ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL IPCA

Cap.1 – Funções reais de variável real em IR

Fundamentos de Matemática

Curso Técnico Superior Profissional

Ana Isabel Araújo

aiaraujo@ipca.pt

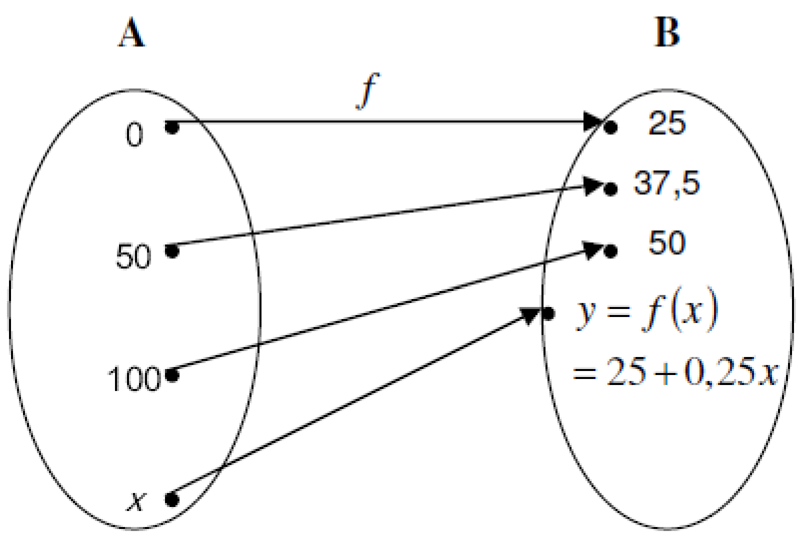
NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Conceitos gerais

Conceitos Gerais

Conceito de função

Considere que o custo de aluguer de um automóvel, num local de férias, é de 25 € de taxa fixa acrescido de 0,25 € por cada km percorrido.



Se a Ana alugou um automóvel e percorreu 80 km, ela pagou o aluguer em função do número de km que percorreu.

Conceitos Gerais

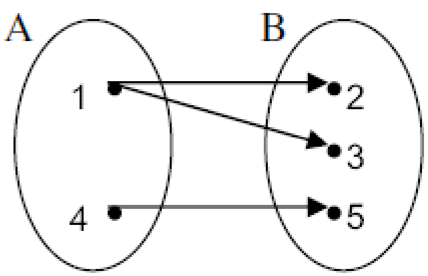
Definição: Função

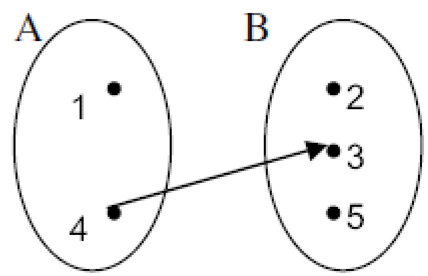
Dá-se o nome de função ou aplicação *f* a uma correspondência entre um conjunto A e um conjunto B que a cada elemento x do primeiro conjunto faz corresponder um e um só elemento $y = f(x)$ do segundo conjunto.

Conceitos Gerais

Exemplo:

Não são funções as seguintes correspondências entre A e B:

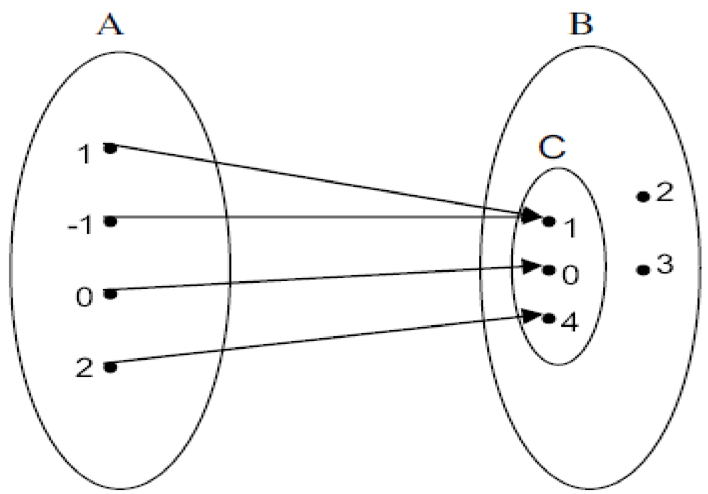




Conceitos Gerais

Exemplo:

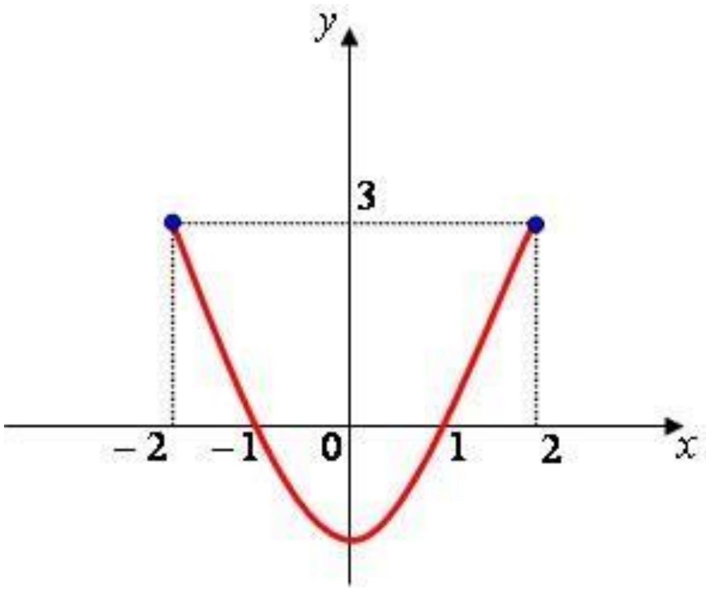
É função a seguinte correspondência entre A e B:



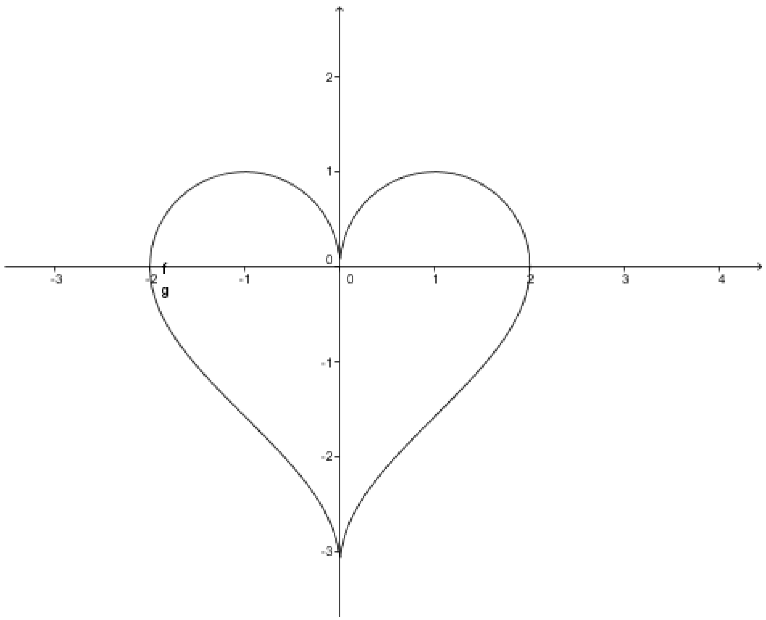
Conceitos Gerais

Exemplo:

FUNÇÃO



NÃO FUNÇÃO



Conceitos Gerais

De um modo geral, tem-se:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

- x é o objeto, $y = f(x)$ é a imagem;
- y é a variável dependente;
- x é a variável independente;
- A é o domínio (D_f ou D) ou conjunto dos objetos;
- B é o conjunto de chegada da função;
- D'_f ou Im_f é o contradomínio ou conjunto das imagens.

Conceitos Gerais

Definição: Domínio de uma Função

O domínio de uma função é o conjunto de valores de "entrada" para os quais a função é definida.

Nota: Quando o domínio e o conjunto de chegada de uma função são subconjuntos de $\mathbb{R}$, a função diz-se função real de variável real.

Como determinar o domínio e o contradomínio em funções representadas graficamente?

O domínio de uma função definida por uma representação gráfica é o conjunto das abcissas dos pontos da curva.

Conceitos Gerais

E em funções definidas por expressão analítica, como determinar o domínio?

Há condições a impor ao domínio de uma função representada por uma expressão analítica:

- **Uma função polinomial :** D=IR

- **Uma função com uma variável no denominador** , $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$:

$$D = \{x \in IR: g(x) \neq 0\}$$

- **Uma função com uma variável dentro de uma raíz índice par**, $y = \sqrt[2n]{g(x)}$

$$D = \{x \in IR: g(x) \geq 0\}$$

- **Uma função logarítmica do tipo** $y = \log_a g(x)$

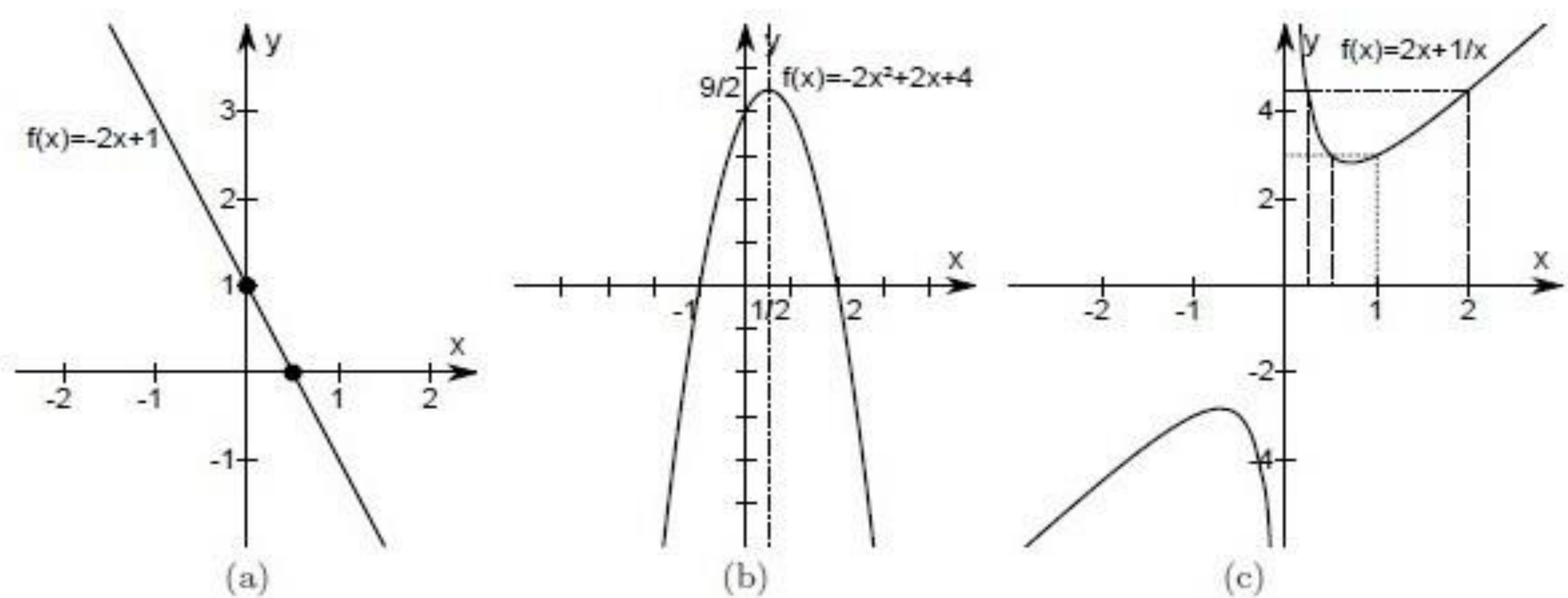
$$D = \{x \in IR: g(x) > 0\}$$

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Conceitos Gerais

Exemplo:

A partir dos gráficos das funções representadas indique os seus domínios e contradomínios.



Conceitos Gerais

Exemplos:

Determine o domínio das funções reais de variável real definidas por:

- $f(x)=\dfrac{1}{x}$;
- $g(x)=\sqrt{x}$;
- $h(x)=\sqrt[3]{x}$.

Conceitos Gerais

Exemplos:

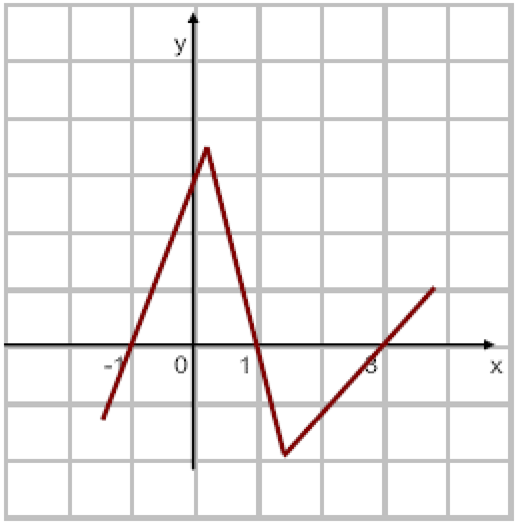
Determine o domínio das funções reais de variável real definidas por:

- $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2 - x}$;
- $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$;
- $h(x) = \dfrac{2+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}$.

Conceitos Gerais

Características de uma função

✓ **Zero de uma função** é todo o objeto que tem imagem nula.



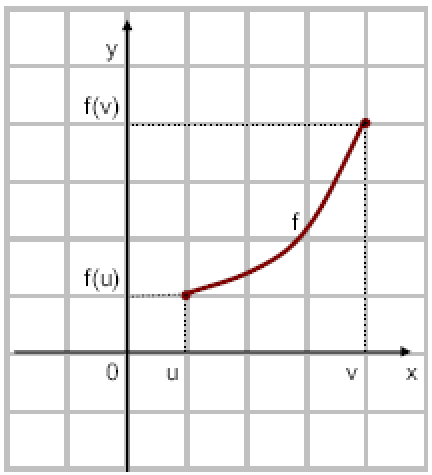
Tem-se:

- zeros da função: -1, 1, 3;
- $f(x) > 0$ se $x \in \left]-1,1\right[\cup \left]3,+\infty\right[$;
- $f(x) < 0$ se $x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,3\right[$.

Conceitos Gerais

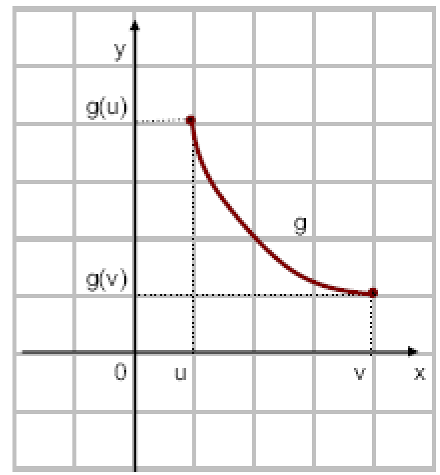
✓ **Monotonia de uma função**

Função crescente



A função f é crescente em $[u, v]$

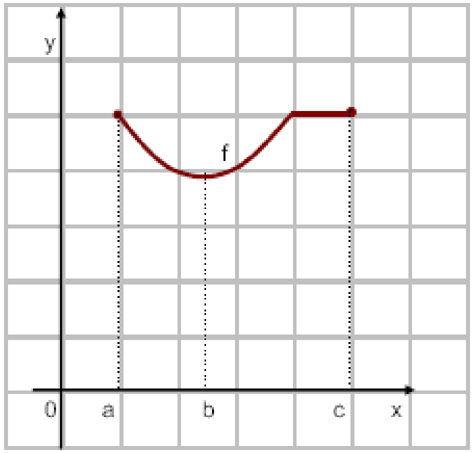
Função decrescente



A função g é decrescente em $[u, v]$

Conceitos Gerais

✓ Monotonia de uma função



f é decrescente em $[a,b]$ e crescente em $[b,c]$.

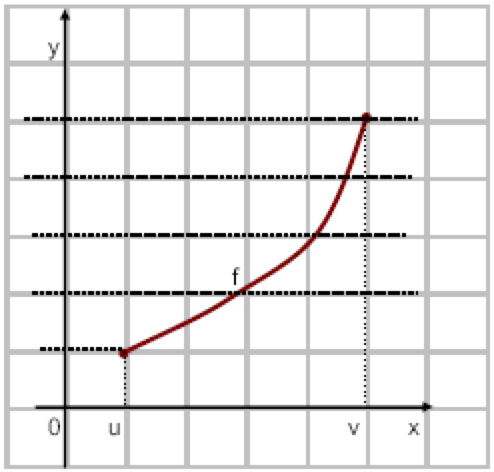
Uma função crescente ou decrescente diz-se **monótona**.

Se nas definições dadas não admitirmos a igualdade, obtemos definições de funções **estritamente crescentes** e **estritamente decrescentes.**

Conceitos Gerais

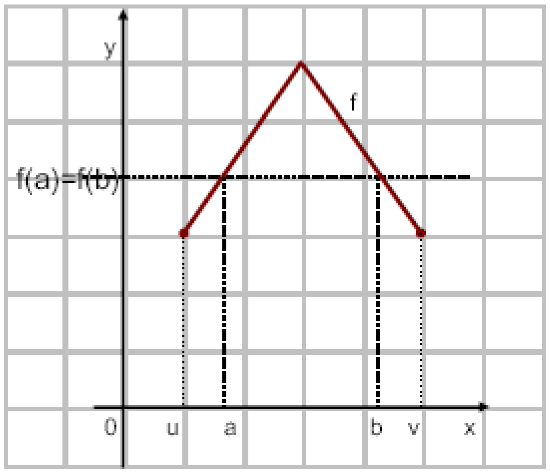
- ✓ **Injetividade de uma função**

f é injectiva em $[u, v]$



Uma função f é **injectiva** num intervalo $E \subset D_f$ se para dois valores quaisquer de E, x_1 e x_2, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$

f não é injectiva em $[u, v]$

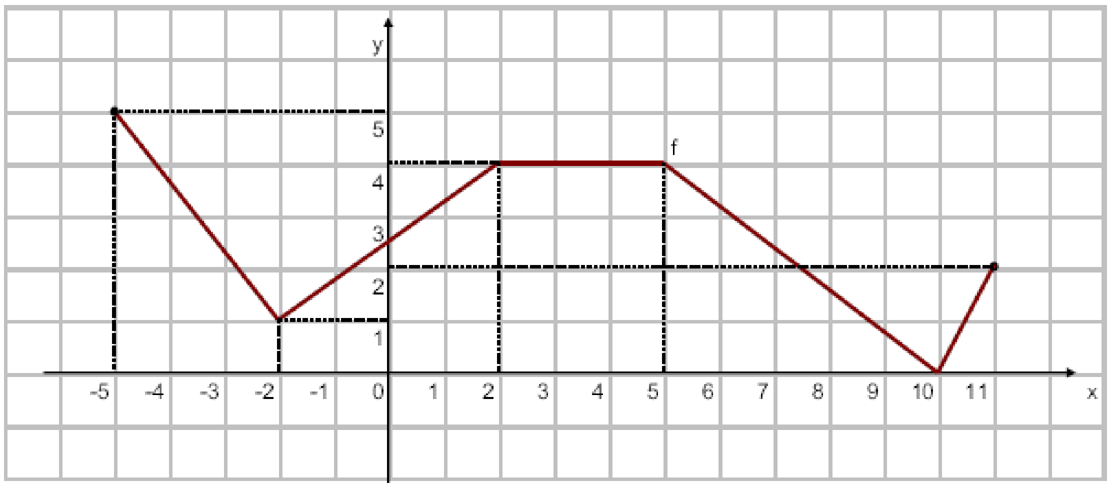


Uma função f é **não injectiva** em $E \subset D_f$ se existem pelo menos dois objectos distintos com a mesma imagem

Conceitos Gerais

✓ Extremos de uma função

Extremos absolutos



5 é o máximo absoluto de *f*; **0** é mínimo absoluto de *f*.

Seja *f* uma função de domínio *D*.

- $f(a)$ é o **máximo absoluto** de *f* se, para todo o x de D, $f(a) \geq f(x)$;
- $f(b)$ é o **mínimo absoluto** de *f* se, para todo o x de D, $f(b) \leq f(x)$.

Conceitos Gerais

Extremos relativos

1,2 e 4 são extremos relativos de f:1 é mínimo relativo e 2 e 4 são máximos relativos

Aos valores do domínio a que correspondem os máximos relativos da função chamam-se **maximizantes**: 11 é um maximizante.

Aos valores do domínio a que correspondem os mínimos relativos da função chamam-se **minimizantes**: -2 é minimizante.

Seja f uma função de domínio D.

- $f(a)$ é um **máximo relativo** de f se existir um intervalo aberto E contendo a tal que

$$f(a) \geq f(x), \text{ qualquer que seja } x \in E \cap D$$

- $f(b)$ é um **mínimo relativo** de f se existir um intervalo aberto F contendo b tal que

$$f(b) \leq f(x), \text{ qualquer que seja } x \in F \cap D$$

Conceitos Gerais

✓ **Sinal de uma função**

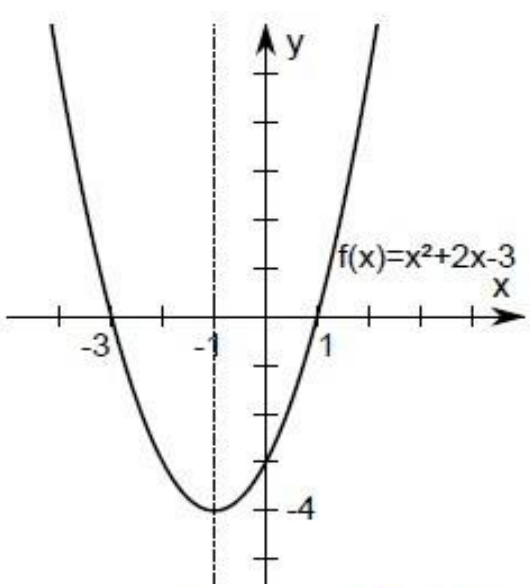
Estudar o sinal de uma função consiste em determinar para que valores da variável independente a função é negativa ou positiva. É óbvio que a função é positiva para os valores de x para os quais o gráfico se situa acima do eixo das abcissas e é negativa para os valores de x para os quais o gráfico se situa abaixo do eixo das abcissas.

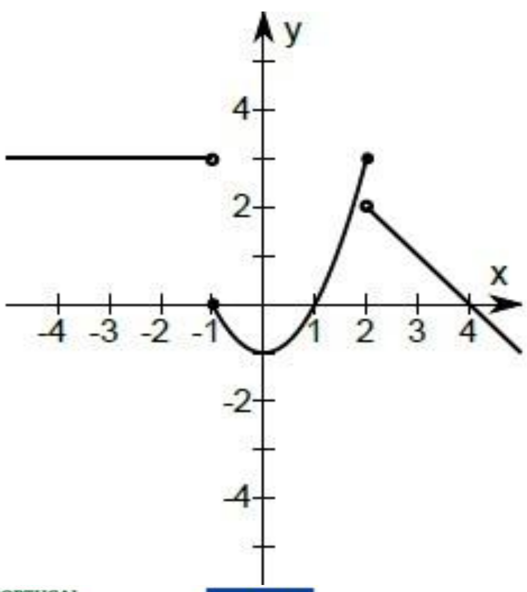
Conceitos Gerais

Exercício:

A partir dos gráficos das funções representadas indique:

- ✓ Domínio e contradomínio;
- ✓ Os intervalos de monotonia;
- ✓ Os zeros, o máximo e mínimo absolutos, nos casos em que se aplique;
- ✓ Os intervalos onde as funções são positivas e negativas



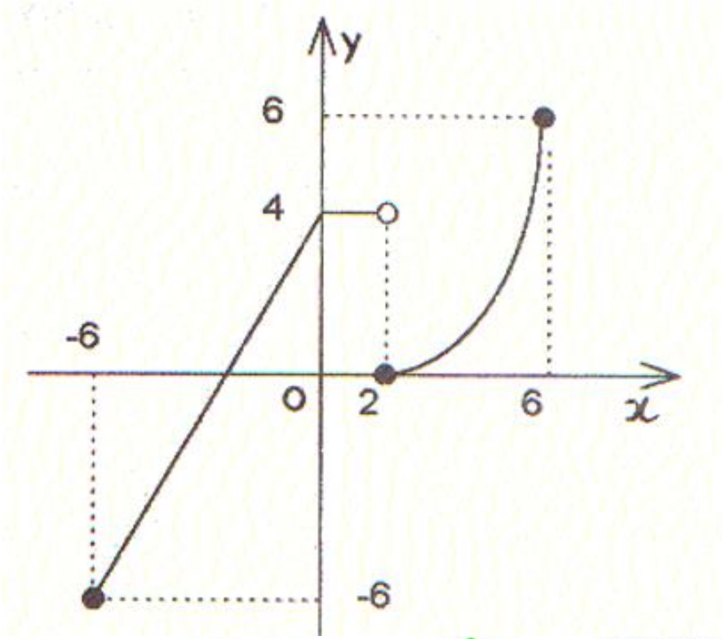


Conceitos Gerais

Exercício:

A partir dos gráficos das funções representadas indique:

- ✓ Domínio e contradomínio;
- ✓ Os intervalos de monotonia;
- ✓ Os zeros, o máximo e mínimo absolutos, nos casos em que se aplique;
- ✓ Os intervalos onde as funções são positivas e negativas

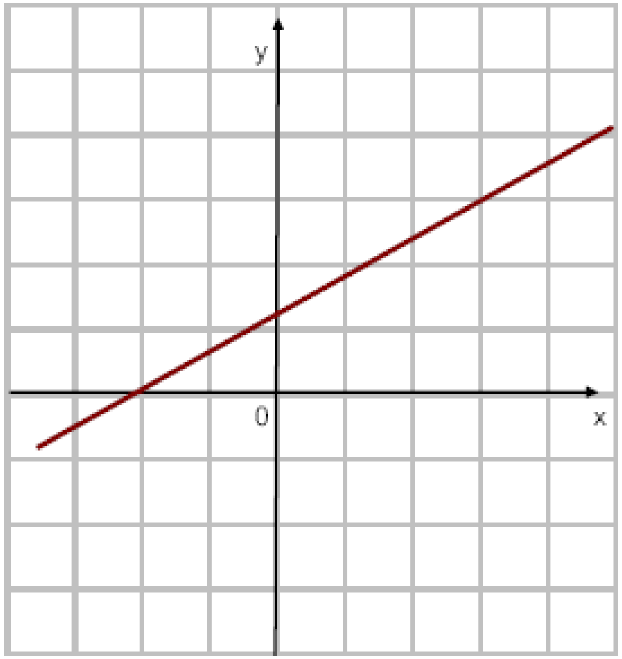


Funções afim, quadrática e polinomial

Função afim

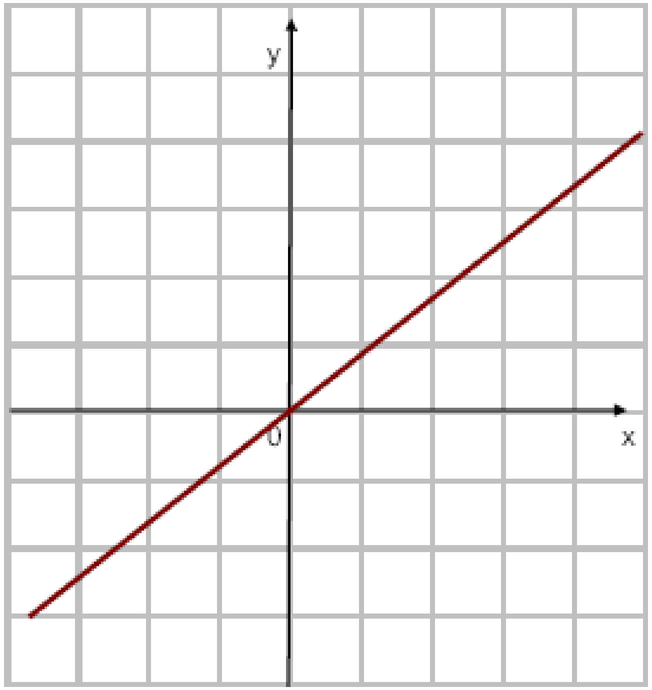
Definição: Uma **função afim** é definida por uma expressão algébrica do tipo $y=ax+b$, $a, b \in IR$.

O gráfico de uma função afim é uma reta.



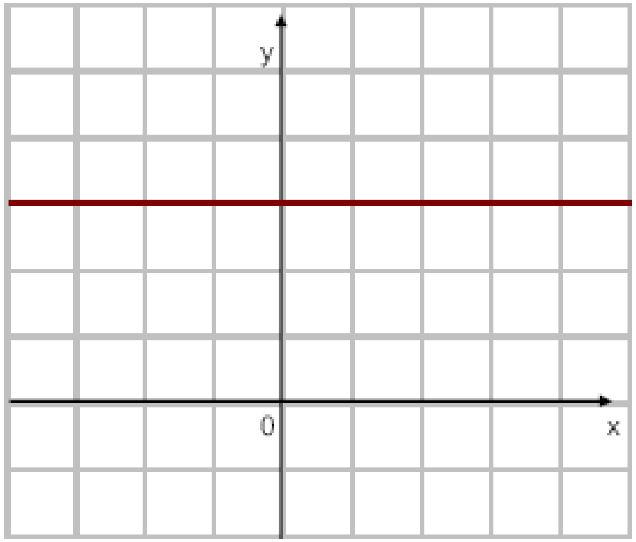
Função afim

Definição: Uma função afim, cujo gráfico contém a origem do referencial, tem o nome de **função linear** e é definida por uma expressão algébrica do tipo $y=ax$, $a \in IR$.



Função afim

Definição: Uma função afim cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo dos xx é uma **função constante**: $y=b$, $b \in IR$.



Função quadrática

Função Quadrática

Na vida real encontram-se muitas situações entre variáveis cujo modelo matemático é uma função quadrática.

Função quadrática é uma função do tipo:

$$f : R \to R$$
$$x \to y = ax^2 + bx + c$$

a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

O modelo matemático que representa esta situação é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola.

Função quadrática

Exemplo:

Considere-se a seguinte situação da Física:

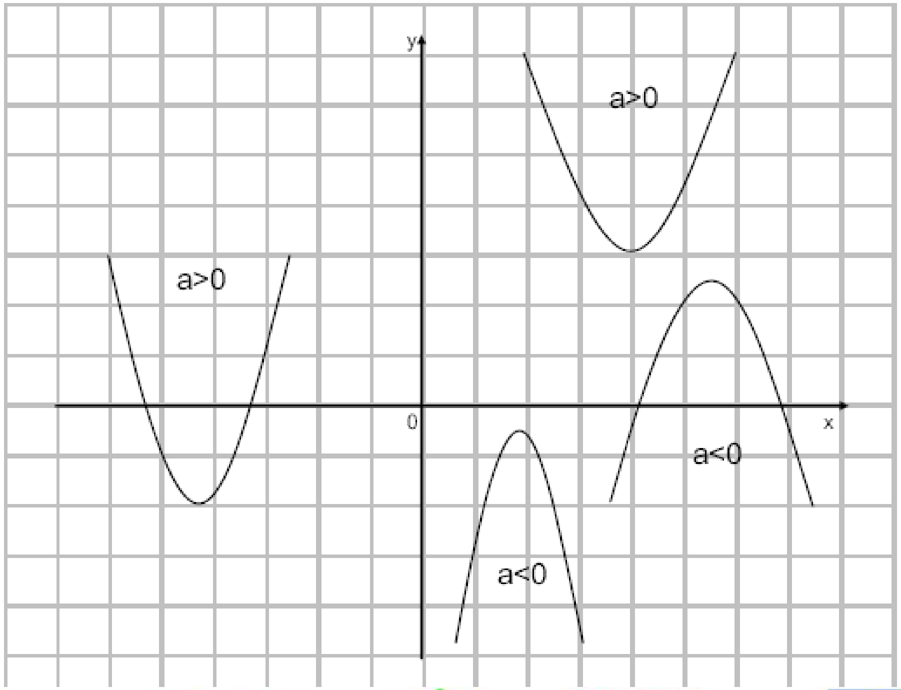
"Disparou-se uma bala, de baixo para cima, com uma velocidade inicial de 30 km/s. A altura h atingida pela bala ao fim de t segundos é, em metros: $h(t) = 30t - 4{,}9t^2$ *."*

Função quadrática

Concavidade, vértice e eixo de simetria

Uma parábola pode ter a concavidade voltada para baixo ou voltada para cima:

- Se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima;
- Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.



Função quadrática

Zeros da função quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0^{3}$$

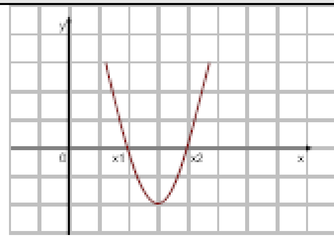
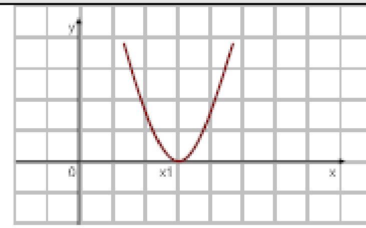
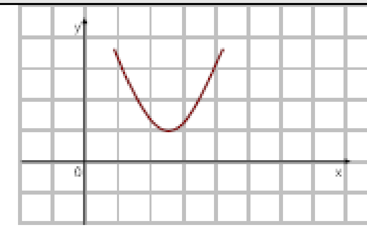
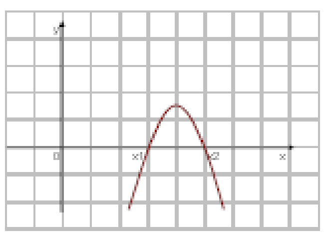
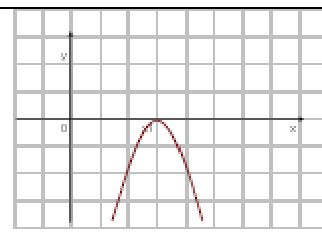
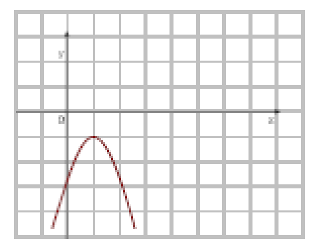
$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Seja $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta > 0$	A parábola intersecta o eixo dos xx em dois pontos
$\Delta = 0$	A parábola é tangente ao eixo dos xx
$\Delta < 0$	A parábola não intersecta o eixo dos xx

Função quadrática

Assim:

a \ Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	 $f(x) > 0$ se $x > x_2 \vee x < x_1$ $f(x) < 0$ se $x_1 < x < x_2$	 $f(x) > 0$ se $x \neq x_1$	 $f(x) > 0$ se $x \in R$
$a < 0$	 $f(x) > 0$ se $x_1 < x < x_2$ $f(x) < 0$ se $x > x_2 \vee x < x_1$	 $f(x) < 0$ se $x \neq x_1$	 $f(x) < 0$ se $x \in R$

Função quadrática

Inequações do 2.º grau

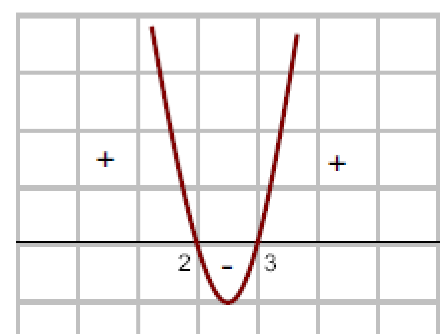
Para resolvermos uma inequação do 2.º grau, consideramos a função quadrática correspondente e determinamos os zeros e a concavidade. Resumimos as conclusões num esboço gráfico e por observação deste esboço obtemos as soluções.

Seja $y = x^2 - 5x + 6$.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 3$$

Temos:

- Zeros: 2 e 3;
- 1>0: concavidade voltada para cima;
- Esboço gráfico



Função polinomial

Chama-se **função polinomial** a toda a função do tipo

$$f : R \to R$$

$$x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

em que $n \in N_0$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$.

Chama-se **polinómio** na variável x a toda a expressão do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

em que $n \in N_0$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$.

Num polinómio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, tem-se

$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_1 x, a_0 \quad \to$ os **termos**

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \quad \to$ os **coeficientes**

$a_0 \quad \to$ o **termo independente**

Função polinomial

Reduzir um polinómio é escrevê-lo sem que apareçam monómios semelhantes.

Exemplo:

Considere-se o polinómio $3x^2 - x + x^2$

Reduzindo-o, vem $4x^2 - x$.

Função polinomial

Ordenar um polinómio é escrevê-lo segundo as potências crescentes ou decrescentes de x .

Exemplo:

Considere-se o polinómio $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{5}+3$

Ordenando-o, vem $-\frac{x^2}{5}+\frac{x}{2}+3$ ou $3+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{5}$

Função polinomial

Definição: **Grau de um polinómio** é o maior dos expoentes da variável x com coeficiente não nulo.

Se um polinómio tem não nulos todos os coeficientes da variável x , diz-se **completo**.

Exemplo:

$x^3 + x^2 + 3x + 1 \rightarrow$ polinómio completo

$x^3 + 3x + 1 \rightarrow$ polinómio incompleto

Função polinomial

Operações com polinómios

As operações com polinómios são baseadas nas propriedades operatórias dos números reais, uma vez que a variável do polinómio representa um número real.

Considerem-se os polinómios: $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ e $Q(x) = -3x + 2$.

Adição

Para somar dois polinómios, soma-se os termos semelhantes.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^2 - 3x + 5) + (-3x + 2) \\ &= 2x^2 + (-3x - 3x) + (5 + 2) \\ &= 2x^2 - 6x + 7 \end{aligned}$$

Subtração

Para subtrair dois polinómios, soma-se o primeiro com o simétrico do segundo.

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^2 - 3x + 5) - (-3x + 2) \\ &= 2x^2 - 3x + 5 + 3x - 2 \\ &= 2x^2 + 3 \end{aligned}$$

Função polinomial

Multiplicação

Para multiplicar dois polinómios, multiplica-se cada termo do primeiro polinómio por todos os termos do segundo polinómio (propriedade distributiva), e soma-se os termos semelhantes obtidos.

$$\begin{aligned} P(x) \times Q(x) &= (2x^2 - 3x + 5) \times (-3x + 2) \\ &= -6x^3 + 9x^2 - 15x + 4x^2 - 6x + 10 \\ &= -6x^3 + 13x^2 - 21x + 10 \end{aligned}$$

Divisão

Para calcular a divisão de polinómios em que o polinómio divisor é de grau 1, há um método simples denominado de **Regra de Ruffini**, que permite determinar os coeficientes do polinómio quociente e o resto da divisão.

Determinar o quociente e o resto da divisão de $M(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ por $N(x) = x + 1$.

Como o divisor é da forma $x - a$, tem-se $a = -1$, atendendo a que $x + 1 = x - (-1)$.

Função polinomial

Regra de Ruffini:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & 5 & 2 \\
-1 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}
\quad \text{Valor de a}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & 5 & 2 \\
-1 & \downarrow & & & \\
\hline
 & 2 & & &
\end{array}
$$

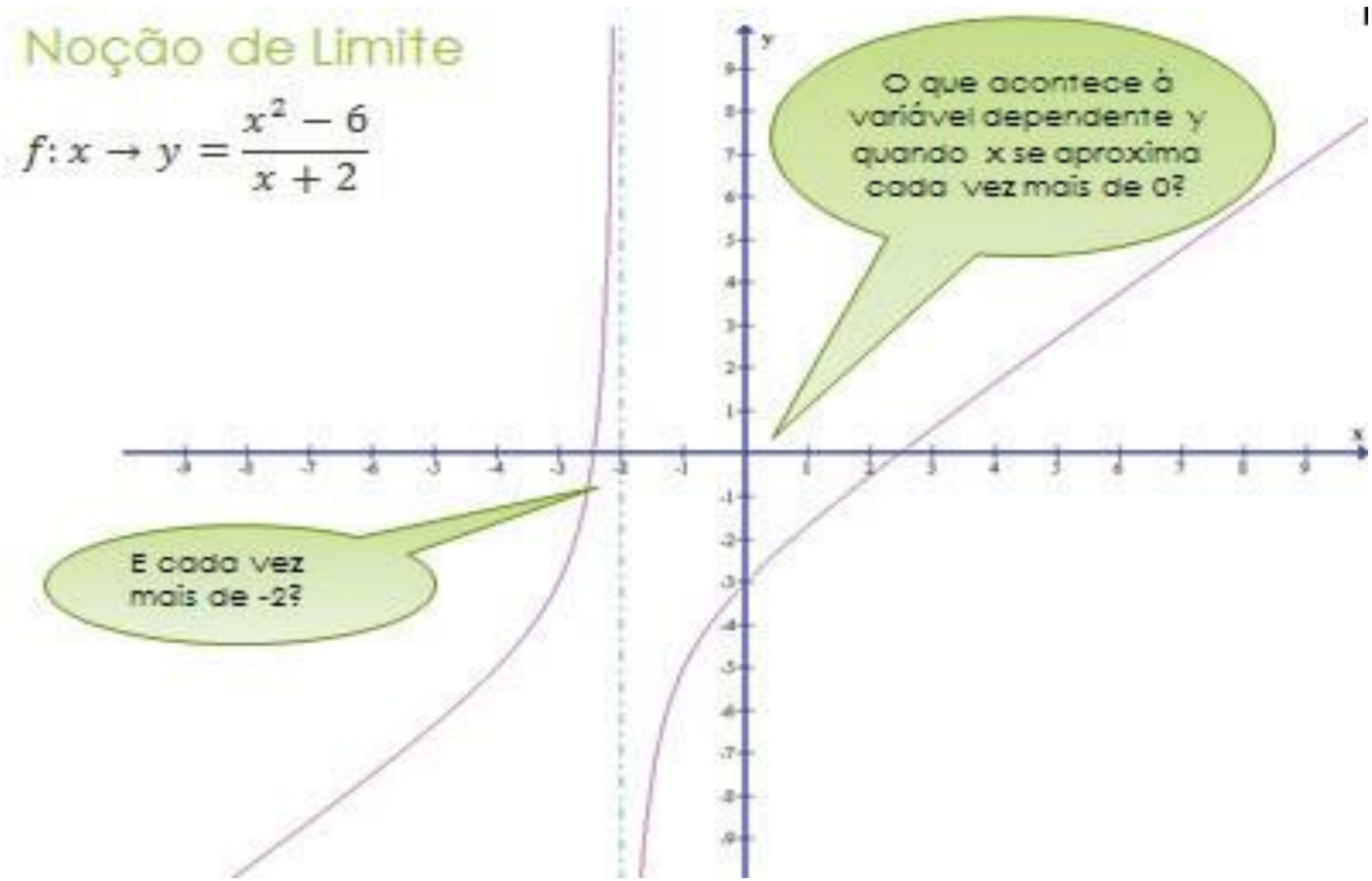
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & 5 & 2 \\
-1 & \downarrow & -2 & 5 & -10 \\
\hline
\times & 2 & -5 & 10 & -8 \\
 & -1 \times 2 & -1 \times (-5) & & -1 \times 10
\end{array}
\; +
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & 5 & 2 \\
-1 & & -2 & 5 & -10 \\
\hline
 & 2 & -5 & 10 & \boxed{-8} \ \text{Resto}
\end{array}
$$

Limites

Limites

Noção intuitiva de Limite



Limites

Noção intuitiva de Limite

O significado intuitivo da expressão **f(x) tende para b quando x tende para a** é o de que se considerarmos apenas valores de x suficientemente próximos de a, os valores correspondentes f(x) estarão tão próximos quanto se queira de b.

Limite

✓ De acordo com a definição de limite anterior, basta que o ponto seja ponto de acumulação do domínio de f. Não faz sentido calcular o limite, quando a é ponto isolado do domínio de f;

✓Não se exige assim, que o ponto a pertença ao domínio de f;

✓O facto de $\lim_{x \to a} f(x) = b$, nada nos diz acerca do valor de f(a).

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Limites

Unicidade do Limite

Seja E⊆ IR, f: E $\rightarrow$ IR, a ∊ E′ (E′ é o conjunto dos pontos de acumulação de E).

Se o limite de uma função f(x) existe então ele é único.

Matematicamente falando temos que:

Se $lim_{x\to a} f\,(x) = L$ e $lim_{x\to a} f\,(x) = A$, então $L = A$.

Operações Algébricas

- $lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L \pm A;$
- $lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = L \times A;$
- Se $A \neq 0,\ lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{A}.$
- $lim_{x\to a}[f(x)]^n = [lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n;$
- $lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, com $L \geq 0$ para n par.

Limites

Exercícios:

Calcule cada um dos seguintes limites:

1. $lim_{x \to 4}(x^2 + 3);$
2. $lim_{x \to 1}(x^2 - 3x + 1);$
3. $lim_{x \to 2}(2x + 4)(3x^2);$
4. $lim_{x \to 2}\frac{x^3+x^2}{x}.$

Limites

Limites Laterais

Consideremos a função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \leq 2 \\ x+1 & se\ x > 2 \end{cases}$$

O que acontece a y quando x se aproxima de 2?

x aproxima-se de 2 pela esquerda → **2** ← x aproxima-se de 2 pela direita

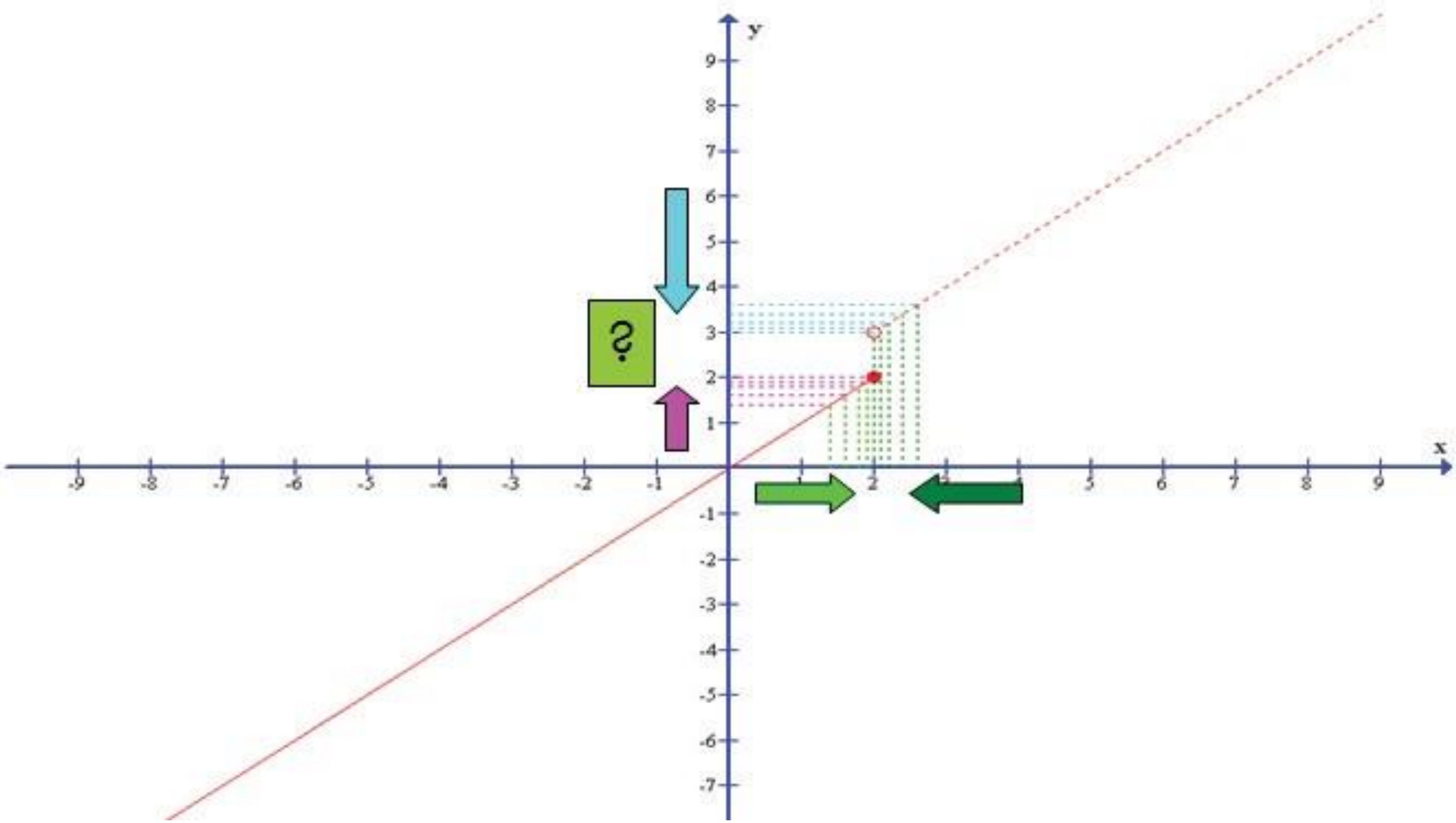
1,9	1,99	1,999	1,9999	X	2,0001	2,001	2,01	2,1
1,9	1,99	1,999	1,9999	f (x)	3,0001	3,001	3,01	3,1

$f(x)$ aproxima-se de 2 → **?** ← $f(x)$ aproxima-se de 3

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Limites

Limites Laterais



Limites

Limites Laterais

Diz-se que o número real b é o **limite à direita** de f(x) quando x tende para a, e escreve-se $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$

Diz-se que o número real b é o **limite à esquerda** de f(x) quando x tende para a, e escreve-se $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$

Observação:

Só faz sentido falar nos limites laterais se a é ponto de acumulação à direita, no caso do limite lateral direito, ou a é ponto de acumulação à esquerda, no caso do limite lateral esquerdo.

Limites

Existência de limite

Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Então, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ se e só se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

Exemplo:

Estude a existência de limite f(x), quando x tende para 2, da seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , \text{se } x < 2 \\ 0 & , \text{se } x = 2 \\ 1 - x & , \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Limites

Exercício:

Estude a existência de limite f(x), quando x tende para 2, da seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \text{se } x > 2 \\ 1 & , \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Limites

Limites no Infinito e Infinitos

Diz-se que o número real b é o **limite** de f(x) quando x tende para $+\infty$, e escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Diz-se que $+\infty$ é o **limite** de f(x) quando x tende para a, e escreve-se

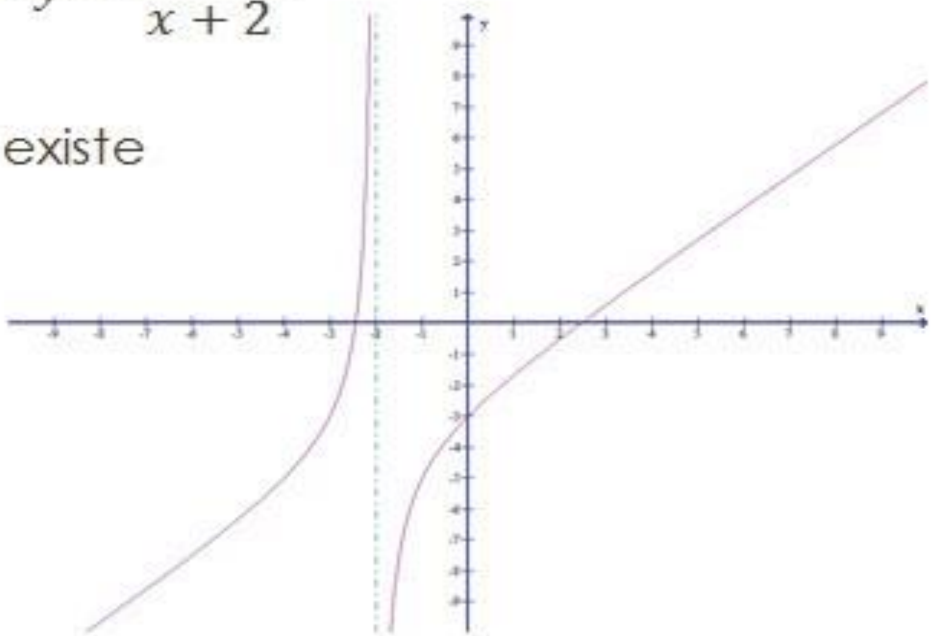
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Limites

Exemplo:

$$f : x \to y = \frac{x^2 - 6}{x + 2}$$

$\lim_{x \to -2} f(x)$ não existe



Mas pode-se dizer que:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

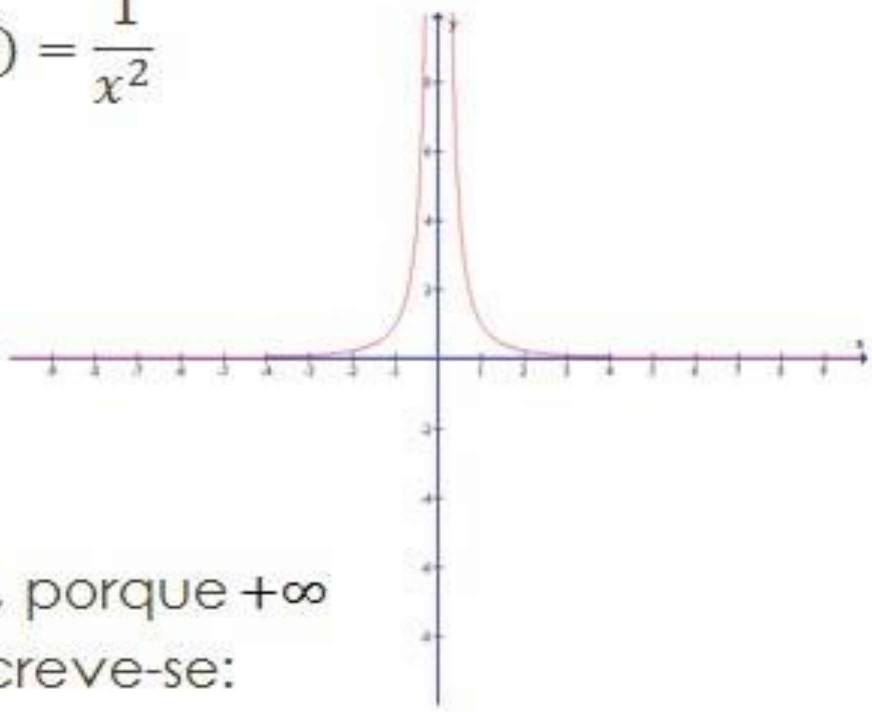
Limites

Exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



Apesar do limite não existir, porque $+\infty$ não é um número real, escreve-se:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Limites

Propriedades

- Se $lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, então $lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$;
- Se $lim_{x \to a} f(x) = 0$, então

$$lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{, se } f(x) > 0 \text{ em vizinhança de } a \\ -\infty & \text{, se } f(x) < 0 \text{ em vizinhança de } a \end{cases}$$

Limites

Indeterminações

Nos casos em que, por aplicação direta dos teoremas sobre limites, somos conduzidos aos símbolos $\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ a que se chama ***símbolos de indeterminação***, temos de seguir outro caminho para procurar, se existir, o limite, isto é, "levantar a indeterminação".

Limites

Indeterminação ∞-∞

Exemplo:

Calcule:

$$lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + 3)$$

Regra prática:

A indeterminação é levantada escolhendo o termo de maior grau.

Limites

Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Exemplo:

Calcule:

$$lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+2}{x^3+4x+1}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Regra prática:

A indeterminação é levantada escolhendo o termo de maior grau do numerador e o termo de maior grau do denominador.

Limites

Indeterminação $\frac{0}{0}$

Exemplo:

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

Regra prática:

A indeterminação é levantada por uma das metodologias:

- Pôr fatores comuns em evidência
- Usar o caso notável diferença de quadrados
- Aplicar a Regra de Ruffini.

Limites

Indeterminação $0\times\infty$

Exemplo:

Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \times \frac{1}{x}$

Regra prática:

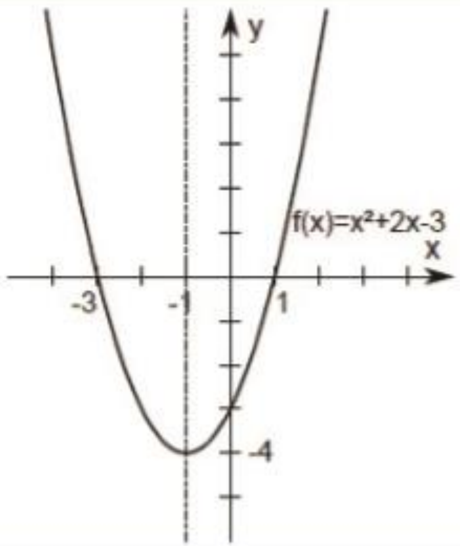
A indeterminação é levantada transformando-a numa das indeterminações anteriores.

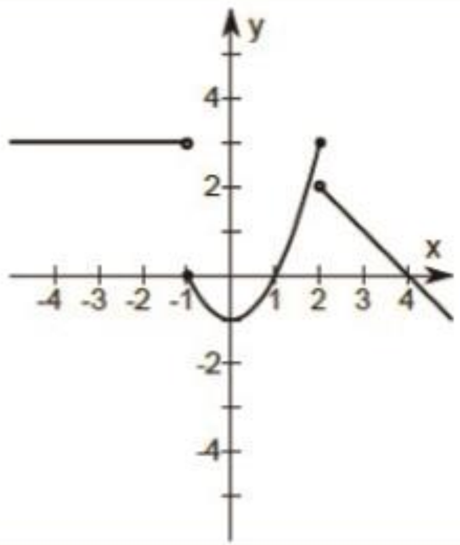
Continuidade

Continuidade

Noção intuitiva de Continuidade

Exemplos





Intuitivamente, dizemos que a primeira função é contínua e que a segunda não.

Continuidade

Continuidade

- Ao contrário da definição de limite, só faz sentido verificar se f é contínua no ponto a quando a é ponto do domínio da função;

- De acordo com a definição, se a é ponto isolado do domínio de f, então *f é contínua em a;*

- Seja $a \in D_f$ ponto de acumulação do domínio de f. Então f é contínua em a se e só se $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Isto reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite.

Continuidade

Exemplos:

- $f(a)$ existe $(a \in D_f)$?
- $lim_{x \to a} f(x)$ existe?
- $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$?

Continuidade num ponto

Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos respectivos:

1. $$f(x) = \begin{cases} x^2+5 & , \text{se } x < 2 \\ 3 & , \text{se } x = 2 \\ 1+x^3 & , \text{se } x > 2 \end{cases} \quad , \text{(em } x = 2)$$

2. $$g(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \text{se } x \leq 1 \\ 2x & , \text{se } x > 1 \end{cases} \quad , \text{(em } x = 1)$$

Continuidade

Continuidade

Operações com funções

Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$. Se f e g são contínuas em $a \in E$, então $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a. Se, além disso, $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é contínua em a.

Nota

Este teorema permite concluir que:

- as funções polinomiais são contínuas em $\mathbb{R}$;
- as funções racionais são contínuas em todo o seu domínio.

Continuidade

Exercícios:

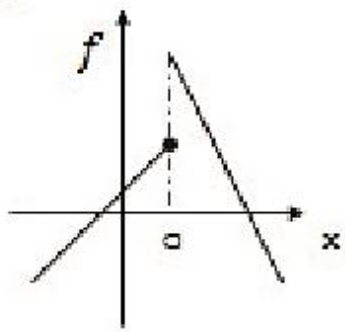
Estude a continuidade das seguintes funções:

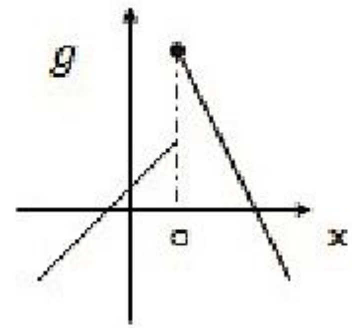
1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$;
2. $g(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$.

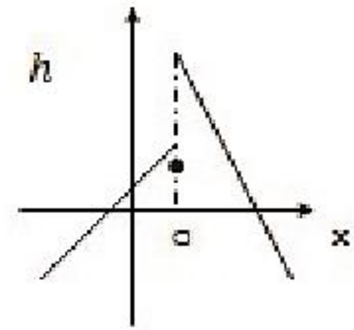
Continuidade

Continuidade lateral

Estudemos a continuidade das seguintes funções para $x=a$.







f não é contínua em $x=a$

Mas: $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$

e $\lim_{x\to a+} f(x) \neq f(a)$

f é contínua à esquerda no ponto a mas não à direita

g não é contínua em $x=a$

Mas: $\lim_{x\to a-} g(x) \neq g(a)$

e $\lim_{x\to a+} g(x) = g(a)$

f é contínua à direita no ponto a mas não à esquerda

h não é contínua em $x=a$

E: $\lim_{x\to a-} h(x) \neq h(a)$

e $\lim_{x\to a+} h(x) \neq h(a)$

h não é contínua nem à esquerda nem à direita no ponto a

Continuidade

Continuidade lateral

Continuidade Lateral

Diz-se que:

- $f : E \to \mathbb{R}$ é **contínua à direita** num ponto $a \in E$ se $lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$;
- $f : E \to \mathbb{R}$ é **contínua à esquerda** num ponto $a \in E$ se $lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Nota

Uma função pode ser apenas contínua à direita (ou à esquerda) num ponto e ser contínua nesse ponto. Basta, para isso, que apenas esteja definida à direita (ou à esquerda, respectivamente) desse ponto.

Continuidade

Continuidade em intervalos

Continuidade em Intervalos

- Seja $I =]a, b[$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, seja $f : I \to \mathbb{R}$. f é contínua em I se e só se for contínua em todos os pontos de I;
- Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado de $\mathbb{R}$. f é contínua em I se e só se for contínua em $]a, b[$ e também o é à direita de a e à esquerda de b.

Continuidade

Exemplo

Estude a continuidade das seguintes funções no seu domínio:

1. $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5} & , \text{ se } x > 3 \\ x^2 - 3x + 6 & , \text{ se } x \leq 3 \end{cases}$$

2. $$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ -3 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Continuidade

Teoremas importantes:

Teorema de Bolzano-Cauchy ou Teorema dos valores intermédios

Seja *f* uma função real de variável real contínua num intervalo $[a\ ,\ b] \subset D$. Então, para qualquer $k \in IR$ do intervalo aberto de extremos *f(a)* e *f(b)*, existe pelo menos um número $c \in\ ]a\ ,\ b[$, tal que $f(c)=k$.

Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy

Se *f* contínua num intervalo $[a\ ,\ b] \subset D$ e se $f(a) \times f(b)<0$, então existe pelo menos um valor $c \in\ ]a\ ,\ b[$, tal que $f(c)=0$.

Teorema de Weierstrass

Sendo *f* uma função real de variável real contínua num intervalo [a , b], *f* admite um máximo e um mínimo absolutos.

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL IPCA

Cap.2 – Função Exponencial e Logarítmica

Fundamentos de Matemática

Curso Técnico Superior Profissional

Ana Isabel Araújo
aiaraujo@ipca.pt

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Funções logarítmica e exponencial

Função exponencial

Existem fenómenos que crescem de tal forma que as funções polinomiais não são os modelos matemáticos mais apropriados para a sua modelização.

É necessário usar funções exponenciais para a definição de modelos matemáticos de tais fenómenos.

Mas o que é uma função exponencial?

Nenhuma das funções $f(x)=x^2$ ou $f(x)=x^{1/3}$ são funções exponenciais, uma vez que a base é variável e o expoente é constante.

Nas funções exponencias a base é constante e o expoente é variável.

Função exponencial

Definição:

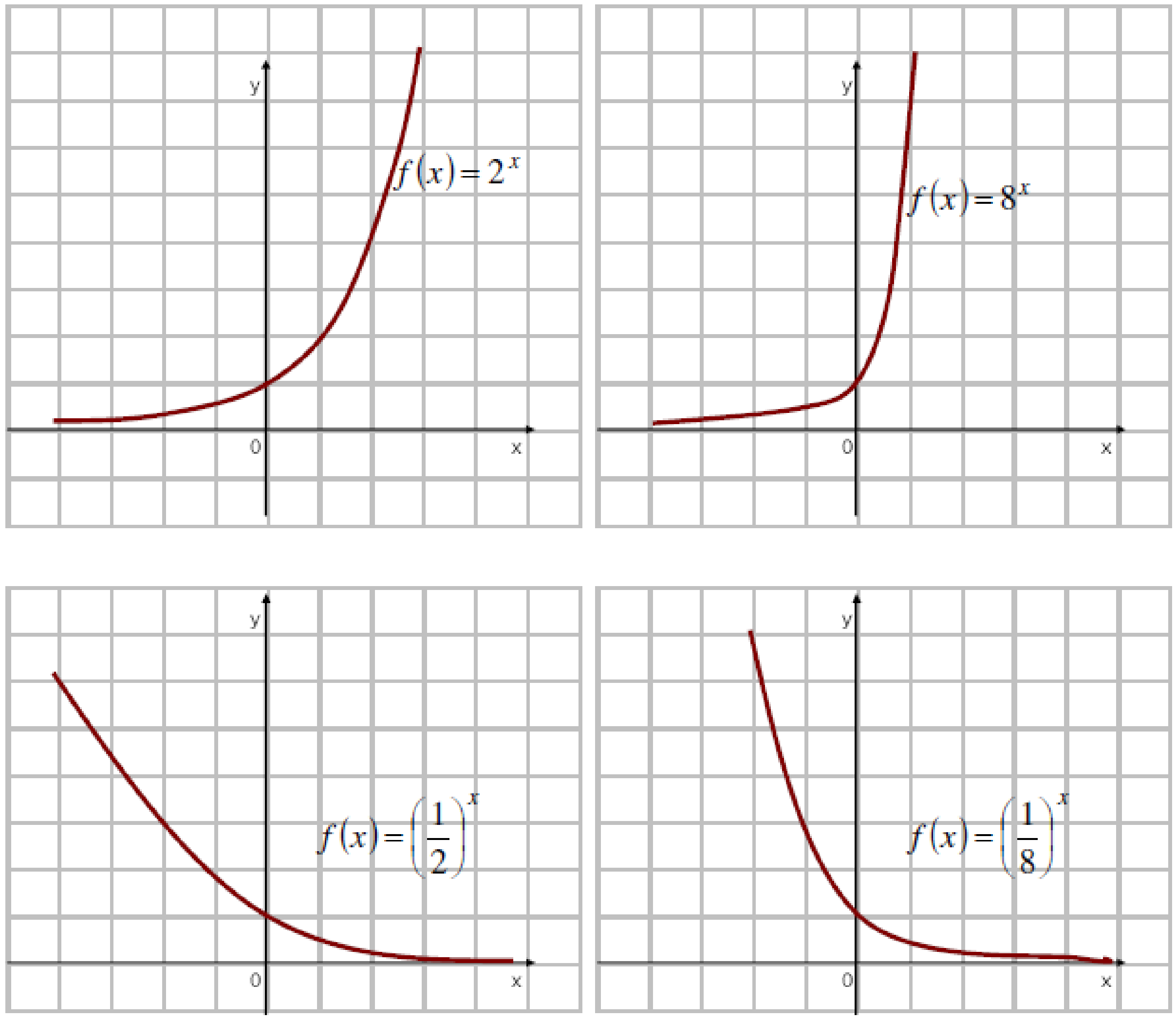
Uma função exponencial de base a é uma função exponencial da forma:

$$f(x) = a^x,$$

sendo a e x números reais tais que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Função exponencial

Propriedades:



Função exponencial

Propriedades:

A função exponencial $f(x)=a^x$, $a>0$ e $a\neq 1$, tem as seguintes propriedades:

- A função f é estritamente crescente para $a>1$ e estritamente decrescente para $0<a<1$.
- O gráfico da função intersecta o eixo dos yy no ponto de coordenadas $(0,1)$.
- A recta de equação $y=0$ (eixo dos xx) é uma assimptota horizontal ao gráfico de f.
- O contradomínio de f é $D'_f =]0,+\infty[$ e o domínio de f é $\mathbb{R}$.
- A função f é injectiva.

Função exponencial

Funções exponenciais e condições:

As funções exponenciais $f(x) = a^x$ são:

- injetivas (se $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$)
- crescentes, se $a > 1$
- decrescentes, se $0 < a < 1$

Estas propriedades permitem resolver equações e inequações exponenciais.

Função exponencial

Exemplo (condições envolvendo exponenciais):

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \sqrt{8}$;
- $(0,1)^{-x} < 10^{3}$.

Função exponencial

Função exponencial de base e

Sabe-se que $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$.

O número e , designado número de Neper, é um número irracional.

Na vida real, as funções da família das funções exponenciais de base e têm particular interesse.

Função logarítmica

Funções logarítmicas

Seja a função $f : x \to y = 2^x$.

Trata-se de uma função exponencial de base 2 .

A função f é injetiva e, por isso, tem inversa.

Para qualquer função f a inversa representa-se por f^{-1} e os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta de equação y = x .

No caso de qualquer função exponencial a função inversa tem o nome **de função logarítmica (log)**.

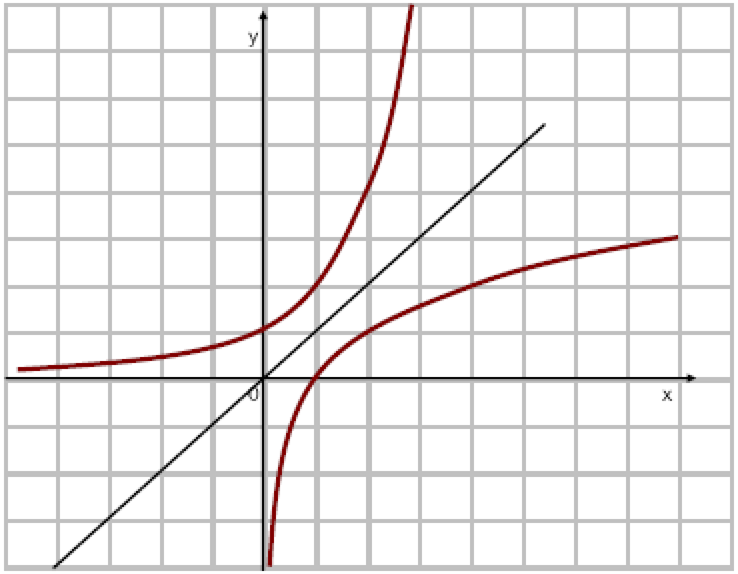
Função logarítmica

Funções logarítmicas

x	0	1	2	3	$y = \log_2 x$
$y = 2^x$	1	2	4	8	x

$\log_2 1 = 0$; $\log_2 2 = 1$; $\log_2 4 = 2$; $\log_2 8 = 3$

De um modo geral: $\log_2 x = y \Leftrightarrow 2^y = x$.



Função logarítmica

Definição de função logarítmica

Para $a > 0$ e $a \neq 1$,

a função logarítmica com base a representa-se por:

$$f : x \rightarrow y = \log_a x,$$

sendo

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

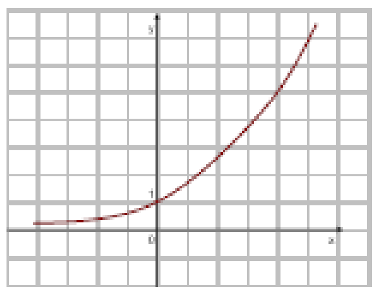
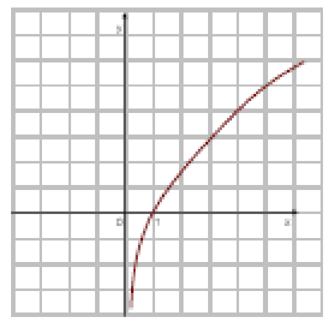
Da definição conclui-se:

- O logaritmo de 1 em qualquer base é 0 ;

- Só é possível calcular o logaritmo de um número positivo.

Função logarítmica

Função exponencial e logarítmica de base maior que 1

Função exponencial	Função logarítmica
$\boxed{a > 1}$	$\boxed{a > 1}$
$f : R \to R$ $x \to a^x$	$g : R^+ \to R$ $x \to \log_a x$
	
▪ $D_f = R$	▪ $D_g = R^+$
▪ $D'_f = R^+$	▪ $D'_g = R$
▪ f é injectiva	▪ $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
▪ f é contínua e derivável em $\mathbb{R}$	▪ g é injectiva
▪ $f(x) > 0, \forall x \in R$	▪ g é contínua e derivável em R^+
▪ f é estritamente crescente	▪ g é estritamente crescente

Função logarítmica

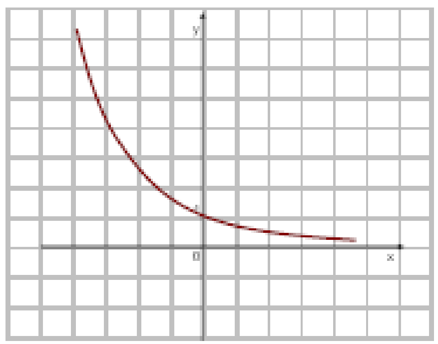
Função exponencial e logarítmica de base positiva e menor que 1

Função exponencial

$\boxed{0 < a < 1}$

$f : R \to R$

$x \to a^x$



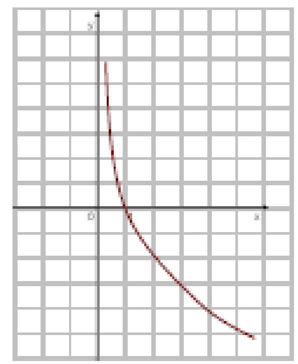
- $D_f = R$
- $D'_f = R^+$
- f é injectiva
- f é contínua e derivável em $\mathbb{R}$
- $f(x) > 0, \forall x \in R$
- f é estritamente decrescente

Função logarítmica

$\boxed{0 < a < 1}$

$g : R^+ \to R$

$x \to \log_a x$



- $D_g = R^+$
- $D'_g = R$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- g é injectiva
- g é contínua e derivável em R^+
- g é estritamente decrescente

Função logarítmica

Logaritmos de bases especiais

No cálculo com logaritmos há duas bases que são usadas com maior frequência: a base 10 (também designada como base comum) e a base e (também chamada base natural).

Estas bases são quase sempre suprimidas e a escrita normal é modificada.

$$\log_{10} x \quad \rightarrow \quad \log x$$

$$\log_e x \quad \rightarrow \quad \ln x$$

Assim,

$$\log 10 = 1 \quad \rightarrow \quad 10^1 = 10$$

$$\log 100 = 2 \quad \rightarrow \quad 10^2 = 100$$

$$\log 1000 = 3 \quad \rightarrow \quad 10^3 = 1000$$

$$\ln e = 1 \quad \rightarrow \quad e^1 = e$$

$$\ln e^2 = 2 \quad \rightarrow \quad e^2 = e^2$$

$$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Função logarítmica

Propriedades dos logaritmos

- **Logaritmo do produto**

$$\log_a(x\ y) = \log_a x + \log_a y$$

- **Logaritmo do quociente**

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

- **Logaritmo da potência**

$$\log_a\left(x^p\right) = p\log_a x$$

Mudança de Base

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Função logarítmica

Equações e inequações com logaritmos

As funções logarítmicas são injetivas e, como tal, tem-se:

$$\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

A função $f(x) = \log_a x$ é

- crescente se $a > 1$;
- decrescente se $0 < a < 1$.

Atendendo a estas propriedades é possível resolver algumas condições envolvendo logaritmos.

Função logarítmica

Exemplo (Condições com logaritmos):

$$\log(x+1)-\log x=\log(2x)$$

Resolução:

O domínio é $D=\{x\in R: x+1>0 \wedge x>0 \wedge 2x>0\}=\left]0,+\infty\right[$.

Em D vamos, então, resolver a equação dada:

$$\log(x+1)-\log x=\log(2x) \Leftrightarrow \log\frac{x+1}{x}=\log(2x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x}=2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+x+1=0 \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow \left(x=-\frac{1}{2} \vee x=1\right) \wedge x\neq 0$$

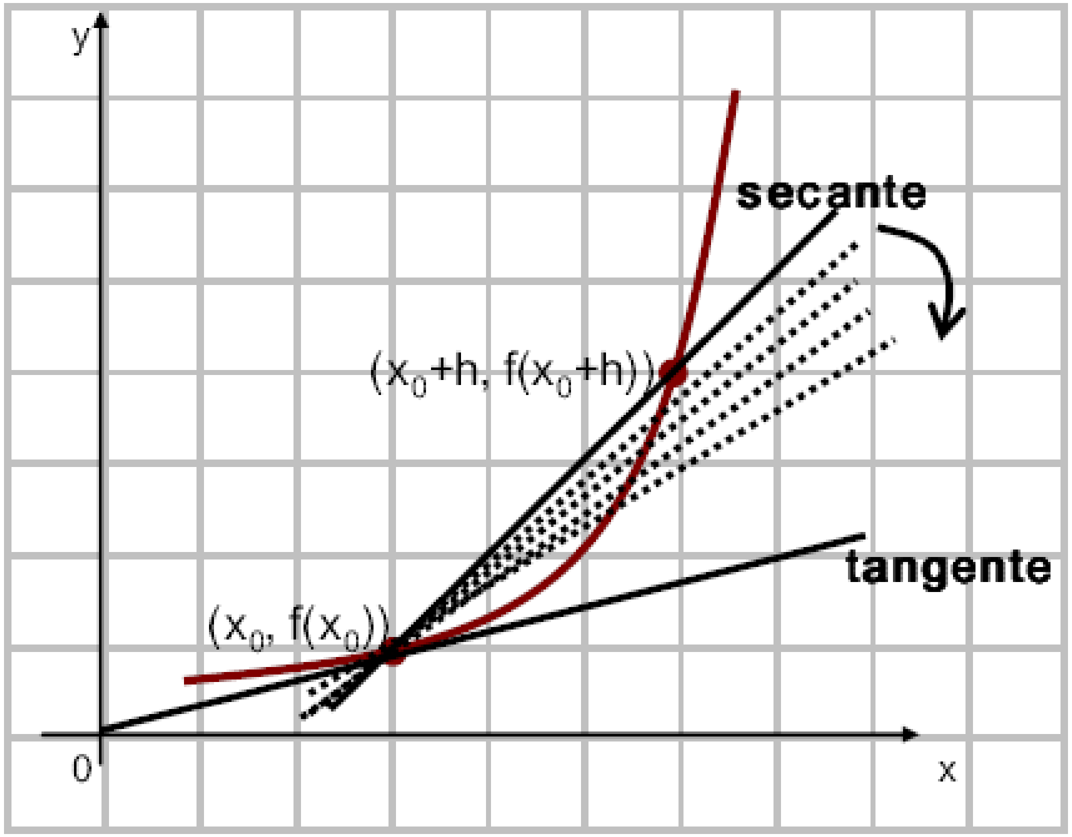
Em D só existe uma solução.

$S=\{1\}$

Derivada
Função derivada

Derivada e função derivada

Introdução ao conceito de derivada:



Derivada e função derivada

Introdução ao conceito de derivada:

Quando $h \to 0$, a linha secante, definida pelos pontos de abcissas x_0 e $x_0 + h$, tende para uma posição limite que é a reta tangente à curva no ponto $(x_0 , f(x_0))$.

O declive da reta tangente é dado por: $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivada e função derivada

Definição de derivada de uma função num ponto:

Considere-se a função real de variável real y=f(x), definida no intervalo]a,b[, a ≠ b e seja x_0 um ponto desse intervalo.

Def. Chama-se **derivada da função f no ponto x_0**, ao $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

quando existir. Esta derivada representa-se por:

$$f'(x_0) \text{ ou } \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \text{ ou } \left(D_f\right)_{x=x_0}$$

Derivada e função derivada

Se $h = x - x_0$, dizer que h tende para zero é o mesmo que dizer que x tende para x_0 e a expressão para $f'(x_0)$ pode apresentar a seguinte forma:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Derivada e função derivada

Equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto:

A derivada de uma função num ponto representa geometricamente o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, ou seja, a tangente trigonométrica do ângulo positivo que a reta faz com o semieixo positivo dos xx.

Exemplo:

Dada a função real de variável real , definida por $f(x) = x^2 + 4x - 3$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Derivada e função derivada

Resolução:

$$f'(x) = 2x + 4$$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1 é igual a:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 5) = 6$$

A equação da reta será do tipo: $y = mx + b$

Logo, $y = 6x + b$

O ponto de coordenadas $(1, f(1))$ pertence ao gráfico da função *f* e à reta tangente ao gráfico. Como $f(1) = 1^2 + 4 \times 1 - 3 = 2$

Então $2 = 6 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -4$

Assim a equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1 é:

$y = 6x - 4$

Derivada e função derivada

Exemplo:

Considere a função $f : x \rightarrow y = x^2$

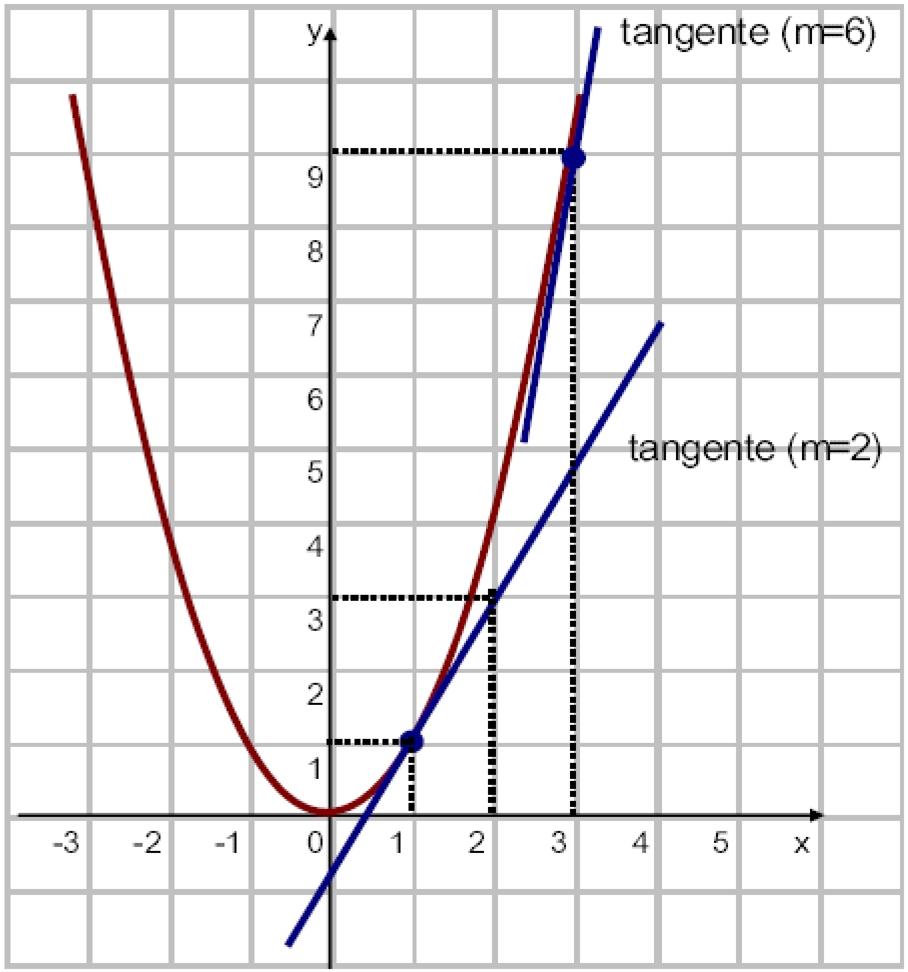
a) Calcular, aplicando a definição, $f'(1)$ e $f'(3)$ e interpretar geometricamente os valores obtidos;

b) Escrever a equação reduzida das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas 1 e 3.

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Derivada e função derivada

Interpretação geométrica:

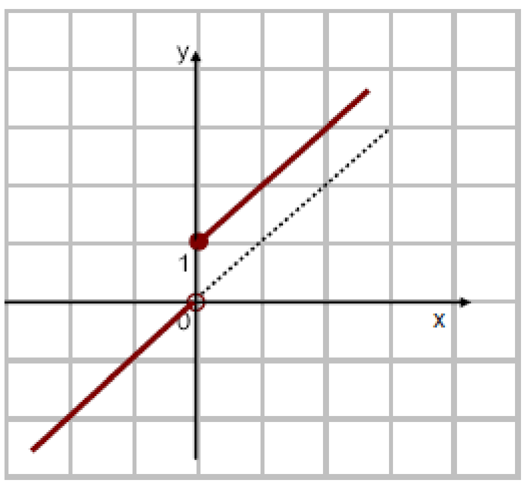


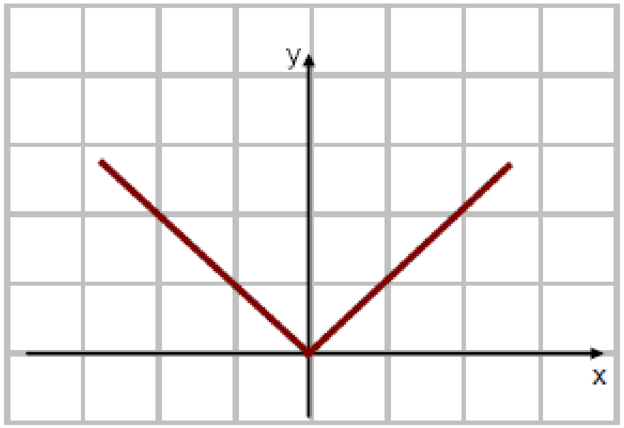
Derivada e função derivada

Definição: **Função derivável/diferenciável**

Uma função diz-se derivável (ou diferenciável) num ponto x_0 se tem nesse ponto derivada finita.

Quando é que uma função não é derivável num ponto?





Derivada e função derivada

Derivadas laterais

Derivadas laterais

Quando $a \in E \cap E'_+$, pode-se definir a **derivada à direita** da função f no ponto a como sendo o limite (caso exista):

$$f'_+(a) = lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Da mesma forma, quando $a \in E \cap E'_-$, pode-se definir a **derivada à esquerda** da função f no ponto a como sendo o limite (caso exista):

$$f'_-(a) = lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Nota

Quando a pertence ao domínio de f e é ponto de acumulação à direita e à esquerda, então $f'(a)$ existe se e só se existem e são iguais as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$.

Derivada e função derivada

Derivadas laterais

Exemplo

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{se } x \leq 1 \\ -x+2 & , \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Será que existe derivada da função em $x = 1$?

Derivada e função derivada

Diferenciabilidade e continuidade

OBSERVAÇÃO

Uma função pode ser contínua num ponto onde não tenha derivada. A continuidade nem sequer garante a existência de derivadas laterais.

TEOREMA

Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

Derivada e função derivada

Definição: **Função derivada**

Função derivada de uma função f ou derivada da função f é uma outra função:

- cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f tem derivada finita;
- que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

Derivada e função derivada

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = - u' \cdot \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Derivada e função derivada

Exemplos

Calcule a derivada das seguintes funções:

A) $f(x) = 1 - 2x$;

B) $g(x) = -x^4 + x^3 - 3x^2 + \frac{x}{2} + 5$;

C) $h(x) = (x^2 - 1)(7x^2 + \frac{3}{2})$;

D) $i(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^4}$.

Regra de L'Hopital

Regra de L'Hopital

❖ **Regra de L'Hopital**

A regra de L'Hopital dá-nos uma grande ajuda no cálculo dos limites de uma função quando nos deparamos com indeterminações do tipo: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$.

Nesses casos recorremos a diversos casos de factorização (por exemplo a regra de Ruffini) para levantar a indeterminação.

No entanto, a regra de L'Hopital permite-nos levantar estas indeterminações, de uma forma mais rápida, recorrendo às derivadas.

Regra de L'Hopital

Regra de L'Hopital

Se $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem uma forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, então:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

caso o limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista (sendo finito ou infinito).

Exemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2-5x-2}$, aplicando à regra de L'Hopital.

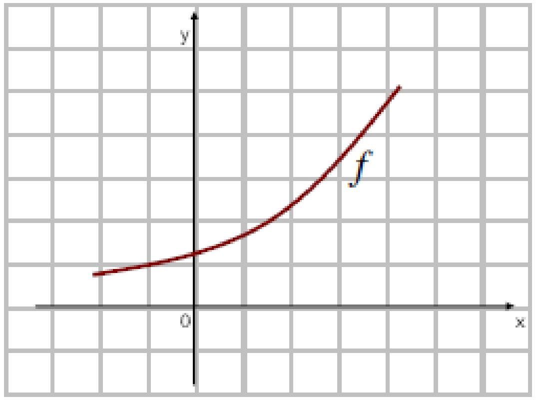
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)'}{(3x^2-5x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{6x-5}=\frac{2\times 2-1}{6\times 2-5}=\frac{3}{7}$$

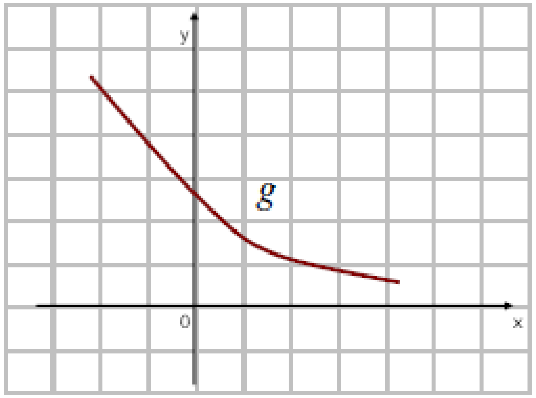
Aplicações da derivada

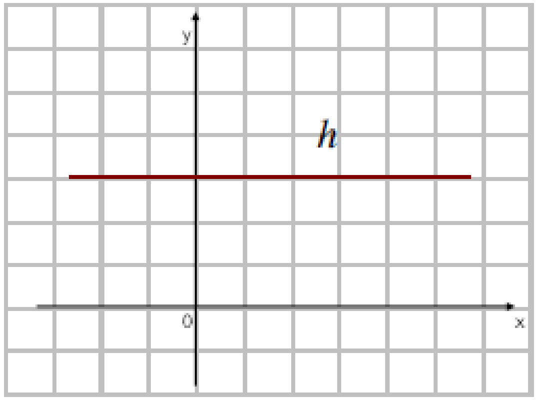
NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Aplicações da derivada

Funções estritamente crescentes e funções estritamente decrescentes







Aplicações da derivada

Seja f uma função real de variável real definida num intervalo E, e sejam a e b números de E.

- f é estritamente crescente em E quando para todos os números reais a e b de E,

$$\text{se } a < b \text{, então } f(a) < f(b)$$

- f é estritamente decrescente em E quando para todos os números reais a e b de E,

$$\text{se } a < b \text{, então } f(a) > f(b)$$

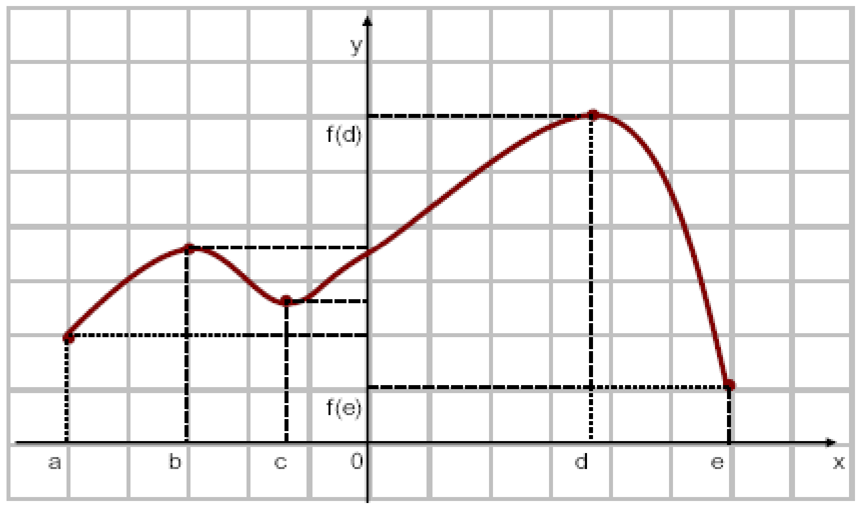
- f é constante em E quando para todos os números reais a e b de E,

$$f(a) = f(b)$$

Aplicações da derivada

Extremos de uma função

Considere-se a representação gráfica da função f:



f(d) é um máximo absoluto de f .

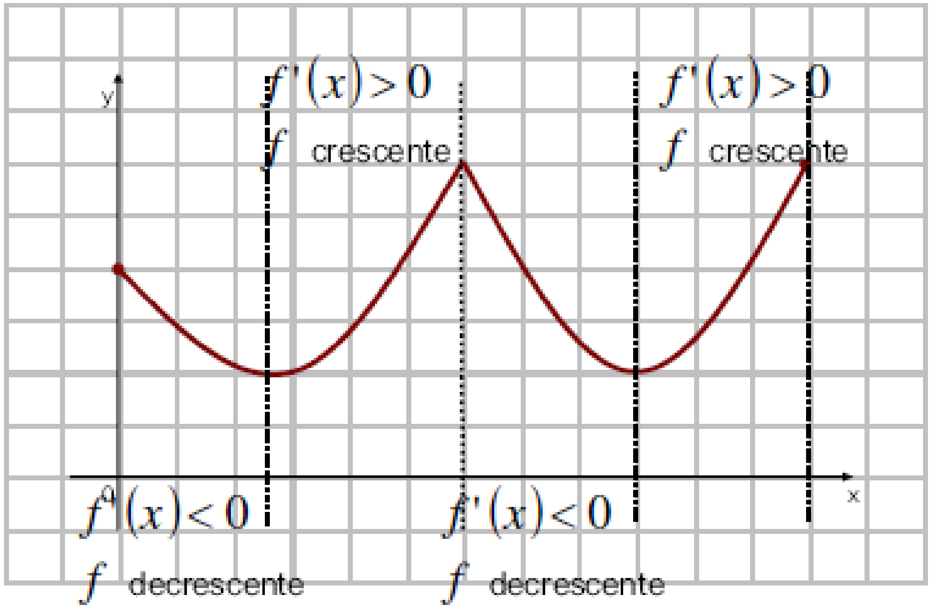
f(e) é um mínimo absoluto de f .

f(b) é um máximo relativo de f .

f(c) e f(a) são mínimos relativos de f .

Aplicações da derivada

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função:



Teorema

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$.

- Se $f'(x)>0$ para todo $x\in\,]a,b[$, então f é estritamente crescente em $[a,b]$.
- Se $f'(x)<0$ para todo $x\in\,]a,b[$, então f é estritamente decrescente em $[a,b]$.

Aplicações da derivada

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada da função:

Teorema

Se uma função f é contínua em $[a,b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a,b[$, então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Definição

Um número c do domínio de uma função f é um número crítico de f se $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Aplicações da derivada

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada da função:

Seja c um ponto crítico de f, e suponha-se que f é contínua em c e derivável num intervalo aberto E contendo c, com a possível excepção de poder não ser diferenciável em c.

- Se f' muda de positiva para negativa em c, então $f(c)$ é um máximo relativo.
- Se f' muda de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo relativo.
- Se $f'(x)>0$ ou $f'(x)<0$ para todo o x do intervalo E excepto para $x=c$, então $f(c)$ não é um extremo relativo de f.

Aplicações da derivada

Exemplo:

Determinar os extremos relativos da seguinte função: $f(x)=x^2-1$