

## РАЗДЕЛ 5

### МОДЫ РЕЗОНАТОРОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ГЛАДКИМ КОНТУРОМ

Как уже указывалось в разделах 1 и 2, лазерный резонатор в форме кругового диска обеспечивает экспоненциально малые пороги для мод шепчущей галереи, однако излучение этих мод имеет малую направленность, равную 2. На практике же всегда необходимо иметь источник света с высокой направленностью, позволяющей производить обработку сигналов более эффективно и в меньшем объеме пространства.

Одним из традиционных методов решения подобных проблем является применение коллимирующей линзы, в фокусной области которой помещается слабонаправленный источник волн. Однако линза способна «перехватить» излучение только в некотором секторе углов. Кроме того, присутствие линзы значительно увеличивает общие размеры устройства, а если ее уменьшить, то она сама начинает играть роль пассивного резонатора, оптически связанного с основным (активным) резонатором. Это может привести, как было показано в разделах 3 и 4, к втягиванию поля рабочей моды в область линзы и срыву работы устройства из-за повышения порога излучения.

Поэтому все группы исследователей, занимающиеся микролазерами, ведут поиск таких форм лазерных резонаторов, которые способны обеспечить более высокую направленность излучения при сохранении небольших значений порога [69 – 72], [74]. В качестве таких модифицированных форм рассматривались «стадион», «лимасол», квадрат, часть круга, круг и стадион с отверстиями, и другие. Однако, по-видимому, наибольшие надежды и наибольшее внимание были и остаются связанными со «спиральным» резонатором, форма контура которого описывается спиралью Архимеда с небольшой ступенькой [75 – 76], [116], [167 – 171]. Это объясняется тем, что такая форма кажется не слишком далекой от круга, чтобы сохранить малый

порог излучения, но достаточно несимметричной, чтобы обеспечить его высокую направленность.

В данном разделе рассматриваются вопросы построения граничных интегральных уравнений Мюллера для анализа электромагнитного поля в присутствии однородного диэлектрического тела (в двумерной постановке) с произвольной границей, а также строится эффективный численный алгоритм интерполяционного типа для их дискретизации. Большое внимание уделено изучению сходимости такого алгоритма и связи скорости сходимости с гладкостью контура. Разработанный алгоритм применяется к исследованию частот, порогов излучения и полей собственных Н-мод в тонком равномерно активном резонаторе спиральной формы. Исследуется, как снимается вырождение мод по частоте и порогу при появлении ступеньки на контуре резонатора. Изучается также структура полей этих мод в ближней и дальней зоне.

### 5.1. Граничные интегральные уравнения типа Мюллера

В случаях обеих поляризаций сведение двумерной электромагнитной задачи на собственные значения к граничным интегральным уравнениям осуществляется с помощью формул Грина. Как указывалось в разделе 1, только уравнения Мюллера обладают свойством полной эквивалентности по отношению к первоначальной краевой задаче для уравнений Максвелла со всеми дополнительными условиями.

Геометрия произвольного двумерного резонатора и принятые обозначения приведены на рис. 5.1. Обозначим через  $D_e$  область, внешнюю к области резонатора  $D_i$ . Границу резонатора обозначим через  $\Gamma$ . Будем полагать, что  $\hat{n}$  - внешняя нормаль к границе резонатора  $\Gamma$ .  $\nu_j$ ,  $j=i, e$  - показатель преломления резонатора и внешней области,  $\nu_i = \alpha_i - i\gamma$ ;  $\nu_e = \alpha_e$ .

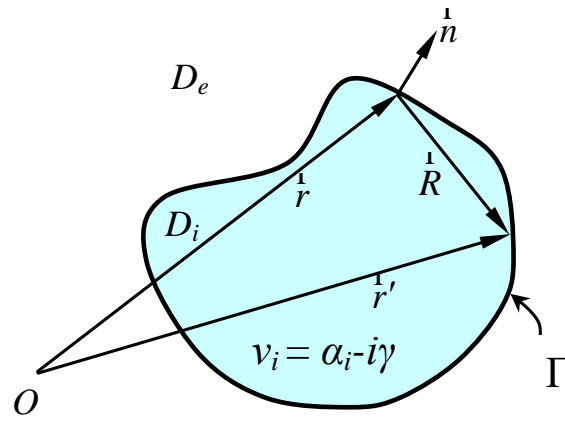


Рис. 5.1 Двумерный диэлектрический резонатор произвольной формы

Пусть функция  $U_j = E_z$  или  $H_z$  в области  $D_j$ ,  $j = i, e$ .  $U_j$  является решением лазерной задачи,

$$(\Delta + k_{i,e}^2)U_{i,e}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in D_i \cup D_e, \quad (5.1)$$

$$U_i|_{\Gamma} = U_e|_{\Gamma}; \quad \eta_i \frac{\partial U_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \eta_e \frac{\partial U_e}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (5.2)$$

с условием локальной ограниченности энергии и условием излучения Зоммерфельда (для  $U_e$ ) на бесконечности (2.15). Коэффициент в уравнении (5.1) определяется так, что  $k_{i,e} = kv_{i,e}$ . Граничные условия (5.2) - это требования непрерывности тангенциальных компонент поля. Поэтому константы заданы следующим образом:  $\eta_{i,e} = 1/v_{i,e}^2$ , в случае Н-поляризации, и  $\eta_{i,e} = 1$ , в случае Е-поляризации.

Введем также в рассмотрение функцию Грина однородного пространства  $G_j(\vec{r}, \vec{r}')$ , удовлетворяющую двумерному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k_j^2)G_j(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (5.3)$$

с дельта-функцией Дирака  $\delta(\vec{r}, \vec{r}')$  в правой части. Известно, что функция Грина однородной среды с показателем преломления  $v_i$  имеет вид

$$G_j(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j R), \quad (5.4)$$

где  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  расстояние между точками  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$ ,

$H_0^{(1)}(\cdot)$  есть функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Применяя вторую формулу Грина к функциям  $G_j(\vec{r}, \vec{r}')$  и  $U_j$ , получим (см. [172], С. 11 - 14):

$$U_i(\vec{r}) = - \int_{\Gamma} \left( U_i(\vec{r}') \frac{\partial G_i(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G_i(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial U_i(\vec{r}')}{\partial n'} \right) dl', \quad \vec{r} \in D_i \quad (5.5)$$

$$U_e(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left( U_e(\vec{r}') \frac{\partial G_e(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G_e(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial U_e(\vec{r}')}{\partial n'} \right) dl', \quad \vec{r} \in D_e, \quad (5.6)$$

где  $dl'$  есть элемент длины дуги.

Обозначим  $\varphi(\vec{r}) = U_i(\vec{r})$  и  $\psi(\vec{r}) = \frac{\partial U_i(\vec{r})}{\partial n}$ ,  $\vec{r} \in \Gamma$ . Тогда из граничных условий (5.2) получим, что  $U_e(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$  и  $\frac{\partial U_e(\vec{r})}{\partial n} = \frac{\eta_i}{\eta_e} \psi(\vec{r})$ ,  $\vec{r} \in \Gamma$ . Далее, в (5.5) и (5.6) опустим точку  $\vec{r}$  на контур  $\Gamma$ . Учитывая, при переходе через границу, непрерывность потенциала простого слоя, имеем

$$\frac{1}{2} \varphi(\vec{r}) = - \int_{\Gamma} \left( \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G_i(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G_i(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') \right) dl', \quad \vec{r} \in \Gamma \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{2} \varphi(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left( \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G_e(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\eta_i}{\eta_e} G_e(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') \right) dl', \quad \vec{r} \in \Gamma, \quad (5.8)$$

Складывая (5.7) и (5.8), получим первое интегральное уравнение,

$$\varphi(\vec{r}) + \int_{\Gamma} \varphi(\vec{r}') A(\vec{r}, \vec{r}') dl' - \int_{\Gamma} \psi(\vec{r}') B(\vec{r}, \vec{r}') dl' = 0. \quad (5.9)$$

В (5.5) – (5.6) опустим точку  $\vec{r}$  на контур  $\Gamma$ . Продифференцировав (5.5), (5.6) по нормали  $\vec{n}$ , с учетом свойств нормальных производных потенциалов простого и двойного слоя, получим соотношения

$$\frac{1}{2} \psi(\vec{r}) = - \int_{\Gamma} \left( \varphi(\vec{r}') \frac{\partial^2 G_i(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n' \partial n} - \psi(\vec{r}') \frac{\partial G_i(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right) dl', \quad \vec{r} \in \Gamma \quad (5.10)$$

$$\frac{\eta_i}{2\eta_e} \psi(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left( \varphi(\vec{r}') \frac{\partial^2 G_e(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n' \partial n} - \frac{\eta_i}{\eta_e} \frac{\partial G_e(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \psi(\vec{r}') \right) dl', \quad \vec{r} \in \Gamma. \quad (5.11)$$

Складывая (5.10) и (5.11), получим второе интегральное уравнение

$$\frac{\eta_i + \eta_e}{2\eta_e} \psi(\vec{r}) + \int_{\Gamma} \varphi(\vec{r}') C(\vec{r}, \vec{r}') dl' - \int_{\Gamma} \psi(\vec{r}') D(\vec{r}, \vec{r}') dl' = 0. \quad (5.12)$$

Уравнения (5.9) и (5.12) – это система уравнений Мюллера. Ядра этих уравнений имеют вид

$$A(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\partial G_i(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_e(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}, \quad (5.13)$$

$$B(\vec{r}, \vec{r}') = G_i(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{\eta_i}{\eta_e} G_e(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (5.14)$$

$$C(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\partial^2 G_i(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\partial^2 G_e(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n \partial n'}, \quad (5.15)$$

$$D(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{r}') = \frac{\partial G_i(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{r}')}{\partial n} - \frac{\eta_i}{\eta_e} \frac{\partial G_e(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{r}')}{\partial n}, \quad (5.16)$$

Здесь функции Грина заданы выражением (5.4), и их нормальные производные вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial G_j(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{r}')}{\partial n'} = (i/4)k_j H_1^{(1)}(k_j R)(\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n}')/R \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial G_j(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{r}')}{\partial n} = (-i/4)k_j H_1^{(1)}(k_j R)(\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n})/R \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial^2 G_j(\overset{\mathbf{r}}{r}, \overset{\mathbf{r}}{r}')}{\partial n \partial n'} = -\frac{ik_j}{4} \left[ k_j H_2^{(1)}(k_j R)(\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n}') \frac{(\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n})}{R^2} - H_1^{(1)}(k_j R) \frac{(\overset{\mathbf{r}}{n}' \cdot \overset{\mathbf{r}}{n})}{R} \right] \quad (5.19)$$

В формулах (5.17) – (5.19),  $(\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n})$ ,  $(\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n}')$  и  $(\overset{\mathbf{r}}{n}' \cdot \overset{\mathbf{r}}{n})$  есть скалярные произведения векторов. Пусть параметризация контура резонатора  $\Gamma$  описывается с помощью функции  $r(t) = \{x(t), y(t)\}$ . Тогда расстояние между двумя точками на кривой, это

$$R = \sqrt{[x(t) - x(\tau)]^2 + [y(t) - y(\tau)]^2}, \quad (5.20)$$

а внешняя нормаль к кривой задается выражением

$$\overset{\mathbf{r}}{n} = \left( \frac{dy}{dt}; -\frac{dx}{dt} \right) \frac{1}{L(t)}, \quad (5.21)$$

где  $L(t)$  - якобиан,

$$L(t) = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}. \quad (5.22)$$

Таким образом, ядра уравнений Мюллера представляют собой линейные комбинации функций Грина однородных сред с материальными параметрами внешней и внутренней среды и их нормальных производных первого и второго порядка. Исследуем свойства ядер (5.13) – (5.16) при  $t \rightarrow \tau$ . По определению, функция Ханкеля  $H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z)$ , а функции Бесселя и Неймана представимы следующим образом (см. [156]):

$$J_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p} \quad (5.23)$$

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} \left[ \ln \frac{z}{2} + C \right] J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1-p)!}{p!} \left(\frac{2}{z}\right)^{n-2p} \quad (5.24)$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(n+p)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p} \{ \phi(p+n) + \phi(p) \},$$

где  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(p) = \sum_{m=1}^p \frac{1}{m}$ ,  $p = 1, 2, \dots$ ,  $C = 0.5772157\dots$  - константа Эйлера. При

$n = 0$  конечная сумма в (5.24) равна нулю.

Из разложений (5.23) и (5.24) находим, что ядра  $A(t, \tau)$  из (5.13) и  $D(t, \tau)$  из (5.16) непрерывны во всех точках гладкого контура, а ядра  $B(t, \tau)$  из (5.14) и  $C(t, \tau)$  из (5.15) имеют логарифмические особенности. Отметим, что ядро  $B(t, \tau)$  имеет особенность только в случае Н-поляризации, в случае же Е-поляризации оно непрерывно. Непрерывность ядер  $A(t, \tau)$  и  $D(t, \tau)$  обусловлена тем, что (см. [173] С. 346)

$$\frac{\partial G_j(t, t)}{\partial n} = \frac{1}{2} \chi_0(t), \quad (5.25)$$

где  $\chi_0(t)$  есть кривизна ([174], С.53) контура  $\Gamma$  в точке  $\overset{\circ}{r}$ .

Поведение двух ядер, имеющих сингулярный характер при  $t \rightarrow \tau$ , имеет следующий вид:

$$B(t, \tau) \underset{t \rightarrow \tau}{\cong} -\frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{\eta_i}{\eta_e} \right) \ln R \quad (5.26)$$

$$C(t, \tau) \underset{t \rightarrow \tau}{\cong} -\frac{1}{2\pi} (k_i^2 - k_e^2) \ln R. \quad (5.27)$$

## 5.2. Дискретизация интегральных уравнений с помощью квадратур

Как уже указывалось, имеется несколько способов дискретизации граничных интегральных уравнений, например, метод простых коллокаций или проекционный метод Галеркина, которые применялись к уравнениям Мюллера в работах [121] и [122], соответственно. Одним из наиболее эффективных методов дискретизации является метод квадратур (другое название – метод Найстрёма (Nyström)) [125], [175 - 176].

Этот метод основан на замене интегралов приближенными суммами с помощью соответствующих квадратур, поэтому центр тяжести в разработке соответствующих алгоритмов приходится на вывод квадратурных формул, правильно учитывающих поведение подынтегральных функций, и прежде всего их сингулярности.

Ниже речь пойдет о дискретизации интегральных уравнений по замкнутому контуру, допускающему регулярную аналитическую  $2\pi$ -периодическую параметризацию функцией  $r(t) = \{x(t), y(t)\}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .



Поскольку некоторые из ядер имеют логарифмическую особенность, то удобно представить ядра (5.13) – (5.16) таким образом, чтобы выделить из них (в том числе из гладких ядер) логарифмические части ( $t \neq \tau$ ):

$$\begin{aligned}
 A(t, \tau) &= A_1(t, \tau) \ln \left[ 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right] + A_2(t, \tau), \\
 B(t, \tau) &= B_1(t, \tau) \ln \left[ 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right] + B_2(t, \tau), \\
 C(t, \tau) &= C_1(t, \tau) \ln \left[ 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right] + C_2(t, \tau), \\
 D(t, \tau) &= D_1(t, \tau) \ln \left[ 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right] + D_2(t, \tau),
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

где  $A_1(t, \tau)$ ,  $B_1(t, \tau)$ ,  $C_1(t, \tau)$  и  $D_1(t, \tau)$  - аналитические функции, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_1(t, \tau) &= (-1 / 4\pi) [k_i J_1(k_i R) - k_e J_1(k_e R)] (\hat{R} \cdot \hat{n}') / R, \\
 B_1(t, \tau) &= (-1 / 4\pi) [J_0(k_i R) - (\eta_i / \eta_e) J_0(k_e R)], \\
 C_1(t, \tau) &= (1 / 4\pi) [k_i^2 J_2(k_i R) - k_e^2 J_2(k_e R)] (\hat{R} \cdot \hat{n}') (\hat{R} \cdot \hat{n}) / R^2 - \\
 &\quad (1 / 4\pi) [k_i J_1(k_i R) - k_e J_1(k_e R)] (\hat{n}' \cdot \hat{n}) / R, \\
 D_1(t, \tau) &= (1 / 4\pi) [k_i J_1(k_i R) - (\eta_i / \eta_e) k_e J_1(k_e R)] (\hat{R} \cdot \hat{n}) / R
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Функции  $A_2(t, \tau)$ ,  $B_2(t, \tau)$ ,  $C_2(t, \tau)$ ,  $D_2(t, \tau)$  находятся из (5.28) с учетом (5.29). Далее, введем равномерную сетку узлов на контуре  $\Gamma$ :  $t_p = \pi p / N$ ,

$p = 0, 1, \dots, 2N - 1$ . Интеграл от каждой части ядер заменяется суммой с помощью квадратурных формул. Для частей с логарифмом мы используем квадратурную формулу, полученную путем аппроксимации подынтегральной функции тригонометрическими полиномами [125], [175-176]:

$$\int_0^{2\pi} \ln \left[ 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right] F_1(t, \tau) f(\tau) L(\tau) d\tau \approx \sum_{p=0}^{2N-1} P_p^{(N)}(t) F_1(t, t_p) f(t_p) L(t_p), \quad (5.30)$$

где тригонометрический полином имеет вид

$$P_p^{(N)}(t) = -(2\pi / N) \sum_{m=1}^{N-1} \cos \left[ m(t - t_p) \right] / m - \pi \cos \left[ N(t - t_p) \right] / N^2 \quad (5.31)$$

Для второй части ядер используется правило трапеций ([125], [156])

$$\int_0^{2\pi} F_2(t, \tau) f(\tau) L(\tau) d\tau \approx (\pi / N) \sum_{p=0}^{2N-1} F_2(t, t_p) f(t_p) L(t_p) \quad (5.32)$$

В формулах (5.30) и (5.32)  $F_1 = A_1, B_1, C_1, D_1$ ;  $F_2 = A_2, B_2, C_2, D_2$ ;  $f = \varphi, \psi$ .

Чтобы получить значение частей ядер в (5.28) при  $t = \tau$ , воспользуемся разложениями (5.23) и (5.24). Имеем для первых частей

$$A_1(t, t) = 0; \quad B_1(t, t) = -(1 - \eta_i / \eta_e) / 4\pi, \quad (5.33)$$

$$C_1(t, t) = -(k_i^2 - k_e^2) / 8\pi; \quad D_1(t, t) = 0,$$

и для вторых частей,

$$A_2(t, t) = 0, \quad D_2(t, t) = -(1 - \eta_i / \eta_e) \chi_0(t) / 4\pi,$$

$$B_2(t, t) = (1 - \eta_i / \eta_e) (i\pi - 2C - \ln L^2(t)) / 4\pi + \left( \ln \frac{4}{k_i^2} - (\eta_i / \eta_e) \ln \frac{4}{k_e^2} \right) / 4\pi, \quad (5.34)$$

$$C_2(t, t) = (k_i^2 - k_e^2) (i\pi - 2C + 1) / 8\pi + \left( k_i^2 \ln \frac{4}{k_i^2} L^2(t) - k_e^2 \ln \frac{4}{k_e^2} L^2(t) \right) / 8\pi$$

Заменяя в интегральных уравнениях (5.9) и (5.12) интегралы с помощью квадратур (5.30) и (5.32), получим матричное уравнение порядка  $4N \times 4N$

$$[\mathbf{I} + \mathbf{A}] \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} = 0, \quad (5.35)$$

где векторы  $\Phi = \{\varphi(t_p)\}_{p=0, 2N-1}$  и  $\Psi = \{\psi(t_p)\}_{p=0, 2N-1}$ , а матрица  $\mathbf{A}$  блочная

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & -B \\ C & -D \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

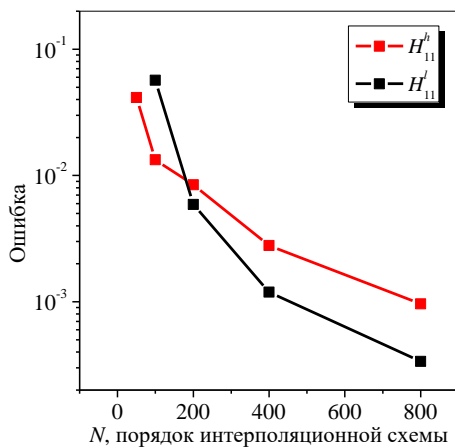
Каждый блок матрицы размером  $2N \times 2N$  заполняется согласно выражениям

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (P_p^{(N)}(t_s) A_1(t_s, t_p) + (\pi / N) A_2(t_s, t_p)) L(t_p) \right\}_{p,s=0}^{2N-1}, \\ B &= \left\{ 2\eta_e / (\eta_e + \eta_i) (P_p^{(N)}(t_s) B_1(t_s, t_p) + (\pi / N) B_2(t_s, t_p)) L(t_p) \right\}_{p,s=0}^{2N-1}, \\ C &= \left\{ (P_p^{(N)}(t_s) C_1(t_s, t_p) + (\pi / N) C_2(t_s, t_p)) L(t_p) \right\}_{p,s=0}^{2N-1}, \\ D &= \left\{ 2\eta_e / (\eta_e + \eta_i) (P_p^{(N)}(t_s) D_1(t_s, t_p) + (\pi / N) D_2(t_s, t_p)) L(t_p) \right\}_{p,s=0}^{2N-1} \end{aligned} \quad (5.37)$$

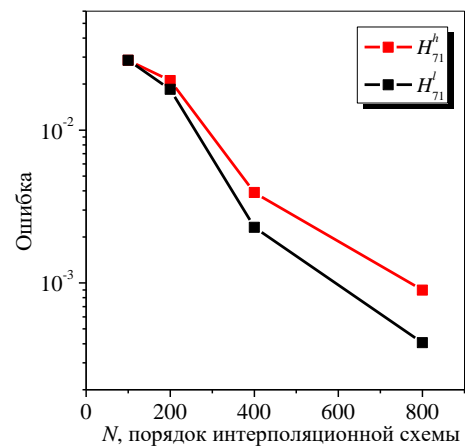
Собственные значения  $(\kappa, \gamma)$  являются решениями детерминантного уравнения

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{A}(\kappa, \gamma)] = 0 \quad (5.38)$$

Если подынтегральная функция - аналитическая и  $2\pi$ -периодическая, то, согласно [125] ошибка в (5.31) и (5.32) порядка  $O[\exp(-\sigma N)]$ , где  $2N$  – число узлов в квадратуре и  $\sigma$  равна половине ширины параллельной ленты в комплексной плоскости, куда могут быть продолжены голоморфным образом подынтегральные функции  $F_{1,2}(t, \tau)f(\tau)L(\tau)$ . Реальное поведение ошибки вычисления собственного значения как функции  $N$  показано на рис. 5.2.



(а)



(б)

Рис. 5.2 Ошибка вычислений собственного значения как функция порядка интерполяционной схемы для мод дублетов  $H_{1,1}^{h,l}$  (а) и  $H_{7,1}^{h,l}$  (б), параметры резонатора  $d = 1.0a$ ,  $\beta = \pi/100$ ,  $\alpha_i = 2.63$ ,  $\alpha_e = 1$

Ослабление требований к подынтегральной функции и контуру интегрирования приводит к уменьшению скорости сходимости. Так, в квадратурной формуле (5.30) ошибка составляет  $O(C/N^{r+\varepsilon})$ ,  $C = \text{const}$ , в предположении, что функция при логарифме принадлежит классу функций непрерывных по

Гёльдеру  $C^{r,\varepsilon}$  ( $r$  раз непрерывно дифференцируемая,  $r$ -я производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\varepsilon \in (0,1]$ ) (см. [176]). В (5.32) ошибка для  $2\pi$  периодических функций класса  $C^r$  ( $r$  раз непрерывно дифференцируемых функций) составляет  $O(C/N^r)$ ,  $C = \text{const}$  (см. [156]).

Корни  $(\kappa, \gamma)$  приближенного детерминантного уравнения, как и ранее, находятся численно с помощью метода секущих. Точность отыскания корней системы уравнений была установлена на уровне  $10^{-7}$ .

### 5.3. Моды в активном резонаторе со спиральным контуром

В этом подразделе приведены результаты численного исследования Н-мод двумерного равномерно активного спирального резонатора, показанного на рис. 5.3. Можно сказать, что спиральный резонатор – это слегка деформированный несимметричным образом круговой резонатор, поэтому, фактически, мы будем описывать влияние малого возмущения контура такого резонатора на спектр частот, пороги излучения и его направленность.

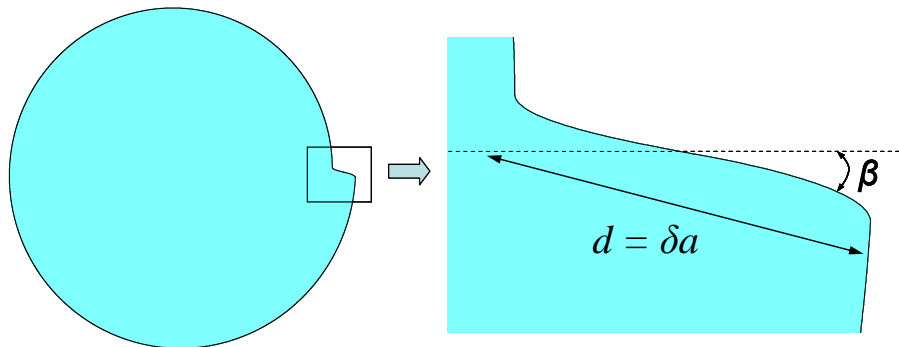


Рис. 5.3 Спиральный резонатор со сглаженным выступом. Контур резонатора описывается (5.39)

Численные результаты получены и представлены для монопольной моды ( $H_{0,1}$ ), дипольных ( $H_{1,1}$ ) и квадрупольных ( $H_{2,1}$ ) мод, а также мод шепчущей галереи (на примере моды  $H_{7,1}$ ). Расчет мод шепчущей галереи со значительно

более высокими азимутальными индексами не проводился. Это связано с ограничениями, накладываемыми невысокой гладкостью примененной нами параметризации контура, а также свойствами квадратурных формул. Однако указанные ограничения условны и могут быть преодолены несколькими способами, что может быть предметом отдельного исследования.

Вместе с тем, низшие моды спирального резонатора представляют интерес сами по себе, поскольку, как было показано в п. 4.3, порог излучения таких мод можно существенно понизить, если собрать несколько резонаторов в циклическую фотонную молекулу.

В качестве параметризации спирального контура была выбрана следующая кусочно заданная функция (см. [177]):

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos t \\ y(t) = r(t) \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (5.39)$$

где

$$r(t) = \begin{cases} 1 + \delta/4\pi t, & t \in [\beta, 2\pi - \beta] \\ 1 - \delta/4\pi \left[ t(2\pi - \beta)/\beta - t^2\pi/\beta^2 - \pi \right], & t \in [0, \beta) \\ 1 + \delta/4\pi \left[ (2\pi - t)(2\pi - \beta)/\beta - (2\pi - t)^2\pi/\beta^2 + \pi \right], & t \in (2\pi - \beta, 2\pi] \end{cases}, \quad (5.40)$$

$a$  - минимальный радиус резонатора,

$d = \delta a$  - нормированная высота выступа спирального резонатора,

$\beta$  - угол наклона выступа (отклонение от горизонтального положения, в радианах).

При такой параметризации контура мы имеем гладкую кривую, однако, вторая производная  $r''(t)$  имеет конечные скачки при  $t = \beta$  и  $t = 2\pi - \beta$ . Поскольку  $x(t)$  и  $y(t)$  (5.39) попадают в ядра интегральных уравнений (5.9) и

(5.12), то подынтегральные функции  $F_{1,2}(t, \tau)f(\tau)L(\tau) \in C[0, 2\pi]$ . Более того, заданная параметризация (5.39)-(5.40) не является  $2\pi$ -периодической. Однако, и при задании параметризации контура в виде (5.39), (5.40) можно получить ряд хороших результатов. Дипольные и монопольные моды кругового и слегка возмущенного кругового резонатора имеет высокие пороги излучения. Их можно найти численно с точностью до 3 знаков после запятой, используя (5.40) и квадратуры (5.30), (5.32) при относительно небольшом числе узлов. Для мод типа шепчущей галереи с  $m > 10$  и маленькими порогами излучения необходимо находить собственные значения с более высокой точностью, и параметризация (5.40) неэффективна в силу недостаточной гладкости.

Следует также обратить внимание, что в параметризацию контура входит параметр  $\beta$ , отвечающий за наклон выступа спирали. При дискретизации расстояние между узлами сетки должно быть меньше, чем  $\beta$ . Если сетка узлов равномерная, то при очень маленьких  $\beta$  требуется сразу очень большое число узлов, что делает предложенную схему дискретизации неэффективной. Для преодоления этой особенности следует использовать либо неравномерную сетку узлов, сгущающуюся в окрестности выступа, либо параметризовать спиральный контур с помощью длины дуги кривой. Оба эти варианта требуют использование других квадратурных формул.

Чтобы найти начальные приближения для поиска корней (5.38), был построен рельеф детерминанта на плоскости  $(\kappa, \gamma)$ . На рис. 5.4 представлен такой рельеф для параметров  $\delta = 2a$ ,  $\beta = \pi / 100$ ,  $N = 100$  и эффективного показателя преломления  $\alpha_i = 2.63$ . На рельефе видны несколько минимумов абсолютного значения детерминанта. Все минимумы, кроме первого по частоте, соответствуют парам близко расположенных мод. Каждая такая пара мод – это две «бывшие» вырожденные моды  $H_{m,n}$ ,  $m > 0$  кругового резонатора, расщепленные на дублет благодаря снятию вырождения из-за потери круговой симметрии в спиральном резонаторе. Первый, одиночный, минимум

соответствует монопольной моде  $H_{0,1}$ , которая невырождена в круговом резонаторе.

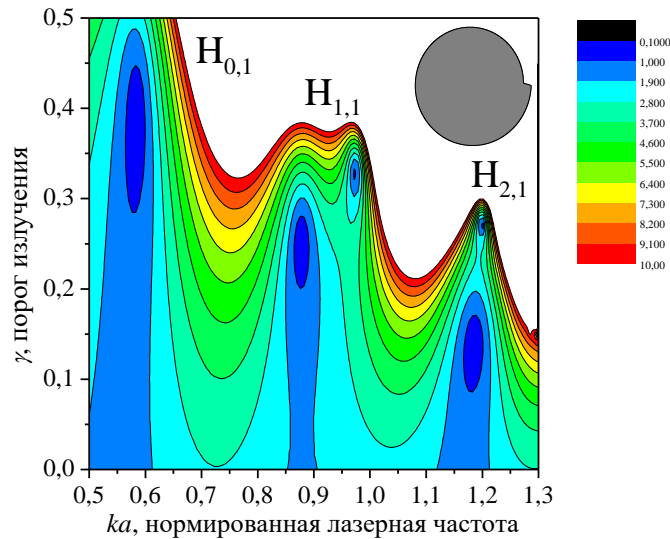


Рис. 5.4 Линии равной величины (абсолютного значения) детерминанта как функции двух переменных  $(ka, \gamma)$ ,  $d = 2a$ ,  $\beta = \pi/100$ ,  $N = 100$ ,  $\alpha_i = 2.63$

На рис. 5.5 - 5.8 представлены зависимости частоты и порога излучения дублетов мод  $H_{1,1}^{h,l}$  и  $H_{2,1}^{h,l}$  от нормированной высоты ступени спирального резонатора  $d/a$  (при  $d = 0$  контур переходит в окружность).

Дублеты образованы модами, близкими по частоте, и с более высоким и более низким порогом излучения. Моды в дублете обозначаются следующим образом:  $H_{m,n}^{h,l}$ , где два нижних индекса, как и в круговом резонаторе, описывают число вариаций поля по азимуту и по радиусу, а верхний индекс соответствует значению порога излучения у моды в дублете. Так, мода дублета с более высоким порогом получит индекс  $h$ , а с более низким -  $l$ .

При уменьшении высоты выступа спирали, моды дублета сближаются и по частоте, и по порогу излучения, и при  $d = 0$  совпадают (рис. 5.6 – 5.8).



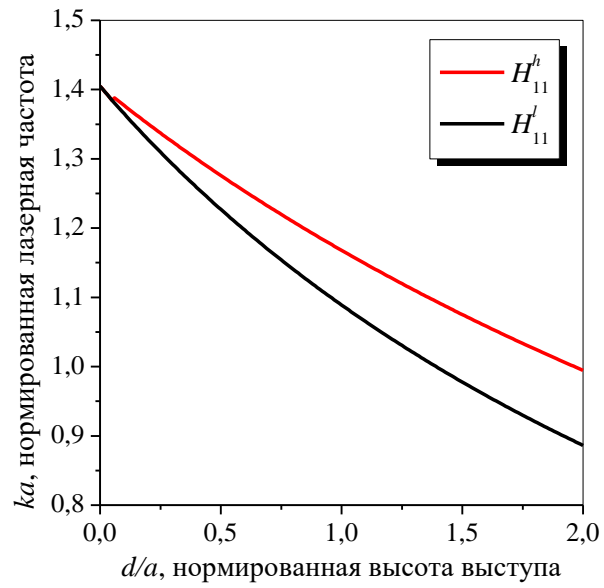


Рис. 5.5 Зависимость частоты излучения от нормированной высоты выступа спирального резонатора дублета  $H_{1,1}^{h,l}$ ,  $\beta = \pi/100$ ,  $N = 200$ ,  $\alpha_i = 2.63$ ,  $\alpha_e = 1$

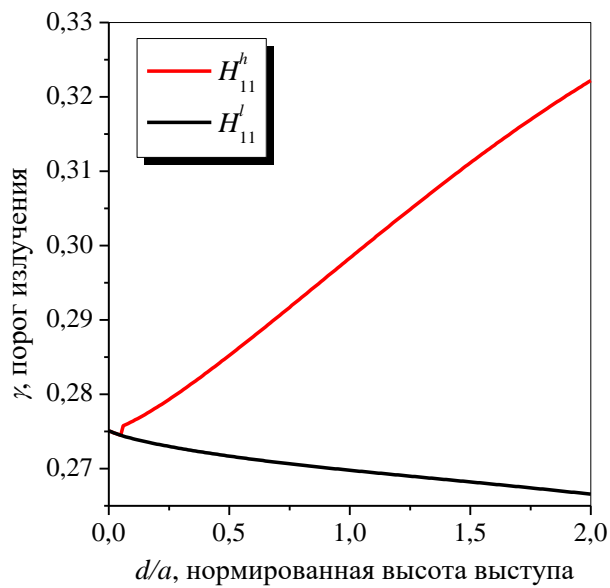


Рис. 5.6 Зависимость порогов излучения от нормированной высоты выступа спирального резонатора дублета  $H_{1,1}^{h,l}$ ,  $\beta = \pi/100$ ,  $N = 200$ ,  $\alpha_i = 2.63$ ,  $\alpha_e = 1$

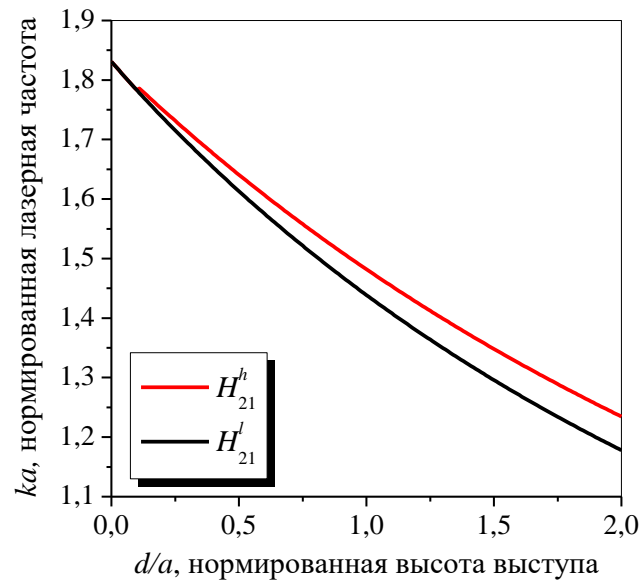


Рис. 5.7 То же, что на рис. 5.5, для дублета  $H_{2,1}^{h,l}$

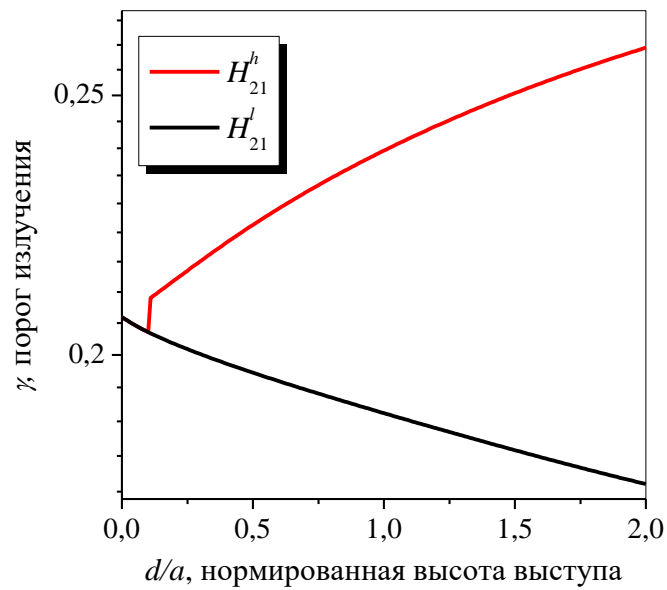
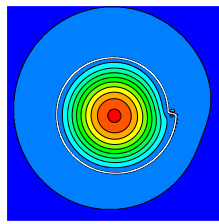
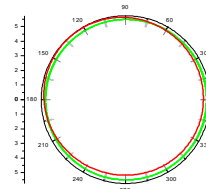


Рис. 5.8 То же, что на рис. 5.6, для дублета  $H_{2,1}^{h,l}$

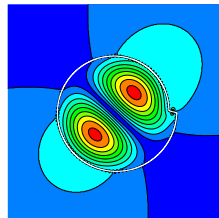
На рис. 5.9 представлены амплитудные распределения полей моды  $H_{0,1}$  и дублетов  $H_{1,1}^{h,l}, H_{2,1}^{h,l}$  для спирального резонатора в ближней и дальней зоне (высота выступа  $d = 0.3a$ , наклон выступа  $\beta = \pi/100$ ).



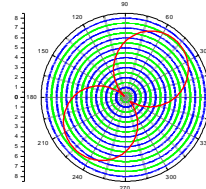
(a)



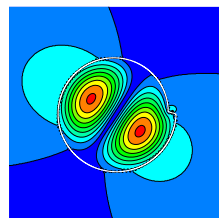
(б)



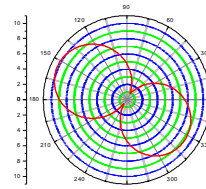
(в)



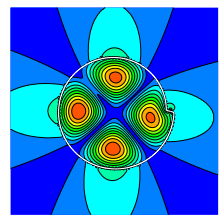
(г)



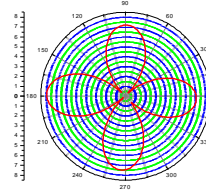
(д)



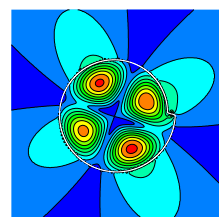
(е)



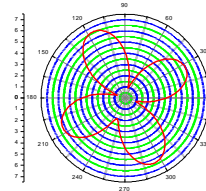
(ж)



(з)



(и)



(к)

Рис. 5.9 Ближние и дальние поля  $|H_z|$  мод спирального резонатора:  $H_{0,1}$  (а), (б)  $ka = 0.82$ ,  $\gamma = 0.35$ ;  $H_{1,1}^h$  (в), (г)  $ka = 1.32$ ,  $\gamma = 0.28$ ;  $H_{1,1}^l$  (д), (е)  $ka = 1.29$ ,  $\gamma = 0.26$ ;  $H_{2,1}^l$ , (ж), (з)  $ka = 1.69$ ,  $\gamma = 0.18$ ;  $H_{2,1}^h$  (и), (к)  $ka = 1.7$ ,  $\gamma = 0.21$ . Параметры контура  $d = 0.3a$ ,  $\beta = \pi/100$ ,  $\alpha_i = 2.63$ ,  $\alpha_e = 1$ ,  $N = 100$

Выражение для поля в дальней зоне было получено с помощью асимптотики функции Ханкеля при большом значении аргумента (см. [156]) из представления (5.6):

$$U_e(r, \theta) \underset{r \rightarrow \infty}{=} -\frac{i+1}{4\sqrt{\pi k_e r}} e^{ik_e r} \int_{\Gamma} \left[ i\varphi k_e (\vec{n}' \cdot (\cos \theta, \sin \theta)) + \frac{\eta_i}{\eta_e} \psi \right] e^{-ik_e (\vec{r}' \cdot (\cos \theta, \sin \theta))} dl', \quad (5.41)$$

где  $\theta$  - угол наблюдения.

Проведенный нами анализ показывает, что для низших мод появление выступа на контуре практически не улучшает направленности излучения по сравнению с круговым резонатором, то есть она остается близкой к 2.

На рис. 5.10 и 5.11 представлены зависимости частот и порогов излучения мод дублета  $H_{7,1}^{h,l}$ . Здесь  $\beta = \pi/100$  и число узлов квадратурной формулы  $2N = 800$ .

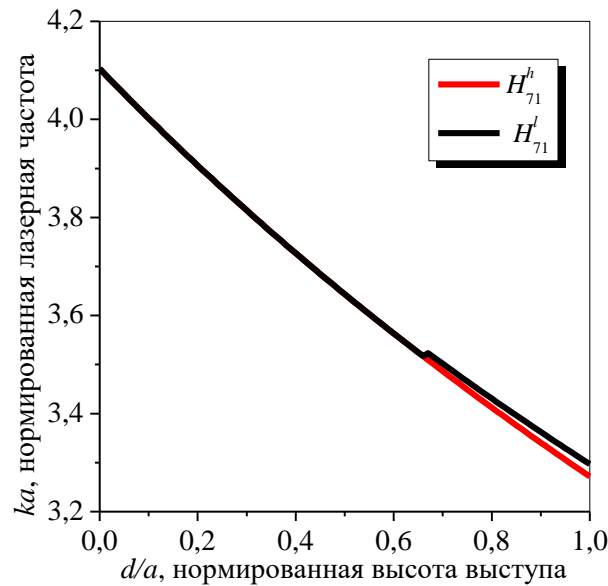


Рис. 5.10 Зависимость нормированной частоты излучения от нормированной высоты выступа спирального резонатора для дублета  $H_{7,1}^{h,l}$ ,  $\beta = \pi/100$ ,  $N = 400$ ,  $\alpha_i = 2.63$ ,  $\alpha_e = 1$

Для мод более высокого порядка нахождение зависимостей частот и порогов излучения от высоты ступени резонатора требует большего времени, поскольку требуется более высокая точность квадратурных формул, что обеспечивается увеличением числа узлов квадратурных формул.

Как и для дипольной моды, для моды  $H_{7,1}$  наблюдается расщепление на дублет из-за снятия вырождения в связи с наличием выступа на контуре и нарушением круговой симметрии. При этом заметное расщепление имеет место только при  $d > 0.6a$ .

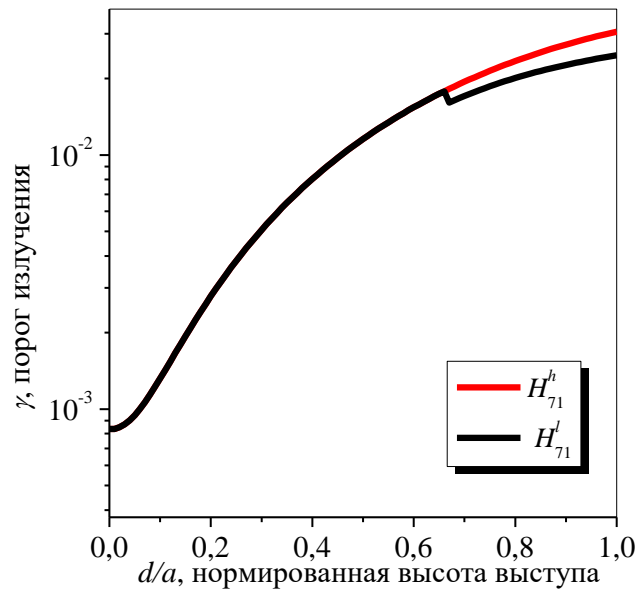
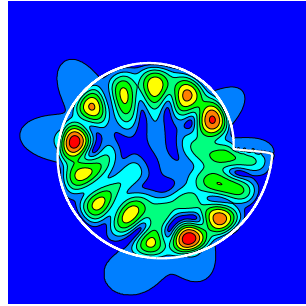


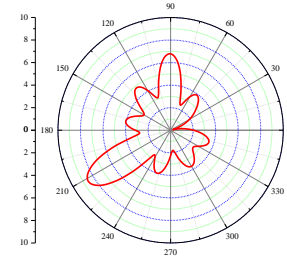
Рис. 5.11 Зависимость порогов излучения от нормированной высоты выступа спирального резонатора для дублета  $H_{7,1}^{h,l}$ ,  $\beta = \pi/100$ ,  $N = 400$ ,  $\alpha_i = 2.63$ ,  $\alpha_e = 1$

При уменьшении высоты выступа моды дублета сливаются, их порог уменьшается. И порог, и частота при уменьшении высоты выступа стремятся к значениям частоты и порога моды  $H_{7,1}$  в круговом резонаторе (рис. 5.10, 5.11). Высокий выступ ( $d = 1.0a$ ) в спиральном резонаторе приводит к повышению порога на порядок у обеих мод дублета по сравнению с круговым резонатором.

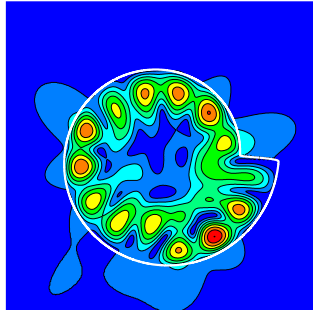
На рис. 5.12 представлены распределения поля  $|H_z|$  в ближней и дальней зоне спирального резонатора с высотой выступа  $d = 1.0a$  для мод  $H_{7,1}^{h,l}$ .



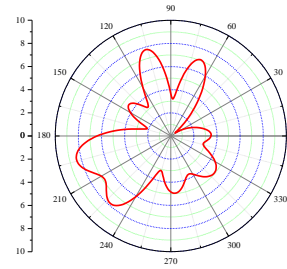
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 5.12 Ближние и дальние поля  $|H_z|$  мод дублета спирального резонатора  $H_{7,1}^l$  (а), (б):  $ka = 3.2962$ ,  $\gamma = 2.52 \cdot 10^{-2}$ ;  $N=400$ ;  $H_{7,1}^h$  (в), (г):  $ka = 3.2714$ ,  $\gamma = 3.048 \cdot 10^{-2}$ ,  $N=400$ . Остальные параметры  $d = 1.0a$ ,  $\beta = \pi/100$ ,  $\alpha_i = 2.63$ ,  $\alpha_e = 1$

Видно, что наличие выступа нарушает структуру поля моды шепчущей галереи (см. раздел 2). В дальней зоне поля обеих мод  $H_{7,1}^{h,l}$  имеют несколько выраженных лепестков (рис. 5.12 (б), (г)), в отличие от  $2m$  одинаковых лепестков в круговом резонаторе (рис. 2.10, п. 2.3).

## ВЫВОДЫ К РАЗДЕЛУ 5

В данном разделе были рассмотрена двумерная модель активного диэлектрического резонатора с гладким контуром и интерполяционный метод сведения ее к детерминантному уравнению. Далее были проведены систематические расчеты частот и порогов излучения, а также полей мод в активном резонаторе спиральной формы. По результатам исследований, опубликованных в статье [7] и трудах конференций [42 – 43, 46], можно сделать следующие выводы:

1. Метод Найстрема с выделением логарифмических особенностей в ядрах уравнений Мюллера позволяет построить экспоненциально сходящийся алгоритм вычисления собственных значений (частот и порогов излучения) для резонатора с аналитическим (бесконечно гладким) контуром.

2. В случаях, когда контур задан кусочно-аналитическим образом, этот метод позволяет достичь алгебраической сходимости, скорость которой зависит от количества непрерывных производных функции, параметризующей контур.

3. При вычислении собственных значений удобные начальные приближения можно отыскивать в минимумах рельефа абсолютного значения детерминанта дискретизированных интегральных уравнений как функции двух параметров - частоты и порога.

4. Гладкая параметризация спирального контура функцией (5.40) позволяет рассчитать собственные значения для мод с азимутальным номером  $m < 10$  с точностью в 3-4 значащих цифры в течение времени, измеряемого минутами или часами, на компьютере средней конфигурации.

3. В спиральном резонаторе наличие выступа на контуре приводит к снятию вырождения между модами (за исключением монополярной моды) и появлению дублетов.

4. Низшие Н-моды в спиральном резонаторе (монополярная, дипольный дублет и квадрупольный дублет) слабо возмущены выступом на контуре даже

при большой высоте ступеньки, сравнимой или превышающей радиус невозмущенного резонатора. Это объясняется тем, что поля таких мод не сосредоточены вблизи кромки, а распределены во всем объеме резонатора. Если ступенька мала, то порог одной из мод дублета становится меньше, чем в круговом резонаторе, а другой – больше. Однако направленность излучения низших мод в дальней зоне всегда остается близкой к 2.

5. Более высокие моды спирального резонатора являются возмущениями мод шепчущей галереи, поля которых сосредоточены вблизи кромки. Поэтому присутствие ступеньки на контуре оказывает на них более сильное влияние. При этом пороги обеих мод дублета быстро растут с увеличением высоты ступеньки, возрастая на порядок и более для мод  $H_{7,1}^{h,l}$ , если ступенька составляет половину радиуса. Направленность излучения этих мод повышается до 5-10 за счет появления одного или двух ярко выраженных лепестков в дальней зоне.