

Cap.1 – Funções reais de variável real em IR

Apontamentos da Aula 3

1. Generalidades de funções

✓ Estudo gráfico: características de uma função (domínio, contradomínio, zeros, monotonia, extremos e extremantes, sinal e injetividade)

Estudo gráfico: características de uma função

Estudo gráfico: características de uma função

❖ Domínio, contradomínio e zeros

Como identificar, graficamente, o domínio, o contradomínio e os zeros de uma função?

❖ O domínio de uma função é o conjunto de todos os objetos para os quais a função tem uma imagem definida. Lê-se no eixo Ox e podemos usar a técnica de “correr” uma reta vertical sobre este eixo, da esquerda para a direita, os valores onde a reta toca no gráfico da função fazem parte do domínio.

Estudo gráfico: características de uma função

- ❖ O contradomínio de uma função é o conjunto de todas as imagens. Lê-se no eixo Oy e podemos usar a técnica de “correr” uma reta horizontal sobre este eixo, de baixo para cima, os valores onde a reta toca no gráfico da função fazem parte do contradomínio.
- ❖ Os zeros de uma função são todos os valores das abcissas (x) dos pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox.

Estudo gráfico: características de uma função

❖ Extremos e extremantes

❖ Extremos de uma função são as imagens (y) dos pontos onde a função atinge os seus valores máximos e mínimos.

Máximo relativo é um ponto que representa o valor mais alto numa determinada vizinhança de pontos. Tendo em conta que isso também acontece no máximo absoluto, chegamos à conclusão que qualquer máximo absoluto também é um máximo relativo. O inverso, como é óbvio, não se aplica.

Estudo gráfico: características de uma função

Mínimo relativo é um ponto que representa o valor mais baixo numa determinada vizinhança de pontos. Tendo em conta que isso também acontece no mínimo absoluto, chegamos à conclusão que qualquer mínimo absoluto também é um mínimo relativo. O inverso, como é óbvio, não se aplica.

❖ Extremantes de uma função são as abcissas (x) dos pontos onde o gráfico atinge os seus valores máximos (maximizantes) e mínimos (minimizantes).

Estudo gráfico: características de uma função

Simbolicamente:

Seja f uma função de domínio D .

- $f(a)$ é um **máximo relativo** de f se existir um intervalo aberto E contendo a tal que

$$f(a) \geq f(x), \text{ qualquer que seja } x \in E \cap D$$

- $f(b)$ é um **mínimo relativo** de f se existir um intervalo aberto F contendo b tal que

$$f(b) \leq f(x), \text{ qualquer que seja } x \in F \cap D$$

Seja f uma função de domínio D .

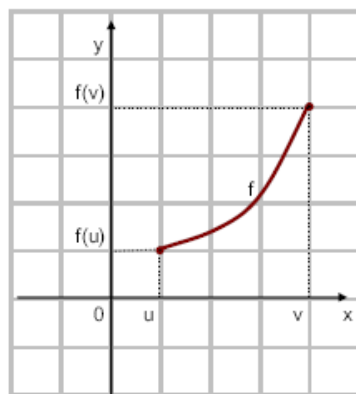
- $f(a)$ é o **máximo absoluto** de f se, para todo o x de D , $f(a) \geq f(x)$;
- $f(b)$ é o **mínimo absoluto** de f se, para todo o x de D , $f(b) \leq f(x)$.

Estudo gráfico: características de uma função

❖ Monotonia de uma função

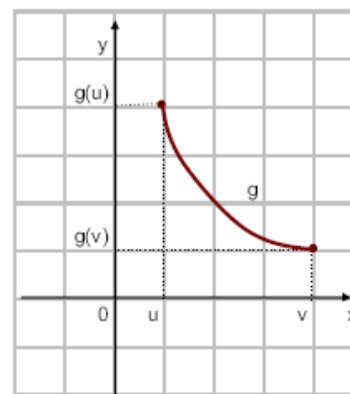
Estudar a monotonia / variação de uma função é identificar os intervalos de maior amplitude, lidos no eixo Ox , onde a função é crescente, decrescente ou constante. A monotonia pode ser apresentada numa tabela de variação ou por intervalos de monotonia.

Função crescente



A função f é crescente em $[u, v]$

Função decrescente

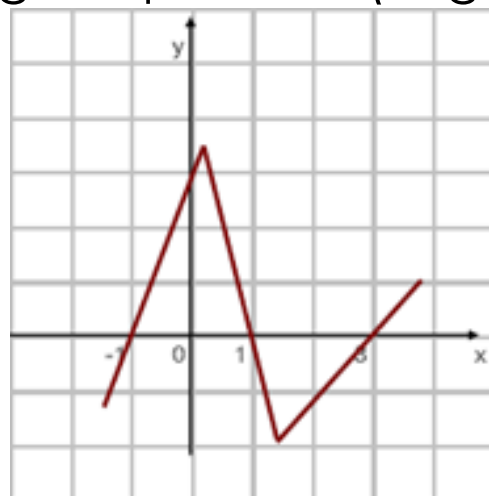


A função g é decrescente em $[u, v]$

Estudo gráfico: características de uma função

❖ Sinal de uma função

Estudar o sinal de uma função é identificar os intervalos de maior amplitude, lidos no eixo Ox , nos quais a função tem imagem negativa (o gráfico está abaixo do eixo Ox) e os intervalos onde a função tem imagem positiva (o gráfico está acima do eixo Ox).



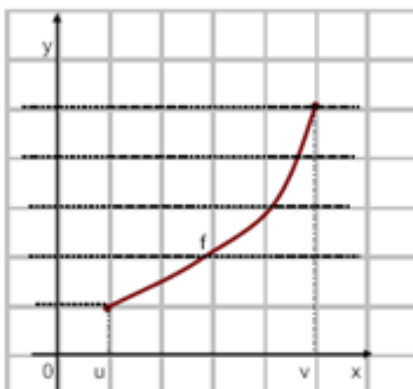
- zeros da função: $-1, 1, 3$;
- $f(x) > 0$ se $x \in]-1, 1[\cup]3, +\infty[$;
- $f(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -1[\cup]1, 3[$.

Estudo gráfico: características de uma função

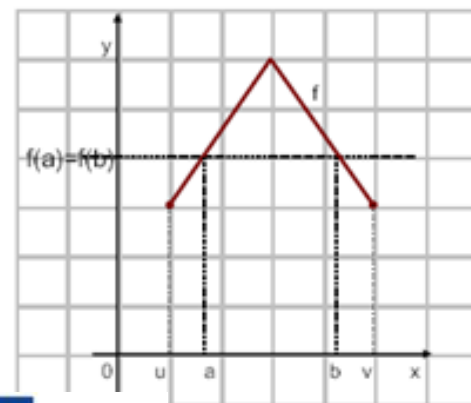
❖ Injetividade de uma função

Uma função é injetiva se e somente se a objetos diferentes correspondem imagens diferentes. Se existir uma reta horizontal que intersekte o gráfico da função em mais do que um ponto, então a função é não injetiva.

f é injectiva em $[u, v]$



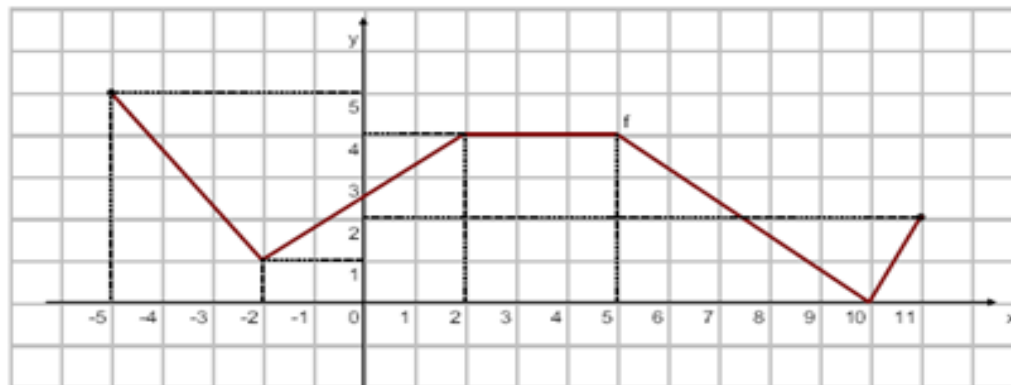
f não é injectiva em $[u, v]$



Estudo gráfico: características de uma função

Exemplo:

- ✓ Domínio: $D_f = [-5, 11]$
- ✓ Contradomínio: $D'_f = [0, 5]$
- ✓ Zeros: 10
- ✓ Monotonia:

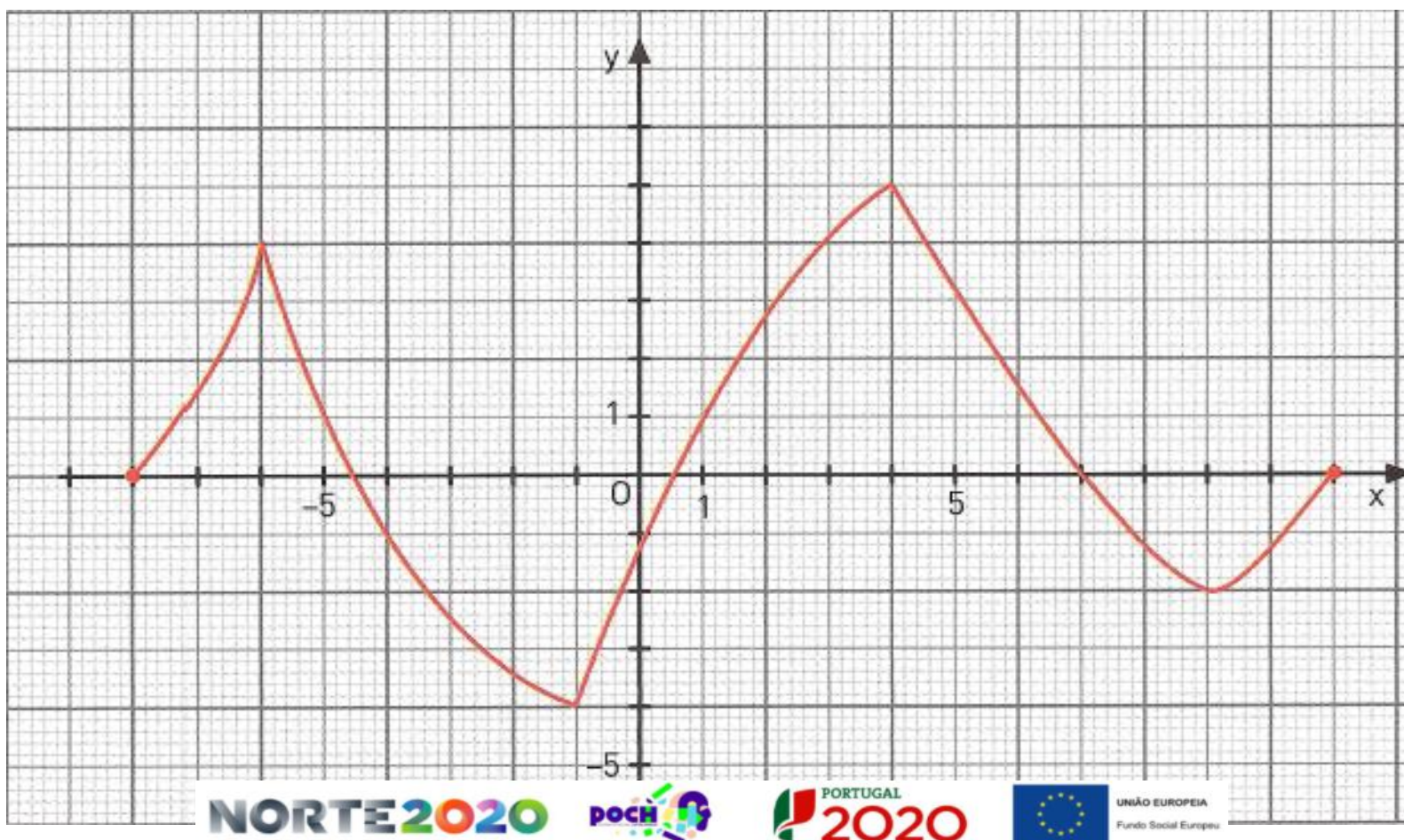


- a função é crescente nos intervalos $[-2, 2]$ e $[10, 11]$;
 - a função é decrescente nos intervalos $[-5, -2]$ e $[5, 10]$;
 - a função é constante no intervalo $[2, 5]$.
- ✓ Extremos: 0, 1 e 4 são mínimos relativos / 2, 4 e 5 são máximos relativos;
0 é mínimo absoluto e 5 é máximo absoluto.
- ✓ Extremantes: 10, -2 e $]2, 5[$ são minimizantes / 11; $[2, 5]$ e -5 são maximizantes.
- ✓ Sinal:
- a função é positiva em $[-5, 10[\cup]10, 11]$;
- ✓ Injetividade: a função não é injetiva no seu domínio. No entanto é injetiva, por exemplo, no intervalo $[5, 10]$.

Estudo gráfico: características de uma função

Exercício 2:

Observe o gráfico seguinte que representa uma função f real de variável real.



Estudo gráfico: características de uma função

Responda às seguintes questões:

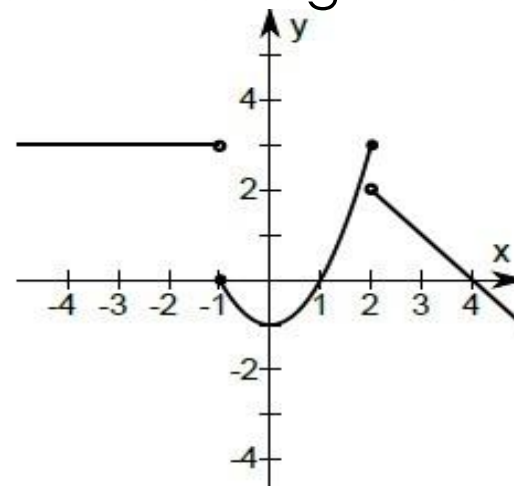
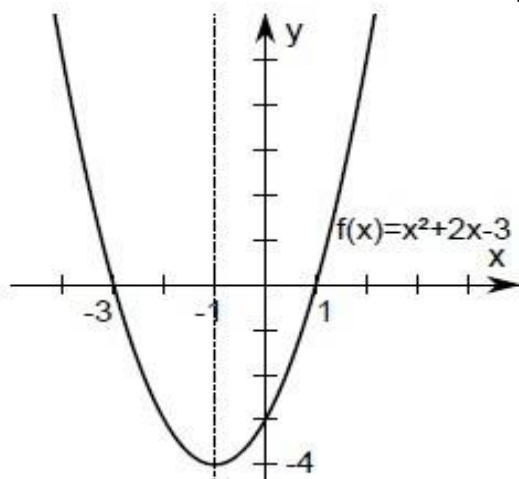
1. Indique o domínio, o contradomínio e os zeros.
2. Estude o sinal da função.
3. Indique, se existirem, os extremos relativos, os extremos absolutos, os maximizantes e os minimizantes.
4. Construa a tabela de variação da função e indique os intervalos de monotonia.
5. Indique um intervalo onde a função seja injetiva e crescente.
6. Indique os valores de x de modo que $f(x) = -4$.

Estudo gráfico: características de uma função

Exercício 3:

A partir dos gráficos das funções representadas indique:

- a) Domínio e contradomínio;
- b) Os intervalos de monotonia;
- c) Os zeros, o máximo e mínimo absolutos, nos casos em que se aplique;
- d) Os intervalos onde as funções são positivas e negativas.

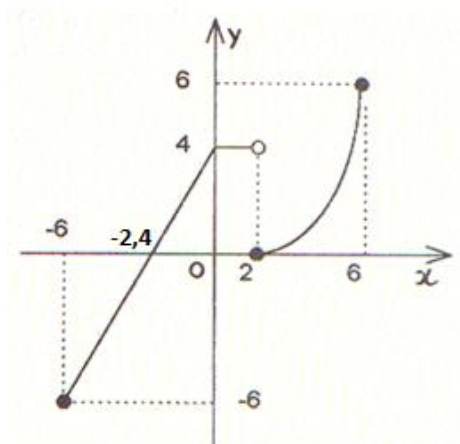


Estudo gráfico: características de uma função

Exercício 4:

A partir do gráfico da função representada indique:

- a)** Domínio e contradomínio;
- b)** Os intervalos de monotonia;
- c)** Os zeros, o máximo e mínimo absolutos, nos casos em que se aplique;
- d)** Os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.



Estudo gráfico: características de uma função

Exercícios Propostos:

❖ Ficha de Exercícios n.º1

Exercícios 1, 4, 5 e 6

❖ Ficha Extra n.º1

Exercício 2