偏微分方程数值解 + 第一次上机作业

2100012131 蒋鹏

2025 年 10 月 6 日

目录

1 问题描述

实现稀疏矩阵的 CSR 存储格式 (Compressed Sparse Row), 需要实现的核心功能包括：

1. 该存储格式的主要元素，包括：非零元个数，矩阵行列，非零元行列索引以及元素值

2. 构造稀疏矩阵（可以以 2 维 Dirichlet 边界 Poisson 方程系数矩阵为例）

3. 基本操作：矩阵向量乘法，取矩阵上，下三角部分，取对角线部分（服务于迭代 Jacobi 等线性方程组求解方法）

另外我们自己设计了一些其他功能：输出稀疏矩阵的 matrix form，修改某指定位置的元素（不改变非零元位置）。

2 算法设计

2.1 CSR 存储格式

首先存储稀疏矩阵的基本信息，包括矩阵的行数 row，列数 col 以及非零元的个数 num。然后，我们采取三元组法来存储稀疏矩阵，即用三个一维数组来分别存储非零元的值、列索引以及行指针。具体来说，我们定义以下三个数组：

1. 值数组 $values$：存储矩阵中所有非零元的值，长度为 num。

2. 列索引数组 col_idx：存储每个非零元所在的列索引，长度为 num。

3. 行指针数组 row_ptr：存储当前行的第一个非零元在值数组中的位置，长度为 $row+1$。其中，$row\_ptr[i]$ 表示第 i 行的第一个非零元在 $values$ 数组中的位置，于是 $row\_ptr[i]-row\_ptr[i-1]$ 即为第 i 行的非零元个数。（$1 \leq i \leq row$）

2.2 Laplacian 矩阵构造

对于二维 Dirichlet 边界 Poisson 方程，我们使用五点差分格式来离散化该方程，从而得到一个稀疏矩阵。假设我们在一个 $(n+2)\times(n+2)$ 的网格上进行离散化，需要求解的内部节点为 $n\times n$ 个，因此矩阵的大小为 $n^2\times n^2$。每个内部节点与其上下左右四个邻居节点相连，进行 naive 的扫描构造矩阵，注意特殊点的处理即可。

2.3 矩阵向量乘法

矩阵向量乘法的实现比较简单，我们只需要遍历每一行的非零元，然后将对应的值与向量中的元素相乘并累加即可。具体来说，对于第 i 行 $(0 \leq i \leq row-1)$，我们从 $row\_ptr[i]$ 到 $row\_ptr[i+1]-1$ 遍历所有非零元，然后将这些非零元与向量中的对应元素相乘并累加，最终得到结果向量的第 i 个元素。

2.4 取矩阵的上、下三角、对角部分

取矩阵的上、下三角以及对角部分的实现也比较简单。以上三角矩阵为例，我们只需要遍历每一行的非零元，然后将列索引大于行索引的非零元保留下来即可。于是我们完成了分解：A=L+U+D，这将服务于设计迭代法。

3 数值实验

首先测试 CSR 格式的读取、存储、输出, 顺便验证矩阵向量乘法功能以及取上三角、下三角、对角部分。测试输入为文件 SpM_input.txt，向量 x 为全 1 向量。

其次测试 Laplacian 矩阵的构造功能，测试数据为 n=5。

数值结果见 output.txt。