科学机器学习 +HW1 报告

2100012131 蒋鹏

2025 年 10 月 25 日

目录

1 问题描述

对于计算区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上的二维对流扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot ([u; v]c) = \nabla \cdot (D\nabla c) \tag{1}$$

其中 $c(t, x, y)$ 代表物质浓度。速度场 $[u; v] = [1; 0]$，扩散系数 $D = 0.01$. 初始条件满足 $c(0, x, y) = 0$。上下边界为周期边界条件，左边为入流条件满足

$$c(t, 0, y) = \begin{cases} 1, 1/3 < y < 2/3 \\ 0, \text{其他} \end{cases} \tag{2}$$

右边为出流条件，满足 $\frac{\partial c(t,1,y)}{\partial \vec{n}} = 0$, 这里可以假设 $c(t, x, y) = c(t, 1, y)$ 当 $x > 1$.

2 问题 1

采用有限体积方法，$dx = dy = 0.005$, 求解上述对流扩散方程，计算到 $T = 1.5$.

2.1 计算格式

这是一个关于空间导数为散度型的方程，进行有限体积推导，得到

$$c'_{i,j} \approx \frac{D}{h^2}(c_{i,j+1} + c_{i,j-1} + c_{i-1,j} + c_{i+1,j} - 4c_{i,j}) + \frac{c_{i-1/2,j} - c_{i+1/2,j}}{h} \tag{3}$$

已知速度场分布，利用迎风格式近似中点函数值；再在时间方向上用一阶向前 Euler 离散，得到数值格式

$$c_{i,j}^{n+1} = \frac{Ddt}{h^2}(c_{i,j+1}^n + c_{i,j-1}^n + c_{i-1,j}^n + c_{i+1,j}^n - 4c_{i,j}^n) + \frac{dt}{h}(c_{i-1,j}^n - c_{i,j}^n) \tag{4}$$

2.2 时间步长

1 这是一个对流扩散方程，根据对流项的 CFL 条件和扩散方程的 L^2 稳定的 Von Neumann 条件:

$$\begin{cases} dt \le dx \\ \frac{2Ddt}{h^2} \le 1/2 \end{cases} \tag{5}$$

代入计算，得到 $dt \le 6.25e-4$，所以我们取 $dt = 5e-4$。

2 若选择 $dt = 0.01$，在两个临界点 $(0, 1/3), (0, 2/3)$ 的附近，解出现负数值，与物理背景实际不符；而在其他大范围内，解将会出现爆破，即数值上趋于 ∞。

2.3 结果展示

以图片形式展示结果.

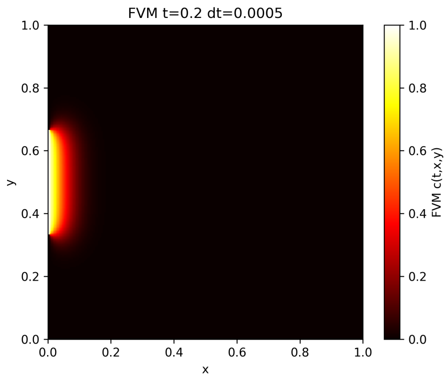
3 问题 2

采用基于正交分解的降阶模型对上述问题进行计算. 首先写出离散后的方程

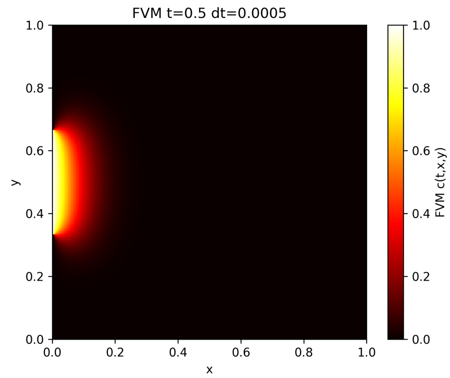
$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = A\vec{c} + f \tag{6}$$

其中 A 是对流扩散方程离散后的矩阵，f 是边界条件的作用。

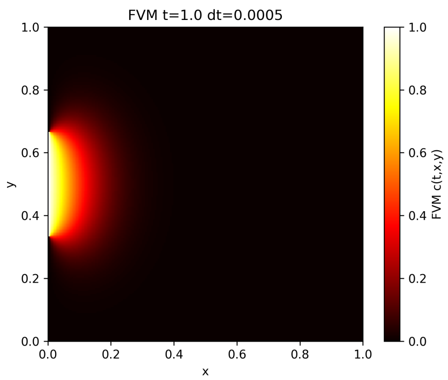
4 问题 3



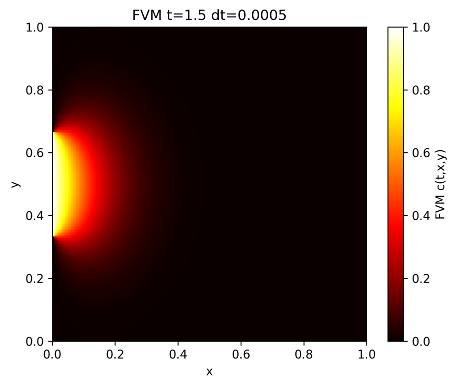
(a) FVM t=0.2 dt=0.0005



(b) FVM t=0.5 dt=0.0005



(c) FVM t=1.0 dt=0.0005



(d) FVM t=1.5 dt=0.0005

图 1: results of FVM