Taller Ecuaciones en diferencia

Sergio Ivan Motta Doncel

May 2023

1. Una plantación de café incrementa su producción un 1 porciento por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes- ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?

Como la demanda de cafe se mantiene en 160 toneladas al mes, solo es necesario calcular cuanto puede subir la produccion de café, y calcular cuanto cafe se puede apilar en el mes 36 que es luego de un periodo de 12 meses y dos años

$$U_n = U_{n-1} + 0,01 * U_{n-1}$$

Se utiliza la formula general para no tener que calcular secuencialmente hasta el mes 36

$$U_{36} = 200 * (1 + 0{,}01)^{36}$$

$$U_{36} = 286$$

Se calcula cuanto va a ser la produccion en el mes 36 menos las ordenes de café las cuales son estables

$$286 - 160 = 126$$

2. La productividad en una plantación de 2000 arboles se incrementa 5 porciento cada año por la implementación de mejores tecnicas de agricultura. El granjero tambien planta ademas 100 arboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

De acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, $P_0 = 2000$ (productividad inicial), M = 5 (incremento porcentual anual) y N = 100 (cantidad de árboles plantados adicionalmente cada año).

La ecuación en diferencia que modela la productividad en cada año sería:

$$P_n = P_{n-1} + (P_{n-1} * M/100) + N$$

El momento P_n sera la suma del momento anterior P_{n-1} mas el porcentaje de aumento por el momento anterior P_{n-1} que sera lo que aumente, mas N que es la constante de cuantos arboles extra planta manualmente el granjero

$$P_1 = P_0 + (P_0 * M/100) + N = 2000 + (2000 * 5/100) + 100 = 2000 + 100 + 100 = 2200$$

$$P_2 = P_1 + (P_1 * M/100) + N = 2200 + (2200 * 5/100) + 100 = 2200 + 110 + 100 = 2410$$

$$P_3 = P_2 + (P_2 * M/100) + N = 2410 + (2410 * 5/100) + 100 = 2410 + 120{,}5 + 100 = 2630{,}5$$

$$P_4 = P_3 + (P_3 * M/100) + N = 2630{,}5 + (2630{,}5 * 5/100) + 100 = 2630{,}5 + 131{,}525 + 100 = 2862{,}025$$

$$P_5 = P_4 + (P_4 * M/100) + N = 2862{,}025 + (2862{,}025 * 5/100) + 100 = 2862{,}025 + 143{,}10125 + 100 = 3105{,}12625$$

P6 = 3360.38
P7 = 3638.40
P8 = 3939.32
P9 = 4263.28
P10 = 4610.47

$$\text{Porcentaje de mejora} = (P_{10} - P_0)/P_0 * 100 = (4610{,}47 - 2000)/2000 * 100 = 130{,}52$$

Por lo tanto, el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años es aproximadamente del 130.52

3. Encuentre la solución general para $U_n = U_{n1} + 2^n y U_n = 2U_{n1} + n$

La solución general de esta ecuación es $U_n = C$, donde C es una constante arbitraria.

Una solución particular de la ecuación completa: $U_n = An + B * 2^n$ Donde A y B son constantes a determinar.

Sustituyendo la solución particular en la ecuación original y resuelve para los valores de A y B.
$An + B * 2^n = A(n-1) + B * 2^{(n-1)} + 2^n$
Simplificando: $An + B * 2^n = An - A + B * 2^{n-1} + 2^n$
$A = -A + B * 2^{n-1}$
$2A = B * 2^{n-1}$
Dividiendo ambos lados por $2^(n-1)$:
$\frac{2A}{2^{n-1}} = B$
$B = \frac{2A}{2^{n-1}} = \frac{A}{2^(n-1)}$

Sustituyendo los valores de A y B en la solución particular: $U_n = An + \frac{A}{2^{(n-1)}} * 2^n$
$U_n = An + \frac{A}{2^(n-1)} * 2^n$
$U_n = An + \frac{A}{2}$

Combinando la solución general de la ecuación homogénea con la solución particular:
$U_n = C + An + \frac{A}{2}$
Entonces, la solución general de la ecuación en diferencia $U_n = U_{n-1} + 2^n$ es $U_n = C + An + \frac{A}{2}$, donde C es una constante arbitraria.

Para la ecuación en diferencia $U_n = 2U_{n-1} + n$:

La solución general de la ecuación homogénea asociada: $U_n = 2U_{n-1}$
La solución general de esta ecuación es $U_n = C * 2^n$, donde C es una constante arbitraria.

Buscando una solución particular de la ecuación completa: $U_n = An + B$
Donde A y B son constantes a determinar.

Sustituyendo la solución particular en la ecuación original y resuelve para los valores de A y B.
$An + B = 2(A_{n-1} + B) + n$
$An + B = 2An - 2A + 2B + n$
$(2A - 1)n + (B - 2A) = 0$
De esta igualdad, se obtiene las siguientes ecuaciones:
$2A - 1 = 0$
$B - 2A = 0$
Resolviendo estas ecuaciones, encontramos $A = \frac{1}{2}$ y $B = \frac{1}{4}$.

Sustituyendo los valores de A y B en la solución particular: $U_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$

Combinando la solución general de la ecuación homogénea con la solución particular:

$U = C * 2^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$

Entonces, la solución general es $U = C * 2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$.

4. Si $U_n = KU_{n-1} + 5$ y $U_1 = 4$ y $U_2 = 17$ encuentre los valores de k y U_6

Con la condición inicial $u_1 = 4$, se puede sustituir $n = 1$ en la ecuación:

$$u_1 = ku_0 + 5$$

Se utiliza la segunda condición inicial $u_2 = 17$ para encontrar el valor de k.
Sustituyendo $n = 2$ en la ecuación original:

$$u_2 = ku_1 + 5$$

Reemplazando los valores conocidos $u_1 = 4$ y $u_2 = 17$,

$$17 = k \cdot 4 + 5$$

Restando 5 de ambos lados de la ecuación:

$$12 = k \cdot 4$$

Dividiendo ambos lados por 4:

$$k = 3$$

Ahora que se conoce el valor de k, se usa para encontrar u_6.
Sustituyendo $n = 6$ en la ecuación original:

$$u_6 = ku_5 + 5$$

Para encontrar u_5, sustituyendo $n = 5$:

$$u_5 = ku_4 + 5$$

De manera similar $n = 4$, $n = 3$, $n = 2$, y finalmente $n = 1$ para encontrar los valores sucesivos de u_4, u_3, u_2 y u_1.

Calculando los valores de u_4, u_3, u_2 y u_1, se sustituyen en las ecuaciones anteriores para calcular el valor de u_6.

De esta manera, se obtiene los valores de $k = 3$ y $u_6 = 1577$.

5. Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $U_n = (U_{n-1}/U_{n-2})$, para $n >= 2$,sujeto a la condición inicial $U_1 = 16$

Dado que la relación de recurrencia es $U_n = (U_{n-1}/U_{n-2})$, podemos calcular U_2, U_3, U_4 y así sucesivamente.

Aplicando la relación de recurrencia:

$$U_2 = (U_1/U_0) = (16/U_0)$$

Para encontrar el valor de U_0, podemos usar la condición inicial

$$U_1 = 16:$$

$$16 = (U_0/U_0)$$

Esto nos dice que U_0 debe ser igual a 16.

Entonces, podemos calcular U_2:

$$U2 = (16/16) = 1$$

A continuación, podemos calcular U_3

$$U_3 = (U_2/U_1) = (1/16)$$

Continuando de esta manera, se puede calcular los términos sucesivos utilizando la relación de recurrencia.

6. Investigue el límite de U_n/U_{n+1} si $U_n = U_{n-1} + 2U_{n-2}$

Para encontrar el límite de la expresión $\dfrac{U_n}{U_{n+1}}$ bajo la relación de recurrencia $U_n = U_{n-1} + 2U_{n-2}$. Se supone que la secuencia converge a un límite finito.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_{n-1} + 2U_{n-1-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{3U_{n-1}} \end{aligned}$$

Suponiendo que el límite de la secuencia es L, se puede reescribir la ecuación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{L + 2U_{n-2}}{3L}$$

Dividiendo ambos lados por L:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2(U_{n-2}/L)}{3}$$

Dado que se asumio que la secuencia converge a un límite finito L, se puede suponer que U_{n-2}/L tiende a cero cuando n tiende a infinito. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{1 + 2 \cdot 0}{3} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el límite de $\dfrac{U_n}{U_{n+1}}$, bajo la relación de recurrencia $U_n = U_{n-1} + 2U_{n-2}$, cuando la secuencia converge a un límite finito, es $\dfrac{1}{3}$.

7. Resuelva $U_n - 6U_{n-1} + 8Un - 2 = 0$, para $n >= 3$ dado $U_1 = 10$ y $U_2 = 28$. Evalue U_6 .

En este caso, la ecuación característica es $m^2 - 6m + 8 = 0$. Resolviendo esta ecuación, se encuentran las raíces características $m_1 = 4$ y $m_2 = 2$.

Entonces, la solución general de la ecuación en diferencia es $U_n = A \cdot 4^n + B \cdot 2^n$.

Usando las condiciones iniciales $U_1 = 10$ y $U_2 = 28$, podemos resolver para las constantes A y B.

Sustituyendo $n = 1$ en la solución general, se obtiene $10 = A \cdot 4^1 + B \cdot 2^1$, lo cual nos da la ecuación $4A + 2B = 10$.

Sustituyendo $n = 2$ en la solución general, se obtiene $28 = A \cdot 4^2 + B \cdot 2^2$, lo cual nos da la ecuación $16A + 4B = 28$.

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se encuentra $A = \frac{3}{2}$ y $B = \frac{7}{2}$.

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación en diferencia es $U_n = \frac{3}{2} \cdot 4^n + \frac{7}{2} \cdot 2^n$.

Para encontrar U_6, simplemente se sustituye $n = 6$ en la solución particular:

$$U_6 = \frac{3}{2} \cdot 4^6 + \frac{7}{2} \cdot 2^6 = 576 + 112 = 688.$$

Por lo tanto, $U_6 = 688$.

8. Encuentre la solución particular para $U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = 0$, para $n >= 1$, cuando $U_1 = -1, U2 = -2$.

Dada la ecuación en diferencia:

$$u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0, \quad n \geq 1$$

Se usa la ecuación característica:

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

Esta ecuación cuadrática se puede factorizar como $(m + 1)^2 = 0$, lo cual implica que la raíz característica es $m = -1$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencia es de la forma $U_n = A(-1)^n + B(-1)^n$, donde A y B son constantes determinadas por las condiciones iniciales.
Utilizando las condiciones iniciales $U_1 = -1$ y $U_2 = -2$, podemos resolver para las constantes A y B.

Sustituyendo $n = 1$ en la solución general, se obtiene:

$$-1 = A(-1)^1 + B(1)(-1)^1$$

Lo cual da la ecuación:

$$-A - B = -1$$

Sustituyendo $n = 2$ en la solución general, se obtiene:

$$-2 = A(-1)^2 + B(2)(-1)^2$$

Lo cual da la ecuación:

$$A + 2B = -2$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se encuentra $A = -1$ y $B = 1$.

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación en diferencia es:

$$U_n = (-1)^n + n(-1)^n$$