

# Cap. 3 – Funções Trigonométricas

## Fundamentos de Matemática

Curso Técnico Superior Profissional

Ana Isabel Araújo

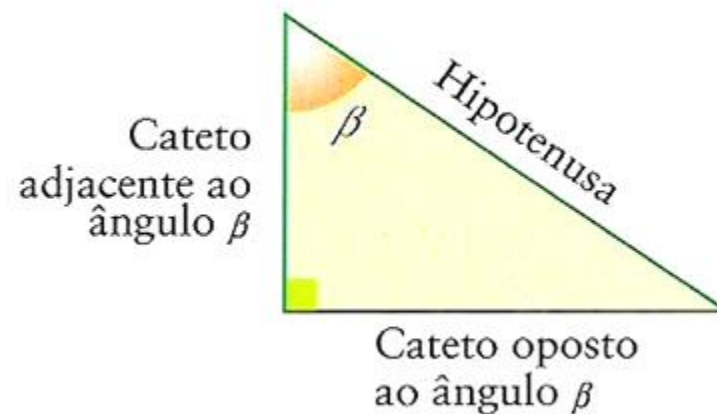
[aiaraujo@ipca.pt](mailto:aiaraujo@ipca.pt)

# Revisões

---

# Revisões

## Trigonometria do Triângulo Retângulo

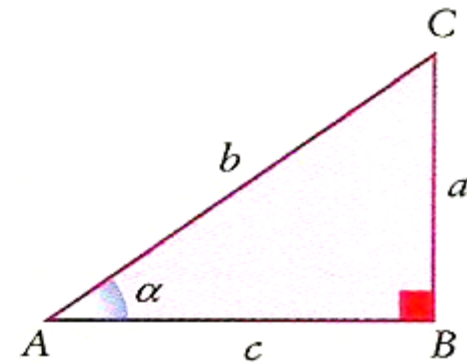


# Revisões

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{a}{c}$$



**Neste triângulo:**

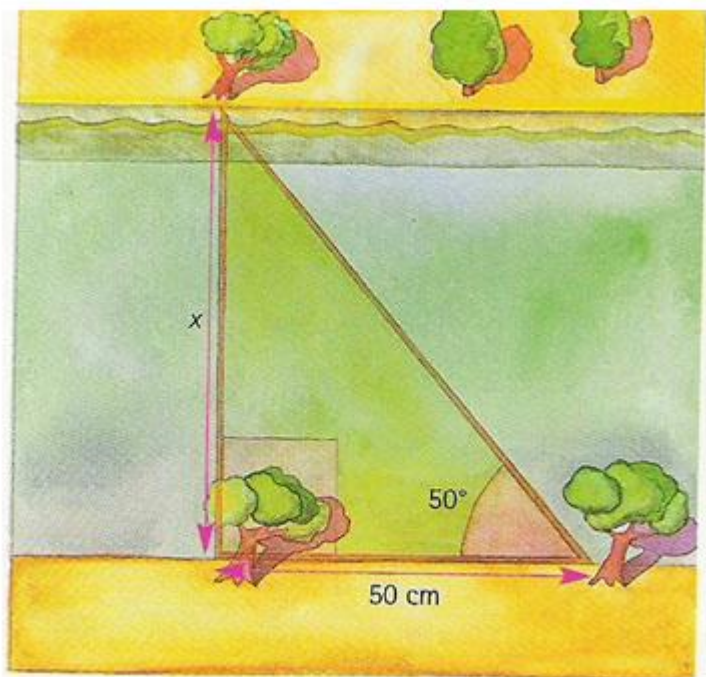
- $a$  é o cateto oposto a  $\alpha$ ;
- $c$  é o cateto adjacente a  $\alpha$ ;
- $b$  é a hipotenusa do triângulo.

# Revisões

## Exemplo:

Observe as figuras e de acordo com os dados, determine:

1. A largura do rio

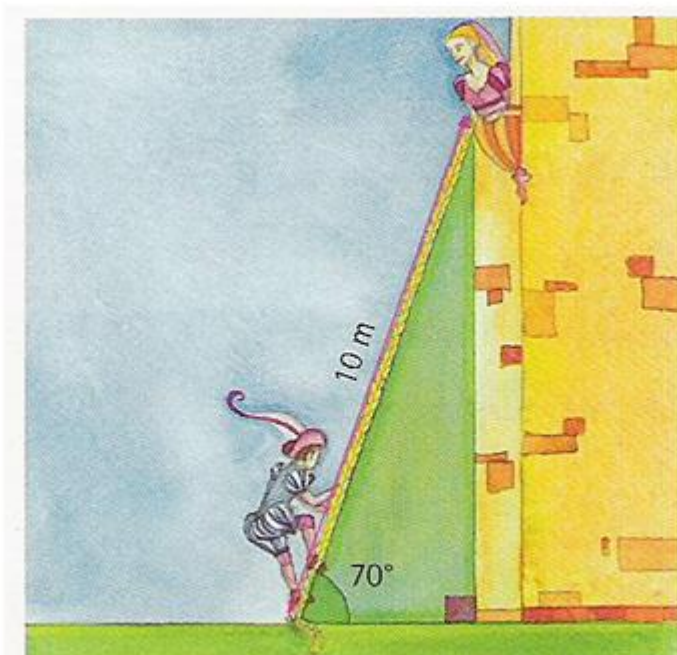


# Revisões

## Exemplo (cont.):

Observe as figuras e de acordo com os dados, determine:

2. A altura da janela



# Revisões

## Fórmulas Trigonométricas

*Relações entre o seno, o cosseno e a tangente do mesmo ângulo*

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \text{para } \cos \alpha \neq 0$$

# Revisões

## Exemplo:

1. Verifique se existe um ângulo agudo  $\alpha$  tal que  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  e  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .
2. Sabendo que  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , e  $\alpha$  é um ângulo agudo, determine, sem utilizar a calculadora, o valor de:
  - 2.1.  $\cos \alpha$
  - 2.2.  $|\tan \alpha|$



# Revisões

## Ângulos de referência

*Valores exatos das razões trigonométricas*

	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

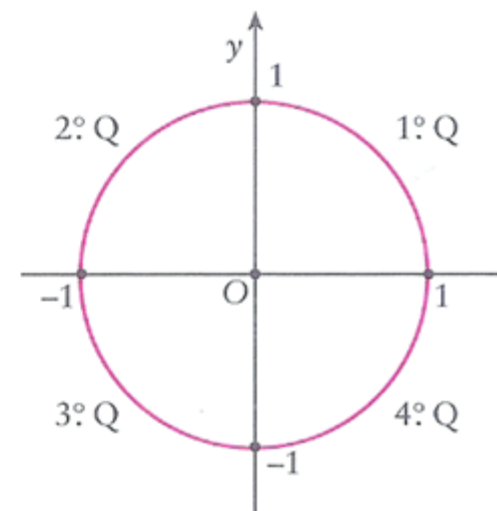
# Círculo Trigonométrico

---

# Círculo Trigonométrico

## Razões trigonométricas de $\theta$

A um círculo centrado na origem do referencial e de raio uma unidade chama-se **círculo trigonométrico**.

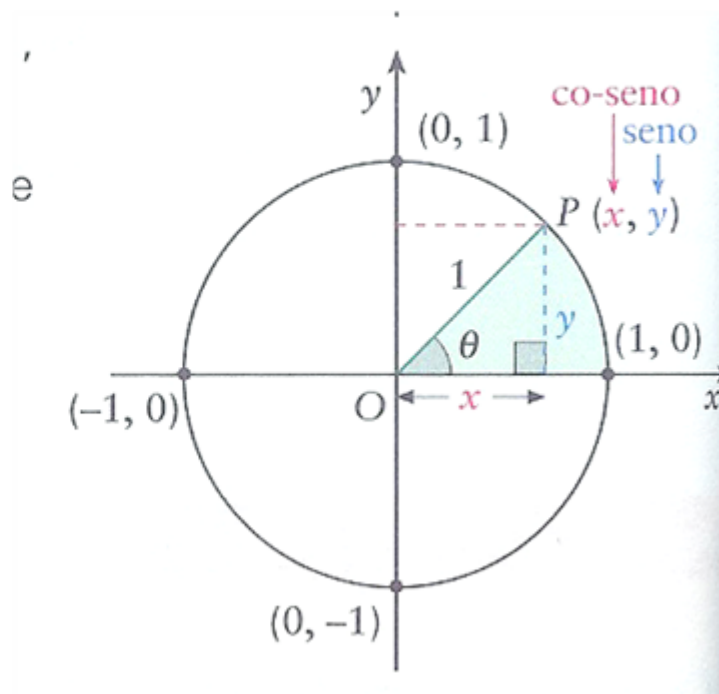


# Círculo Trigonométrico

$$\sin \theta = \frac{\text{ordenada do ponto } P}{1} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{abcissa do ponto } P}{1} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ordenada do ponto } P}{\text{abcissa do ponto } P} = \frac{y}{x}$$

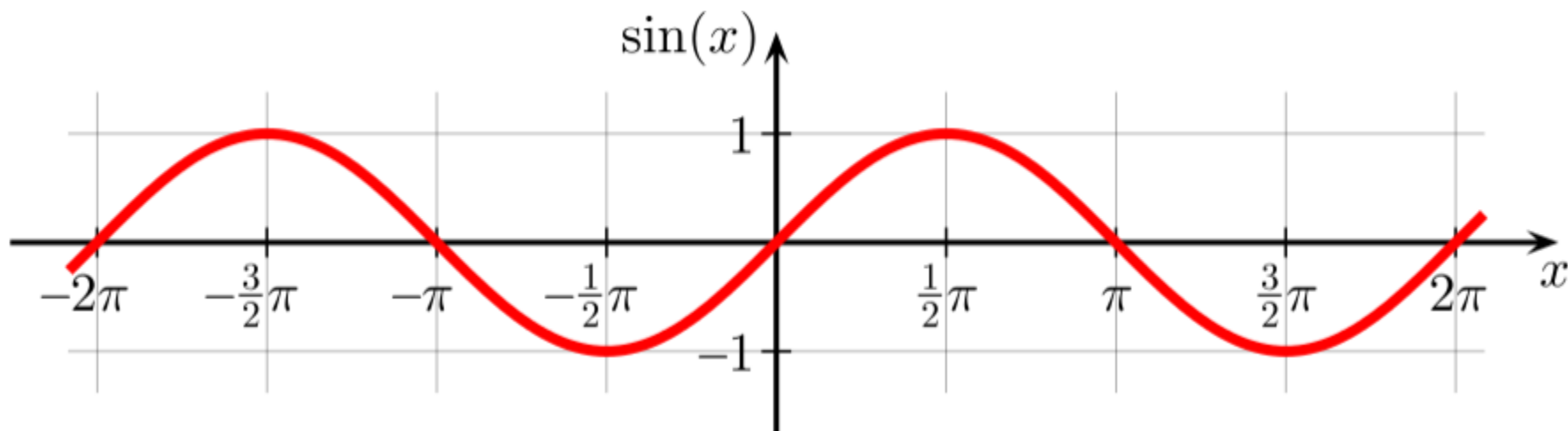


# Funções Trigonométricas

---

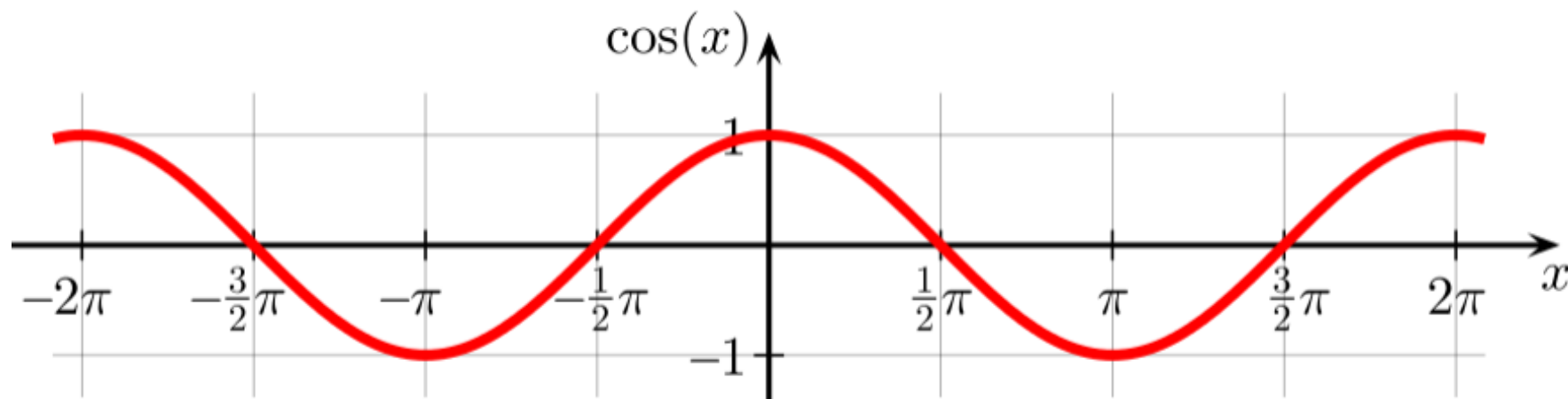
# Funções trigonométricas

## Função seno



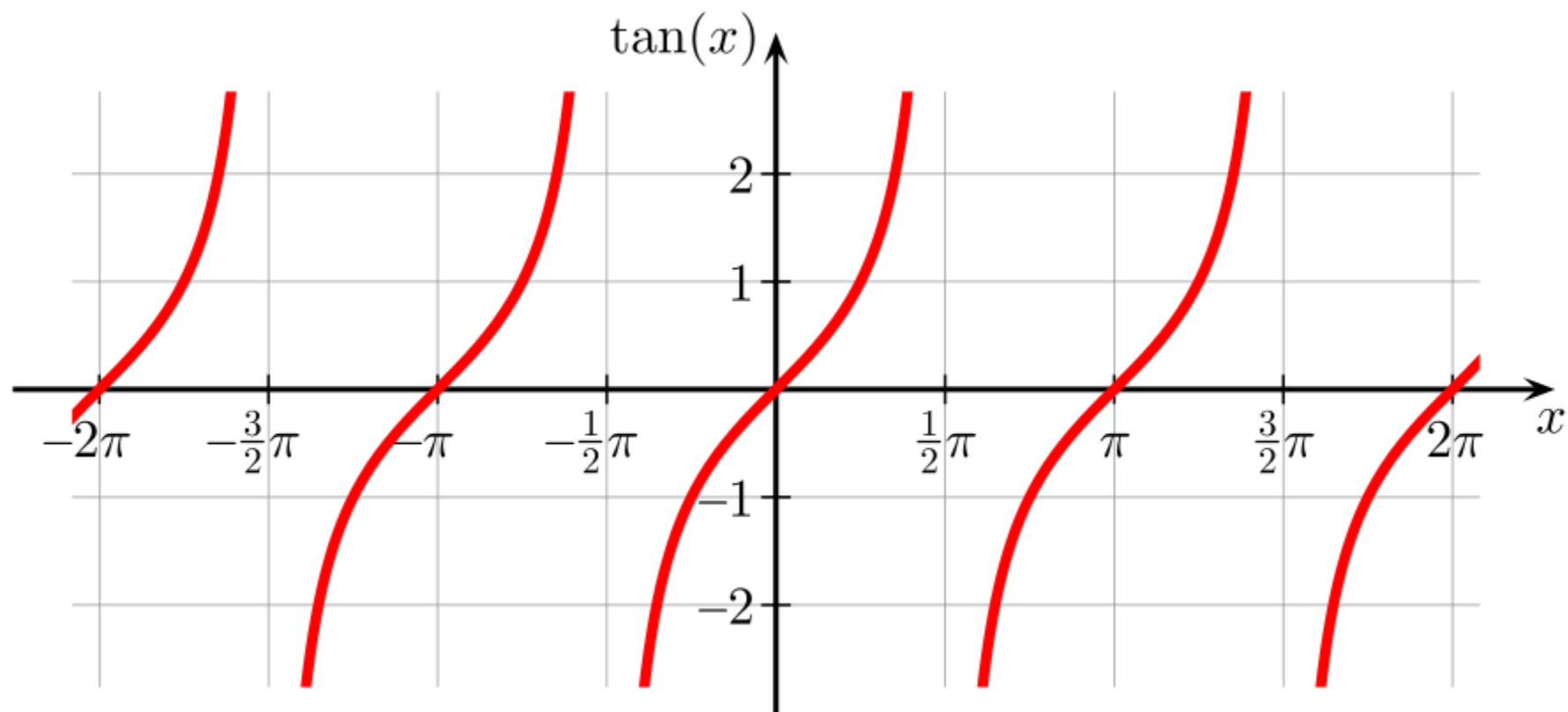
# Funções trigonométricas

## Função cosseno



# Funções trigonométricas

## Função tangente





# Funções trigonométricas

## Resumo

	SENO	CO-SENO	TANGENTE
<b>Funções</b>	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \operatorname{tg} x$
<b>Domínio</b>	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
<b>Contradomínio</b>	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
<b>Zeros</b>	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
<b>Sinal</b>	1.º Q e 2.º Q (+) 3.º Q e 4.º Q (-)	1.º Q e 4.º Q (+) 2.º Q e 3.º Q (-)	1.º Q e 3.º Q (+) 2.º Q e 4.º Q (-)
<b>Variação</b>	Crescente: 1.º Q e 4.º Q Decrescente: 2.º Q e 3.º Q	Crescente: 3.º Q e 4.º Q Decrescente: 1.º Q e 2.º Q	Crescente em todos os quadrantes
<b>Periodicidade</b>	Período: $2\pi$	Período: $2\pi$	Período: $\pi$
<b>Paridade</b>	Função ímpar	Função par	Função ímpar
<b>Extremos</b>	Máx. = $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = 1, k \in \mathbb{Z}$ Mín. = $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + k2\pi\right) = -1, k \in \mathbb{Z}$	Máx. = $\cos(k2\pi) = 1, k \in \mathbb{Z}$ Mín. = $\cos(\pi + k2\pi) = -1, k \in \mathbb{Z}$	Não tem máximo nem mínimo
<b>Continuidade</b>	Contínua em $\mathbb{R}$	Contínua em $\mathbb{R}$	Contínua no seu domínio

# Limite Notável

---

# Limite Notável

---

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

---

# Equações Trigonométricas

---

# Equações trigonométricas

## Função seno

Equações do tipo  $\sin x = \sin \alpha$

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Exercícios:**

1. Resolva cada uma das seguintes equações nos conjuntos indicados. (apresente as soluções em radianos)

1.1.  $\sin x = -1$ , em  $\mathbb{R}$

1.2.  $2 \sin x + 1 = 0$ , em  $\mathbb{R}$

1.3.  $\sin x = \frac{1}{4}$ , em  $[0, 2\pi]$  (apresente as soluções aproximadas às centésimas)

# Equações trigonométricas

## Função cosseno

Equações do tipo  $\cos x = \cos \alpha$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

### Exercícios:

2. Resolva cada uma das seguintes equações nos conjuntos indicados: (Apresente as soluções em radianos)

2.1.  $\cos x = -1, \text{ em } [0, 3\pi]$

2.2.  $2 \cos x + 1 = 0, \text{ em } \mathbb{R}$

2.3.  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ em } \mathbb{R}$

# Equações trigonométricas

## Função tangente

Equações do tipo  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercícios:

3. Determine o conjunto solução de cada uma das equações, no intervalo  $[0, 2\pi]$ :

3.1.  $\tan x = 1$

3.2.  $\tan x = -1$