# 偏微分方程数值解 + 第二次上机作业

2100012131 蒋鹏

2025 年 10 月 10 日

## 目录



## 1 问题描述

在指定区域上 $\Omega$ 求解 Robin 边值问题的 Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中区域 $\Omega$ 如图1所示。

## 2 算法设计

### 2.1 区域离散

在 $x$ 和 $y$ 方向以相同尺度 $h$ 进行均匀剖分。令 $N = 1/h$, 自下而上，从左至右，对 Domain 内的点及边界点进行编号，$0 \le i \le 4N$,$0 \le j \le j\_num[i]$。所有点可分为三类：内点，边界点及临边界点，角点。

### 2.2 算子离散

对于不同点进行不同格式离散：
对于内点，采取五点差分格式离散 Laplace 算子。
对于边界点，采取前向或者后向差商格式离散梯度，进而离散方向导数。
对于临边界点，即该点 $(x, y)$ 非内点且不位于边界，则在边界上最近点为 $(x^*, y^*)$，以点 $(x, y)$ 的

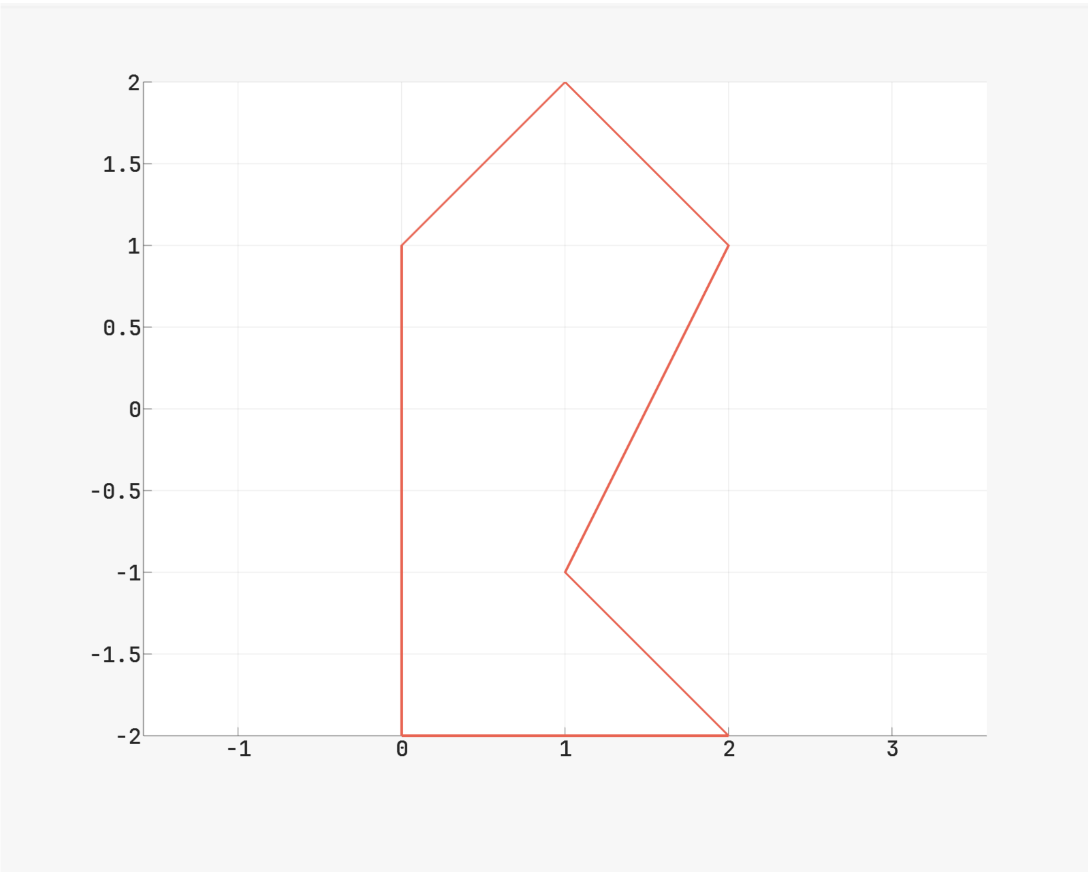


图 1: Domain

差商近似 $(x^*, y^*)$ 的梯度，进而离散方向导数。
对于角点，我们规定其左侧边界为其外法向，于是所有角点有唯一外法向且每条边界有唯一端点与其同外法向。

### 2.3 方程求解

此线性方程组较为复杂，我们采取 Gauss-Seidel 的 SOR 迭代法进行求解。同时我们也采取了 Jacobi 迭代进行对比。此两种迭代法实现简单，只需在每次遍历中对每个点进行相应更新即可。
不采取共轭梯度法与多重网格算法的原因是：该方程组非对称正定，算法收敛性无保证。
可能的改进：Precondition，GMRES

## 3 数值实验