偏微分方程数值解 + 第二次上机作业

2100012131 蒋鹏

2025 年 10 月 15 日

目录

1 问题描述

在指定区域上 Ω 求解 Robin 边值问题的 Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中区域 Ω 如图1所示。

2 算法设计

2.1 区域离散

在 x 和 y 方向以相同尺度 h 进行均匀剖分。令 $N = 1/h$, 自下而上，从左至右，对 Domain 内的点及边界点进行编号，$0 \le i \le 4N$,$0 \le j \le j\_num[i]$。所有点可分为三类：内点，边界点及临边界点，角点。

2.2 算子离散

对于不同点进行不同格式离散：

对于内点，采取五点差分格式离散 Laplace 算子。

对于边界点，采取前向或者后向差商格式离散梯度，进而离散方向导数。

对于临边界点，即该点 (x, y) 非内点且不位于边界，则在边界上最近点为 (x^*, y^*)，以点 (x, y) 的

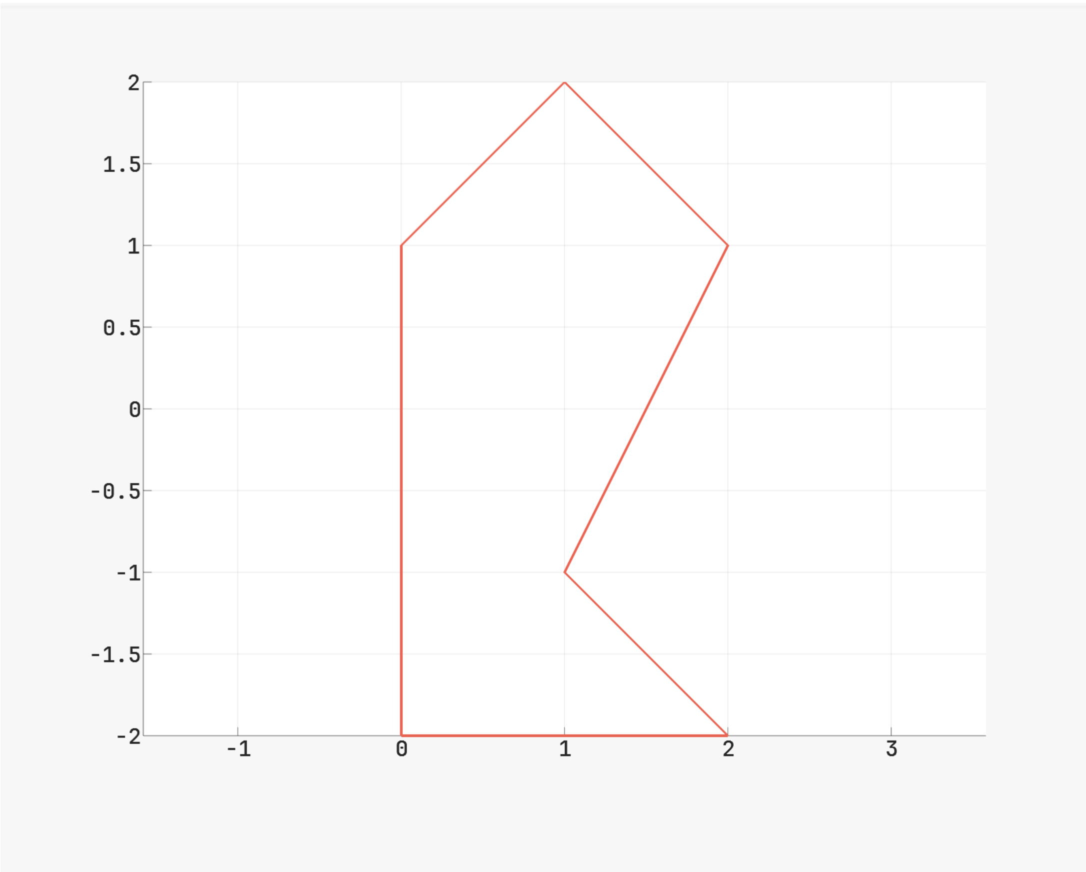

图 1: Domain

差商近似 (x^*, y^*) 的梯度，进而离散方向导数。

对于角点，我们规定其左侧边界为其外法向，于是所有角点有唯一外法向且每条边界有唯一端点与其同外法向。

2.3 方程求解

此线性方程组较为复杂，我们采取 Gauss-Seidel 的 SOR 迭代法进行求解。同时我们也采取了 Jacobi 迭代进行对比。此两种迭代法实现简单，只需在每次遍历中对每个点进行相应更新即可。

不采取共轭梯度法与多重网格算法的原因是：该方程组非对称正定，算法收敛性无保证。

可能的改进：Preconditioner，GMRES(m)

测试 GMRES 方法，由于矩阵条件数太大，数值不稳定，转而寻求 Precondition 或 MG 方法！

3 数值实验