

偏微分方程数值解 + 第二次上机作业

2100012131 蒋鹏

2025 年 10 月 12 日

目录

1 问题描述	1
2 算法设计	1
2.1 区域离散	1
2.2 算子离散	1
2.3 方程求解	3
3 数值实验	3

1 问题描述

在指定区域上 Ω 求解 Robin 边值问题的 Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中区域 Ω 如图1所示。

2 算法设计

2.1 区域离散

在 x 和 y 方向以相同尺度 h 进行均匀剖分。令 $N = 1/h$, 自下而上, 从左至右, 对 Domain 内的点及边界点进行编号, $0 \leq i \leq 4N, 0 \leq j \leq j_num[i]$ 。所有点可分为三类: 内点, 边界点及临边界点, 角点。

2.2 算子离散

对于不同点进行不同格式离散:

对于内点, 采取五点差分格式离散 Laplace 算子。

对于边界点, 采取前向或者后向差商格式离散梯度, 进而离散方向导数。

对于临边界点, 即该点 (x, y) 非内点且不位于边界, 则在边界上最近点为 (x^*, y^*) , 以点 (x, y) 的

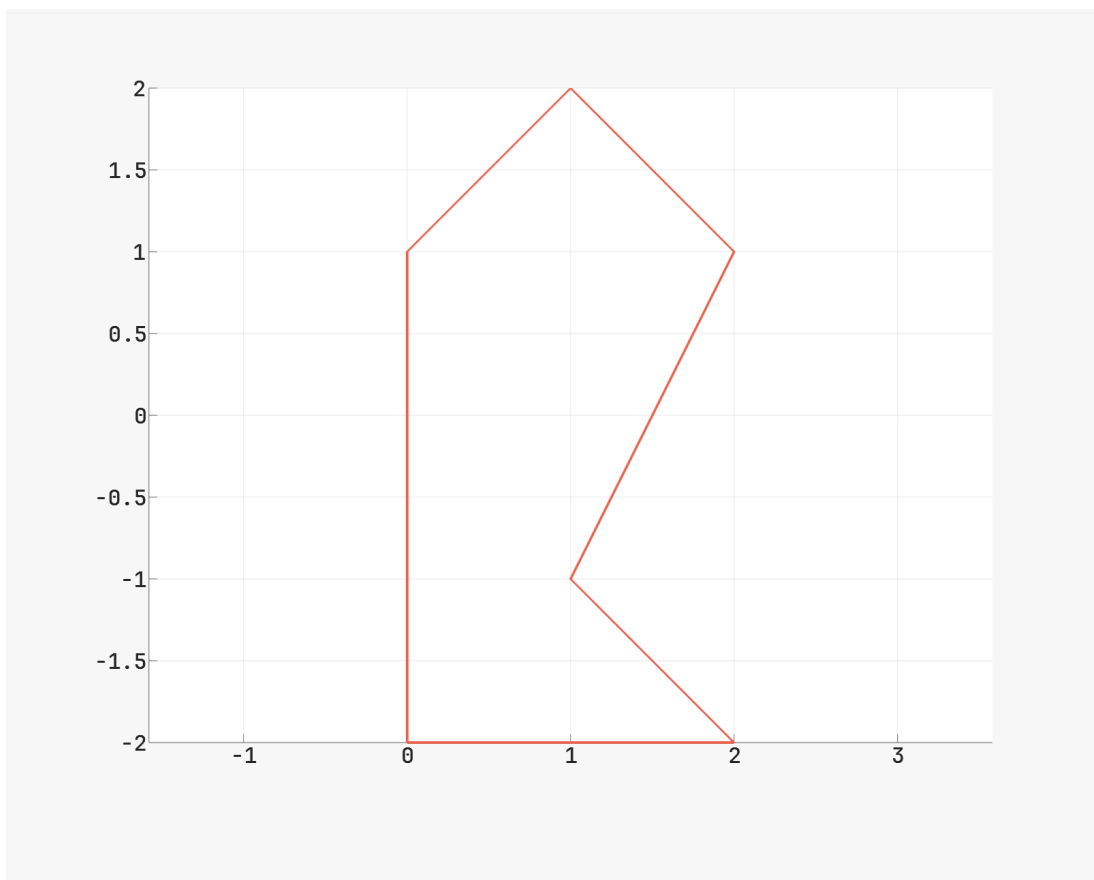


图 1: Domain

差商近似 (x^*, y^*) 的梯度，进而离散方向导数。

对于角点，我们规定其左侧边界为其外法向，于是所有角点有唯一外法向且每条边界有唯一端点与其同外法向。

2.3 方程求解

此线性方程组较为复杂，我们采取 Gauss-Seidel 的 SOR 迭代法进行求解。同时我们也采取了 Jacobi 迭代进行对比。此两种迭代法实现简单，只需在每次遍历中对每个点进行相应更新即可。

不采取共轭梯度法与多重网格算法的原因是：该方程组非对称正定，算法收敛性无保证。

可能的改进：Precondition, GMRES(m)

3 数值实验