

РАЗДЕЛ 2

СПЕКТРЫ И ПОРОГИ ИЗЛУЧЕНИЯ МОД КРУГОВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

В данном разделе рассматриваются двумерные модели круговых полностью и частично активных открытых диэлектрических резонаторов. Собственные моды таких резонаторов, то есть незатухающие во времени электромагнитные поля, существующие в отсутствии источников, отыскиваются как решения граничных задач для уравнения Гельмгольца с условиями непрерывности на границах частичных областей, условия локальной ограниченности энергии и условия излучения на бесконечности. Наличие активной зоны моделируется с помощью отрицательной мнимой части показателя преломления в соответствующей области. Предметом исследования являются частоты и пороги самовозбуждения простейших из таких резонаторов, а также пути снижения порогов.

2.1. Понижение размерности граничной задачи

Рассмотрим векторную трехмерную задачу о собственных состояниях электромагнитного поля (модах) диэлектрического открытого резонатора, который имеет вид плоского тела, ограниченного двумя одинаковыми параллельными поверхностями, разделенными расстоянием d , а также боковой поверхностью, как показано на рис. 2.1. Введем системы координат: декартову (x, y, z) , как показано на рисунке, цилиндрическую (r, φ, z) и сферическую (R, φ, θ) . Будем полагать, что относительная диэлектрическая проницаемость материала резонатора ε может быть комплексной. Вначале предположим, что $\text{Im} \varepsilon \geq 0$, так что резонатор пассивен. Указанная задача заключается в поиске таких (собственных) значений частоты ω или, что эквивалентно, волнового числа, $k = \omega / c$, которым соответствуют ненулевые поля $\{E, H\}$.

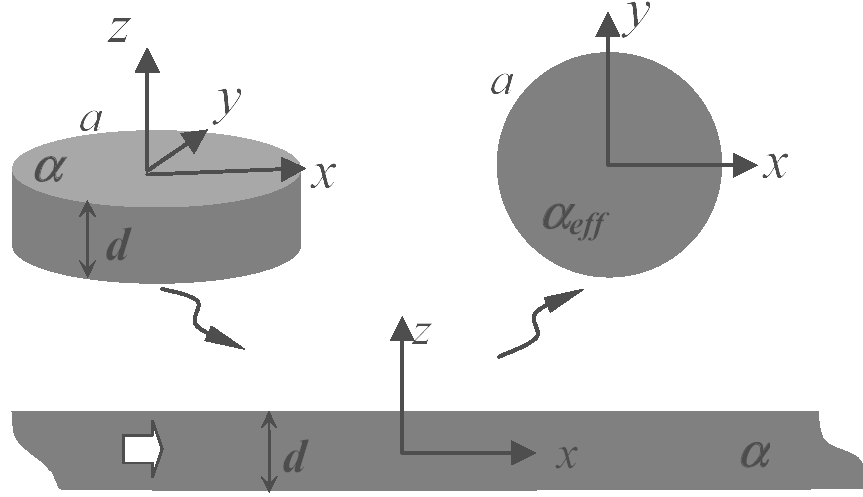


Рис. 2.1 Трехмерный тонкий диэлектрический резонатор и соответствующие ему структуры пониженной размерности: плоскопараллельный слой и двумерный резонатор на плоскости XY

Эти поля являются решением однородных гармонических уравнений Максвелла ($: e^{-i\omega t}$) вне полной поверхности диска S

$$\text{curl } \mathbf{E} = ikZ_0 \mathbf{H}, \quad \text{curl } \mathbf{H} = -ik\alpha^2 Z_0^{-1} \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

где $Z_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$ - импеданс свободного пространства,

$\alpha = \sqrt{\varepsilon}$ - кусочно-постоянный комплексный показатель преломления, равный 1 вне диска, причем $\text{sign}(\text{Im } \alpha) = \text{sign}(\text{Im } \varepsilon)$. Кроме того, на поверхности S должны выполняться условия непрерывности тангенциальных компонент,

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^- = \mathbf{E}_{\text{tan}}^+, \quad \mathbf{H}_{\text{tan}}^- = \mathbf{H}_{\text{tan}}^+, \quad (2.2)$$

где верхний индекс “ \pm ” относится к предельным значениям функций изнутри и извне диска, соответственно, а нижний индекс « tan » обозначает компоненты полей, касательных к поверхности S . Далее, энергия электромагнитного поля

должна быть локально ограничена, чтобы исключить сингулярности поля, соответствующие источникам:

$$\int_V [\alpha^2 E^2(\dot{R}) + H^2(\dot{R})] d\dot{R} < \infty, \quad V \subset (r, \varphi, z), \quad (2.3)$$

Наконец, необходимо включить в формулировку определенное условие, описывающее поведение поля на бесконечности, при $R \rightarrow \infty$. Это условие играет очень важную роль и, в конечном счете, определяет расположение собственных значений. Например, если нас интересуют вещественные частоты, $k = \text{Re} k$, то таким условием служит условие излучения Сильвера-Мюллера [107]:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \{ E(\dot{R}) - Z_0 H(\dot{R}) \times \dot{R}/R \} = 0, \quad (2.4)$$

которое является векторным аналогом условия излучения Зоммерфельда, применяемого в теории скалярных волн, являющихся решениями уравнением Гельмгольца. Это условие обеспечивает поведение поля как сферической волны и, дополнительно, исключает радиальные компоненты поля на бесконечности. Условие (2.4) можно записать эквивалентным образом в виде асимптотических требований:

$$\begin{aligned} e^{-ikR} \{ E_R, H_R \} &\sim 0, \quad E_\varphi = Z_0 H_\theta \sim \frac{e^{ikR}}{R} \Phi_1(\varphi, \theta), \\ E_\theta &= -Z_0 H_\varphi \sim \frac{e^{ikR}}{R} \Phi_2(\varphi, \theta), \quad R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

В задачах рассеяния электромагнитных волн условия (2.1)–(2.4) накладываются на рассеянное поле и обеспечивают единственность решения, если только частота не совпадает с собственной. Предположим теперь, что

некоторой частоте k соответствует ненулевое собственное поле $\{E, H\}$. Теорема Пойнтинга, примененная к функциям $\{E, H\}$ и комплексно сопряженным к ним, приводит к выводу, что независимо от геометрии открытого резонатора, вещественные собственные частоты не существуют.

Таким образом, чтобы соответствовать физической ситуации, необходимо допустить комплексные значения k . В этом случае условие (2.5) можно использовать, поскольку оно остается справедливым для произвольного комплексного k . Далее, та же теорема Пойнтинга приводит к выводу, что для пассивного резонатора собственные значения k могут лежать лишь в нижней полуплоскости комплексной k -плоскости, то есть каждое собственное значение может иметь только строго отрицательную мнимую часть, $\text{Im} k < 0$ (для выбранной зависимости от времени; для временной зависимости $e^{i\omega t}$ мнимая часть k может быть только строго положительна). Поэтому такие собственные значения являются обобщенными собственными значениями и порождают обобщенные собственные вектор-функции $\{E, H\}$, компоненты которых расходятся на бесконечности как $O(e^{-\text{Im} k R} / R)$ в соответствии с (2.5). Однако если в какой-то части резонатора $\text{Im} \varepsilon < 0$ (т.е., его материал активен), то вещественные собственные значения k оказываются возможными.

Трехмерная задача (2.1) – (2.4) сложна для исследования. Однако для тонких резонаторов ее можно приближенно свести к двумерной задаче для функции поля в средней плоскости резонатора. Снижение размерности задачи на собственные значения называют методом или моделью эффективного показателя преломления (см. [60], [63], [65], [66], [142]-[146]). По сути, этот метод основан на предположении, что электромагнитное поле во всем пространстве можно представить в виде произведения двух функций от независимых переменных z и $\mathbf{r} = (r, \varphi)$, например,

$$E_z(\dot{R}) = V_E(z)U_E(r, \varphi), \quad H_z(\dot{R}) = V_H(z)U_H(r, \varphi) \quad (2.6)$$

В действительности, это предположение неверно, так как указанные переменные не разделяются ни в граничных условиях на поверхности диска, ни в условиях излучения на бесконечности ($R \rightarrow \infty$). Однако предположение (2.6) приводит к независимым дифференциальным уравнениям для функций, зависящих от переменной z и от переменных в плоскости резонатора, r, φ , а именно,

$$\left[d^2 / dz^2 + k^2 \alpha^2 - k^2 (\alpha_{eff}^{E,H})^2 \right] V_{E,H}(z) = 0, \quad (2.7)$$

где α равно 1 вне интервала $|z| < d/2$ (см. рис. 2.1), и

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \alpha_{eff}^2 \right] U_{E,H}(r, \varphi) = 0, \quad (2.8)$$

где коэффициент преломления $\alpha_{eff} = \alpha_{eff}^{H,E}$ внутри резонатора и 1 вне него. Таким образом, величина $k^2 \alpha_{eff}^2$ играет роль константы разделения переменных. Граничные условия для указанных функций зависят от поляризации. Хотя, строго говоря, поле в присутствии трехмерного резонатора имеет все шесть компонент, при понижении размерности до двумерной модели имеют в виду два типа полей, Е-поляризованное $(0, 0, E_z, H_r, H_\varphi, 0)$ и Н-поляризованное $(E_r, E_\varphi, 0, 0, 0, H_z)$. Для функции от переменной z требуется, чтобы

$$V_{H,E}(\pm d/2 \mp 0) = V_{H,E}(\pm d/2 \pm 0), \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{dV_{H,E}}{dz} \right|_{z=\pm d/2 \mp 0} = \beta^{H,E} \left. \frac{dV_{H,E}}{dz} \right|_{z=\pm d/2 \pm 0},$$

где $\beta^H = \alpha^{-2}$ и $\beta^E = 1$.

К сожалению, не существует никакого формального способа получить одномерное условие излучения при $z \rightarrow \pm\infty$ из трехмерного условия (2.5). Тем не менее, для сохранения физического смысла, то есть, чтобы воспроизвести вне плоскости диска поле, уходящее или затухающее по нормали к ней, мы потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

$$V_{E,H}(z) \sim e^{ik(1-\alpha_{eff}^2)^{1/2}|z|}, \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad (2.10)$$

Уравнения (2.7), (2.9) и (2.10), при $\beta^H = \alpha^{-2}$ и $\beta^E = 1$, образуют две хорошо изученные одномерные задачи на собственные значения для параметров α_{eff}^H и α_{eff}^E , соответственно, которые являются нормированными (на k) постоянными распространения ТЕ или ТМ волн, бегущих вдоль бесконечного диэлектрического слоя толщиной d с показателем преломления α_{eff} (рис. 2.1).

Если еще и учесть, что диэлектрический слой обладает плоскостью симметрии, то эти задачи сводятся к трансцендентным уравнениям для четных и нечетных волн слоя, соответственно,

$$\tan(pk d / 2) = -\beta^{E,H} g p^{-1}, \quad \cot(pk d / 2) = -\beta^{E,H} g p^{-1}, \quad (2.11)$$

где $g^2 = (\alpha_{eff}^{E,H})^2 - 1$ и $p^2 = \alpha^2 - (\alpha_{eff}^{E,H})^2$.

Анализ (2.11) показывает, что для волн данного типа существует конечное число $Q^{H,E} \geq 1$ вещественных корней, соответствующих волнам, распространяющимся в диэлектрическом слое, $\alpha_{eff(q)}^{H,E} : 1 < \alpha_{eff(q)}^{H,E} < \alpha$, ($q = 0, \dots, Q^{H,E} - 1$). Наибольшие из корней соответствуют TM_0 и TE_0 волнам. Четный (нечетный) индекс волны соответствует симметрии (антисимметрии) компоненты поля E_z или H_z относительно центральной плоскости слоя.

Решение любого из уравнений (2.11) можно получить численно методом

Ньютона. Для дальнейшего исследования важно подчеркнуть три обстоятельства, вытекающих из такого численного исследования. Во-первых, эффективный показатель преломления принимает ряд дискретных значений (ветвей), разных для волн различного типа и симметрии, поэтому его необходимо, вообще говоря, снабжать соответствующими индексами. Во-вторых, все ветви, кроме самых низших, отвечающих волнам TM_0 и TE_0 , обладают «отсечкой», то есть возникают при конечных значениях частоты. В-третьих, каждая из ветвей показателя преломления существенно зависит от частоты, т.е. обладает дисперсией, и изменяется, с ростом частоты, от 1 до α . Кривые на рисунках 2.2 и 2.3 демонстрируют зависимости нескольких эффективных показателей преломления от частоты, нормированной на радиус диска, то есть от $ka = kd(d/a)^{-1}$.

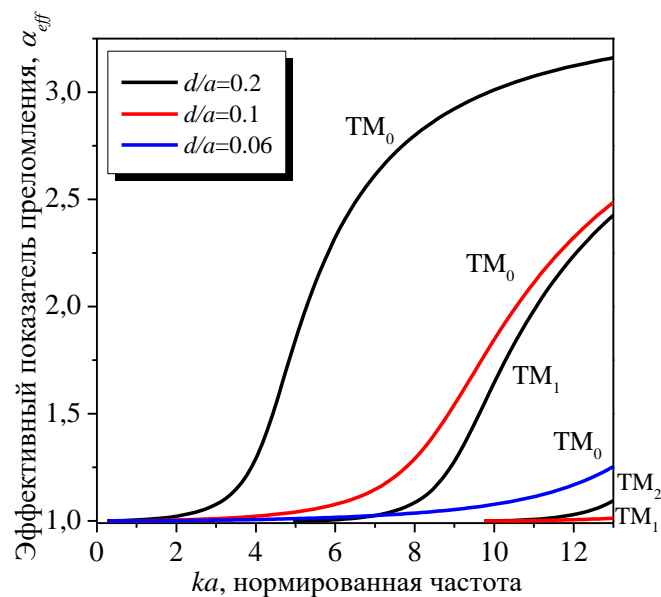


Рис. 2.2 Дисперсионные характеристики $(E_z)_q$ -волн (TM-типа) диэлектрического слоя из GaAs. Показатель преломления $\alpha=3.374$

Как можно видеть, наибольший из эффективных показателей преломления соответствует H_z -поляризованной волне низшего индекса TE_0 . Для размеров диска, сравнимых с длиной волны в воздухе, этот показатель в

несколько раз превышает подобный показатель для E_z -поляризованной волны низшего индекса TM_0 .

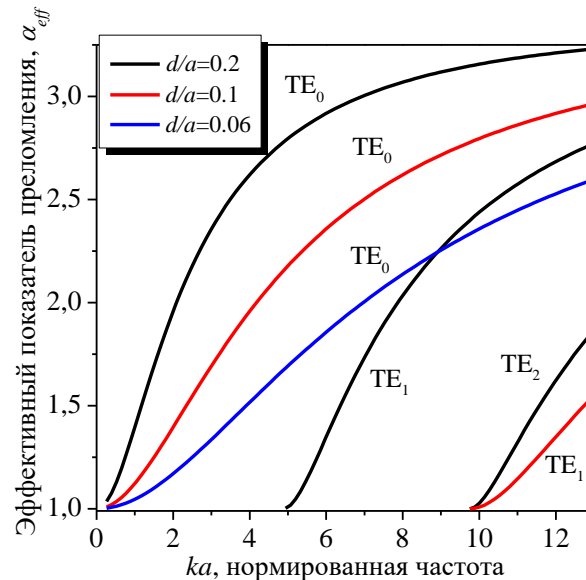


Рис. 2.3 То же, что на рисунке 2.2, для $(H_z)_q$ -волн (ТЕ-типа)

Такая же ситуация характерна и для каждой последующей пары волн разного типа, но одинаковых высших индексов ($q > 1$), однако показатели преломления, соответствующие волнам разных индексов и разных типов, могут быть сравнимы между собой по величине. На высоких частотах сразу много показателей преломления принимают близкие к α значения.

Таким образом, понижение размерности граничной задачи о поле в присутствии тонкого диэлектрического резонатора является приближенным приемом, основанным на предположении о возможности разделить переменные в плоскости резонатора и в нормальном к нему направлении. При этом константа разделения переменных имеет смысл, с одной стороны, постоянной распространения одной из собственных поверхностных волн диэлектрического слоя такой же толщины, нормированной на волновое число, а с другой стороны (см. также п. 2.2) - эффективного показателя преломления.

Эффективный показатель преломления оказывается неоднозначно

определяемой величиной, существенно зависящей от частоты. Его неоднозначность и дисперсия позволяют, в принципе, приближенно учесть роль конечной толщины резонатора (см. п. 2.3). Однако поскольку резонаторы оптических и микроволновых фильтров и направленных ответвителей, а также микролазеров делаются тонкими (в несколько раз тоньше длины волны), то чаще всего при моделировании таких резонаторов в качестве эффективного показателя преломления берут наибольшую из всех нормированных постоянных распространения, отвечающую низшей (фундаментальной или основной) H_z -поляризованной волне слоя, т.е. волне TE_0 , поле которой не имеет вариаций вдоль оси Z и максимально в центре слоя.

2.2. Постановка модифицированной задачи на собственные значения

Прежде чем описать постановку задачи о лазерных модах в резонаторе с активной зоной, мы напомним вкратце, на примере двумерной модели, как ставится задача о модах пассивного резонатора (комплексные собственные частоты).

После определения множества эффективных показателей преломления $\alpha_{eff(q)}^{H,E}$ из (2.11), мы получаем независимые двумерные задачи для функций поля, определенных в плоскости диска. Каждая такая задача включает в себя уравнение (2.8) с кусочно-постоянным показателем преломления и граничные условия на контуре двумерного резонатора L

$$U^-(r, \varphi)|_L = U^+(r, \varphi)|_L, \quad \frac{\partial U^-(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_L = \beta^{H,E} \frac{\partial U^+(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_L, \quad (2.12)$$

где верхний индекс « \pm » обозначает предельные значения изнутри и извне при подходе к контуру резонатора L соответственно, $\beta^H = (\alpha_{eff(q)}^H)^{-2}$, и $\beta^E = 1$. Функция поля должна также удовлетворять условию локальной

ограниченности энергии

$$\int_D \left(|k U|^2 + |\operatorname{grad} U|^2 \right) r dr d\varphi < \infty, \quad D \subset (r, \varphi), \quad (2.13)$$

и двумерному условию излучения на бесконечности для комплексных частот k . Здесь мы сталкиваемся с такой же проблемой, как и для функции $V(z)$. В трехмерном случае, мы можем просто взять условие (2.5) с комплексным k благодаря тому факту, что фундаментальное решение трехмерного уравнения Гельмгольца e^{ikR}/R является аналитической функцией по k . В двумерном случае такую же роль играет функция Ханкеля $H_0^{(1)}(kr)$, описывающая уходящую на бесконечность волну. Однако областью аналитического продолжения функции Ханкеля является Риманова поверхность функции $\operatorname{Ln} k$. Поэтому аналитическое продолжение условия Зоммерфельда на комплексные частоты k в двумерном случае имеет более сложную форму и известно под названием условия излучения Райхарда (см. [147 – 149])

$$U(r, \varphi) \sim \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s H_s^{(1)}(kr) e^{is\varphi}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Таким образом, уравнения (2.8), (2.12) - (2.14) образуют двумерную задачу на собственные значения с эффективным показателем преломления $\alpha_{\text{eff}(q)}^{E,H}$. Заметим, чтобы прийти к этой задаче, мы сделали ряд допущений: (i) налагая условия (2.9), мы пренебрегли радиусом диска, (ii) налагая условие (2.12), мы пренебрегли толщиной резонатора, (iii) налагая условия (2.10) и (2.14), мы допустили совершенно разное поведение поля в плоскости диска и вне ее. Кроме того, надо помнить, что (iv) эффективный показатель преломления $\alpha_{\text{eff}(q)}^{E,H}$ зависит от частоты и (v) принимает дискретное множество значений, соответствующих разным волнам слоя.

Поэтому, вообще говоря, исходная трехмерная задача математически не эквивалентна «сумме» одномерной и двумерной задач на собственные значения. Это следствие того, что не существует непрерывной трансформации одномерного или двумерного пространства в трехмерное пространство. Тем самым, снижение размерности вместе с моделью эффективного показателя преломления остается не обоснованным до конца приемом. Тем не менее, хорошо известно, что результаты, полученные с помощью этого приема, согласуются с экспериментами и часто имеют большую точность, чем этого можно было бы ожидать [150].

В отличие от постановки, описанной выше, мы можем модифицировать задачу на собственные значения и рассматривать вещественные частоты k [151 – 152], то есть незатухающие во времени собственные поля, соответствующие явлению испускания света или генерации волн (лазерная задача). Чтобы такие собственные поля стали возможными решениями уравнений Максвелла, необходимо ввести новый вещественный параметр – материальное усиление, $\gamma > 0$, в пределах некоторой области внутри открытого резонатора – активной зоны.

Например, если весь объем диэлектрического тела заполнен активным веществом, то активная зона совпадает со всей областью, ограниченной его поверхностью. Предположим, что задача уже сведена к двумерной, как описано выше, и в (2.8) будем считать, что показатель преломления комплексный и равен $\nu = \alpha_{eff(q)}^{H,E} - i\gamma$, если $r < a$, и 1 в противоположном случае. На контуре резонатора поставим условия непрерывности касательных компонент полей (2.12) с комплексным ν , т. е., $\beta_{eff}^H = \nu^{-2}$ и $\beta_{eff}^E = 1$, также потребуем выполнения условия (2.13), а на бесконечности поставим условие излучения Зоммерфельда

$$U(r, \varphi) \sim (2/i\pi kr)^{1/2} e^{ikr} \Phi(\varphi) \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

Теперь мы можем рассмотреть уравнения (2.8), (2.12), (2.13) и (2.15) как

«лазерную» задачу на собственные значения. Это означает, что вместо поиска вещественной и мнимой частей волнового числа, как в классической задаче на собственные значения, мы будем искать две вещественные положительные величины, k и γ . Поскольку искомая частота k вещественна, то поле моды больше не растет неограниченно на бесконечности, как в задаче о комплексных собственных частотах.

Лазерная задача на собственные значения может быть сформулирована и в трехмерном случае, как аналог задачи (2.1) – (2.4). Благодаря хорошо развитой теории операторных функций, фундаментальные свойства собственных значений лазерной задачи (как в двумерной, так и в трехмерной постановке) могут быть установлены до начала вычислений. Доказательство этих свойств может быть основано на аналитической регуляризации, т.е. эквивалентном сведении граничной задачи на собственные значения к системе интегральных уравнений Мюллера (см. раздел 4), являющихся уравнениями Фредгольма второго рода [123], и использовании операторного обобщения теорем Фредгольма [131, 153]. Можно установить, что все $\gamma > 0$, а также, что

- собственные значения образуют дискретное множество на плоскости (k, γ) ,
- собственные значения не имеют конечных точек накопления,
- любое собственное значение имеет конечную кратность,
- собственные значения могут исчезать или появляться только на границах аналитической области (бесконечность, точки ветвления),
- любое собственное значение зависит от формы контура L , толщины резонатора d и показателя преломления материала α кусочно-непрерывным или кусочно-аналитическим образом. Эта зависимость нарушается лишь в том случае, если собственные значения сливаются.

2.3. Моды равномерно-активного кругового резонатора

Геометрия трехмерной модели для тонкого диэлектрического диска, полностью заполненного активным веществом, представлена на рис. 2.1. Будем

считать, что диск, толщиной d и радиуса a , обладает немагнитными и изотропными свойствами и расположен в свободном пространстве. Как и ранее, вещественную часть показателя преломления материала диска обозначим через α . Будем также считать, что электромагнитные поля зависят от времени гармонически как $e^{-i\omega t}$, и волновое число свободного пространства есть $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, где λ - это длина волны.

Далее предположим, что мы уже свели задачу к двумерной, как описано в п. 2.1. Тогда можно рассмотреть каждую из двух возможных поляризаций электромагнитного поля (Е и Н поляризации) независимо, используя для этого одну функцию U , которая есть либо E_z , либо H_z , т. е., нормальная к плоскости диска компонента поля. Строго говоря, надо говорить о двумерном приближении для квази-Н и квази-Е-поляризованных мод тонкого диска, поскольку в реальном диске все же имеется и малая по величине E_z - или H_z -компонента поля всякой моды, соответственно.

Лазерная задача на собственные значения (2.8), (2.12)-(2.15) подразумевает, что функция U должна удовлетворять двумерному уравнению Гельмгольца (2.8), с комплексным коэффициентом преломления $\nu = \alpha_{\text{eff}}^{H,E} - i\gamma$, если $r < a$, или вещественным $\nu = 1$ в остальной части плоскости, при $r > a$. В этом подразделе мы будем предполагать, что материальное усиление распределено равномерно по диску, т.е. γ - положительная константа. Случаи неравномерного материального усиления будут рассмотрены в п. 2.4. На границе диска предполагается непрерывность тангенциальных компонент полей (2.12) с коэффициентами $\beta^H = \nu^{-2}$ или $\beta^E = 1$. Условие локальной ограниченности энергии описывается неравенством (2.13). Благодаря тому, что k вещественно, функция U должна подчиняться двумерному условию излучения (2.15).

Как указывалось ранее, при исследовании лазерной задачи на собственные значения, мы ищем два положительных числа, в данном случае, $\kappa = ka$ и γ . Первое из них – лазерная частота или частота излучения,

нормированная на радиус диска, а второе – порог излучения. Здесь надо подчеркнуть, что величина лазерного порога не может быть получена из Q -фактора (или мнимой части собственной частоты $\text{Im} k$).

В рассматриваемом случае кругового диска контур L , ограничивающий резонатор в двумерной модели, есть окружность радиуса a . Используя метод разделения переменных, будем искать функцию поля в виде произведения

$$U(r, \varphi) = F(r)\Phi(\varphi), \quad (2.16)$$

где функции $F(r)$ и $\Phi(\varphi)$ подлежат определению.

Подставляя это выражение в (2.8) и вводя константу разделения переменных m , получим

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \left(\nu^2 r^2 - \frac{m^2}{r} \right) F = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (2.17)$$

где, $m=0,1,2,\dots$ целое. Из (2.16) и (2.17) находим представление для функции U :

$$U(r, \varphi) = \begin{cases} AJ_m(\kappa \nu r / a), r < a \\ BH_m^{(1)}(\kappa r / a), r > a \end{cases} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} m\varphi, \quad (2.18)$$

где J_m и $H_m^{(1)}$ - функции Бесселя и Ханкеля, соответственно,

A, B - неопределенные константы.

Поле всякой собственной моды стационарно, то есть имеет вид стоячей волны. Все моды в круговом резонаторе распадаются на независимые ортогональные семейства по азимутальному индексу m , и по симметрии или антисимметрии относительно выбранного направления $\varphi = 0$. Подставляя выражения (2.18) с любой из двух функций азимутального угла в граничные

условия (2.12), мы получаем одно и то же комплексное характеристическое уравнение:

$$F_m(\kappa, \gamma) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.19)$$

где

$$F_m(\kappa, \gamma) = J_m(\kappa \nu) H_m^{(1)'}(\kappa) - \beta^{E,H} \nu J_m'(\kappa \nu) H_m^{(1)}(\kappa) \quad (2.20)$$

Таким образом, те собственные состояния поля (моды), у которых $m > 0$, дважды вырождены. Корни трансцендентной системы

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[F_m(\kappa, \gamma)] = 0 \\ \operatorname{Im}[F_m(\kappa, \gamma)] = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

порождаемой уравнением (2.19), и есть собственные значения. Для решения этой системы можно применять различные численные методы. Нами был использован итеративный метод секущих [154].

Для нумерации корней уравнения (2.19) в пределах одного семейства по азимутальному индексу m обычно вводят второй индекс n , который, как правило, соответствует числу вариаций поля вдоль радиуса.

Первые численные результаты были получены сначала для самого простого случая, когда эффективный показатель преломления предполагается постоянной величиной (т.е. мы пренебрегаем его дисперсией) (см. рис. 2.4 – 2.5). Цилиндрические функции в (2.19) вычислялись с машинной точностью с помощью прямой и обратной рекурсии [155]. Точность нахождения корней методом секущих была установлена на уровне 10^{-8} .

В качестве начальных приближений при поиске корней (2.21) мы брали следующие асимптотические выражения для нормированной частоты излучения (здесь индексы при α опущены для краткости, однако следует иметь

в виду, что на самом деле эта величина – одно из значений для $\alpha_q^{H,E}$, обычно при $q = 0$, см. п. 2.1):

$$\kappa_{mn}^{H,E} \approx \frac{\pi}{2\alpha} \left(m + 2n \frac{1}{2} \right), \quad (2.22)$$

и также два разных выражения для пороговых значений материального усиления: если $\kappa_{mn}^{H,E} \gg m$, то соответствующие моды не являются модами ШГ и для них пороги обратно пропорциональны частоте (или индексу m):

$$\gamma_{mn}^{H,E} \approx \frac{\pi}{2\kappa_{mn}^{H,E}} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right), \quad (2.23)$$

а если же $m / \alpha \ll \kappa_{mn}^{H,E} \ll m$, то соответствующие моды – это моды ШГ, пороги которых экспоненциально убывают с ростом частоты или индекса m :

$$\gamma_{mn}^{H,E} \approx C_{H,E} e^{-2m \ln(2m / \kappa_{mn}^{H,E})} \quad (2.24)$$

где

$$C_E = \frac{e}{4\kappa_{mn}^E \alpha} \left(\frac{2m}{e\kappa_{mn}^E} \right)^3, \quad C_H = \frac{\alpha \kappa_{mn}^H e}{4[m + (\kappa_{mn}^H)^2 + m^2 \alpha^2]} \left(\frac{2m}{e\kappa_{mn}^H} \right)^3 \quad (2.25)$$

Для получения этих формул из (2.19), необходимо использовать асимптотические представления для цилиндрических функций [156].

Изучение имеющейся литературы показывает, что обычно измерения полей тонких дисковых резонаторов в дальней зоне демонстрируют, что излучение происходит на квази- H_z -поляризованных модах [146]. Из выражений (2.22) и (2.24) видно, что пороги излучения мод ШГ быстро возрастают с убыванием эффективного показателя преломления, по закону $\gamma_{mn}^{H,E} = O(\alpha^{-2m})$.

Если же учесть, что на самом деле здесь $\alpha = \alpha_0^{H,E}$, а в тонком диске, как видно из рис. 2.2, $\alpha_{eff,0}^H ? \alpha_{eff,0}^E \approx 1$, то можно сделать вывод, что экспериментально наблюдаемые данные действительно хорошо объясняются в рамках модели эффективного показателя преломления. Этот факт можно рассматривать как частичное обоснование указанной модели.

На рис. 2.4 и 2.5 представлены результаты расчетов собственных частот и порогов излучения без учета дисперсии эффективного показателя преломления для диска из GaAs/InAs толщиной 200 нм. Длина волны излучения $\lambda=1550$ нм. В этом случае эффективный показатель преломления $\alpha_{eff} = 2.63$ для H_z -поляризованных мод и $\alpha_{eff} = 1.31$ всего для E_z -поляризованных мод.

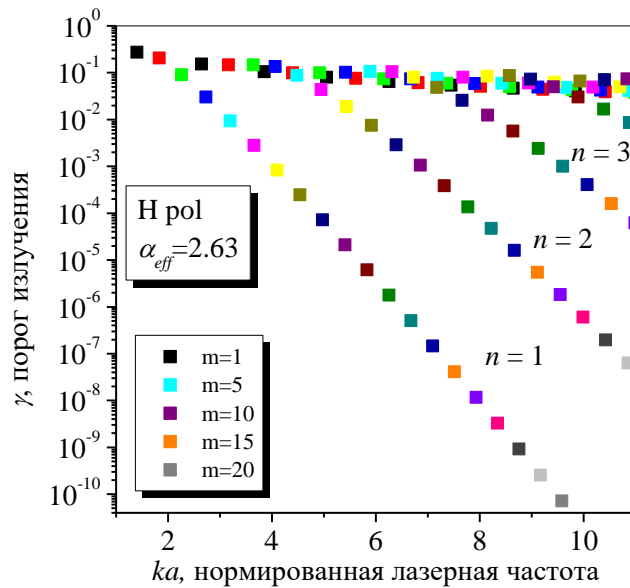


Рис. 2.4 Спектры и пороги усиления H_z -поляризованных мод в GaAs/InAs микродисковом резонаторе, $\alpha_{eff} = 2.63$ и $d = 200$ nm

Отметим некоторые особенности их расположения на плоскости (κ, γ) . Эта плоскость оказывается заполненной собственными значениями неравномерным образом. Можно отчетливо увидеть гиперболу $\gamma \approx const/\kappa$, соответствующую формуле (2.23) и «насыщенную» модами из всех m -ых

семейств. У всех этих мод высокий порог, $\gamma > 0.01$, так что это моды другого типа, не шепчущей галереи. Для обеих поляризаций выше этой кривой незатухающих мод нет.

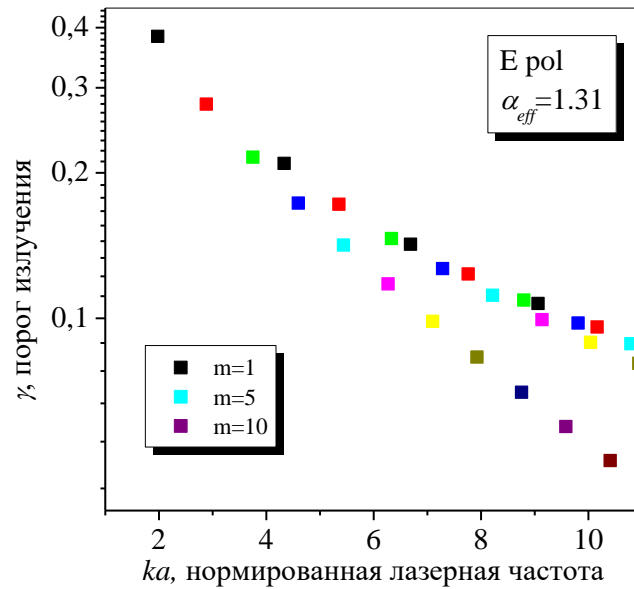


Рис 2.5 То же, что и на рис. 2.4 для E_z -поляризованных мод

В отличие от этого, в каждом семействе с $m > \alpha_{eff}$, те моды, у которых частота $\kappa < m$ (примерно $\kappa < m - 3$), но все еще $\kappa > m / \alpha_{eff}$ (примерно $\kappa > m / \alpha_{eff} + 3$), демонстрируют очень маленькие пороговые значения материального усиления γ . Эти значения весьма близки к тем, которые дает формула (2.24). Они экспоненциально (т.е. очень быстро) падают с ростом азимутального индекса m - как и предсказывает эта асимптотическая формула. Поэтому ниже упомянутой гиперболы собственные значения образуют наклонные «слои», каждый «слой» соответствует определенному значению радиального индекса n . Таким образом, моды шепчущей галереи в двумерном активном круговом резонаторе действительно способны иметь сверхмалые пороги, описываемые выражением (2.24). Это справедливо не только для тех мод, у которых радиальный индекс $n = 1$, но и для всех более высоких мод,

поля которых претерпевают почти полное внутреннее отражение от границы резонатора. Тем не менее, моды шепчущей галереи с одной вариацией по радиусу ($n=1$) составляют «элиту» собственных мод: они образуют самый низкопороговый уровень на плоскости (κ, γ) . Сравнение результатов, представленных на рис. 2.4 и 2.5, демонстрирует эффект меньшего значения эффективного индекса для одного и того же диска для E_z -поляризованных мод, чем H_z -поляризованных. На рис. 2.5 видно, что в пределах исследованного нами интервала изменения нормированной частоты ($ka \leq 11$) все собственные значения E_z -поляризованных мод равномерно активного кругового резонатора расположены в окрестности гиперболы, описываемой выражением (2.23). Моды шепчущей галереи, которые имеют большие собственные частоты, обладают более низкими порогами, однако для их исследования следует учесть изменение эффективного показателя преломления с частотой, т. е., его дисперсию.

Дисперсию эффективного показателя преломления можно учесть, если подставлять его в характеристическое уравнение (2.19) после отыскания α_{eff} как одного из корней соответствующего дисперсионного уравнения (2.11), при частоте, найденной на предыдущем шаге вычислительного процесса. Диаграмма такого адаптивного алгоритма представлена на рис. 2.6.

Согласно результатам п. 2.1, эффективный показатель преломления $\alpha_{eff(q)}$ - это нормированная постоянная распространения q -ой поверхностной волны плоского волновода толщиной, равной толщине диска d . Поэтому учет многозначности эффективного показателя преломления добавляет третий индекс q к обозначению типа собственной моды резонатора (см. п. 2.1). Это соответствует приближенному описанию возможных вариаций поля собственной моды поперек реального диска, в направлении вдоль оси Z . Таким образом, корни (2.19) следует обозначать как $(\kappa_{mnq}, \gamma_{mnq})$, где $m, q \geq 0, n \geq 1$.



Рис. 2.6 Адаптивный вычислительный алгоритм

Спектр и пороги активного микродискового лазера из GaAs/InAs толщиной $d = 0.1a$, вычисленные с учетом дисперсии эффективных показателей преломления, связанных с двумя основными волнами слоя TE_0 и TM_0 представлены на рис. 2.7 и 2.8, соответственно. Видно, что влияние дисперсии показателя преломления отражается в изменении наклона «слоев» по сравнению с результатами, представленными на рис. 2.4 и 2.5.

Сравнение результатов, представленных на рис. 2.7 и 2.8, демонстрирует, как и ранее было показано без учета дисперсии, эффект меньшего значения эффективного показателя преломления для одного и того же значения индекса q для E_z -поляризованных мод, чем для H_z -поляризованных. Этот эффект заключается в значительно более высоких порогах генерации. Подобные данные были получены и для более высоких значений эффективного индекса $q > 0$. В этом случае, собственные значения смещаются в область более высоких частот и порогов. Такое смещение обусловлено меньшими значениями

эффективного показателя преломления.

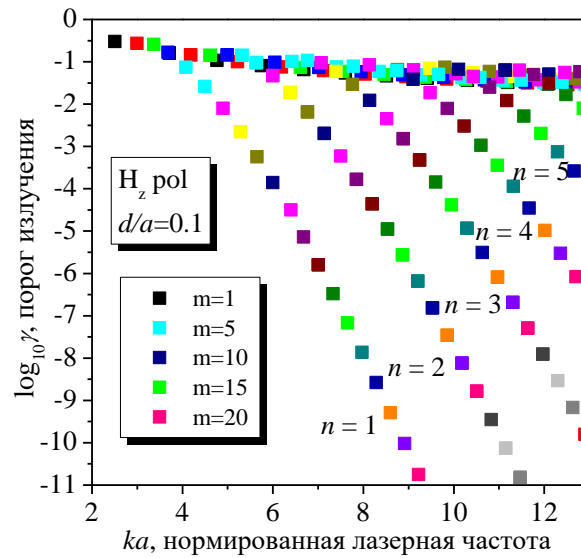


Рис. 2.7 Спектры и пороги усиления H_z -поляризованных мод семейства H_{mn0} в активном микродисковом резонаторе из GaAs, $\alpha = 3.374$ и $d/a = 0.1$

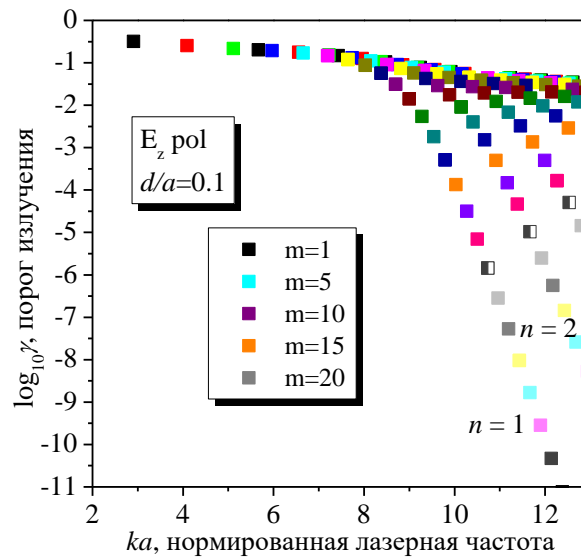


Рис. 2.8 То же, что на рис. 2.7 для мод семейства E_{mn0}

Собственные поля мод открытого кругового активного резонатора

содержат в двумерной модели только три ненулевые компоненты: одну продольную, того поля, которое соответствует поляризации, и две поперечных, другого поля. Ближние Е-поля некоторых мод в круговом резонаторе представлены на рис. 2.9 и 2.10.

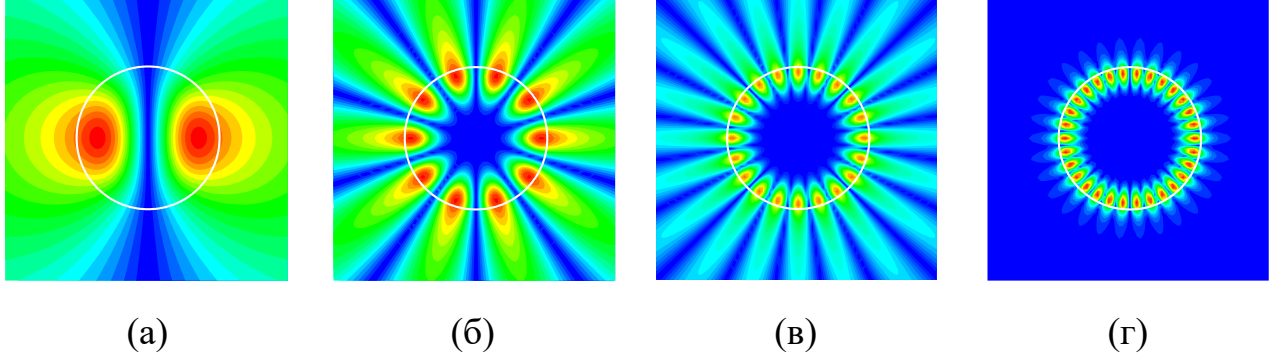


Рис. 2.9 Ближние поля (модуль электрического поля) для E_z -поляризованных лазерных мод в круговом микродисковом резонаторе из GaAs, $\alpha = 3.374$ и $d/a = 0.1$: (а) $E_{1,1,0}$, $ka=2.9$, $\gamma=0.23$, $\alpha_{eff}=1.01$; (б) $E_{5,1,0}$, $ka=6.65$, $\gamma=0.17$, $\alpha_{eff}=1.12$; (в) $E_{10,1,0}$, $ka=8.7$, $\gamma=3.1 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_{eff}=1.46$; (г) $E_{15,1,0}$, $ka=10.03$, $\gamma=1.33 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_{eff}=1.86$

Продольные компоненты полей описываются формулами (2.18), в которые необходимо подставить такие значения k и γ , которые найдены из решения характеристического уравнения (2.19) с соответствующим индексом m . Поперечные компоненты находятся из уравнений Максвелла. Обычно в двумерных задачах строят картины соответствующей продольной компоненты, но на практике всегда измеряют величины, пропорциональные квадрату модуля электрического поля. На любом расстоянии от границы резонатора (так же как и внутри него) зависимость абсолютной величины поля, $|E_z|$ или $(|E_r|^2 + |E_\phi|^2)^{1/2}$, от азимутальной координаты ϕ дается функцией $|\cos m\phi|$ или $|\sin m\phi|$, соответственно. Поэтому моды кругового резонатора излучают ровно $2m$ одинаковых лучей или лепестков. Картины полей показывают почти полное внутреннее отражение полей колебаний шепчущей галереи (с экспоненциально

низкими порогами) и высвечивание полей колебаний, имеющих высокие пороги.

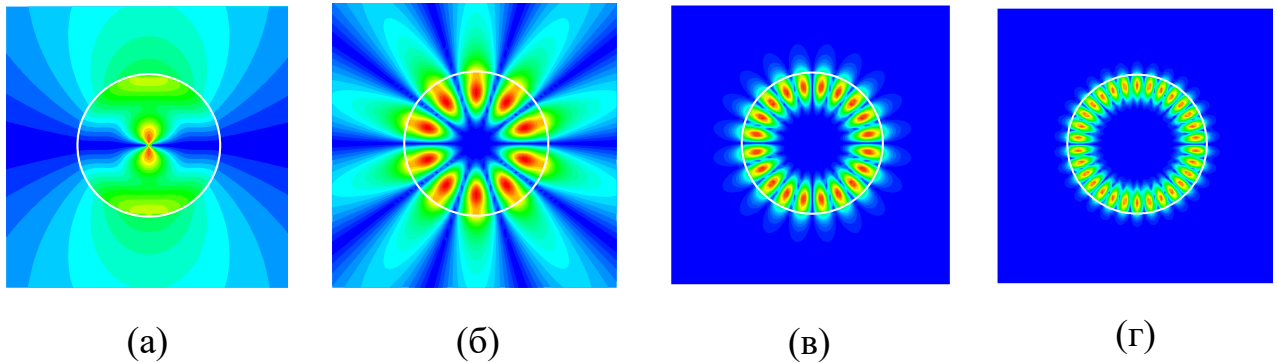


Рис. 2.10 То же, что на рис. 2.7 для H_z -поляризованных лазерных мод: (а) $H_{1,1,0}$, $ka=2.5$, $\gamma=0.29$, $\alpha_{eff}=1.55$; (б) $H_{5,1,0}$, $ka=4.08$, $\gamma=7.4 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_{eff}=1.98$; (в) $H_{10,1,0}$, $ka=5.99$, $\gamma=1.4 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_{eff}=2.36$; (г) $H_{15,1,0}$, $ka=7.65$, $\gamma=6.8 \cdot 10^{-8}$, $\alpha_{eff}=2.58$

Чтобы проверить полученные результаты, мы сравнили их с экспериментально измеренным спектром излучения микродискового резонатора из GaAs, представленным на рис. 2 в статье [65]. Внутри резонатора находился активный слой из InAs квантовых точек, а накачка осуществлялась оптическим способом. Соответствующая кривая интенсивности фотолюминесценции резонатора представлена в нижней части рис. 2.11 с сохранением обозначений и индексов мод, указанных авторами этой работы. Каждый из пиков на кривой интерпретируется как излучение той или иной моды диска.

Геометрические параметры диска, исследованного в [65], были таковы: радиус 1.5 микрон, толщина 250 нм, так что $d/a \approx 0.17$. Такой диск не является достаточно тонким, чтобы ограничиться при его анализе только H -поляризованными излучающимися модами, поскольку оба эффективных показателя преломления близки друг к другу (см. п.1.2).

Вверху на рис. 2.11 показана такая же (выделенная вертикальными штриховыми линиями) полоса частот на плоскости (κ, γ) , заполненная

собственными значениями, посчитанными с помощью нашей модели, для нескольких значений $\alpha_{eff(q)}^{E,H}(\kappa)$. При этом следует помнить, что каждое собственное значение в идеально круглом резонаторе дважды вырождено.

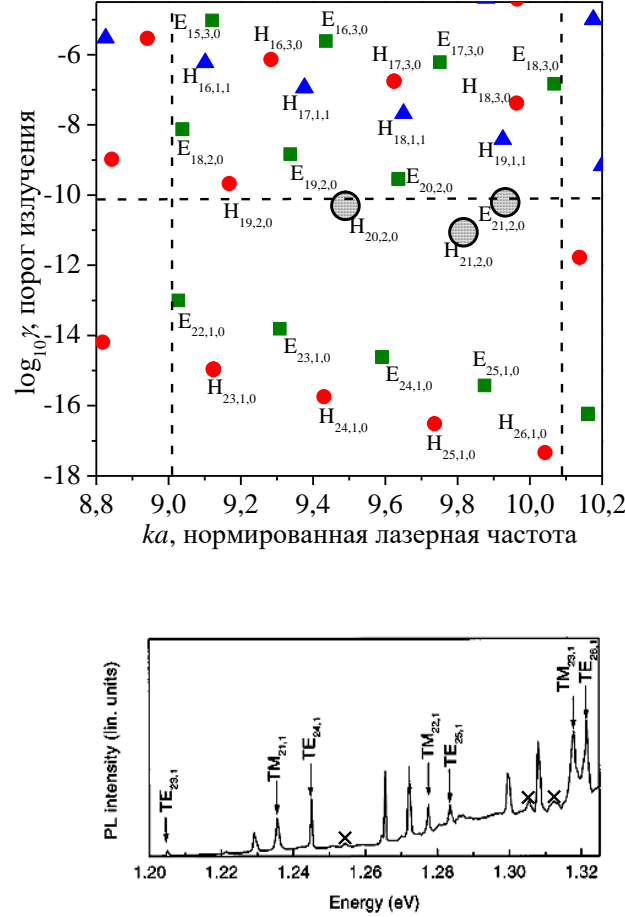


Рис. 2.11 Сравнение результатов моделирования (верхняя часть) и экспериментальных данных из [65] (нижняя часть). Параметры диска из GaAs/InAs: $\alpha=3.374$, $a=1.5 \mu\text{m}$, $d=0.25 \mu\text{m}$

В первую очередь отметим, что пики на экспериментальной кривой сгруппированы по парам (дублетам), что можно объяснить только снятием двойного вырождения мод из-за шероховатостей на поверхности диска. Это предположение вполне подтверждается приведенной в [65] фотографией исследованного микродиска (см. рис. 2.12). По фотографии видно, что

некоторые шероховатости на поверхности диска велики и имеют размер порядка 20-30 нм, что и дает «разнос» дублета порядка 10 нм, наблюдаемый при измерениях.

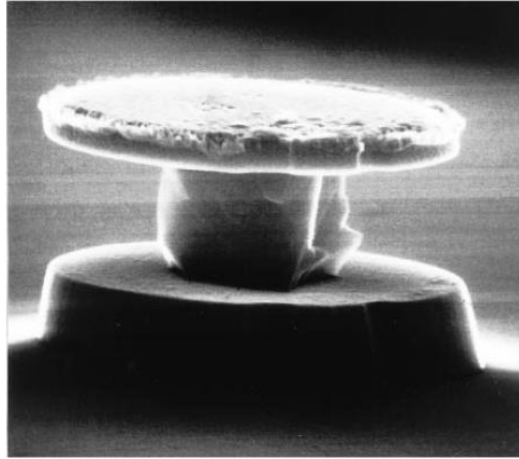


Рис. 2.12 Микрофотография дискового лазера, спектр излучения которого показан в нижней части рис. 2.11. Заимствовано из [65], рис. 1

Кроме того, заметим, что пьедестал, на котором крепится диск, несимметричен, что также (в меньшей степени) ведет к снятию вырождения. Сравнение показывает, что моды шепчущей галереи, классифицированные в [65] как $TE_{23,1}$... $TE_{26,1}$, соответствуют дублетам с $H_{23,1,0}$ по $H_{26,1,0}$ в наших обозначениях и были довольно правильно идентифицированы в [5], хотя авторы, очевидно, не поняли, что в шероховатом резонаторе моды расщепляются на дублеты. Кроме того, авторы [65] правильно установили, что противоположно поляризованные моды, TM -типа в их обозначениях, также излучаются, т.е. имеют сравнительно низкие пороги излучения. Однако соответствующие им максимумы на кривой фотолюминесценции (излучающиеся моды резонатора) они обозначили как моды $TE_{21,1}$... $TE_{23,1}$, а наш анализ говорит, что на кривой присутствуют дублеты мод от $E_{23,1,0}$ до $E_{25,1,0}$.

Более внимательное изучение экспериментальной кривой обращает внимание на маленькие пики, отмеченные крестиками (\times) (см. рис. 2.11). Наш

расчет позволяет сказать, что это моды с двумя вариациями поля вдоль радиуса диска, $H_{20,2,0}$, $H_{21,2,0}$ и $E_{21,2,0}$, для которых мощность накачки была только чуть-чуть выше пороговой. Все другие моды, по-видимому, оказываются ниже порога из-за недостаточной мощности оптической накачки, использованной в эксперименте. Уровень накачки, обеспечивавший испускание света, схематически указан на верхней части рисунка горизонтальной штриховой линией, а лазерные собственные значения, отвечающие крестикам на экспериментальной кривой, отмечены серыми кружками.

Таким образом, можно сделать вывод, что, во-первых, двумерное моделирование микродискового резонатора с помощью эффективного показателя преломления оказывается довольно точным инструментом даже для дисков с отношением толщины к радиусу порядка 0.2. Во-вторых, предложенный нами подход к расчету спектров и порогов мод в активном резонаторе действительно способен дать согласующуюся с экспериментом информацию о том, какие моды излучаются с наибольшей вероятностью.

2.4. Моды резонатора с радиально-неоднородной активной зоной

В этом подразделе рассматривается лазерная задача на собственные значения для двумерного кругового резонатора с радиально-неоднородным материальным усилением. Активная зона в таком случае имеет вид либо круга меньшего радиуса в центре резонатора либо кольца, прилегающего к кромке резонатора. Лазерные резонаторы, в которых активная зона не совпадает со всем резонатором, представляют большой интерес для исследования с помощью нашего подхода, так как он позволяет учесть неравномерность усиления в резонаторе и описать его влияние на частоты и пороги излучения. Подчеркнем, что такая ситуация не может быть описана и исследована с помощью классической задачи на собственные значения.

Реальными прототипами устройств с радиально-неоднородной активной зоной являются микрорезонаторные лазеры инжекционного типа. Такие лазеры

обычно устроены следующим образом: тонкий микродиск зажат между подложкой и металлическим контактом, расположенным на его верхней поверхности. Плотность инжектированных носителей (электронов), а соответственно, и материальное усиление, имеет наибольшее значение непосредственно под контактом, быстро спадая по его сторонам. На раннем этапе разработки микродисков с инъекцией носителей встречались устройства с контактом в центре диска – см. рис. 1.3. Позднее появились лазеры с кольцевым контактом, которые и являются сейчас наиболее распространенными (см. рис. 1.5 (е)). Вообще говоря, для улучшения характеристик излучения любого инжекционного лазера форма и размер его металлических контактов должны быть согласованы с распределением поля в резонаторе. Более глубокому изучению этого вопроса посвящен п. 3.4 данной диссертации.

Моделируя инжекционный микродисковый лазер в виде тонкого круглого диска, мы будем предполагать, что задача уже сведена к двумерной с помощью метода эффективного индекса. Кроме того, для упрощения анализа мы будем считать, что материальное усиление γ является кусочно-постоянным, т. е. либо (i) постоянно внутри круга радиуса $b < a$, и равно нулю в кольце вне этого круга, либо наоборот, равно нулю в указанном круге и постоянно внутри прилегающего к краю резонатора кольца (см. рис. 2.13). Тогда показатель преломления внутри диска равен $\nu = \alpha_{eff}$ в его пассивной части и $\nu = \alpha_{eff} - i\gamma$ в его активной части.

Ступенчатый характер зависимости показателя преломления ν от радиальной координаты приводит к появлению дополнительной пары граничных условий при $r = b$. Эти условия аналогичны (2.12) на границе диска при $r = a$. Они состоят в требовании непрерывности касательных компонент электромагнитного поля, т.е. непрерывности функции $H_z(E_z)$ и ее нормальной производной (с весом $1/\nu^2$ в случае Н-мод).

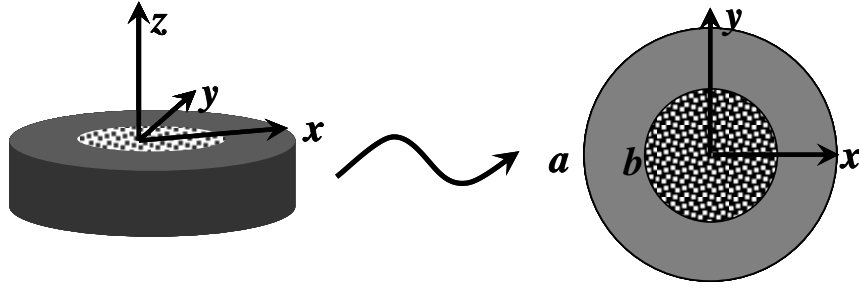


Рис. 2.13 Трехмерный микродисковый лазер инжекционного типа и соответствующая ему структура пониженной размерности

Поля в резонаторе записываем с учетом каждой частичной области:

$$U(r, \varphi) = \begin{cases} AJ_m(\kappa vr/a), r < b \\ BJ_m(\kappa r/a) + CH_m^{(1)}(\kappa vr/a), b < r < a \\ DH_m^{(1)}(\kappa r/a), r > a \end{cases} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} m\varphi, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

где A, B, C, D - неизвестные константы.

После подстановки выражений для полей в каждой из частичных областей, две пары граничных условий при $r = a$ и $r = b$ приводят к характеристическому уравнению следующего вида:

$$\det \begin{bmatrix} H_m^{(1)}(\kappa) & -J_m(\kappa\alpha) & -H_m^{(1)}(\kappa\alpha) & 0 \\ H_m^{(1)}(\kappa) & -\beta v J'_m(\kappa\alpha) & -\beta v H_m^{(1)}(\kappa\alpha) & 0 \\ 0 & J_m(\kappa\alpha\delta) & H_m^{(1)}(\kappa\alpha\delta) & -J_m(\kappa v\delta) \\ 0 & \beta v J'_m(\kappa\alpha\delta) & \beta v H_m^{(1)}(\kappa\alpha\delta) & -J'_m(\kappa v\delta) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

где параметр $\delta = b/a$ есть отношение радиусов активной и пассивной частей резонатора.

Численные результаты для спектров и порогов лазерных мод были получены в случае H_z -поляризованных мод, как представляющих наибольший интерес в тонких дисках, с учетом дисперсии эффективного показателя преломления, как описано в п. 2.3. На рис. 2.14 приведены частоты и пороги

для мод семейства $H_{m,n,0}$ в случае, когда круговая активная зона расположена в центре резонатора и ее радиус составляет половину радиуса всего резонатора ($\delta = 0.5$).

Сравнение результатов, представленных на рис. 2.14 и таких же результатов для микродиска с равномерным усилением (рис. 2.7), показывает, что при уменьшении активной зоны вдвое (по радиусу) моды сохраняют свои значения по частоте, однако их пороги изменяются очень сильно. В случае, когда активная зона находится в центре резонатора и вдвое меньше его по радиусу, величины порогов излучения в диапазоне частот $ka \leq 13$ становятся на 5-9 порядков выше (в зависимости от типа моды), чем в равномерно активном резонаторе.

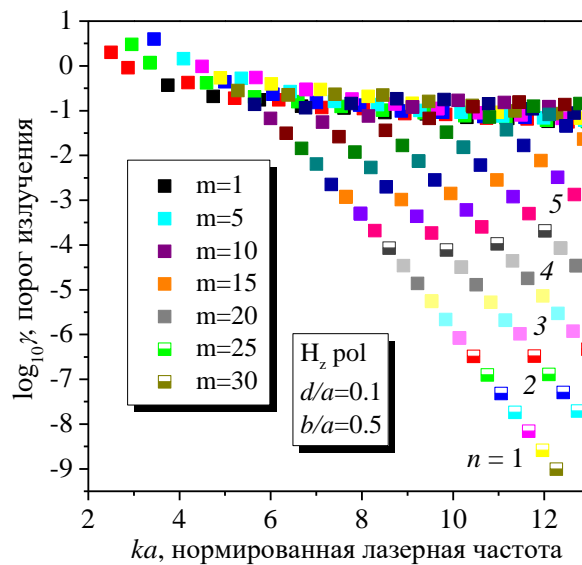


Рис. 2.14 Частоты и пороги излучения для H_z -поляризованных мод семейства H_{mn0} в диске из GaAs/InAs с круговой активной зоной радиуса $b = a/2$, $\alpha = 3.374$ и $d/a = 0.1$

Чтобы прояснить, каким образом происходит рост величины порогов, мы исследовали зависимости собственных значений от радиуса активной зоны. На рис. 2.15 штриховыми линиями показаны зависимости порогов мод семейства

$H_{m,1,0}$ от нормированной величины δ , которая есть отношение радиуса внутренней круговой активной области к радиусу диска.

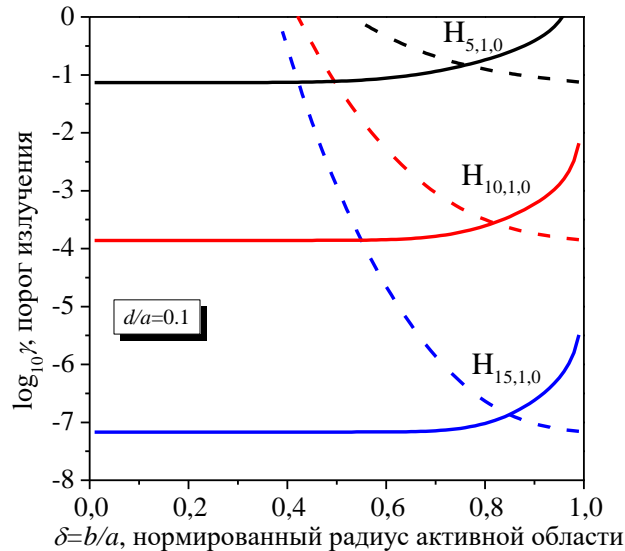


Рис. 2.15 Кривые зависимости порогов излучения мод семейства $H_{m,1,0}$ в диске из GaAs/InAs с неравномерным усилением. Сплошные линии соответствуют случаю кольцевого усиления, штриховые – кругового усиления в центре диска, $\alpha = 3.374$ и $d/a = 0.1$

Как указывалось выше, альтернативный вариант создания неравномерного усиления в диске – это применение кольцевого контакта для инжекции носителей в области, имеющей вид кольца вдоль кромки диска. Кроме того, такой вариант радиально-неравномерного усиления может быть реализован и с помощью оптической накачки диска. Это достигается путем пропускания луча накачки через аксикон (коническую линзу), что делает луч полым, с отсутствием поля в его центре [157].

Для кругового резонатора с кольцевой активной зоной мы получаем характеристическое уравнение, подобное (2.23), в котором, однако, величины ν и α поменялись местами. Расчет его корней, то есть пар чисел (κ, γ) , показывает, что пороги мод шепчущей галереи имеют практически те же

величины, что и в диске с равномерным усилением, даже если ширина кольца усиления составляет лишь малую часть от радиуса диска.

Соответствующие кривые зависимостей порогов от внутреннего радиуса кольца усиления также представлены на рис. 2.15 сплошными линиями. Пороги монотонно растут по мере сужения активного кольца, однако их заметное изменение начинается только в том случае, если активная зона становится уже, чем область, занятая яркими пятнами поля соответствующей моды. Поскольку эти пятна сильнее прижаты к кромке резонатора для мод с более высоким азимутальным индексом m (см. рис. 2.10), то и активная зона для таких мод может быть сужена в большей степени без вреда для их порогов излучения.

Интересно отметить, что в точках пересечения сплошных и штриховых кривых на рис. 2.15 для моды одного и того же типа значения порога ровно в 2 раза (с точностью до нескольких десятичных знаков) превышают порог для этой же моды в равномерно активном круговом резонаторе. Объяснение такого поведения порогов самовозбуждения будет дано в п. 3.4.

Таким образом, создание активной области в центре диска, например, как в инжекционных лазерах с центрально расположенным электродом, катастрофически действует на сверхмалые величины порогов, характерные для мод шепчущей галереи в круговом резонаторе. В противоположном случае, если активная зона создана в виде кольца вдоль кромки диска, пороги сохраняют свои малые значения. Это позволяет существенно (во столько раз, во сколько площадь активной зоны меньше площади всего диска) понизить мощность накачки или увеличить выходную мощность лазера ([157], [158]).

ВЫВОДЫ К РАЗДЕЛУ 2

В данном разделе были рассмотрена общая постановка лазерной задачи на собственные значения для открытых диэлектрических резонаторов с активными зонами. Далее с помощью такой задачи были исследованы моды излучения для простых моделей микродисковых лазеров. По результатам исследований, опубликованных в статьях [1 – 2] и трудах конференций [9 - 10], [12-14], можно сделать следующие выводы:

1. Если диэлектрический открытый резонатор имеет вид тонкого «диска» с произвольной формой границы, то размерность электродинамической задачи для него можно приближенным образом понизить с трехмерной до двумерной (в плоскости «диска»). При этом вместо показателя преломления материала резонатора необходимо использовать «эффективный показатель преломления», являющийся в общем случае многозначной функцией толщины резонатора, его материальных констант и длины волны.

2. Включение в модель открытого резонатора активной зоны, материал которой имеет ненулевую мнимую часть показателя преломления (или эффективного показателя преломления) с соответствующим знаком, приводит к новой электродинамической задаче на собственные значения. Такая задача позволяет отыскивать спектр частот и величины порогов излучения для собственных мод активного микрорезонатора.

3. Спектр частот излучающихся мод открытого резонатора с активной зоной имеет дискретный характер, причем каждой моде соответствует свое значение материально порога - величины мнимой части показателя преломления активного материала. Частоты и пороги излучения непрерывным образом зависят от параметров задачи.

4. Излучающиеся моды полностью активного двумерного кругового резонатора обладают различным поведением в зависимости от значения

азимутального индекса. Моды с низкими индексами сильно излучают и имеют высокие пороги, которые обратно пропорциональны частоте моды. Моды же с высокими азимутальными индексами демонстрируют свойства шепчущей галереи (их поля мало излучают и прижаты к краю резонатора с его внутренней стороны), а их пороги экспоненциально малы по отношению к частоте моды или ее индексу.

5. Если активная зона в круговом резонаторе имеет вид круговой области меньшего радиуса в центре резонатора, то пороги мод шепчущей галереи возрастают по сравнению с порогами мод в полностью активном резонаторе.

6. Если активная зона в круговом резонаторе имеет вид кольца, прилегающего к краю резонатора, то пороги мод шепчущей галереи сохраняют свои низкие значения, даже если указанное кольцо узкое и его ширина составляет малую часть радиуса резонатора.