Taller Ecuaciones en diferencia

Sergio Ivan Motta Doncel

May 2023

1. Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?

Para resolver el problema se define una encuacion en diferencia, donde U_n es el valor del aire restante en el cilindro en el instante n, entonces como con cada accion la bomba de vacio elimina 1/3 del aire, quedan 2/3 restantes del aire en el cilindro, por lo que para calcular el aire restante se multiplica 2/3 por por el volumen del aire que habia anteriormente expresado como u_{n-1}, entonces la expresion queda

$$U_n = 2/3 * (U_{n-1})$$

Ahora, queremos encontrar el valor de n cuando solo queda 1/1,000,000 del aire inicial.

$$U_n = 1/1,000,000 * (U_0)$$

Sustituyendo la ecuación en diferencia se obtiene:

$$(2/3) * U_{n-1} = (1/1,000,000) * U_0$$

Como es una ecuacion en diferencia de primer orden se encuentra una expresion

$$U_n = K^n U_0$$

Con la expresion aplicada se encuentra una ecuacion

$$(2/3)^n U_0 = (1/1,000,000)U_0$$

Se divide a ambos lados de la expresion por U_0

$$(2/3)^n = (1/1,000,000)$$

Para encontrar el valor de n, se toma logaritmo en base 2/3 en ambos lados:

$$log_{2/3}(2/3)^n = log_{2/3}(1/1,000,000)$$

$$n = log_{2/3}(1/1,000,000)$$

Al calcular n se encuentra que el valor aproximado es 34.0

2. Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?

Para resolver el problema se define una encuacion en diferencia, donde U_n es el valor de la pobacion despues de n años, se incrementa cada 25 por cada mil,esto se puede expresar como 0.025, para hallar la poblacon del año siguiente se multiplica la tasa en la que crece por la poblacion anterior, esto dara la nueva poblacion generada, a la cual se le suma la poblacion que ya existia; entonces se genera una expresion

$$U_n = U_{n-1} + 0,025 * U_{n-1}$$

Ahora para calcular la poblacion despues de 15 años, se asume el valor inicial de 200 millones,la poblacion se puede calcular iniciando desde el momento 0 y calculando la sucesion hasta U_15, pero tambien se puede utilizando una formula general

$$U_15 = 200,000,000 + (1 + 0{,}025)^15$$

Entonces el valor de la poblacion al año 15, con un valor inicial de 200 millones es de 289,659,633

Para determinar cuánto tiempo tomará que la población alcance los 750 millones, se puede utilizar la misma fórmula general y resolver para n:

$$750,000,000 = 200,000,000 + (1 + 0{,}025)^n$$

Se despeja con logaritmos y se llega a la expresion:

$$n = \frac{ln(\frac{15}{4})}{ln(1{,}025)}$$

3. Resuelva:

- $U_n = 4U_{n-1} - 1, para\ n \geq 2$
  Se utiliza la formula general $U_n = K^{n-1}U_1 + C\frac{K^{n-1}-1}{K-1}$ para resolver la expresion, y al no haber un U_1 se deja como incognita por lo que sera solucion general

  $$U_n = 4^{n-1}U_1 - 1\frac{4^{n-1}-1}{4-1}$$

  $$U_n = 4^{n-1}U_1 - \frac{4^{n-1}-1}{3}$$

- $U_n = 3U_{n-1} + 2, para\ n \geq 2$
  Se utiliza la formula general $U_n = K^{n-1}U_1 + C\frac{K^{n-1}-1}{K-1}$ para resolver la expresion, y al no haber un U_1 se deja como incognita por lo que sera solucion general

  $$U_n = 3^{n-1}U_1 + 2\frac{2^{n-1}-1}{3-1}$$

  $$U_n = 3^{n-1}U_1 + 2\frac{4^{n-1}-1}{2}$$

  $$U_n = 3^{n-1}U_1 + 4^{n-1} - 1$$

4. Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:

- $U_n + 4U_{n-1} + 3 = 0, para\ n \geq 2$

  Se despeja en terminos de $U_n = -4U_{n-1} - 3$

  Se utiliza la formula general $U_n = K^{n-1}U_1 + C\frac{K^{n-1}-1}{K-1}$ para resolver la expresion general

  $$U_n = -4^{n-1}U_1 - 3\frac{(-4^{n-1}-1)}{-4-1}$$

  $$U_n = -4^{n-1}U_1 + \frac{12^{n-1}+12}{-5}$$

- $U_n + 2U_{n-1} - 13, para\ n \geq 2$

  Se despeja en terminos de $U_n = -2U_{n-1} + 13$

  Se utiliza la formula general $U_n = K^{n-1}U_1 + C\frac{K^{n-1}-1}{K-1}$ para resolver la expresion general

$$U_n = -2^{n-1}U_1 + 13\frac{-2^{n-1}-1}{13-1}$$

$$U_n = -2^{n-1}U_1 + \frac{-26^{n-1}-13}{12}$$

5. Encuentre las soluciones particulares para:

- $U_n = 3U_{n-1} + 5, para\ n \geq 2$, $U_0 = 1$
  Se utiliza la formula general $U_n = K^nU_0 + C\frac{K^n-1}{K-1}$ para resolver la expresion

$$U_n = 3^n1 + 5\frac{3^n-1}{3-1}$$

$$U_n = 3^n + \frac{15^n-5}{2}$$

$$U_n = \frac{21^n}{2} - \frac{5}{2}$$

- $U_n = -2U_{n-1} + 6, para\ n \geq 2, U_1 = 3$
  Se utiliza la formula general $U_n = K^{n-1}U_1 + C\frac{K^{n-1}-1}{K-1}$ para resolver la expresion

$$U_n = -2^{n-1}(3) + 6\frac{-2^{n-1}-1}{-2-1}$$

$$U_n = -6^{n-1} + \frac{-12^{n-1}-6}{-3}$$

$$U_n = -6^{n-1} + 4^{n-1} + 2$$

$$U_n = -2^{n-1} + 2$$

6. Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...

Al sacar la diferencia entre los numeros de la secuencias se puede ver un patron

17 - 7 = 10 37 - 17 = 20 77 - 37 = 40 157 - 77 = 80

Las diferencias se multiplican por dos en cada termino, por lo que se puede plantear la siguiente ecuacion

$$U_n - U_{n-1} = 2(U_{n-1} - U_{n-12})$$

$$U_n = 3U_{n-1} - 2U_{n-2}$$

Se puede comprobar reemplazando los primeros valores de la secuencia

$$U_n = 3(17) - 2(7) = 37$$

7. Encuentre el pago mensual por un prestamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interes del 21 porciento por año

Primero se calcula el monto final para tener una idea de cuanto se debe pagar en total

$$P = 400,000,000 * (1 + 0,0175)^{36} = 746,962,906$$

La ecuación en diferencia que describe el préstamo con cuotas fijas es la siguiente:

$$P_n = P_{n-1} + (r - P_{n-1})/t$$

Donde: P_n es el pago mensual en el período n, r es el saldo restante del préstamo en el período n-1, t es el número de períodos de pago.
Como las cuotas deben ser iguales en todo momento, solo es necesario calcular en el momento P_1

$$P_1 = 0 + (746,962,906 - 0)/36 = 20,748,969$$