

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР И АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Общие сведения о диэлектрических резонаторах

Диэлектрический резонатор (ДР) – это образец определенной формы, состоящий из диэлектрического (немагнитного) материала, помещенный в неограниченное внешнее пространство и способный усиливать амплитуду электромагнитного поля. Чаще всего встречаются диэлектрические резонаторы в форме диска (см. рис. 1.1 и 1.2), но существует и множество других форм. Такой объект способен играть роль резонатора благодаря внутренним отражениям электромагнитных волн от границы диэлектрик-воздух. Это приводит к сосредоточению электромагнитной энергии внутри образца, однако, поскольку граница любого диэлектрика частично прозрачна, то часть энергии всегда просачивается наружу.



Рис. 1.1 Диэлектрические резонаторы для фильтров и генераторов микроволнового и миллиметрового диапазонов [47]

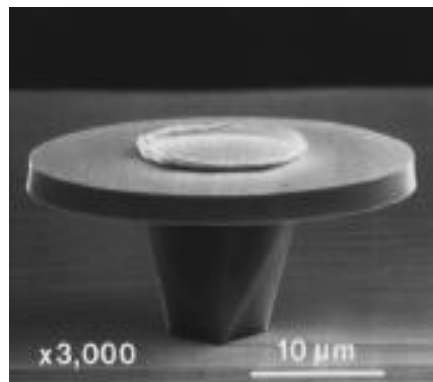


Рис. 1.2 Микродисковый лазер инфракрасного диапазона с оптической накачкой на пьедестале [48]

Первое исследование, показавшее, что диэлектрические объекты могут проявлять резонансное поведение подобно металлическим полостям, было опубликовано в 1939 году Рихтмайером [49]. Более целенаправленное изучение микроволновых ДР и областей их применения началось только в 1950-1960е

годы и охватило теоретический анализ резонансных частот и модовых полей, разработку принципов проектирования самих ДР и схем с их включением и другие вопросы [50 - 53]. Однако отсутствие долговечных материалов с малыми потерями длительное время затрудняло применение ДР в микроволнах. Тем не менее, эти пионерские исследования позволили разобраться в свойствах ДР и стимулировали усилия по разработке технологий получения высококачественных диэлектрических материалов.

Преимущества ДР в микроволновом диапазоне волн вытекают из совокупности свойств, которыми они обладают. Фактически, они заполняют пробел между волноводными и печатными схемами, поскольку обеспечивают, с одной стороны, почти такие же величины добротностей и температурную стабильность, как полые резонаторы из инвара и меди, а с другой стороны, такие же широкие возможности интегрирования, какие существуют для микрополосковых резонаторов [47].

Модами принято называть характерные дискретные состояния поля в резонаторах, имеющие структуру стоячей волны и высокие значения амплитуды. В рамках электромагнитной теории они находят свое объяснение как решения гармонических уравнений Максвелла в отсутствие источников; такие решения могут существовать только при дискретных (собственных) комплексных значениях частоты [54]. В микроволновых приложениях ДР чаще всего имеют размеры, меньшие или сравнимые с длиной волны, и обычно их резонансные свойства связаны с модой квази- TE_{01} в цилиндрическом или дисковом резонаторе или квази- TE_{11} модой в прямоугольном резонаторе. Например, мода квази- TE_{01} , при некоторых значениях отношения диаметра к высоте диска, является самой низкой по частоте и носит название основной или фундаментальной моды. В целом, номенклатура обозначений для мод ДР не так хорошо разработана, как для полых металлических резонаторов.

Добротностью (или Q-фактором) называют отношение вещественной части комплексной собственной частоты резонатора к удвоенной мнимой части

[54]. Эквивалентным образом ее можно определить как отношение запасенной в резонаторе энергии к теряемой, в среднем за период колебаний.

Способность поля излучаться из ДР контролируется контрастом материала резонатора по отношению к материалу окружающего пространства, то есть разностью между диэлектрическими проницаемостями. Проницаемость, в свою очередь, это макроскопический параметр, который вводится после усреднения микроскопических характеристик среды. В случае немагнитного материала его диэлектрическая проницаемость ε равна квадрату показателя преломления ν^2 , так что выбор между этими двумя параметрами – дело вкуса или привычки исследователя. Помимо контраста, на высоких частотах потери на излучение значительно зависят от шероховатости поверхности ДР.

Кроме потерь на излучение, реальные диэлектрические резонаторы имеют и потери в материале, из которого они изготовлены. При моделировании ДР потери в материале описывают с помощью макроскопического параметра – мнимой части диэлектрической проницаемости $\text{Im}\varepsilon$ или показателя преломления $\text{Im}\nu$ (или же тангенса угла потерь – отношения мнимой и действительной частей проницаемости). Добротности современных ДР на низших модах достигают значений 10^4 . Однако, в диапазонах миллиметровых, терагерцевых и более коротких волн резонаторы на моде квази- TE_{01} становятся слишком маленькими, чтобы использовать их эффективным образом. Поэтому в указанных диапазонах чаще всего применяют значительно большие ДР в виде дисков, способные резонировать на **модах шепчущей галереи (ШГ)** [48]. Дополнительным преимуществом таких мод высшего порядка является большая концентрация поля внутри ДР и, как следствие, значительно большие значения добротности. Рекордные значения Q-факторов достигают 10^8 ; они были измерены в видимом диапазоне для дисков с «атомарно гладкой» поверхностью (порядка 1-2 нм), полученной после расплавления ободка и его постепенного остывания [55].

Применения ДР. В микроволновом диапазоне частот от 2 до 70 ГГц ДР наиболее часто используются в виде разнообразных **фильтров**, и ожидается,

что область их применения будет расширяться далее [56]. Однако, как указывалось выше, часть электромагнитной энергии всегда вытекает из ДР в окружающее пространство и, вдали от ДР, трансформируется в уходящую сферическую или цилиндрическую волну.

Поэтому всякий ДР можно рассматривать еще и как **антенну**, причем каждая мода ДР имеет свою диаграмму излучения (ДИ) и направленность излучения (НИ). Привлекательным свойством ДР как антенны является его способность значительно повышать сопротивление излучения элементарного малозразмерного излучателя (штыря или щели) - приблизительно в Q^2 раз. Это свойство позволяет диэлектрическим резонаторным антеннам успешно конкурировать с микрополосковыми и другими печатными антеннами [57].

Вместе с тем, диэлектрические тела находят применение и как элементы антенн, основанных совсем на других принципах – квазиоптических линзовых антенн миллиметровых и терагерцевых волн и **линз** оптического диапазона [58]. При этом фокусировка (в приемном варианте) или коллимация излучения (в передающем варианте) достигается за счет геометро-оптических свойств линзы. Тем не менее, в силу конечных размеров, всякая линза остается открытым резонатором.

Далее, ДР позволяют разрабатывать высокостабильные **генераторы** микроволн и миллиметровых волн. Такие генераторы, стабилизированные по частоте с помощью высокодобротных ДР, имеют несколько привлекательных особенностей, среди которых малые размеры, простота конструкции, низкая стоимость, нечувствительность к вибрациям, отсутствие высших гармоник, малый уровень шума и работа без умножения частоты [59].

Лазеры, излучающие в диапазоне от терагерцевых волн до видимого света и даже ультрафиолета, являются, по-видимому, новейшей из областей применения диэлектрических резонаторов [8]. Часто такие лазеры имеют вид полупроводниковых дисков, стоящих на пьедестале (см. рис. 1.2). В лазерном резонаторе потери рабочей моды на излучение полностью компенсируются электромагнитной энергией, генерируемой в активной зоне (см. ниже п. 1.2).

Микролазеры, изготовленные в виде тонких дисков с гладким краем, демонстрируют замечательно низкие пороги излучения и рассматриваются как перспективные источники света для оптических интегральных схем высокой плотности, а также для квантовых компьютеров.

Проблемы, вызовы и тенденции. Как уже указывалось, долгое время главной проблемой было отсутствие материалов для ДР. Доступные материалы были весьма ограничены как по величине диэлектрической проницаемости, так и по долговечности - со временем потери в них возрастали из-за деградации однородности материалов. В настоящее время имеется широкий спектр промышленно производимых материалов с диэлектрической проницаемостью до 100-150 и тангенсом потерь не более 10^{-4} [47].

Общепризнанным и наиболее высокотехнологичным способом избежать изготовления многих дорогостоящих прототипов и тем самым ускорить и удешевить разработку электромагнитных приборов и систем сегодня является их предварительное компьютерное моделирование и оптимизация. При этом к средствам и методам проектирования одновременно предъявляются требования обеспечить и высокую эффективность и приемлемую точность (без которой достоверность моделирования остается под вопросом).

Главный вызов при моделировании диэлектрических рассеивателей вытекает из их фундаментального свойства вести себя как открытые резонаторы. Если вещественная частота источника подходит близко к резонансной, то поле внутри и снаружи ДР резко изменяется и принимает форму, близкую к полю соответствующей моды (собственного колебания). Поэтому, например, в любой диэлектрической линзе размерами порядка десятков длин волн поле сочетает в своем поведении как лучевые свойства (обеспечивающие фокусировку вне резонансов), так и модовые (разрушающие фокусировку на резонансных частотах). Взаимодействие этих различных по своей природе механизмов может быть очень сложным, и его точное описание представляет собой весьма нетривиальную задачу. Более того, правильная интерпретация поведения полей невозможна без анализа собственных мод

диэлектрических рассеивателей как открытых резонаторов, то есть, спектра их собственных частот и соответствующих Q -факторов. Из этого вытекает, что задачи рассеяния необходимо исследовать совместно с задачами на собственные значения, хотя в первых частота имеет вещественные значения, а во вторых - комплексные.

1.2 Микролазеры как диэлектрические резонаторы с активными зонами

Микродисковые полупроводниковые лазеры появились в 1990е годы как миниатюрные источники сначала инфракрасного, а затем также терагерцевого, видимого и ультрафиолетового излучения [48, 60-67]. Вначале такие лазеры представляли собой диски диаметра 5-10 микрон и толщиной 100-300 нм, помещенные на пьедестал (см. рис.1.2 и 1.3).

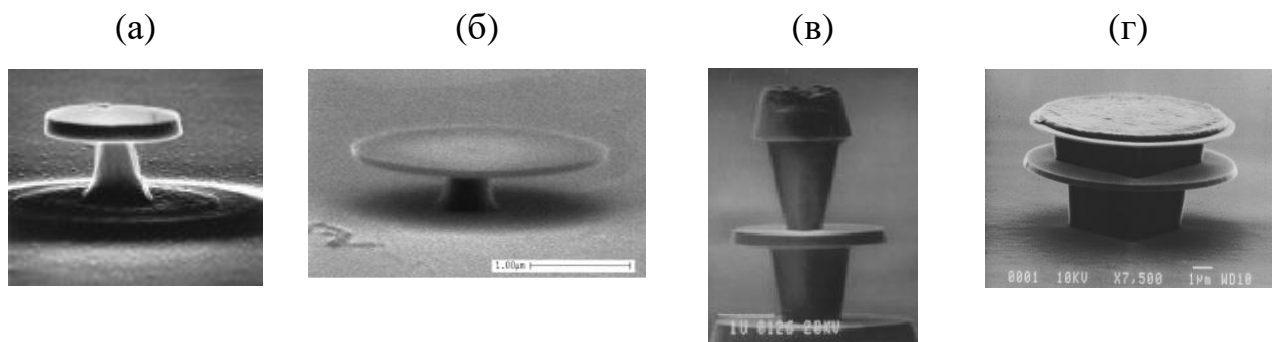


Рис. 1.3 Микрофотографии дисковых лазеров с оптической накачкой (а) [65] и (б) [66] и инжекционного типа (в) [64] и (г) [63]

Для изготовления микродисковых лазеров используют различные полупроводниковые **материальные системы**. Между слоями полупроводников помещают один или несколько параллельных активных слоев [60-67] – сплошных (кванторазмерный активный слой, quantum well) или состоящих из кванторазмерных активных частиц (слой квантовых частиц, quantum-dot layer).

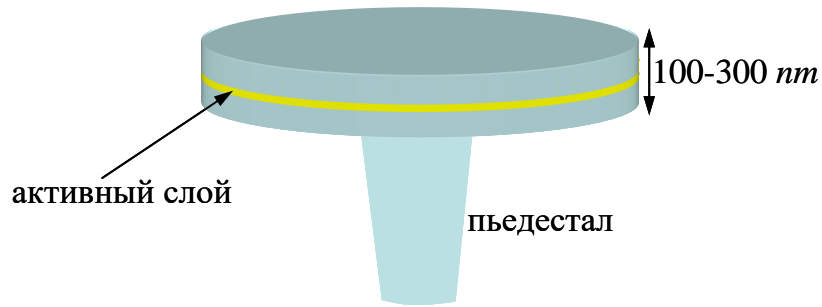


Рис. 1.4. Схема внутреннего устройства микродискового лазера на пьедестале

Каждая материальная система как однородная среда обладает своей полосой частот спонтанного излучения – спектром фотолюминесценции [60-62]. При накачке именно в этой полосе происходит стимулированное излучение. Излучение света в диапазоне от инфракрасного до ультрафиолета можно получить с помощью следующих систем [63-67] (λ - длина волны в центре полосы люминесценции, α - показатель преломления):

GaAs/InP - $\lambda = 1.55$ мкм, $\alpha = 3.63$

GaAs-AlAs/InAs - $\lambda = 970$ нм

GInP/InP - $\lambda = 650$ нм

ZnSe/CdS - $\lambda = 510$ нм

ZnO/SiO₂ - $\lambda = 390$ нм

InGaN/GaN - $\lambda = 370$ нм

Несколько позднее появились микродисковые лазеры из монокристаллов с примесью ионов Er [55], [68], а в последние годы – из полимерных материалов с красителями.

Таким образом, монокристаллический, полупроводниковый или полимерный микролазер – это диэлектрический резонатор, в котором имеется активная зона. При этом толщина активных слоев составляет обычно 5-10 нм, то есть значительно меньше толщины диска. Однако, поскольку толщина диска

значительно меньше длины волны, то приближенно можно считать, что весь диск состоит из материала, способного быть активным. В таком случае точная форма активной зоны в плоскости диска определяется особенностями накачки.

По типу **накачки** все микрорезонаторные лазеры можно разделить на две группы: лазеры с оптической накачкой и лазеры с инжекцией носителей из электродов [60-67]. При оптической накачке резонатор изготавливается с плоской верхней поверхностью - см. рис. 1.3 (а), (б), освещаемой широким лучом лазера накачки. Тогда активным можно считать весь резонатор. В инжекционных лазерах микродиск зажат между электродом и подложкой или же между двумя электродами - см. рис. 1.3 (в), (г). Поэтому здесь форма и размер активной области зависят от формы и расположения электродов. Как правило, первые экспериментальные результаты с новыми материалами достигались при криогенных температурах и с оптической накачкой, а затем, после усовершенствования технологий, добивались излучения света при комнатных температурах с инжекцией носителей. Эксперименты с инжекционными лазерами показали, что расположение и форма электродов имеют критическое влияние на характеристики лазера.

Фундаментальные свойства микродисковых лазеров, согласно измерениям, состоят в следующем [60-63]:

- (i) **частоты излучения** расположены почти эквидистантно в полосе фотолюминесценции материальной системы,
- (ii) **пороги излучения** имеют сверхнизкие значения,
- (iii) **направленность излучения** мала, поскольку излучение происходит главным образом в плоскости диска и направлено во все стороны.

Все эти свойства находят свое объяснение, если принять, что такие лазеры излучают на модах ШГ с высокими азимутальными индексами, поля которых прижаты к краю диска за счет почти полного внутреннего отражения в плоскости диска [68].

Действительно, для этих мод приближенно длина волны в диэлектрике укладывается целое число раз на окружности с радиусом диска, их добротности

рекордно велики благодаря почти полному внутреннему отражению от края, а излучение в вертикальном направлении пренебрежимо мало по той же причине. Расстояние между частотами соседних мод называют свободным интервалом частот (free spectral range). Его отношение к ширине линии излучения моды называют совершенством (finesse) резонатора. ДИ в плоскости диска имеет $2m$ одинаковых лепестков для m -ой моды ШГ – тем самым ее направленность (directivity) всегда равна 2 (для всенаправленного излучения эта величина равна единице).

Современные тенденции в исследованиях микрорезонаторных лазеров связаны с попытками понизить пороги и повысить направленность излучения. Для этого стараются снизить шероховатость края диска, оптимизировать форму и расположение области накачки, интегрировать диск с круговым рефлектором Брэгга (КРБ), объединить микродиски в массив или фотонную молекулу, а также найти оптимальные формы некруговых резонаторов (рис. 1.5) [8].

Низкая направленность излучения является серьезным недостатком круговых микродисковых лазеров. Поле моды ШГ такого диска в дальней зоне имеет большое число (обычно нескольких десятков) одинаковых лепестков – благодаря наличию круговой симметрии. Понятно, что для повышения направленности излучения нужно нарушить круговую форму, поэтому появился целый ряд работ, посвященных экспериментальному исследованию некруговых резонаторов: в форме треугольника [69], квадрата [70], шестиугольника [71], шестеренки [72], стадиона [48,73] и эллипса [74].

Излучение таких лазеров имеет направленность, достигающую 4-5, поскольку их ДИ имеют только несколько интенсивных лепестков в зависимости от числа линий симметрии. Принципиально новые свойства продемонстрировал лазер на резонаторе с контуром в форме **спирали** Архимеда (рис. 1.5 (е)) [75, 76], который способен на излучение с главным лепестком шириной в 40° - 60° и направленностью ~ 10 . Спиральный резонатор не обладает ни поворотной, ни зеркальной симметрией. Естественной платой за улучшение направленности является повышение порогов излучения.

Гладкость боковой поверхности в микродисковом лазере оказывает двойное влияние на его характеристики. Во-первых, отклонение от круговой формы приводит к расщеплению мод на дублеты [77] и смещению по частоте.

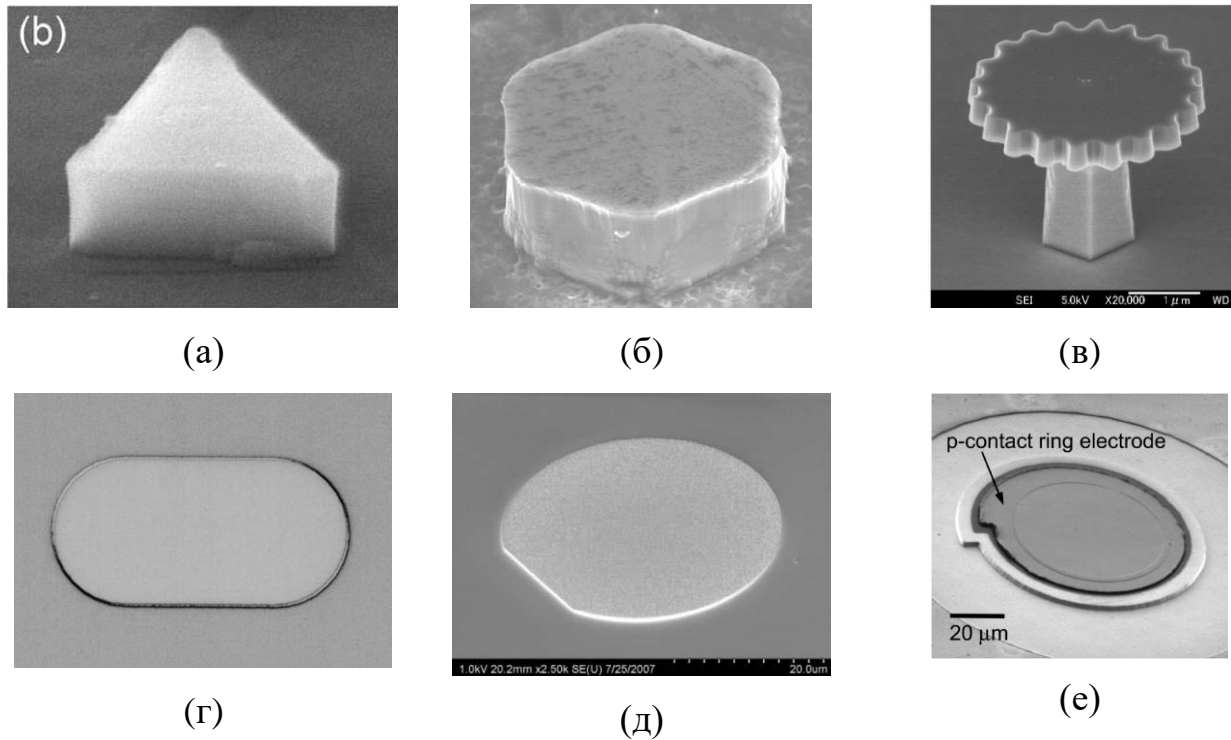


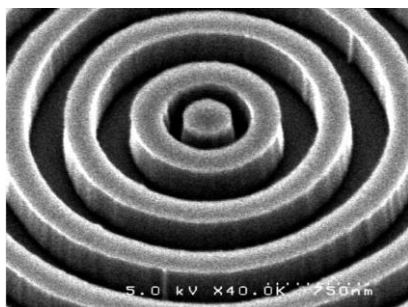
Рис. 1.5. Лазерные микрорезонаторы различной формы: (а) треугольный [69], (б) шестиугольный [71], (в) в форме шестеренки [72], (г) стадион [73], (д) усеченный диск [77], (е) спиральный [75]

Во-вторых, если размеры шероховатостей на боковой поверхности сравнимы с длиной волны в материале, то появляются высокие дифракционные потери каждой моды дублета. Это радикально ограничивает рост добротности в пассивном диске (без накачки) или снижение порогов излучения в активном диске (при наличии накачки) с ростом частоты или радиуса диска, или азимутального индекса мод ШГ. Измеренные добротности микродисковых резонаторов обычно находятся на уровне 10^3 - 10^4 [55,78]. Это значительно ниже, чем добротность (10^8 - 10^9) мод ШГ в сферических резонаторах, полученных путем оплавления кончика стеклянного оптического волокна [79], где силы поверхностного натяжения снижают шероховатости до уровня 1 \AA . Однако

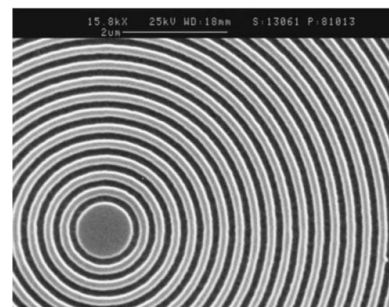
процедуру оплавления края можно применить и к микродискам из монокристаллов, что позволяет повысить их добротность до 10^7 - 10^8 [80].

До недавнего времени в опытах с оптической накачкой использовались лазеры накачки с широким лучом, что обеспечивало равномерную накачку микродисков. Однако, поскольку поле моды ШГ сосредоточенно вдоль края диска, достаточно накачивать область в виде тонкого кольца вдоль края. Такая задача была решена в [81] путем создания полого луча накачки за счет применения аксикона (конической линзы), что позволило добиться уменьшения порога по энергии накачки. Подобные эффекты наблюдаются и в микролазерах инжекционного типа. Инжекционные лазеры с электродами, расположенными в центре диска, как на рис. 1.2 - (в), (г) имеют более высокий порог излучения мод ШГ, чем лазеры с кольцевыми электродами [64]. На сегодняшний день общепризнано, что правильное расположение электродов играет важнейшую роль при проектировании любых микролазеров инжекционного типа [82].

Увеличение свободного интервала частот необходимо для создания одномодовых лазеров. Этого можно добиться путем уменьшения диаметра дискового резонатора, однако оно приводит к тому, что рабочими модами становятся не моды ШГ, а, так называемые низшие моды. Пороги излучения таких мод очень высоки за счет высоких радиационных потерь. Для уменьшения порогов излучения нужно уменьшить излучение во всех направлениях и, в особенности, в плоскости диска. Для этого микродисковый лазер помещают в круговой рефлексор Брэгга (см. Рис.1.6) [83-86].



(a)

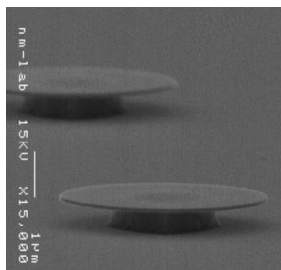


(б)

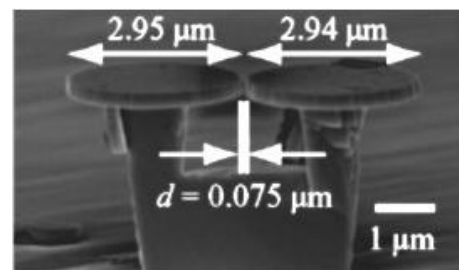
Рис. 1.6 Микродиски в круговых рефлексорах Брэгга: (а) – [85], (б) – [83]

Такие рефлекторы обычно нарезают в виде кольцевых канавок в том же материале, из которого изготовлен диск, но накачка подается только к центральному диску, так что кольца КРБ остаются пассивными.

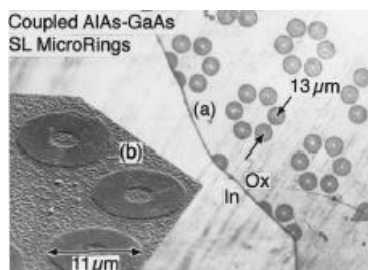
Другой подход к решению задачи снижения радиационных потерь в плоскости диска состоит в сборке нескольких элементарных микродисков в оптически связанную составную структуру (см. рис. 1.7). По аналогии с фотонными кристаллами (бесконечно-периодическими средами с диэлектрическими частицами в узлах правильной решетки), одиночные микрорезонаторы стали называть «фотонными атомами», а структуры из их конечного числа – **фотонными молекулами**. В силу того, что отдельные резонаторы здесь оказываются связанными друг с другом через излучение, собственные моды в них не являются независимыми. Поэтому их принято называть **супермодами**. В фотонных молекулах можно ожидать частичного взаимного погашения волн, излученных различными элементами – например за счет свойств симметрии.



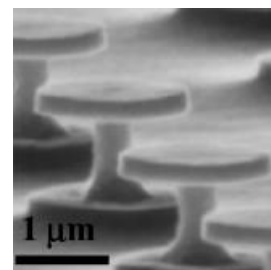
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 1.7. Примеры лазеров на фотонных молекулах: из двух дисков [87,88], (а) из кольца кольцевых резонаторов [89], (б) из линейки дисков [90].

Тем самым общие радиационные потери – а значит, и пороги генерации – для супермод в молекуле могут быть гораздо ниже, чем для соответствующих мод в уединенном резонаторе. Такие микролазеры исследовались в [87-90].

1.3 Методы анализа пассивных диэлектрических резонаторов

Для точного электродинамического анализа ДР и, тем более, их оптимизации требуется иметь надежный и эффективный вычислительный инструмент, учитывающий их специфические свойства. Например, такой инструмент должен быть работоспособным при наличии произвольных криволинейных границ ДР, использовать на них точные граничные условия, а также правильно учитывать то, что ДР находится в открытом пространстве. Даже этот краткий перечень немедленно подсказывает, что геометрическая оптика и метод конечных разностей во временной области не являются подходящими кандидатами и следует рассмотреть другие методы. С математической точки зрения, наиболее перспективными оказываются методы интегральных уравнений (ИУ), поэтому можно видеть рост числа соответствующих публикаций. Естественно, их можно применять только в сочетании с такими способами дискретизации ИУ, которые обеспечивают сходимость приближенных решений к точным (при увеличении порядка дискретизации). К сожалению, это не всегда учитывается исследователями.

Снижение размерности. Существующие сегодня технологии сухого и мокрого травления и молекулярно-лучевой эпитаксии позволяют осуществлять изготовление и контроль тонких микрорезонаторов. Трехмерную задачу о поле в присутствии диска с толщиной меньше длины волны можно приближенно свести к двумерной, в плоскости диска, если применить прием с введением эффективного показателя преломления (ЭПП) тонкого диэлектрического слоя [91,92]. Это приближение хорошо согласуется с преобладающим характером излучения в плоскости диска и приводит к отдельному рассмотрению мод Н и Е-типа. Однако есть один аспект такого приема, который почти всегда

ускользает от внимания исследователей – ЭПП определяется не единственным образом, а принимает много дискретных значений в зависимости от типа собственной волны в слое, поле которой принимают за поле в диске. Кроме того, ЭПП оказывается сильно зависящим от частоты [2, 92].

В двумерной модели, простейшей формой резонатора является круг. **Круговой ДР** с показателем преломления, равным ЭПП для данной частоты и толщины, служит двумерной моделью круглого диска. Это форма, в которой существуют моды ШГ, и ее можно исследовать аналитически, методом разделения переменных. Однако даже в этом простом резонаторе найти частоты собственных мод значительно проще, чем их добротности. Хорошее приближение к значениям частот получается, если пренебречь излучением и считать, что контур круга металлизирован [60,63]. Однако вычисление добротности (по мнимой части частоты) требует гораздо более сложной техники с использованием асимптотик Дебая для цилиндрических функций. Подобные трудности значительно возрастают для мод в более сложных круговых концентрических резонаторах, типа диска внутри КРБ (рис. 1.6), поэтому неудивительно, что аналитических формул для добротностей мод ШГ в таких резонаторах не имеется [93-95].

ГО также хорошо описывает моды в круге большого радиуса. Более того, ГО в виде так называемой теории бильярда сыграла важную роль в развитии понимания свойств резонаторов некруговой формы [96-98]. В частности, важным результатом этой теории стало открытие так называемых мод типа «галстук-бабочка» в резонаторе, имеющем форму стадиона [73]. Теория бильярда способна предсказать частоты собственных мод, однако терпит неудачу при описании Q-факторов и диаграмм излучения мод. Попытки улучшить ее путем комбинирования с законом Снеллиуса и формулами Френеля имеет ограниченную пригодность, поскольку они основаны на предположении, что поле является локально плоской волной, а граница – локально прямолинейной, что далеко от реальности для резонаторов, сравнимых с длиной волны. Более серьезно то, что теория бильярда не

способна воспроизвести дискретность комплексных собственных частот резонатора. Те же недостатки свойственны и более точной версии этого подхода, известной как «оптика гауссовых пучков» [99] и основанной на приближенной замене уравнения Гельмгольца параболическим уравнением.

В последнее время приобрели большую популярность коммерческие программы расчета электромагнитных полей, основанные на **МКРВО**. Например, он применялся к анализу мод в микрорезонаторах в работах [100-102]. Однако МКРВО неприменим к решению задач на собственные значения прямым образом. Вместо этого, в рамках МКРВО необходимо сначала поместить внутрь резонатора пульсирующий источник и найти временной отклик на него в другой точке, а потом преобразовать его по Фурье в частотную область и найти частоты и добротности резонансов по расположению и ширине пиков амплитуды принятого сигнала. Такой сложный способ оказывается сильно зависимым от выбора точек источника и наблюдения, величины временного интервала в преобразовании Фурье, а также размеров и формы вычислительного окна и типа «неотражающих» условий на его границе. В целом его точность при расчете мод невелика, а моды с добротностями более 10^4 практически невозможно рассчитать вообще [103-105].

В силу всех вышеприведенных обстоятельств неудивительно, что в последние годы прогресс в моделировании микрорезонаторов связан с отходом от грубых численных и лучевых методов и переходом к волновым методам на основе ИУ.

Интегральные уравнения электромагнитной теории делятся, как известно, на два больших класса – объемные ИУ [106] и граничные ИУ [107]. Первые имеют то преимущество, что они применимы к резонаторам как с однородным показателем преломления, так и с неоднородным. Однако объемные ИУ в трехмерном случае и в случае Н-поляризации для двумерного случая являются гиперсингулярными, что затрудняет их использование из-за отсутствия сходимости дискретных аналогов. Этот недостаток был преодолен в [108], где была предложена методика регуляризации, основанная на обращении

части, соответствующей круговой форме элементарной ячейки, при дискретизации объемных ИУ для Н-поляризации. В отличие от этого, для Е-поляризации объемные ИУ содержат только логарифмические сингулярности, и их легко рассчитать сходящимся алгоритмом [109]. Заметим еще, что методом объемных ИУ, в сочетании с методом возмущений, в [78] было исследовано расщепление мод ШГ на дублеты и снижение их добротностей при появлении шероховатости на краю диска.

Граничные ИУ являются более привлекательными в силу их меньшей размерности. Хотя они применимы только к ДР с однородным показателем преломления, их нетрудно привести к виду, не содержащему сильных сингулярностей. Хорошим примером возможностей граничных ИУ является недавно опубликованное исследование [110], в котором удалось прояснить природу так называемых резонансов «галстук-бабочка» в ДР типа стадион.

Вместе с тем, граничные ИУ могут страдать другим существенным недостатком – многие формы таких ИУ обладают спектром дефектных частот [111], которые представляют собой собственные частоты внутренней электромагнитной задачи, в которой граница считается идеально проводящей, и ДР заполнен материалом с параметрами внешней среды (например, воздуха). Тем самым в задаче на собственные значения кроме комплексных частот реальных мод ДР присутствует еще и бесконечное число чисто вещественных собственных частот, которым не соответствуют никакие моды, но которые являются полюсами числа обусловленности ИУ. Подобный метод был предложен в [112] и использовался в дальнейшем для расчета мод в шестиугольнике [113], стадионе [114], треугольнике со скругленными углами [115] и спиральном ДР [116].

Однако, в силу указанного выше дефекта, в перечисленных работах были исследованы только моды с низкими и средними Q-факторами. В работе [112] было даже ошибочно указано, что моды с высокими Q-факторами не представляют интереса при моделировании лазеров. Другие формы граничных ИУ, также имеющих ложные собственные значения, использовались в

[117,118]. Негативное влияние дефектных частот можно уменьшить (но не устранить), если схему дискретизации ИУ построить с помощью метода аналитической регуляризации. Такой вариант применялся в [119,120] для систематического исследования высокочастотных мод ШГ в кольцевом ДР и в эллиптическом ДР, помещенных в слоистую среду.

В силу всего перечисленного, с математической точки зрения наиболее привлекательной формой граничных ИУ являются так называемые **уравнения Мюллера** [121] (2 связанных ИУ в двумерном случае или 4 связанных ИУ в трехмерном случае, по числу касательных к границе ДР компонент поля). Эти ИУ, во-первых, полностью эквивалентны исходной задаче для уравнений Максвелла и тем самым не имеют ложных собственных значений (дефектных частот), во-вторых, содержат только гладкие и интегрируемые ядра и тем самым являются фредгольмовыми ИУ и, в-третьих, имеют структуру уравнений второго рода. ИУ Мюллера можно дискретизировать методом коллокаций [122], т.е. разбивая контур интегрирования на элементарные участки и вводя локально-постоянные базисные функции. Можно также построить схему Галеркина с проекцией на глобальные функции, например, на тригонометрические полиномы [123]. В силу фредгольмовости ИУ Мюллера обе указанные схемы ведут к сходящимся числовым алгоритмам. Скорость сходимости тем выше, чем больше гладкость контура ДР. В соответствии с результатами [123], порядок матричного уравнения, которое необходимо решить, определяется в практически равной степени тремя параметрами.

Это – максимальный волновой размер ДР (в длинах волн в материале), максимальная кривизна границы и желаемая точность (число правильных значащих цифр в решении) с коэффициентом, обратно пропорциональным гладкости контура. Таким образом, те исследования, в которых последние два параметра не принимают во внимание и полагаются на эмпирическое правило «десять точек на длину волны», содержат заведомо неточные численные результаты. Наконец, граничные ИУ Мюллера можно дискретизировать и

интерполяционным методом Найстрема [124], причем здесь скорость сходимости также зависит от гладкости контура [125].

Следует также заметить, что ИУ Мюллера можно отнести к **методам аналитической регуляризации**, причем явно обращаемой частью при этом служит часть, связанная с малым контрастом между материалами ДР и внешней среды. Этот метод был успешно применен к анализу возмущенных мод ШГ в эллиптическом ДР [123], круговом с периодическим возмущением [126] и с вырезом [127] и скругленных треугольным и квадратным [128] ДР.

1.4 Моделирование открытых резонаторов с активными зонами

Всякий лазер является сложным устройством, в работе которого можно выделить три группы основных физических принципов и явлений. Это динамика носителей зарядов и фотонов, тепловые эффекты и электромагнитные волновые явления [129]. Все эти механизмы связаны между собой, причем нелинейным и меняющимся во времени образом. Поэтому разработка моделей и алгоритмов для всестороннего анализа работы лазера – сложная задача. Вместе с тем, еще на первых этапах исследования лазеров возникло понимание того, что очень важную и интересную информацию можно получить, если пренебречь всеми неэлектромагнитными явлениями и рассмотреть проблему существования гармонически зависящего от времени волнового поля в лазерном открытом резонаторе.

В подавляющем большинстве работ такое рассмотрение сводилось к анализу собственных мод *пассивных* диэлектрических резонаторов - см. подраздел 1.3. С математической точки зрения, это означало решение задач на собственные частоты, которые в открытом резонаторе могут быть только комплексными. При этом моды, имевшие наибольшие значения Q-фактора, обычно ассоциировались с лазерным излучением.

Однако нетрудно видеть, что модель пассивного ДР не описывает адекватным образом эффект испускания незатухающих волн лазером. Хотя она

дает возможность получить некоторое представление о частотах собственных мод, хорошо известный из эксперимента факт наличия порога излучения остается за ее рамками. Последствия этой неадекватности более чем существенны - достаточно напомнить, что в рамках пассивной модели невозможно объяснить, почему в лазере с резонатором в форме стадиона излучение происходит на модах типа «галстук-бабочка» [73], а не на модах шепчущей галереи, которые имеют на несколько порядков большие Q -факторы. Чтобы объяснить этот факт, обычно привлекаются нелинейные модели лазеров [130]. Интуитивно понятно, что неадекватность связана с отсутствием в пассивной модели ДР такой важнейшей особенности лазера, как *активная зона*, в которой с помощью накачки создается инверсная населенность носителей заряда, способных испускать свет.

Между тем, наличие активности во всем лазерном резонаторе или в его части можно описать на языке макроскопических параметров материала – для этого достаточно ввести в рассмотрение комплексный показатель преломления (или диэлектрическую проницаемость) с таким знаком, который описывает «анти-поглощение» или отрицательные потери [54]. Математически, каждая из собственных частот в произвольном открытом ДР аналитическим или кусочно-аналитическим образом зависит от комплексного показателя преломления. Это вытекает из возможности сведения соответствующих граничных задач к интегральным уравнениям Фредгольма (например, к граничным ИУ Мюллера) [121] и применения к ним операторных обобщений теорем Фредгольма [131]. Однако в таком случае комплексные собственные частоты ДР получают возможность принимать вещественные значения при некоторых значениях отрицательной мнимой части показателя преломления или диэлектрической проницаемости.

На рис. 1.8 схематически изображена миграция собственной частоты на комплексной плоскости и пересечение ею вещественной оси по мере возрастания абсолютной величины «активного» показателя преломления. Частота отмечена индексом j , чтобы подчеркнуть дискретность собственных

частот. При этом учтена симметрия собственных частот относительно мнимой оси (следствие равноправности положительного и отрицательного направления во времени, для гармонических процессов), а также возможность наличия разреза, если рассматривается пространственно двумерная задача. Если $\text{Im}\nu = \text{Im}\sqrt{\varepsilon} \geq 0$, то при зависимости от времени : $e^{-i\omega t}$ все собственные частоты лежат строго в нижней полуплоскости.

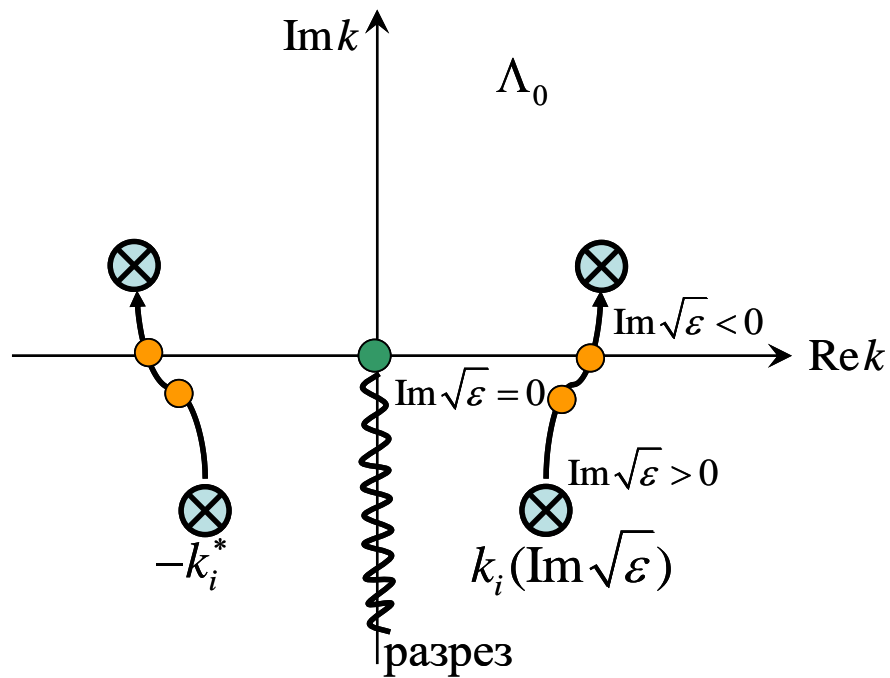


Рис. 1.8. Траектория движения собственной частоты в комплексной плоскости при изменении мнимой части показателя преломления $\text{Im}\alpha$ (или, что эквивалентно, диэлектрической проницаемости) от положительных до отрицательных значений.

Уменьшение материальных потерь $\text{Im}\nu$ до нуля поднимает каждую из частот до уровня, соответствующего потерям данной моды на излучение. Если же в дальнейшем показатель преломления, изменяясь, приобретает отрицательную мнимую часть, $\text{Im}\nu < 0$, то, по мере роста ее абсолютной величины, собственная частота поднимается далее и может пересечь вещественную ось (см. рис. 1.8).

Таким образом, можно искать такое (вещественное) значение усредненной величины удельных материальных потерь - мнимой части показателя преломления $\text{Im}\nu$ (или же диэлектрической проницаемости $\text{Im}\varepsilon = \text{Im}(\nu^2) = 2\text{Re}\nu\text{Im}\nu$) – которое обеспечивает вещественность собственной частоты открытого резонатора. Ясно, что, вообще говоря, соответствующие значения $\text{Im}\nu$ - свои для каждой собственной частоты. Поэтому указанную процедуру можно применить систематически ко всем комплексным собственным частотам.

Можно отметить определенное сходство такой модифицированной задачи на собственные частоты и пороги с методом обобщенных собственных колебаний [132], где, однако, частота была задана, а собственным значением служила комплексная диэлектрическая проницаемость.

Связь комплексного показателя преломления активной среды и, в частности, его мнимой части, с мощностью накачки и плотностью инжектируемых носителей заряда можно построить в рамках, например, двухжидкостной квантовой модели активной среды - см. [133].

Следует отметить, что идея описания активности материальной среды как способности не поглощать волны, а, наоборот, испускать их, с помощью мнимой части (нужного знака) показателя преломления или диэлектрической проницаемости существовала давно (см. например [54] стр. 525). В конце 1970х годов возникла дискуссия вокруг необычных эффектов при рассеянии волн на активных частицах (частицах с отрицательным поглощением). Однако она быстро прекратилась после того как стало ясно, что в такой постановке возможна потеря единственности решения задачи из-за совпадения частоты падающего поля с вещественной собственной частотой частицы [134].

Незадолго до этого появилась работа [135], в которой сначала была найдена некоторая комплексная собственная частота открытого резонатора с диэлектрическим стержнем, а затем было предложено искать такое значение $\text{Im}\varepsilon$, которое обнуляло ее мнимую часть. Это значение связывалось с порогом самовозбуждения. За последующие 30 лет такой же прием применялся еще

несколько раз при исследовании самых разных лазерных моделей [136-141]. Однако формулировка исходной задачи о поле в присутствии открытого резонатора оставалась традиционной (о комплексных собственных частотах) и порог излучения не рассматривался как элемент собственного значения.

По-видимому, эту ситуацию можно частично объяснить тем, что лазеры долгое время оставались устройствами, размеры которых во много тысяч раз превосходили длину волны испускаемого излучения. Поэтому моделирование их резонаторов сводилось к подсчету длины геометро-оптического пути луча по замкнутой траектории, обычно в одномерной модели типа Фабри-Перо.

Однако начиная с 1980х годов стали активно исследоваться и внедряться полупроводниковые светодиоды и лазеры с резонаторами на эффекте Брэгга, имевшие уже размеры, измерявшиеся сотнями длин волн. И, наконец, в 1990х годах появились первые полупроводниковые микродисковые лазеры размером в несколько длин волн. Такие лазеры имеют вид полупроводниковых дисковых или иной формы резонаторов, стоящих на пьедестале или лежащих на подложке из оптически менее плотного материала. Они имеют диаметр от нескольких единиц до нескольких десятков микрометров и содержат в себе активную зону – один или несколько квантово-размерных активных слоев. Накачка активной зоны производится либо оптическим способом, либо путем инъекции носителей тока прямо в резонатор с помощью электродов. Моделирование подобных миниатюрных источников электромагнитных волн потребовало по-новому посмотреть на постановку задачи об открытом резонаторе с активной зоной.

Модифицированная формулировка граничной задачи на собственные значения, способная адекватным образом учесть наличие активной зоны и, как следствие, дать возможность найти пороги излучения и связать их со свойствами дискретного спектра мод в открытом резонаторе, была впервые опубликована в [1] и, более детально, в [2]. В этой постановке активная зона – это часть объема резонатора, заполненная диэлектрическим материалом с *отрицательными* потерями, характеризуемыми мнимой частью показателя

преломления $\text{Im}\nu = -\gamma$, $\gamma > 0$ при зависимости от времени $e^{-i\omega t}$, $k = \omega / c$, где c - скорость света в вакууме. На границе активной зоны вводится дополнительное условие непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля, а на бесконечности ставится условие излучения Зоммерфельда (если задача сведена к двумерной с помощью ЭПП) или Сильвера-Мюллера (в трехмерном случае). Задача состоит в отыскании таких упорядоченных пар вещественных чисел (k, γ) , при которых существуют не равные тождественно нулю функции $\{\dot{E}, \dot{H}\}$ как решения уравнений Максвелла с указанными выше условиями.

Важно подчеркнуть, что указанная модифицированная задача на собственные значения остается линейной задачей в том смысле, что в нее не входит нелинейная зависимость материальных параметров резонатора от амплитуды поля. Тем не менее, такая модификация оказывается достаточной для того, чтобы отыскивать не только частоты, но и пороги излучения. Более того, она позволяет ввести в рассмотрение влияние новых факторов – расположения, размеров и формы активной зоны – на поля собственных мод открытого резонатора, их частоты и пороги. В рамках модели пассивного резонатора это сделать невозможно. Как указывалось в п. 1.2, для инжекционных лазеров это открывает возможность моделирования формы и расположения электродов, что чрезвычайно важно для проектирования устройств с малыми порогами накачки.

Такая лазерная задача на собственные значения (для краткости, лазерная задача) применялась нами для систематического исследования частот и порогов излучения собственных мод в двумерных моделях разнообразных микрорезонаторных лазеров: дисковом лазере с радиально-неоднородной активной зоной [2], двух связанных активных дисках [3], кольцевых фотонных молекулах, построенных из активных дисков [4,5], активном диске, помещенном в пассивное кольцо [6] и спиральном микрорезонаторном лазере [7]. Часть этих исследований была обобщена в заказной обзорной статье [8].