ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL IPCA

Cap.1 – Funções reais de variável real em IR

Apontamentos da Aula 4

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL IPCA

1. Generalidades de funções

- ✓ Funções polinomiais
- ✓ Limites
  - Noção intuitiva de limite
  - Operações com limites

Funções polinomiais

Função polinomial

Definição:

Chama-se **função polinomial** a toda a função do tipo

$$f: R \to R$$

$$x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

em que $n \in N_0$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$.

Chama-se **polinómio** na variável x a toda a expressão do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

em que $n \in N_0$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$.

Num polinómio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, tem-se

$a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, ..., $a_1 x$, a_0 $\to$ os **termos**

a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 $\to$ os **coeficientes**

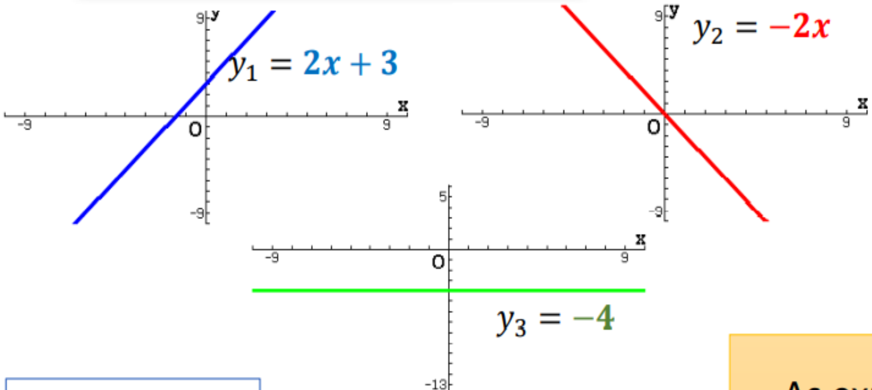
a_0 $\to$ o **termo independente**

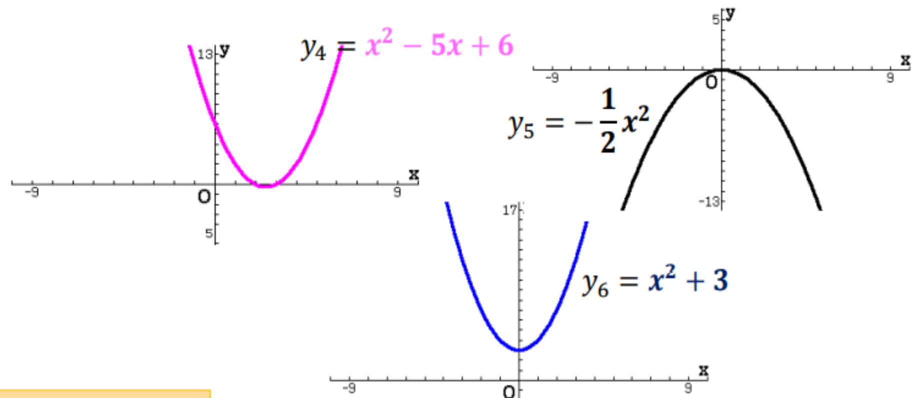
Função polinomial

Exemplos de funções polinomiais:

Funções afins
($y = ax + b$, com $a, b \in IR$)

Funções quadráticas
($y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in IR$ $a \neq 0$)





Polinómios de grau 1 ← $2x + 3$, $-2x$

Polinómio de grau 0 ← -4

As expressões das funções afins e das funções quadráticas são polinómios.

$x^2 - 5x + 6$

$-\frac{1}{2}x^2$

$x^2 + 3$

Polinómios de grau 2

Função polinomial

❖ **Operações com polinómios**

As operações com polinómios são baseadas nas propriedades operatórias dos números reais, uma vez que a variável do polinómio representa um número real.

Neste estudo apenas trataremos a operação de divisão.

Divisão de polinómios

Para calcular a divisão de polinómios em que o polinómio divisor é de grau 1, há um método simples denominado de **Regra de Ruffini**, que permite determinar os coeficientes do polinómio quociente e o resto da divisão.

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Função polinomial

❖ Regra de Ruffini:

Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de

$$M(x) = 8x^3 + 6x^2 - 9x - 5 \text{ por } N(x) = x - 1.$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & 6 & -9 & -5 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Na primeira linha, escreve-se os coeficientes do polinómio dividendo, figurando obrigatoriamente zeros como coeficientes dos termos nulos. Na segunda linha começa-se por escrever o zero do polinómio divisor, que neste exemplo é 1.

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & 6 & -9 & -5 \\ 1 & \downarrow & & & \\ \hline & 8 & & & \end{array}$$

Escreve-se na terceira linha o primeiro elemento da primeira linha.

Função polinomial

	8	6	-9	-5	+
1		8	14	5	
×	8	14	5	0	
	1×8	1×14	1×5		

Começa-se um processo iterativo que consiste em multiplicar por 1 os números que se vão obtendo por debaixo da linha horizontal e em somar esses resultados a cada um dos coeficientes do dividendo.

	8	6	-9	-5	
1		8	14	5	
	8	14	5	0	Resto

Os números 8, 14 e 5 são os coeficientes do polinómio, que é de grau 2. Assim, $Q(x) = 8x^2 + 14x + 5$ e o último resultado obtido, 0, é o resto da divisão.

<u>Nota:</u> Como o resto da divisão do polinómio $M(x)$ pelo polinómio $N(x)$ é igual a zero, dizemos que o polinómio $M(x)$ é divisível pelo polinómio $N(x)$.

Função polinomial

Factorização de polinómios

Vimos atrás que se $M(x)$ é divisível por $N(x)$, então o resto da divisão é igual a zero. Logo existe um polinómio $Q(x)$ (polinómio cociente) tal que:

$M(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$, para todo o x. (α é o zero de $N(x)$, polinómio divisor)

Diz-se que o produto $(x - \alpha) \times Q(x)$ é uma **factorização** do polinómio $M(x)$.

De um modo geral, **fatorizar um polinómio** é escrevê-lo sob a forma de um produto de fatores.

Função polinomial

Exemplo:

Fatorizar o polinómio $8x^3 + 6x^2 - 9x - 5$ em fatores, sabendo que é divisível por $x - 1$.

Resolução:

- Apliquemos a regra de Ruffini para dividir $8x^3 + 6x^2 - 9x - 5$ por $x - 1$.

$$\begin{array}{c|cccc|l} & 8 & 6 & -9 & -5 & \\ 1 & & 8 & 14 & 5 & \\ \hline & 8 & 14 & 5 & 0 & \text{Resto} \end{array}$$

Temos então, que:

$$8x^3 + 6x^2 - 9x - 5 = (x - 1) \times (8x^2 + 14x + 5)$$

Função polinomial

Exercício 5:

Decomponha em fatores os seguintes polinómios:

a) $x^2 + x - 2$ sabendo que é divisível por $x - 1$;

b) $2x^2 + x - 1$ sabendo que é divisível por $x + 1$;

c) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ sabendo que é divisível por $x + 2$;

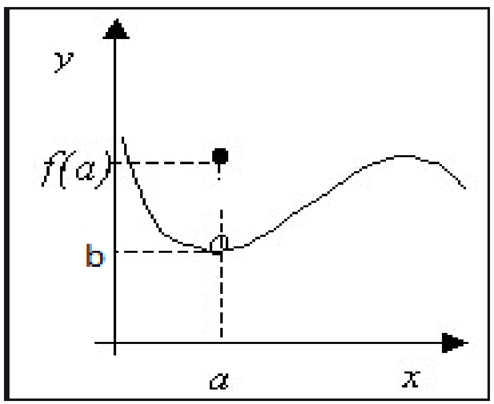
d) $2x^4 + x^3 - 2x^2 - x$ sabendo que é divisível por $x - 1$.

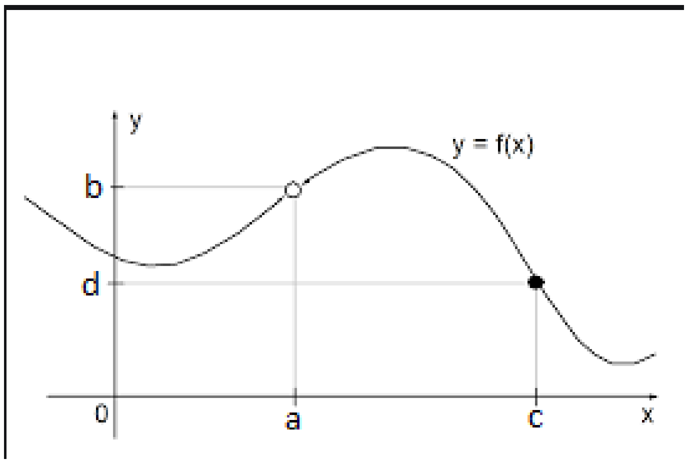
NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Limites

Noção intuitiva de limite

O significado intuitivo da expressão $\lim_{x \to a} f(x) = b$ é o de que se considerarmos apenas valores de x suficientemente próximos de a, os valores correspondentes f(x) estarão tão próximos quanto se queira de b.



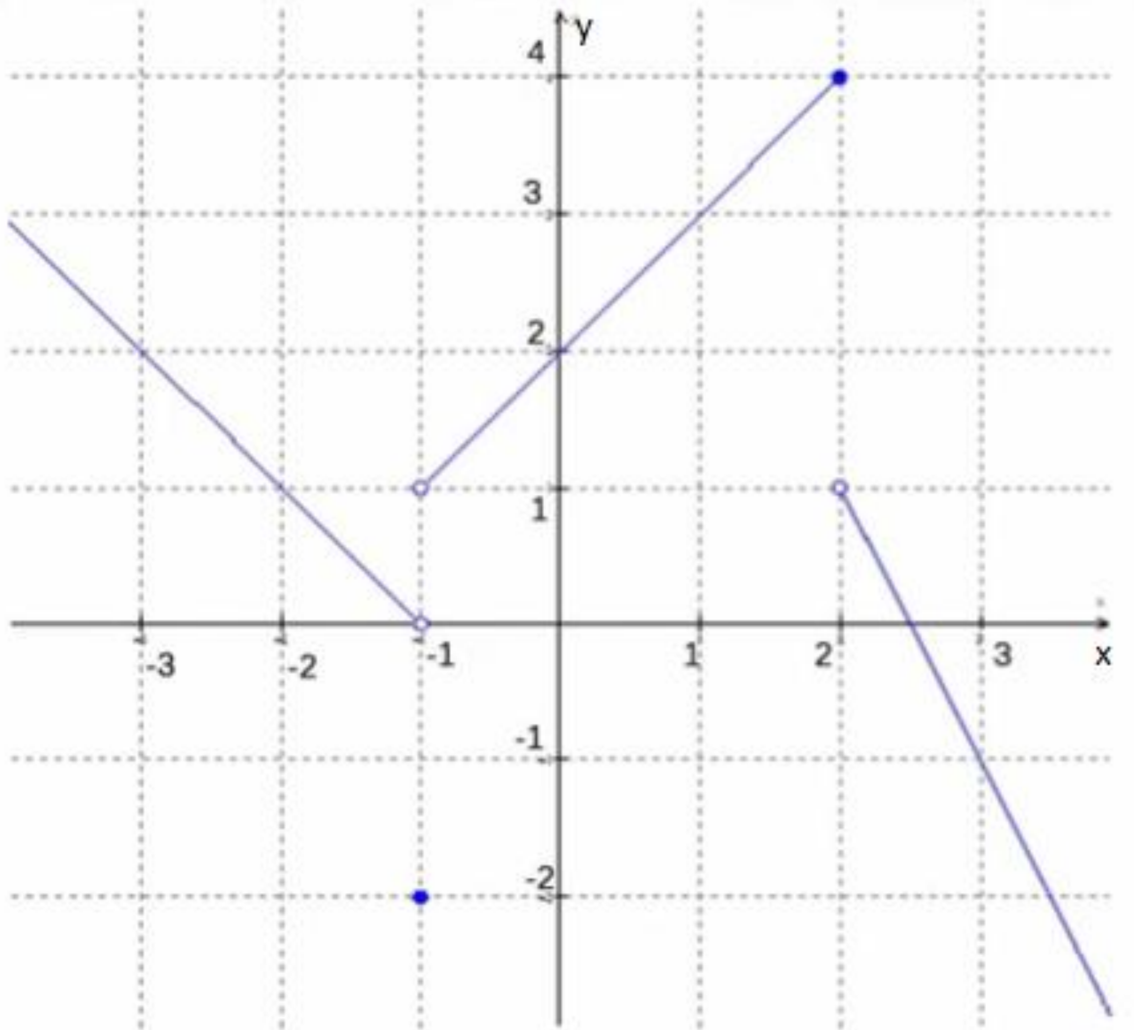


✓Não se exige assim, que o ponto a pertença ao domínio de f;

✓O facto de $\lim_{x \to a} f(x) = b$, nada nos diz acerca do valor de f(a).

Noção intuitiva de limite

Considere o gráfico seguinte:



NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Noção intuitiva de limite

Exercício 6:

Por observação do gráfico, calcule:

1. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
2. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
3. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
4. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
5. $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
6. $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
7. $\lim_{x\to 0} f(x)$
8. $\lim_{x\to -1} f(x)$
9. $\lim_{x\to 2} f(x)$
10. $\lim_{x\to 1} f(x)$
11. $\lim_{x\to 3} f(x)$

Operações com limites

❖ **Unicidade do limite**

Se o limite de uma função f(x) existe então ele é único.

Matematicamente falando temos que:

$$\boxed{\text{Se } \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to a} f(x) = A \text{, então } L = A.}$$

Nota: Para obter o limite de f(x) quando x tende para a, é suficiente, substituir em f(x) o x por a.

Operações com limites

Exercício 7:

Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 4} (x^2 + 3)$;

b) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 3x + 1)$;

c) $\lim_{x \to 2} [(2x + 4)(3x^2)]$;

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2}{x}$.

Limites

Exercícios Propostos:

❖ **Ficha de Exercícios n.º1**

Exercícios 8, 9,11

❖ **Ficha Extra n.º1**

Exercício 3, 8

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu