

Allen-Cahn 方程数值格式设计

蒋鹏

2025 年 10 月 12 日

目录

1 算法设计	1
1.1 法一：近似	2
1.2 法二：Newton	2
2 数值算例	2
2.1 算例一	2
3 数值问题	2

1 算法设计

我们欲求解下述方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u + f(u) = 0; \quad (1)$$

求解区域为 $\Omega = [-1, 1]^2$ 。初值条件为 $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ 。其中 $f(u)$ 是非线性 $f(u) = \log \frac{u}{1-u} + \theta(1-2u) = g(u) + \theta(1-2u)$ 。再定义 $F(u) = u \log u + (1-u) \log(1-u) + \theta(u-u^2)$ 。

利用时间向后 Euler，空间五点差分格式

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - \varepsilon^2 \Delta_h u^{n+1} + f(u^{n+1}) = 0; \quad (2)$$

做一步凸分裂格式

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - \varepsilon^2 \Delta_h u^{n+1} + g(u^{n+1}) + \theta(1-2u^n) = 0; \quad (3)$$

定义泛函

$$J(u) = \frac{\|u - u^n\|^2}{2dt} + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}(\varepsilon^2 |\nabla u|^2) + G(u) \right) dx + \theta \langle u, 1 - 2u^n \rangle; \quad (4)$$

于是格式等价于

$$u^{n+1} = \arg \min_{u \in V_h} J(u); \quad (5)$$

定义

$$F_1(u) = \frac{\|u - u^n\|^2}{2dt} + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}(\varepsilon^2 |\nabla u|^2) \right) dx \quad (6)$$

和 $F_2(u) = \int_{\Omega} G(u)dx + \theta < u, 1 - 2u^n >$. 进而有 $J(u) = F_1(u) + F_2(u)$ 。原格式等价于

$$\min_{u_1, u_2} F_1(u_1) + F_2(u_2), \quad s.t. \quad u_1 = u_2; \quad (7)$$

于是有二次罚函数

$$L(u_1, u_2; Y) = F_1(u_1) + F_2(u_2) + < Y, u_1 - u_2 > + \frac{\rho}{2} \|u_1 - u_2\|^2; \quad (8)$$

得到 ADMM 格式

$$\begin{cases} u_1^{k+1} = \arg \min_{u_1} L(u_1, u_2^k; Y^k) \\ u_2^{k+1} = \arg \min_{u_2} L(u_1^{k+1}, u_2; Y^k) \\ Y^{k+1} = Y^k + \tau \rho (u_1^{k+1} - u_2^{k+1}) \end{cases} \quad (9)$$

第一个子问题有显式解，可以用 CG 或者 FFT

$$(\frac{1}{dt} - \varepsilon^2 \Delta_h + \rho) u_1^{k+1} = \frac{1}{dt} u^n + \rho u_2^k - Y^k; \quad (10)$$

第二个子问题的解满足

$$\log\left(\frac{u_2^{k+1}}{1 - u_2^{k+1}}\right) + \theta(1 - 2u^n) - Y^k - \rho(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}) = 0; \quad (11)$$

1.1 法一：近似

$$u_2^{k+1} \approx u_2^k, \quad u_2^{k+1} = 1 - \frac{1}{1 + \exp(y^k - \theta(1 - 2u^n) + \rho(u_1^{k+1} - u_2^k))} \quad (12)$$

1.2 法二：Newton

以 0.5 分界，找到初始迭代点保证局部凹凸性后用 Newton 迭代。

2 数值算例

2.1 算例一

取初值函数

$$u_0(x, y) = \frac{1 + \sin 2\pi x \sin 2\pi y}{3} \quad (13)$$

和参数 $\theta = 4.0$. 用上述算法求解，发现效果良好，可以得到预期结果。

3 数值问题

1. 当前主要问题：能量函数不递减！数值实验发现与 ρ 的取值有关系，但是和理论分析不一致。
2. 当 ρ 很大，可以加速 CG 收敛，但 U_1 在迭代中可能出现越界，严重影响 u_2 的 Newton 迭代初值选取！