Allen-Cahn 方程数值格式设计

蒋鹏

2025 年 10 月 10 日

目录

1 算法设计

我们欲求解下述方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u + f(u) = 0; \tag{1}$$

求解区域为 $\Omega = [-1, 1]^2$。初值条件为 $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$。其中 $f(u)$ 是非线性 $f(u) = \log \frac{u}{1-u} + \theta(1 - 2u) = g(u) + \theta(1 - 2u)$. 再定义 $F(u) = u \log u + (1 - u) \log (1 - u) + \theta(u - u^2)$.
利用时间向后 Euler，空间五点差分格式

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - \varepsilon^2 \Delta_h u^{n+1} + f(u^{n+1}) = 0; \tag{2}$$

做一步凸分裂格式

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - \varepsilon^2 \Delta_h u^{n+1} + g(u^{n+1}) + \theta(1 - 2u^n) = 0; \tag{3}$$

定义泛函

$$J(u) = \frac{\|u - u^n\|^2}{2dt} + \int_\Omega (\frac{1}{2}(\varepsilon^2 |\nabla u|^2) + G(u)) dx + \theta < u, 1 - 2u^n >; \tag{4}$$

于是格式等价于

$$u^{n+1} = \arg\min_{u \in V_h} J(u); \tag{5}$$

定义

$$F_1(u) = \frac{\|u - u^n\|^2}{2dt} + \int_\Omega (\frac{1}{2}(\varepsilon^2 |\nabla u|^2)) dx \tag{6}$$

和 $F_2(u) = \int_\Omega G(u)dx + \theta < u, 1-2u^n >$. 进而有 $J(u) = F_1(u) + F_2(u)$。原格式等价于

$$\min_{u_1,u_2} F_1(u_1) + F_2(u_2), \quad s.t. \quad u_1 = u_2; \tag{7}$$

于是有二次罚函数

$$L(u_1, u_2; Y) = F_1(u_1) + F_2(u_2) + < Y, u_1 - u_2 > + \frac{\rho}{2}\|u_1 - u_2\|^2; \tag{8}$$

得到 ADMM 格式

$$\begin{cases} u_1^{k+1} = \arg\min_{u_1} L(u_1, u_2^k; Y^k) \\ u_2^{k+1} = \arg\min_{u_2} L(u_1^{k+1}, u_2; Y^k) \\ Y^{k+1} = Y^k + \rho(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}) \end{cases} \tag{9}$$

第一个子问题有显式解，可以用 CG 或者 FFT

$$(\frac{1}{dt} - \varepsilon^2\Delta_h + \rho)u_1^{k+1} = \frac{1}{dt}u^n + \rho u_2^k - Y^k; \tag{10}$$

第二个子问题的解满足

$$g(u_2^{k+1}) + \theta(1-2u^n) - Y^k - \rho(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}) = 0; \tag{11}$$

1.1 法一：近似

$u_2^{k+1} \approx u_2^k$,

$$u_2^{k+1} = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left(y^k - \theta(1-2u^n) + \rho(u_1^{k+1} - u_2^k)\right)} \tag{12}$$

1.2 法二：Newton

以 0.5 分界，找到初始迭代点保证局部凹凸性后用 Newton 迭代。

2 数值算例

2.1 算例一

取初值函数

$$u_0(x,y) = \frac{1 + \sin 2\pi x \sin 2\pi y}{3} \tag{13}$$

和参数 $\theta = 4.0$. 用上述算法求解，发现效果良好，可以得到预期结果。这是一次测试