Tarea 1

Sergio Ivan Motta Doncel

15 de febrero de 2023

1. Verificar si la operacion * sobre el conjunto a,b,c,d es un grupo

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

Una operacion binaria se dice que es asociativa si $\forall$ a,b,c,d $\in$ G se tiene que

$$a*(b*c) = (a*b)*c.$$

La operacion * sobre el conjunto a,b,c,d no es asociativa ya que existe un a,b,c,d tal que

$$c*(d*b) = (c*d)*b.$$

$$c*(a) = (c)*b.$$

$$a \neq b.$$

Al no ser asociativa la operacion * sobre el conjunto a,b,c,d no es un grupo

2. Verificar que la multiplicacion de matrices cuadradas es asociativa

Se tiene 3 matrices cuadradas 2x2 con entradas a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l que $\in$ R

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}) \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ec+dg & cd+dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ie+fk & ej+lf \\ ig+kh & gj+hl \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} iae+ibg+kaf+kbh & jae+jbg+laf+lbh \\ iec+idg+kfc+kdh & jec+jdg+lcf+ldh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aie+afk+big+bkh & aej+alf+bgj+bhl \\ cie+cfk+dig+dkh & cej+clf+dgj+dhl \end{pmatrix} \tag{4}$$

Como las entradas de las matrices son numeros reales, estos heredan la propiedad asociativa y conmutativa, y al reordenar las entradas queda:

$$\begin{pmatrix} iae+ibg+kaf+kbh & jae+jbg+laf+lbh \\ iec+idg+kfc+kdh & jec+jdg+lcf+ldh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iae+ibg+kaf+kbh & jae+jbg+laf+lbh \\ iec+idg+kfc+kdh & jec+jdg+lcf+ldh \end{pmatrix} \tag{5}$$

3. Verificar que la multiplicacion de complejos es asociativa

Se verifica que la operacion binaria * es cerrada bajo los complejos
Si se multiplican dos numeros x,y que pertenencen a los complejos

$$x + y = (a + ib)(c + id) = (a + c) + (b + d)i \tag{6}$$

Se obtiene un numero complejo
Se verifica que la operacion binaria * es asociativa bajo los complejos

$$x(yz) = (a + ib)((c + id)(g + ih)) \tag{7}$$

$$x(yz) = (a + ib) + (cg + ich + idg - dh) \tag{8}$$

$$x(yz) = acg + iach + iadg - adh + ibcg - bch - bdg - ibdh \tag{9}$$

$$x(yz) = (acg - adh - bch - bdg) + i(ach + adg + bcg - bdh) \tag{10}$$

Al aplicar la asociatividad a x,y,z se tiene

$$(xy)z = ((a + ib)(c + id))(g + ih) \tag{11}$$

$$(xy)z = (ac + iad + ibc - bd)(g + ih) \tag{12}$$

$$(xy)z = acg + iadg + ibcg - bcg - bdg + iach - adh - bch - ibdh \tag{13}$$

$$(xy)z = (acg - adh - bch - bdg) + i(ach + adg + bcg - bdh \tag{14}$$

Como x(yz) = (xy)z entonces se cumple la asociatividad

Se verifica ahora que la operacion * en los complejos tenga un elemento neutro

Sea $x = (a + ib)$ y $y = (c + id)$

Donde $a = 1$ y $b = 0$, luego $xy = (a + ib)(c + id) = (1)(c + id) = c + id = y$

El elemento neutro de la operacion * en los complejos es el 1

Se verifica ahora que la operacion * en los complejos tenga un inverso aditivo distinto a 0

Sea $x = (a + ib)$ y $y = \frac{a-ib}{(a+ib)(a+ib)} = \frac{a-ib}{(a^2iab-iab-i^2b^2)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

entonces

$$xy = (a + ib)(\tfrac{a-ib}{a^2+b^2} - i\tfrac{a-ib}{a^2+b^2}) = \tfrac{a^2}{a^2+b^2} - i\tfrac{ab}{a^2+b^2} + i\tfrac{ab}{a^2+b^2} - i^2\tfrac{b^2}{a^2+b^2} = \tfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Entonces cualquier complejo x tiene elemento inverso con respecto a la operacion *