ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL IPCA

Cap. 4 – Números Complexos

Fundamentos de Matemática

Curso Técnico Superior Profissional

Ana Isabel Araújo

aiaraujo@ipca.pt

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Conjunto dos Números Complexos

Conjunto dos Números Complexos

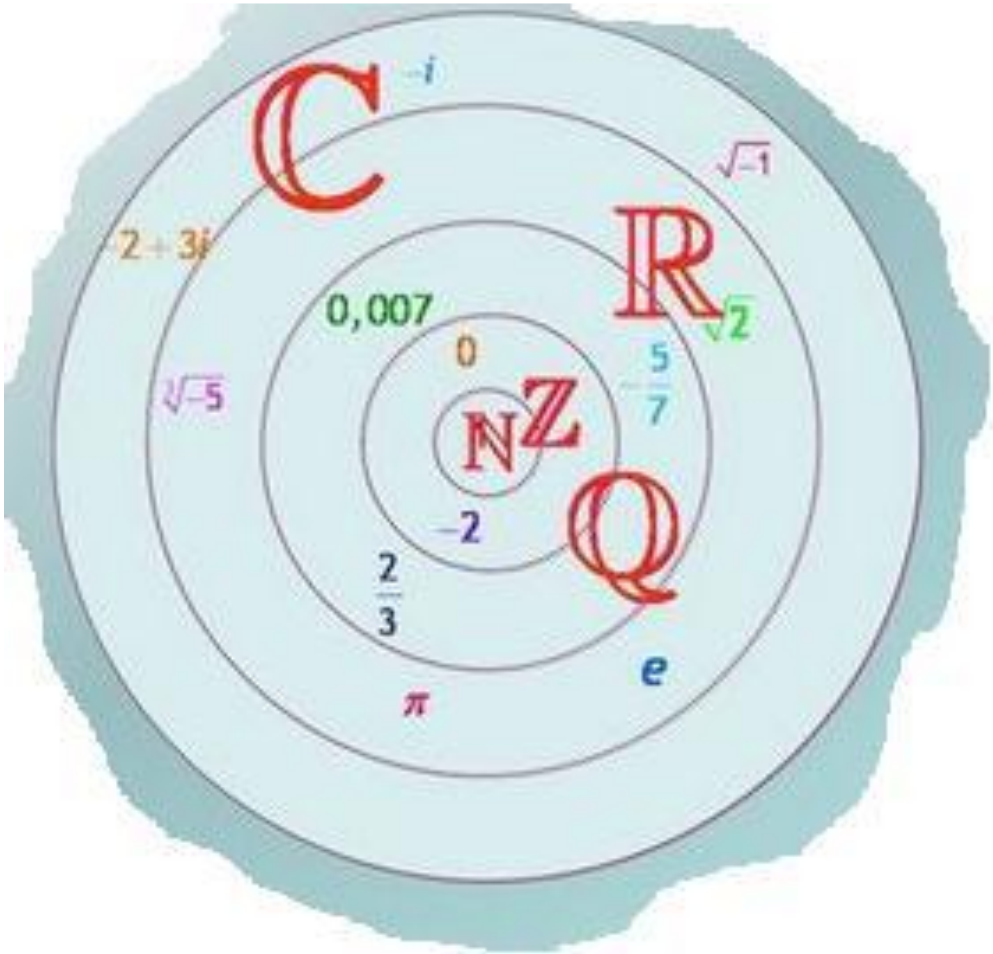
Evolução da História

Conceito de números:

- Naturais;
- Inteiros;
- Racionais;
- Reais;

⋮

- Complexos.



Conjunto dos Números Complexos

Os números complexos surgiram para sanar uma das maiores dúvidas que atormentavam os matemáticos:

Qual o resultado da operação $X^2 + 1 = 0$?

$$x^2 = -1 \therefore x = \pm\sqrt{-1}$$

Por isso, foi criado um número especial, que denominamos algebricamente como i, que elevado ao quadrado resulte em -1, matematicamente:

$$i^2 = -1 \therefore i = \sqrt{-1}$$

Começa-se por admitir que existe um número que elevado ao quadrado é igual a -1.

Conjunto dos Números Complexos

Assim, foi criado um novo conjunto numérico denominado **conjunto dos números complexos** ou **conjunto dos números imaginários**, que representamos pela letra $\mathbb{C}$.

Ao número que elevado ao quadrado é igual a -1, chama-se **unidade imaginária** é representado pela letra **i**, ou seja,

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Def. Um **número complexo** é todo o número que se pode escrever na forma, $\boldsymbol{a+bi}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, sendo $i^2=-1$.

Conjunto dos Números Complexos

O número complexo possui uma **parte real** e outra **imaginária**.

Como a parte imaginária conta com a presença do **i**, sua forma algébrica é:

$$z = a + bi$$

Parte real

Parte imaginária

a=Re(z)

b=Im(z)

Coeficiente da parte imaginária

Conjunto dos Números Complexos

Exercício:

Indique Re(z) e Im(z) em cada um dos casos seguintes:

a. $z = -5i + 2$

b. $z = 3i$

c. $z = -2$

d. $z = 12 - i^3$.

Conjunto dos Números Complexos

Casos especiais

- Se $a = 0 \wedge b \neq 0$, o número complexo $z=0+bi$ diz-se **imaginário puro** e identifica-se com **b*i***;
- Se $b = 0$, então $z=a+0i$ diz-se **real** e identifica-se com **a**.

Exemplos:

- $2 + 4i \rightarrow$ número complexo
- $8 - i\sqrt{2} \rightarrow$ número complexo
- $6i \rightarrow$ número complexo puro
- $4 \rightarrow$ número real
- $-i \rightarrow$ número complexo puro
- $i^2 \rightarrow$ número real

Conjunto dos Números Complexos

Exemplo:

$\sqrt{-2} = \sqrt{2(-1)} \rightarrow$ Aplicando a relação fundamental $\rightarrow \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} \rightarrow$ Aplicando a relação fundamental $\rightarrow \sqrt{-4} = 2i$

<u>**Exercício:**</u>

Resolva, em C, as equações seguintes:

a. $x^2 + 16 = 0$

b. $3x^2 = 12x - 15$

Operações com Complexos

Operações com Complexos

Propriedades:

Igualdade: Dois números complexos $a+bi$ e $c+di$ dizem-se iguais se têm as partes reais iguais e os coeficientes das partes imaginárias também iguais.

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \ \wedge \ b=d$$

Conjugados: Dois números complexos que têm as partes reais iguais e os coeficientes das partes imaginárias simétricos, dizem-se números complexos **conjugados**.

Os números complexos $a+bi$ e $a-bi$ são conjugados.

Simétricos: Dois números complexos que têm as partes reais e os coeficientes das partes imaginárias simétricos, dizem-se números complexos **simétricos**.

Os números complexos $a+bi$ e $-a-bi$ são simétricos.

Operações com Complexos

Conjugado

z = a + bi possui um conjugado que é representado por $\bar{z}$, onde $\bar{z}$ = a – bi.

Exemplos:

z = 2 – 4i → $\bar{z}$ = 2 + 4i

z = i → $\bar{z}$ = -i

z = 1 + 2i → $\bar{z}$ = 1 - 2i

z = 2 → $\bar{z}$ = 2

z = -3 – 8i → $\bar{z}$ = -3 + 8i

Operações com Complexos

Adição e subtração

Para somar e subtrair números complexos deve-se efetuar as operações na parte real e imaginária separadamente.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplos:

$$(2 + 4i) + (3 + i) = (2 + 3) + (4 + 1)i = 5 + 5i$$

$$(1 + 4i) - (2 - 7i) = (1 - 2) + (4 - 7)i = -2 -7i$$

$$(3 + i) - (4 + i) = (3 - 4) + (i - i) = -1$$

$$i + (2 + 4i) = 2 + (1 + 4)i = 2 + 5i$$

Operações com Complexos

Multiplicação

Para efetuar a multiplicação aplica-se simplesmente a distributiva.

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= a(c + di) + b(-d + ci)\end{aligned}$$

Exemplos:

$(2 + 3i)(1 + i) = 2 + 3i + 3i + 3i^2 = 2 + 6i - 3 = -1 + 6i$

$2\,(1 + i) = 2 + 2i$

$(2 - i)(-3 + 2i) = -6 + 4i + 3i - 2i^2 = -4 + 7i$

Operações com Complexos

Divisão

Para se dividir números complexos, deve-se multiplicar ambos os números pelo conjugado do complexo do denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}$$

Exemplos:

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{3-3i+2i-2i^2}{1-i^2}$$

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{5-i}{1+1} = \frac{5-i}{2}$$

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$

Operações com Complexos

Potências de i

Nas potências de i notam-se regularidades de quatro em quatro no expoente.

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1 & i^4 = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i \end{array}$$

Desse modo, para encontrar o resultado de qualquer potência, dividimos o expoente por 4 e resolvemos a potência utilizando como expoente o resto da divisão.

Operações com Complexos

<u>Exemplo</u>:

$$i^{1047} = i^3 = -i$$

$$\begin{array}{r|l} 1047 & 4 \\ \hline 3 & 261 \end{array}$$

Operações com Complexos

Exercícios:

1. Efetue e apresente o resultado na forma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi}$:

a. $(5-2i)+(7+3i)$

b. $(2-3i)-(4+5i)$

c. $(-1+4i)-(-6+i)$

2. Efetue:

a. $3i(2+4i)$

b. $(3+2i)(-5-i)$

c. $(2-3i)^2$.

Representação e interpretação geométrica

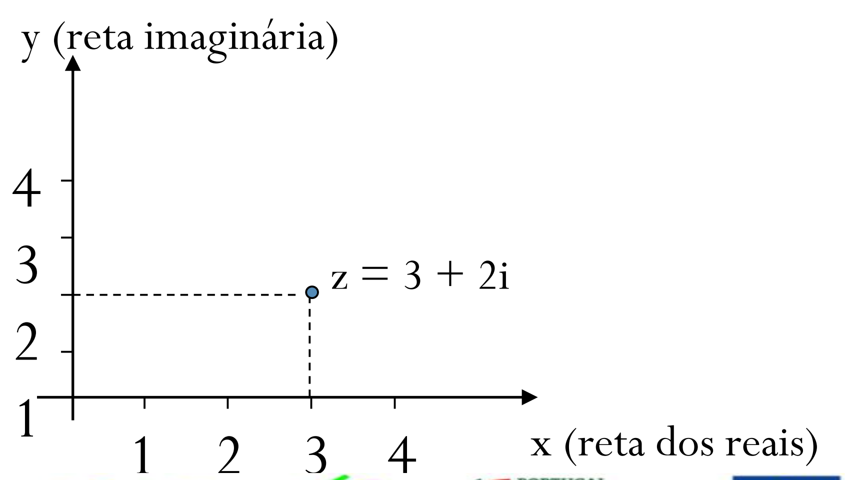
Representação e interpretação geométrica

Plano de Argand

Os números complexos podem ser representados num plano, onde a reta das abscissas é a reta dos números reais e a das ordenadas é a reta dos números complexos. Esse plano é denominado Plano de Argand.

Exemplo:

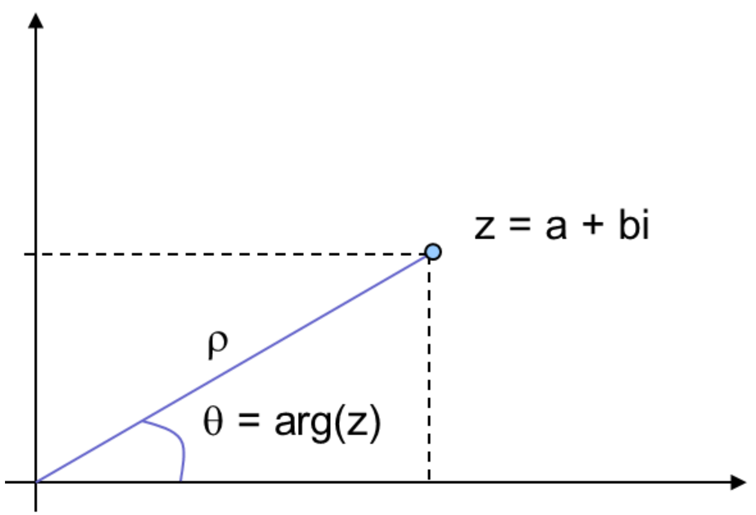
Representar no plano de Argand-Gauss o número complexo z = 3 + 2i



Representação e interpretação geométrica

No gráfico, o módulo de um número complexo z = a + bi é o segmento de reta que vai do ponto origem O(0,0) até o ponto do P(a, b) do número complexo z.

O argumento de z é o ângulo que esta forma com o eixo das abscissas em sentido anti-horário.



Operações com Complexos

Exercícios:

Represente, no plano complexo, as imagens dos complexos:

a. $1+3i$

b. $\frac{9}{2}+i$

c. $-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

d. $-3+\frac{7}{2}i$

e. $-1+2i$.

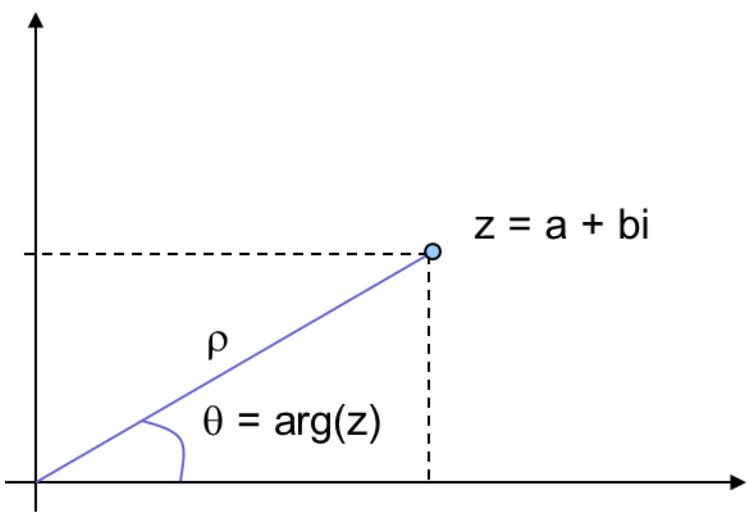
Complexos na forma trigonométrica

Complexos na forma trigonométrica

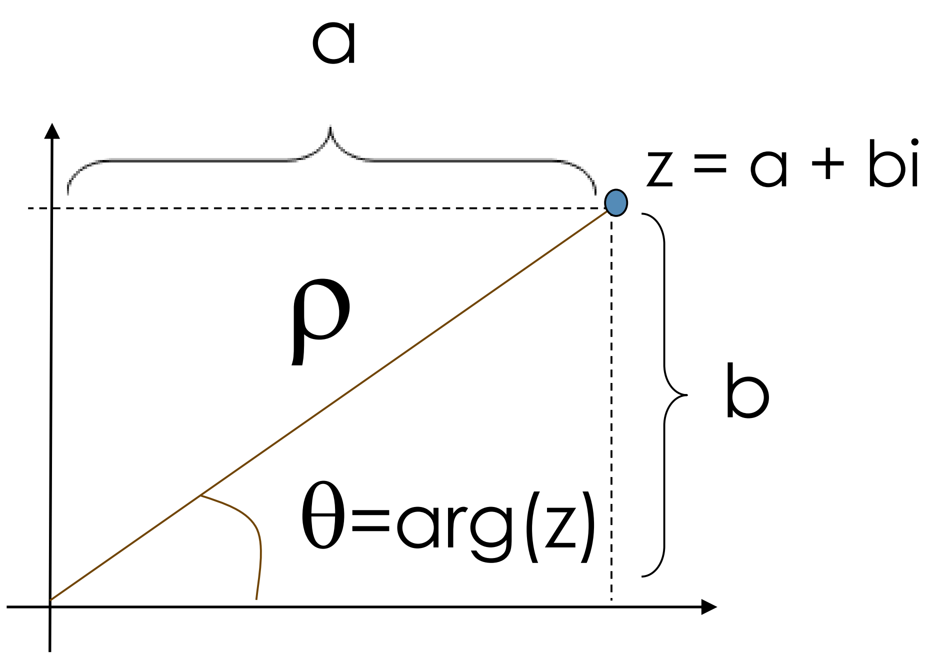
Módulo e argumento de um complexo

No gráfico, o módulo de um número complexo z = a + bi é o segmento de reta que vai do ponto origem O(0,0) até o ponto do P(a, b) do número complexo z.

O argumento de z é o ângulo que esta forma com o eixo das abscissas em sentido anti-horário.



Complexos na forma trigonométrica



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Complexos na forma trigonométrica

Utilizando as relações dadas slide anterior e aplicando-as à forma algébrica, obtemos a forma trigonométrica de um número complexo.

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\theta \in \text{quadrante}$$

$$\Rightarrow$$

$$z = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta\, i = \\ = \rho \operatorname{cis}\theta$$

Complexos na forma trigonométrica

Exemplo:

Passar para a forma trigonométrica o número complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$.

$$\rho = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \therefore z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Complexos na forma trigonométrica

Operações com Complexos na forma trigonométrica

Multiplicação

Para multiplicar números complexos na forma trigonométrica utilizamos a fórmula:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \, \mathbf{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

Complexos na forma trigonométrica

Divisão

Para dividir números complexos na forma trigonométrica utilizamos a fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

Complexos na forma trigonométrica

Potenciação

Para efetuar a potenciação entre números complexos na forma trigonométrica utilizamos esta fórmula

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] = |z|^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

Complexos na forma trigonométrica

Radiciação

Para efetuar a radiciação com números complexos na forma trigonométrica utilizamos a formula:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{|z|}cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \; e \; n \in IN)$$