Allen-Cahn 方程数值格式设计

蒋鹏

2025 年 10 月 31 日

目录

1 算法设计

我们欲求解下述方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u + f(u) = 0; \tag{1}$$

求解区域为 $\Omega = [-1,1]^2$。初值条件为 $u(x,y,0) = u_0(x,y)$。其中 $f(u)$ 是非线性 $f(u) = \log \frac{u}{1-u} + \theta(1-2u) = g(u) + \theta(1-2u)$. 再定义 $F(u) = u\log u + (1-u)\log(1-u) + \theta(u-u^2)$.
利用时间向后 Euler，空间五点差分格式

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{dt} - \varepsilon^2 \Delta_h u^{n+1} + f(u^{n+1}) = 0; \tag{2}$$

做一步凸分裂格式

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{dt} - \varepsilon^2 \Delta_h u^{n+1} + g(u^{n+1}) + \theta(1-2u^n) = 0; \tag{3}$$

定义泛函

$$J(u) = \frac{\|u-u^n\|^2}{2dt} + \int_\Omega (\frac{1}{2}(\varepsilon^2|\nabla u|^2) + G(u))dx + \theta < u, 1-2u^n >; \tag{4}$$

于是格式等价于

$$u^{n+1} = \arg\min_{u\in V_h} J(u); \tag{5}$$

定义

$$F_1(u) = \frac{\|u-u^n\|^2}{2dt} + \int_\Omega (\frac{1}{2}(\varepsilon^2|\nabla u|^2))dx \tag{6}$$

和 $F_2(u)=\int_\Omega G(u)dx+\theta<u,1-2u^n>$. 进而有 $J(u)=F_1(u)+F_2(u)$。原格式等价于

$$\min_{u_1,u_2} F_1(u_1)+F_2(u_2), \quad s.t. \quad u_1=u_2; \tag{7}$$

于是有二次罚函数

$$L(u_1,u_2;Y)=F_1(u_1)+F_2(u_2)+<Y,u_1-u_2>+\frac{\rho}{2}\|u_1-u_2\|^2; \tag{8}$$

得到 ADMM 格式

$$\begin{cases} u_1^{k+1}=\arg\min_{u_1} L(u_1,u_2^k;Y^k) \\ u_2^{k+1}=\arg\min_{u_2} L(u_1^{k+1},u_2;Y^k) \\ Y^{k+1}=Y^k+\tau\rho(u_1^{k+1}-u_2^{k+1}) \end{cases} \tag{9}$$

第一个子问题有显式解，可以用 CG 或者 FFT

$$(\frac{1}{dt}-\varepsilon^2\Delta_h+\rho)u_1^{k+1}=\frac{1}{dt}u^n+\rho u_2^k-Y^k; \tag{10}$$

第二个子问题的解满足

$$\log(\frac{u_2^{k+1}}{1-u_2^{k+1}})+\theta(1-2u^n)-Y^k-\rho(u_1^{k+1}-u_2^{k+1})=0; \tag{11}$$

1.1 法一：近似

$u_2^{k+1}\approx u_2^k$,

$$u_2^{k+1}=1-\frac{1}{1+\exp\left(y^k-\theta(1-2u^n)+\rho(u_1^{k+1}-u_2^k)\right)} \tag{12}$$

1.2 法二：Newton

以 0.5 分界，找到初始迭代点保证局部凹凸性后用 Newton 迭代。

2 数值算例

2.1 算例一

取初值函数

$$u_0(x,y)=\frac{1+\sin 2\pi x\sin 2\pi y}{3} \tag{13}$$

和参数 $\theta=4.0$. 用上述算法求解，发现效果良好，可以得到预期结果。

3 算法优势

猜测：在引入并行计算的模式下，由于 ADMM 的 U_2 子问题天然并行，受网格尺度影响更小，在更小的网格尺度下会体现出加速优势，不同时间步长下可以通过调整罚函数因子改进运算速度

结果记录；取 $dt=1$，$Nx=Ny=1000$，计算一个时间步，并行化程序用 16 个计算核心：
问题：采取的 protection 边界保护策略是否有道理？

算法	cpu_time(s)	主迭代次数 (次)
admm	140.955	admm:52
admm_parallel	27.179	admm:71
newton	277.254	newton:1445
newton_parallel	30.301	newton:1508

表 1: 数值结果