

偏微分方程数值解 + 第一次上机作业

2100012131 蒋鹏

2025 年 9 月 23 日

目录

1 问题描述	1
2 算法设计	1
2.1 CSR 存储格式	1
2.2 Laplacian 矩阵构造	1
2.3 矩阵向量乘法	2
2.4 取矩阵的上、下三角、对角部分	2
3 数值实验	2

1 问题描述

实现稀疏矩阵的 CSR 存储格式 (Compressed Sparse Row), 需要实现的核心功能包括:

1. 该存储格式的主要元素, 包括: 非零元个数, 矩阵行列, 非零元行列索引以及元素值
2. 构造稀疏矩阵 (可以以 2 维 Dirichlet 边界 Poisson 方程系数矩阵为例)
3. 基本操作: 矩阵向量乘法, 取矩阵上, 下三角部分, 取对角线部分 (服务于迭代 Jacobi 等线性方程组求解方法)

另外我们自己设计了一些其他功能: 输出稀疏矩阵的 matrix form, 修改某指定位置的元素 (不改变非零元位置)。

2 算法设计

2.1 CSR 存储格式

首先存储稀疏矩阵的基本信息, 包括矩阵的行数 row , 列数 col 以及非零元的个数 num 。然后, 我们采取三元组法来存储稀疏矩阵, 即用三个一维数组来分别存储非零元的值、列索引以及行指针。具体来说, 我们定义以下三个数组:

1. 值数组 $values$: 存储矩阵中所有非零元的值, 长度为 num 。
2. 列索引数组 col_idx : 存储每个非零元所在的列索引, 长度为 num 。

3. 行指针数组 `row_ptr`: 存储当前行的第一个非零元在值数组中的位置, 长度为 $row+1$ 。其中, `row_ptr[i]` 表示第 i 行的第一个非零元在 `values` 数组中的位置, 于是 `row_ptr[i] - row_ptr[i-1]` 即为第 i 行的非零元个数。 ($1 \leq i \leq row$)

2.2 Laplacian 矩阵构造

对于二维 Dirichlet 边界 Poisson 方程, 我们使用五点差分格式来离散化该方程, 从而得到一个稀疏矩阵。假设我们在一个 $(n+2) \times (n+2)$ 的网格上进行离散化, 需要求解的内部节点为 $n \times n$ 个, 因此矩阵的大小为 $n^2 \times n^2$ 。每个内部节点与其上下左右四个邻居节点相连, 进行 naive 的扫描构造矩阵, 注意特殊点的处理即可。

2.3 矩阵向量乘法

矩阵向量乘法的实现比较简单, 我们只需要遍历每一行的非零元, 然后将对应的值与向量中的元素相乘并累加即可。具体来说, 对于第 i 行 ($0 \leq i \leq row-1$), 我们从 `row_ptr[i]` 到 `row_ptr[i+1]-1` 遍历所有非零元, 然后将这些非零元与向量中的对应元素相乘并累加, 最终得到结果向量的第 i 个元素。

2.4 取矩阵的上、下三角、对角部分

取矩阵的上、下三角以及对角部分的实现也比较简单。以上三角矩阵为例, 我们只需要遍历每一行的非零元, 然后将列索引大于行索引的非零元保留下来即可。于是我们完成了分解: $A=L+U+D$, 这将服务于设计迭代法。

3 数值实验

首先测试 CSR 格式的读取、存储、输出, 顺便验证矩阵向量乘法功能以及取上三角、下三角、对角部分。测试输入为文件 `SpM_input.txt`, 向量 x 为全 1 向量。

其次测试 Laplacian 矩阵的构造功能, 测试数据为 $n=5$ 。

数值结果见 `output.txt`。