Tarea 1

Sergio Ivan Motta Doncel

2 de mayo de 2023

1. Probar que Kernel(θ) y Img(θ) son subgrupos

Para demostrar que Kernel(θ) y Img(θ) son subgrupos, necesitamos mostrar que cumplen con las siguientes propiedades:

- Cerradura: Si a y b están en el subconjunto, entonces a * b también está en el subconjunto.
- Identidad: El elemento identidad e está en el subconjunto.
- Inversos: Para todo elemento a en el subconjunto, su inverso a^-1 también está en el subconjunto.

Demostración de que Kernel(θ) es un subgrupo:
Sea G un grupo y θ: G $\to$ G' un homomorfismo.

1. Cerradura: Si a, b $\in$ Kernel(θ), entonces θ(ab) = θ(a)θ(b) = e' * e' = e', donde e' es la identidad en G'. Por lo tanto, ab $\in$ Kernel(θ).
2. Identidad: Sabemos que θ(e) = e' para cualquier elemento e en G. Por lo tanto, e $\in$ Kernel(θ).
3. Inversos: Sea a $\in$ Kernel(θ), entonces θ(a) = e'. Como θ es un homomorfismo, $\theta(a^{-1}) = [\theta(a)]^{-1} = e'^{-1} = e'$. Por lo tanto, $a^{-1} \in$ Kernel(θ).

Por lo tanto, Kernel(θ) es un subgrupo de G.

Demostración de que Img(θ) es un subgrupo:

1. Cerradura: Sea a, b $\in$ Img(θ), entonces existen elementos x, y $\in$ G tales que θ(x) = a y θ(y) = b. Por lo tanto, θ(xy) = θ(x)θ(y) = ab, que pertenece a Img(θ).
2. Identidad: Sabemos que θ(e) = e' para cualquier elemento e en G. Por lo tanto, e' $\in$ Img(θ).
3. Inversos: Sea a $\in$ Img(θ), entonces existe un elemento x $\in$ G tal que θ(x) = a. Como θ es un homomorfismo, tenemos que $\theta(x^{-1}) = [\theta(x)]^{-1} = a^{-1}$. Por lo tanto, $a^{-1} \in$ Img(θ).

Por lo tanto, Img(θ) es un subgrupo de G.

En conclusión, Kernel(θ) y Img(θ) son subgrupos de G.