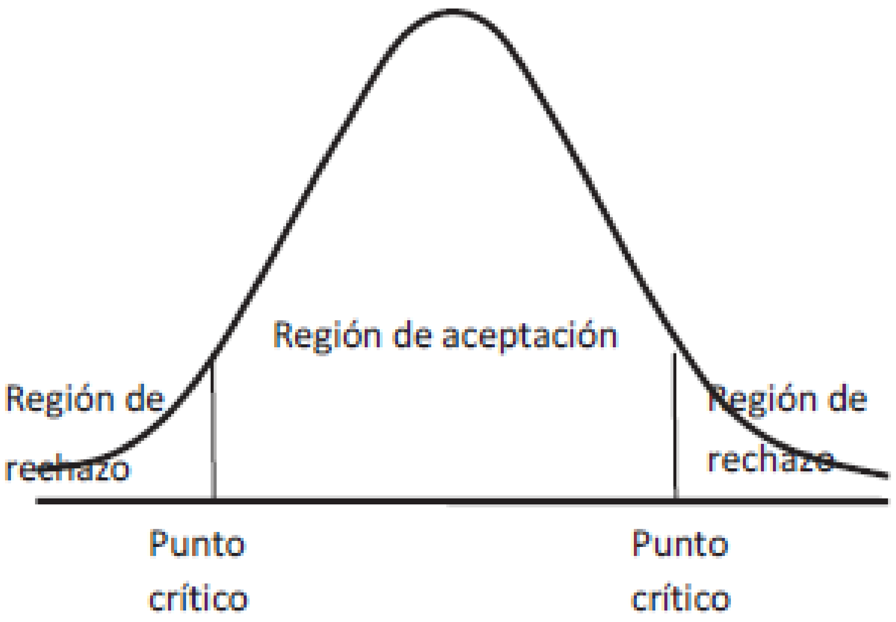
Consistencia: Conforme la muestra crece el parámetro muestral se hace igual al poblacional. La distribución del estimador debe replegarse a un solo punto a medida que la muestra se hace más grande.





Pruebas de Hipótesis

Para probar la hipótesis de que la media verdadera es igual a un valor dado $\boldsymbol{\mu}_X^*$, especificamos la hipótesis nula $\boldsymbol{\mu}_X = \boldsymbol{\mu}_X^*$ y la hipótesis alternativa, así como un nivel de significancia α.



El Modelo de Regresión Lineal

Los *risk managers* a menudo se encuentran en modelos con la siguiente forma:

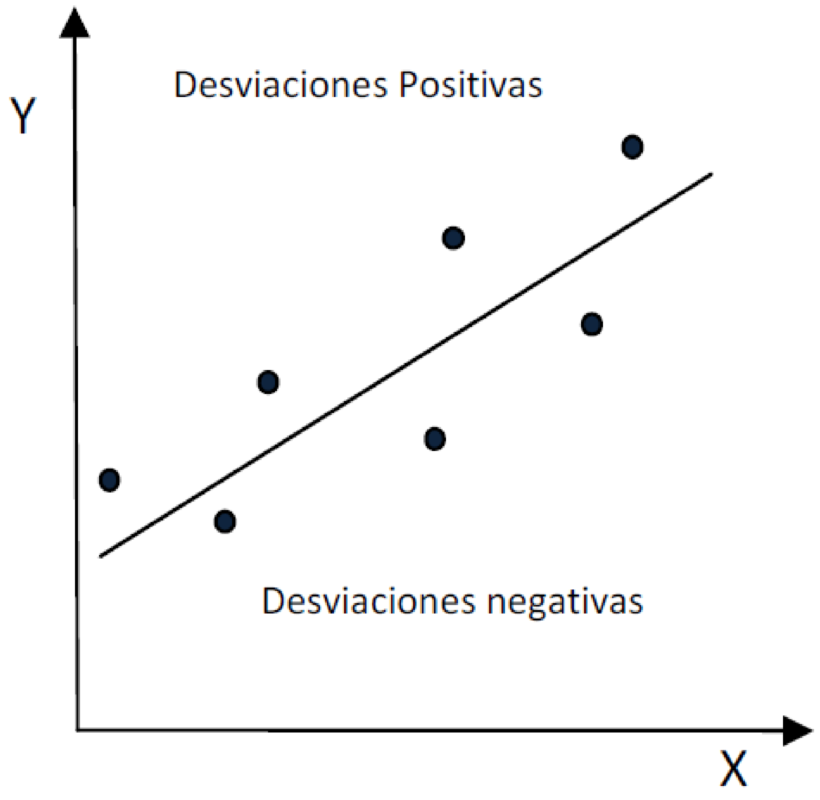
$$y = a + bx + \varepsilon$$

¿Qué queremos hacer?

Obtener una línea que se ajuste a los datos de la mejor manera posible.

Ésta es aquella que minimiza la suma de las desviaciones al cuadrado de los puntos al cuadrado desde los puntos de la línea recta.

El Modelo de Regresión Lineal



Lo que se requiere es minimizar las desviaciones al cuadrado de los puntos con respecto a la línea.

No se podría minimizar la distancia misma que por construcción es cero. $\sum_{t=1}^{T} \widehat{\varepsilon_t} = 0$.

El Modelo de Regresión Lineal

Si minimizamos la suma de los errores al cuadrado, $\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{\varepsilon}_t^2$, obtenemos el estimador de mínimos cuadrados (OLS) de $\boldsymbol{b}$:

$$\hat{b} = \min \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 = min \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - a - \sum_{j=1}^{J} b_j x_{j,t} \right)^2$$

Donde $\boldsymbol{J}$ es el número de variables explicativas.

En términos matriciales: $\widehat{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$

El Modelo de Regresión Lineal

En el caso del modelo de **regresión simple**, una variable explicativa, podemos demostrar que:

$$\boldsymbol{\hat{b}} = \frac{\widehat{Cov}[x,y]}{\widehat{Var}[x]} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2}$$

$$\boldsymbol{\hat{a}} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

Supuestos Importantes

- **La relación entre X y Y es lineal:** $y = a + bx + \varepsilon$

- **Exogeneidad estricta:** $E[\varepsilon_t|x] = 0,\ t = 1, 2, \dots T.$

Implicaciones:

$E[\varepsilon_t] = 0,\ t = 1, 2, \dots T.$
$E[\varepsilon_t|x] = 0,\ t = 1, 2, \dots T.$ (regresoras ortogonales)

- **No multicolinealidad:** el rango de la matriz de datos TxJ, x, es J con probabilidad 1.

Supuestos Importantes

- **Perturbaciones esféricas:**

  Homocedasticidad: $E[\varepsilon_t^2|x] = \sigma^2$
  No autocorrelación: $E[\varepsilon_t \varepsilon_k] = 0 \; con \; t, k = 1,2, \dots, T; t \neq j$

- **Supuesto común para inferencia:** El término de error está distribuido conjuntamente en forma normal condicionado a las X.

Teorema de Gauss Markov: si se cumplen los primeros cuatro supuestos, los estimadores de MCO, $\widehat{\boldsymbol{b}}$, son los más eficientes dentro de la clase de todos los estimadores lineales insesgados.

Series de Tiempo

Muchas veces, sobre todo para realizar pronósticos, resulta conveniente no suponer un modelo explícito que explique las variables de interés, sino utilizar una estrategia alternativa: **utilizar la información en el pasado de la misma serie.**

Las **series de tiempo** son un modelo "ateórico" en ese sentido y parten explícitamente del supuesto de que la historia sirve como guía para realizar inferencia sobre el futuro.

Series de Tiempo

Una **serie de tiempo** es una secuencia de datos numéricos en orden sucesivo.

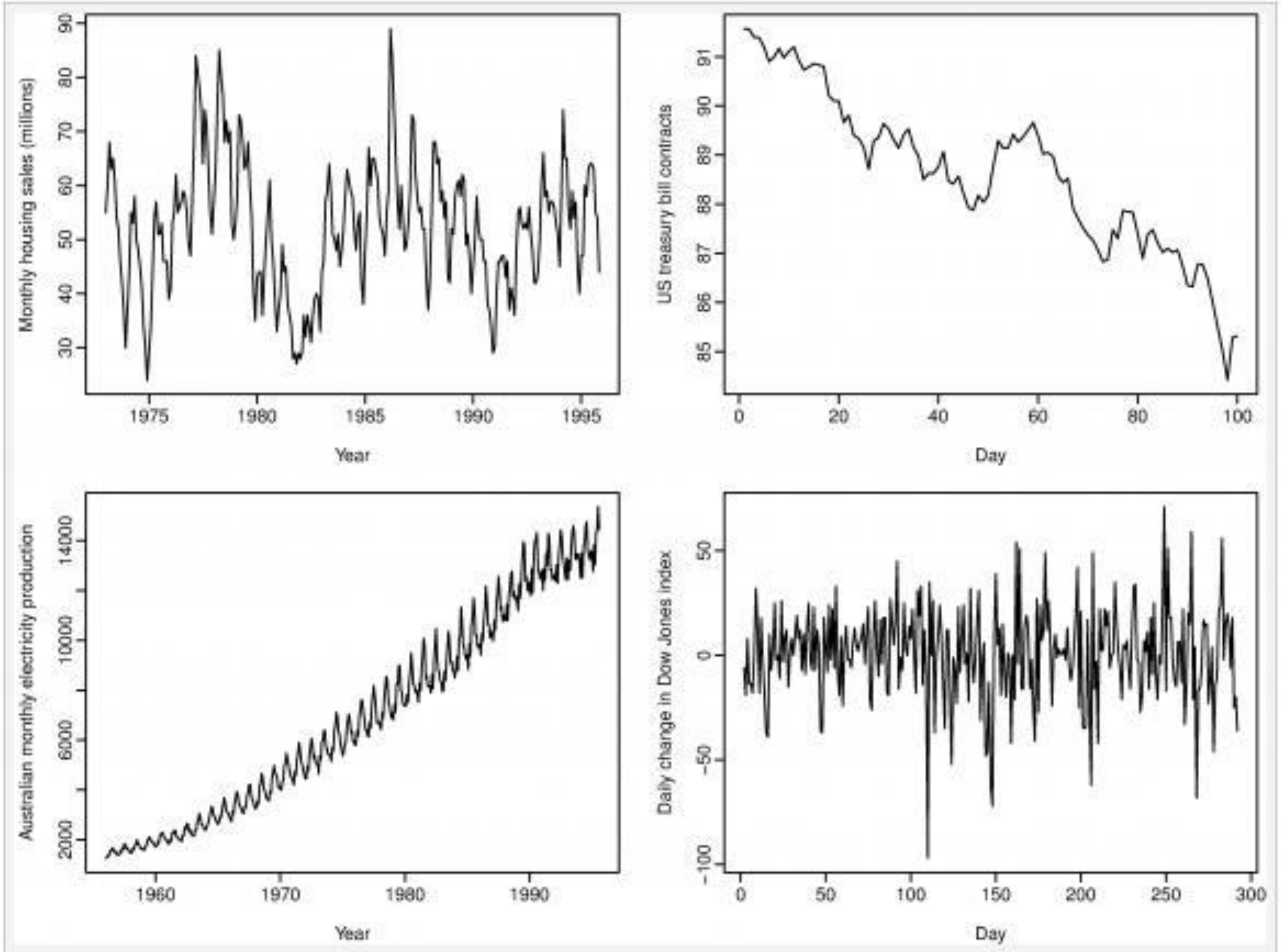
En **finanzas**, una serie de tiempo refleja la trayectoria de un conjunto elegido de datos (e.g. el precio de una acción) en un período de tiempo específico y en una frecuencia regular.

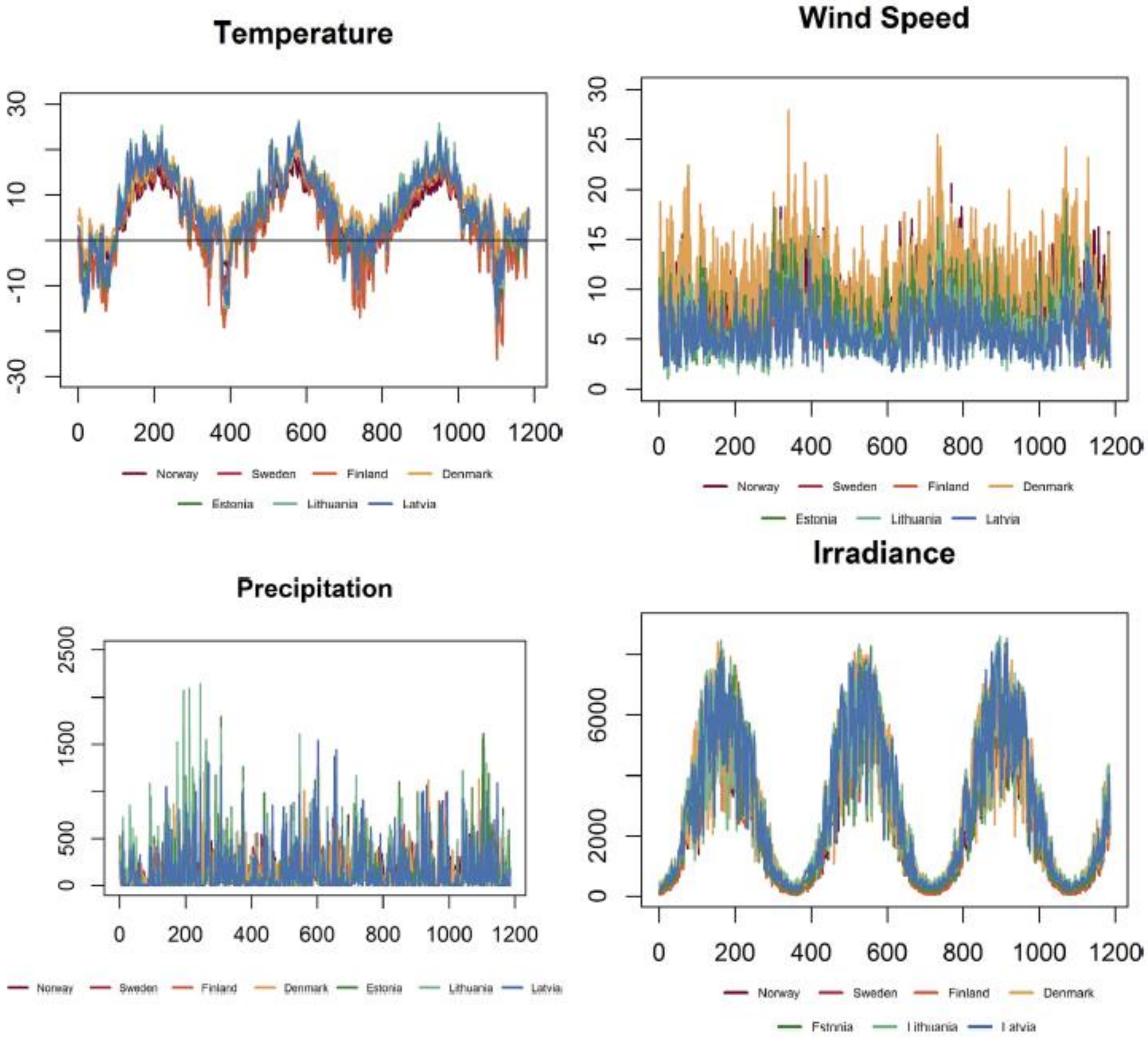
En el análisis de series de tiempo **no** existe un **periodo de tiempo mínimo** o **máximo** que deba ser tenido en cuenta, lo cual permite que el período de tiempo analizado sea elegido de acuerdo con las necesidades del inversionista.

Componentes de una Serie de Tiempo

- **Tendencia:** existe cuando la serie de tiempo presenta un crecimiento (decrecimiento) de largo plazo. Este incremento (decrecimiento) no tiene que ser lineal.
- **Estacionalidad:** un patrón estacional se presenta cuando la serie de tiempo es influenciada por diversos factores en un período de tiempo fijo y conocido (e.g. incremento en los patrones de consumo en diciembre).
- **Ciclo:** una serie de tiempo presenta un patrón cíclico cuando los datos presentan alzas y bajas en un espacio de tiempo no fijo.
- **Irregular:** componente estocástico. Fluctuaciones de corto plazo.

Componentes de una Serie de Tiempo




Temperature
Wind Speed
Precipitation
Irradiance
Norway
Sweden
Finland
Denmark
Estonia
Lithuania
Latvia

Algunas Condiciones

El valor de una variable aleatoria depende de sus propios valores pasados o de una suma ponderada de perturbaciones aleatorias.

$\{y_t\}_{t=1}^{T}$ **debe ser estacionario y ergódico**

Algunas Condiciones

Estacionariedad: tome n observaciones y las compara con otras n observaciones tomadas de otra parte, la distribución generadora de momentos debe ser idéntica, lo que implica, entre otras cosas, que la media y la varianza son constantes.

Ergodicidad: El valor esperado se puede expresar como el producto de los valores esperados para dos pedazos diferentes de la distribución en el límite cuando N se hace infinito. También se podría entender como que las covarianzas se van a cero lo suficientemente rápido cuando N se hace infinito, tan rápido como para que el proceso sea estacionario (ergodicamente).

Modelación de la Media

Medias Móviles (MA): con ε_t **ruido** blanco, es decir de media cero y estacionario en covarianza.

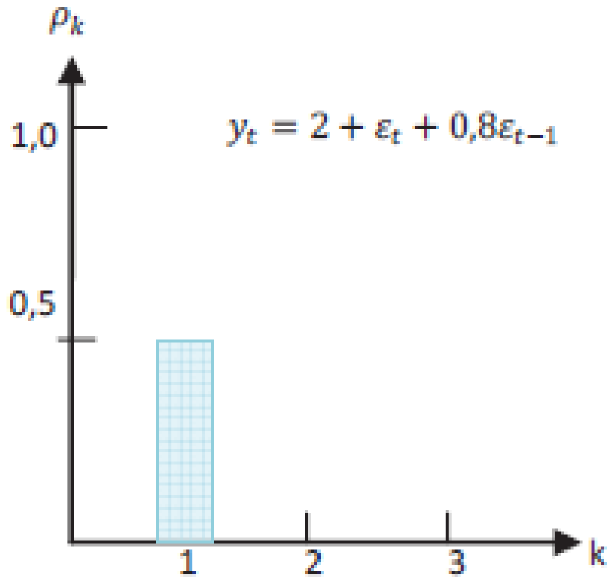
$$\boldsymbol{E(\varepsilon_t) = 0, \varepsilon_t^2 = \sigma^2 > 0, E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}\right) = 0}, con\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

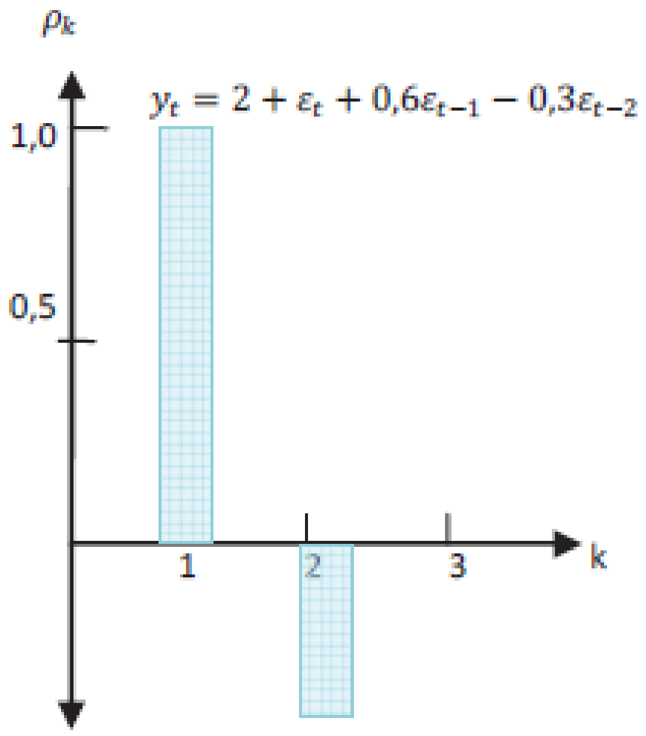
Se puede entender como un proceso que comenzó hace tanto tiempo que su media y covarianza se han estabilizado en valores constantes.

$$\boldsymbol{MA(q)}\text{:}\ \boldsymbol{y_t = \mu + \theta_0 \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}}\ con\ \theta_0 = 1$$

Modelación de la Media

Medias Móviles (MA):





Modelación de la Media

Procesos Autoregresivos (AR):

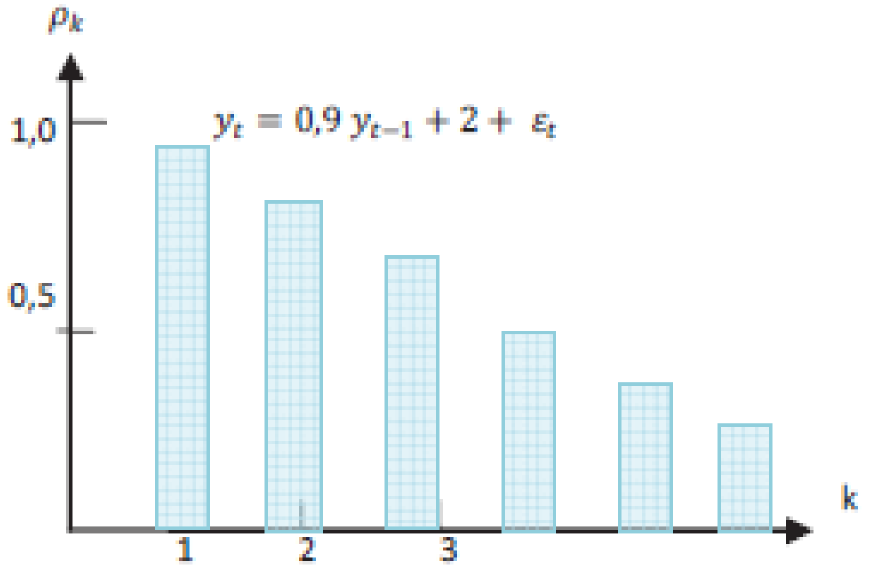
$$\boldsymbol{AR(p)}:\ y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t$$

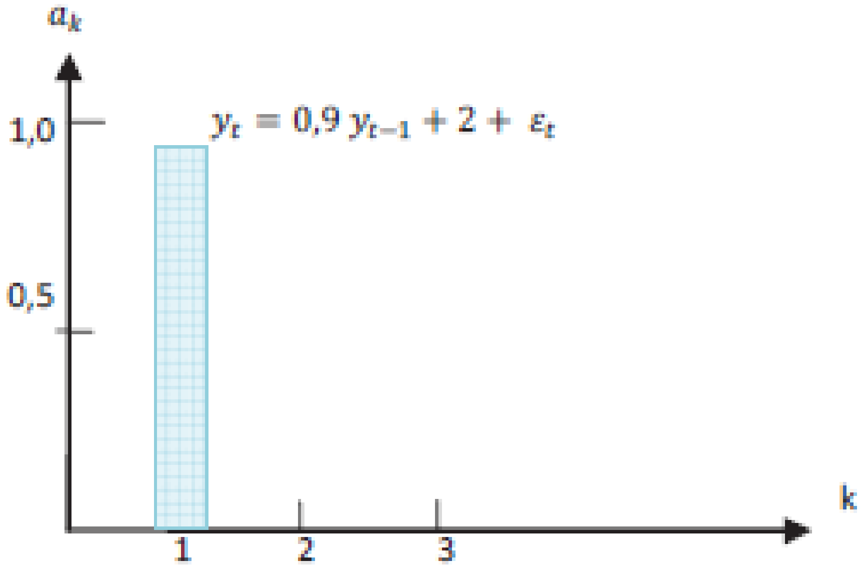
$$E(y_t) = E(y_{t-1}) = \cdots = \mu$$
$$\mu = \phi_1\mu + \phi_2\mu + \cdots + \phi_p\,\mu + \delta$$
$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}$$

Nótese que una de las condiciones de estacionariedad implica que: $\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p < 1$

Modelación de la Media

Procesos Autoregresivos (AR):





Modelación de la Media

Un caso específico $\boldsymbol{AR(1)}$: $\boldsymbol{y_t = \phi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t}$

Media: $\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1}$

Haciendo $\boldsymbol{\delta = 0}$, como desviaciones alrededor de la media,

Varianza:

$$\gamma_0 = E[(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)^2] = E(\phi_1^2 y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\phi_1 y_{t-1}\varepsilon_t) = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

Modelación de la Media

Covarianzas: $\gamma_1 = E(y_t y_{t+1}) = E\big(y_t(\phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1})\big) = \phi_1 \gamma_0$

Por sustitución, $\gamma_k = \phi_1^k \gamma_0 = \frac{\phi_1^k \sigma^2}{1-\phi_1^2}$

Correlación (ACF): $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k$

El proceso tiene memoria infinita.

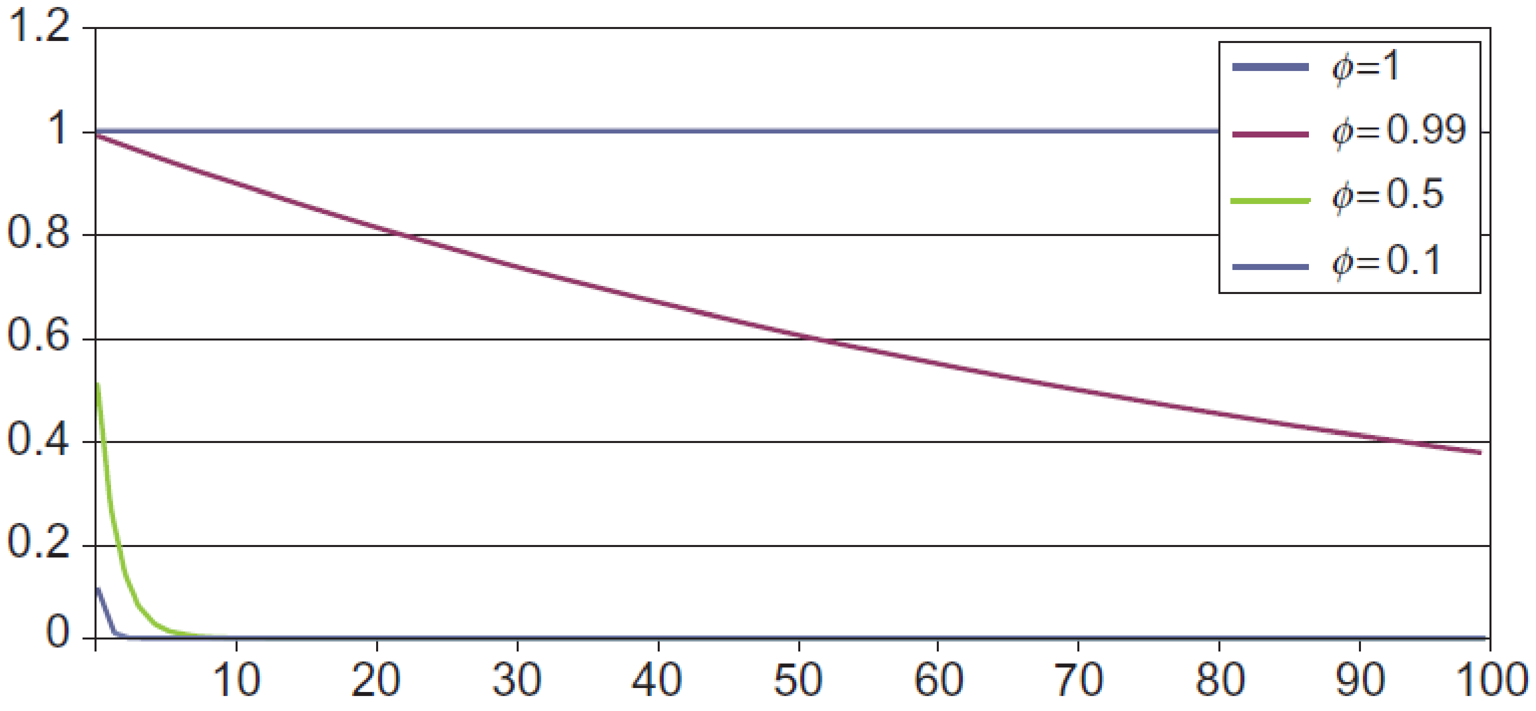
Modelación de la Media

La **función de autocorrelación (ACF)** contiene todas las correlaciones (directas e indirectas) entre y_t y γ_{t-k}.

La **función de autocorrelación parcial (PACF)** contiene solamente la correlación directa entre y_t y y_{t-k}.

Modelación de la Media

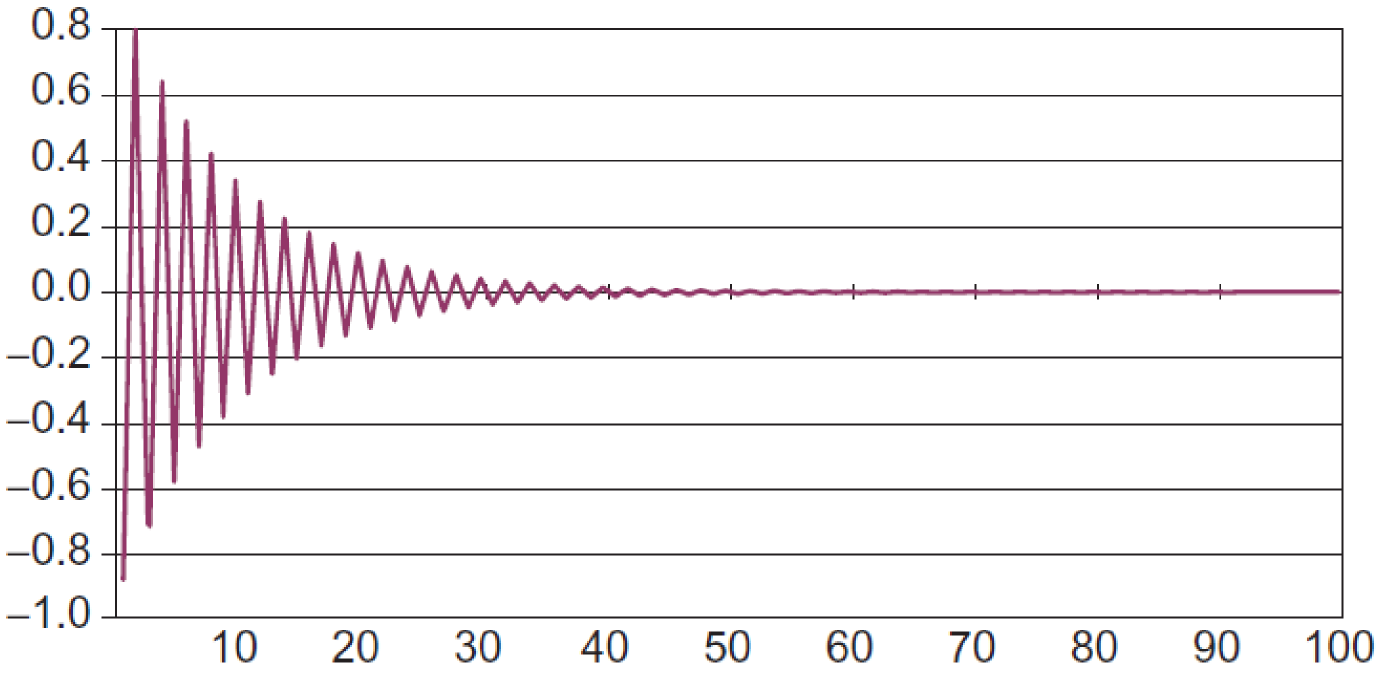
Figure 3.2 Autocorrelation functions for AR(1) models with positive ϕ_1.



Notes: We plot the autocorrelation function for four AR(1) processes with different values of the autoregressive parameter ϕ_1. When $\phi_1 < 1$ then the ACF decays to 0 at an exponential rate.

Modelación de la Media

Figure 3.3 Autocorrelation functions for an AR(1) model with $\phi = -0.9$.



Notes: We plot the autocorrelation function for an AR(1) model with $\phi = -0.9$ against the lag order.

Modelación de la Media

Modelos Autoregressivos de Medias Móviles ARMA(p,q):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

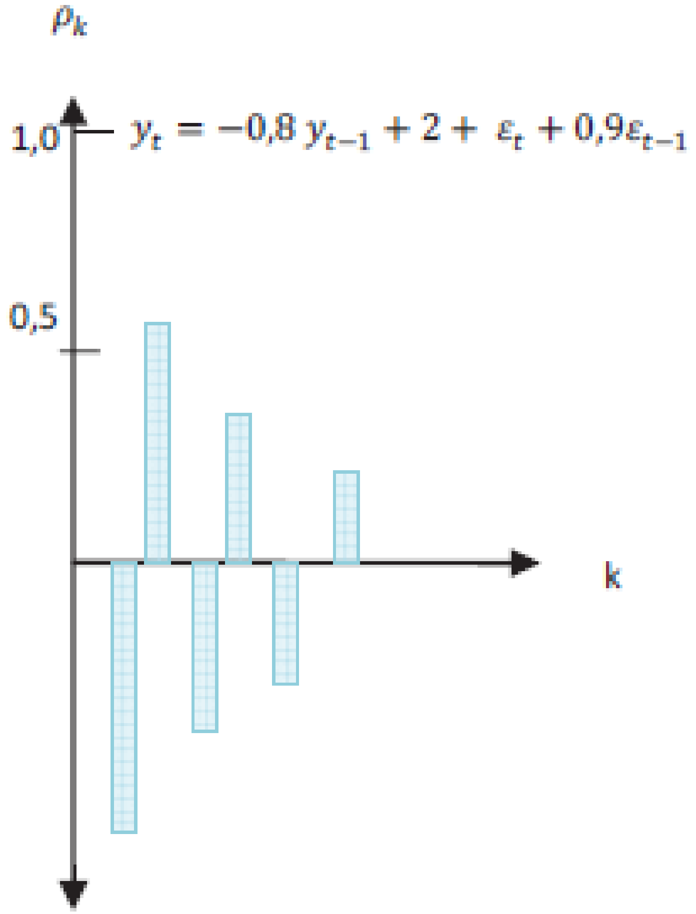
Si el proceso es estacionario:

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p < 1$$

Modelación de la Media

Consideremos un ARMA(1,1):



Modelo ARIMA

Si se tienen **procesos no estacionarios**, se pueden transformar en procesos estacionarios **diferenciándolos** una o más veces.

Decimos que $\boldsymbol{y_t}$ es no estacionaria homogénea de **orden $\boldsymbol{d}$** si:

$$\boldsymbol{w_t} = \Delta_{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{y_t}$$

Es una serie estacionaria. Δ denota diferenciación.

Metodología Box-Jenkins

La **metodología Box-Jenkins** es un proceso de 5 etapas para identificar, seleccionar y evaluar modelos de media condicional para series de tiempo discretas y univariadas.

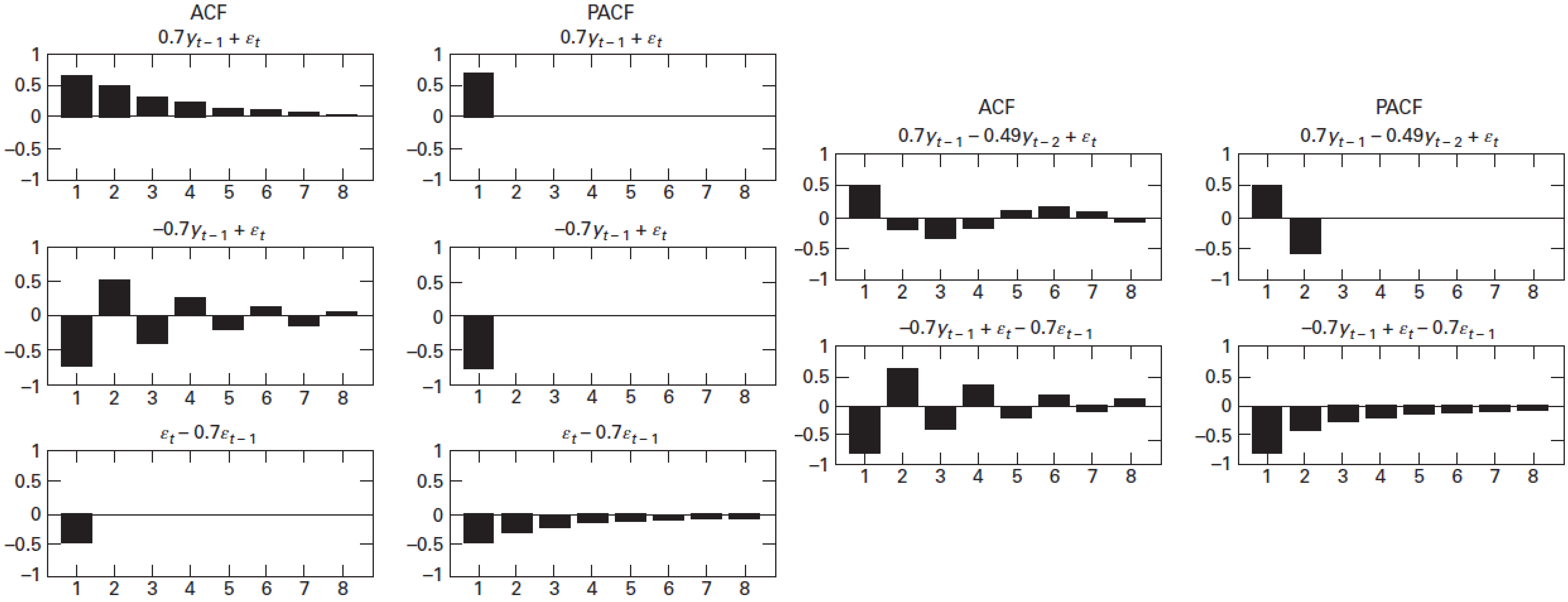
1. Establezca la **estacionariedad** de su serie (pruebas de raíz unitaria). Si su serie no es estacionaria, diferencie sucesivamente hasta obtener la estacionariedad.

2. **Identifique** un modelo de la media condicional para sus datos. Las funciones ACF y PACF son de ayuda para su selección.

Metodología Box-Jenkins

Proceso	ACF	PACF
AR(p)	Infinita (decae exponencialmente o en forma de una onda sinusoidal)	Finita $\pi_k = 0\; para\; k > p$
MA(q)	Finita $\rho_k = 0\; para\; k > q$	Infinita (decae exponencialmente o en forma de una onda sinusoidal)
ARMA(p,q)	Como un AR(p) para $k>p$	Como un MA(q) para $k>q$

Metodología Box-Jenkins



Metodología Box-Jenkins

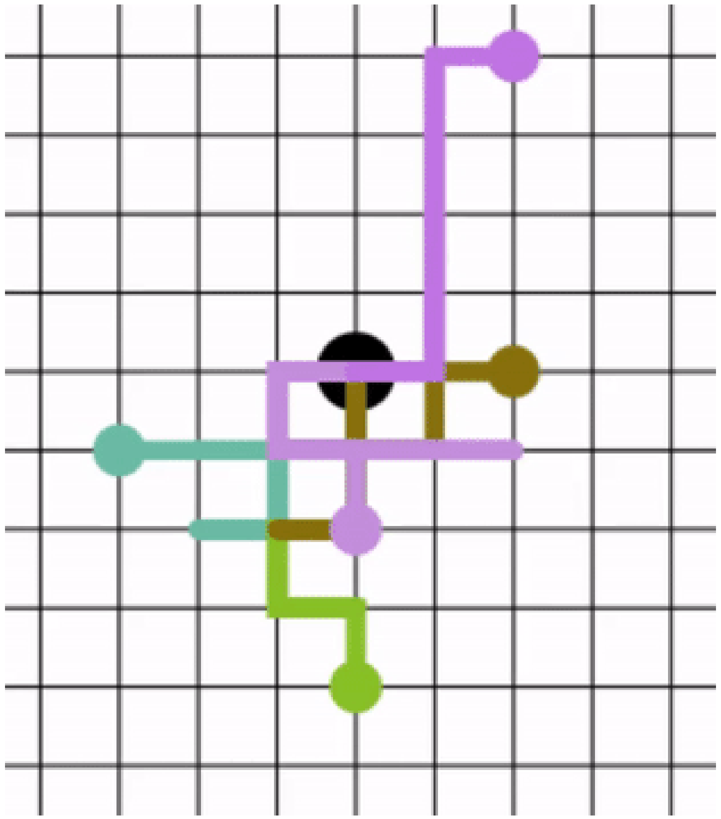
3. **Especifique el modelo**, estime los parámetros del modelo. Compare entre modelos mediante criterios de selección (como AIC, BIC, HQC).

4. Realice **pruebas de bondad de ajuste** para asegurar que el modelo describe sus datos adecuadamente. Los residuales no deben presentar autocorrelación y deben ser homocedásticos.

5. Después de escoger un modelo, éste se puede utilizar para **pronosticar**.

Caminatas Aleatorias y Raíces Unitarias

Una **caminata aleatoria** es un proceso estocástico que describe un trayecto de pasos aleatorios.



Es un modelo de referencia en finanzas que se utiliza a menudo para modelar los precios en logaritmos. Si $\boldsymbol{S_t}$ es el precio de cierre de un activo y $\boldsymbol{s_t = \ln(S_t)}$, entonces los retornos logarítmicos están definidos por: $\boldsymbol{R_t = ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) = s_t - s_{t-1}}$.

Caminatas Aleatorias y Raíces Unitarias

La **caminata aleatoria** del modelo para los precios logarítmicos está definida por:

$$\boldsymbol{s_t = s_{t-1} + \varepsilon_t}$$

Sustituyendo iteradamente los precios logarítmicos iterados se tiene:

$$s_t = s_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$s_t = s_{t-\tau} + \varepsilon_{t-\tau+1} + \varepsilon_{t-\tau+2} + \cdots + \varepsilon_t$$

Como los residuales pasados $\varepsilon_{t-\tau}$ (o choques) tienen el mismo peso en la modelación de s_t, **los choques pasados tienen un efecto permanente** en el modelo de caminata aleatoria.

Caminatas Aleatorias y Raíces Unitarias

La **media y varianza condicional** son iguales a:

$$E_t(s_{t+\tau}) = s_t$$

$$Var_t(s_{t+\tau}) = \tau\sigma_\varepsilon^2$$

El pronóstico de $\boldsymbol{s}$ en cualquier horizonte de tiempo es el valor de hoy, $\boldsymbol{s_t}$.

El modelo de caminata aleatoria implica que la serie no es predecible.

Caminatas Aleatorias y Raíces Unitarias

Los retornos de activos financieros suelen tener una media positiva pequeña correspondiente a una deriva (*dritft*) en los precios logarítmicos. Así, un **modelo de caminata aleatoria con deriva** es igual a:

$$s_t = \mu + s_{t-1} + \varepsilon_t$$

Sustituyendo hasta $t = 0$:

$$s_t = t\mu + s_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1$$

La deriva $\boldsymbol{\mu}$ corresponde a una tendencia determinística y la **suma de los choques** corresponde a una tendencia estocástica.

Caminatas Aleatorias y Raíces Unitarias

Una serie de tiempo, $\boldsymbol{s_t}$, sigue un modelo $\boldsymbol{ARIMA(p,1,q)}$ si las primeras diferencias, $\boldsymbol{s_t - s_{t-1}}$, sigue un proceso con reversión a la media, un $\boldsymbol{ARIMA(p,q)}$. En este caso $\boldsymbol{s_t}$ tiene una raíz unitaria.

Para probar por raíces unitarias considere un modelo $\boldsymbol{AR(1)}$ con y sin constante:

$$s_t = \phi_0 + \phi_1 s_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$s_t = \phi_1 s_{t-1} + \varepsilon_t$$

La prueba de Dickey-Fuller tiene la hipótesis nula: $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\phi_1 = 1}$, versus la hipótesis alternativa: $\boldsymbol{H_A}$: $\boldsymbol{|\phi_1| < 1}$.