Date Due

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS) :

Paris.................... 5 fr. | Dép. et Union postale...... 6 fr.

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 200 pages au moins.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
DOCTEUR ÈS SCIENCES,

ÉMILE LEMOINE,
INGÉNIEUR CIVIL,

ANCIENS ÉLÈVES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME II. — 1895.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

A NOS LECTEURS.

Nous ne saurions nous dispenser, en inaugurant cette deuxième année de publication, d'adresser à nos correspondants et collaborateurs l'expression de notre reconnaissance. Grâce à eux, la tentative scientifique que nous avons faite est dès maintenant assurée d'un succès qui dépasse certainement nos premières espérances.

Il suffit de parcourir la collection de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* de 1894, pour se rendre compte de la variété des questions, et surtout des services qu'il a déjà rendus. Nous pourrions difficilement essayer ici de le montrer par des exemples ; mais nous pouvons dire, d'une manière générale, que, soit dans le domaine de la Science pure et de l'Enseignement, soit dans celui de l'Histoire et de la Bibliographie, et parfois des applications, bien des points ont été élucidés qui ne l'auraient pas été sans ce modeste Recueil.

La combinaison de propositions originales et inattendues en a souvent suggéré et provoqué de nouvelles. L'empressement qu'ont mis nos collaborateurs à nous donner des réponses souvent puisées à des sources d'informations très différentes montre à quel point nous avions raison de dire, en fondant l'*Intermédiaire,* qu'une question de nature à embarrasser un chercheur pouvait très bien être depuis longtemps en la possession d'un autre. Enfin, notre Publication a fourni l'occasion de quelques recherches tout à fait nouvelles.

Et cependant, ainsi que nous avons dû le répéter à bien des reprises dans nos *avis divers,* ou dans des Notes à part, nous nous sommes trouvés en présence de difficultés qui n'étaient pas sans exercer une influence malheureuse sur la marche de la Publication, et qui paralysaient dans une certaine mesure les heureux effets que nous attendions. Ces difficultés tenaient à notre succès même. Les matériaux que nous recevions se trouvant en excès, relativement à la place disponible, il fallait bien, par la force des choses, retarder beaucoup l'insertion de questions ou de réponses d'un grand intérêt. Aujourd'hui, grâce à la libéralité de plusieurs généreux collaborateurs, grâce aussi à la largeur d'esprit de MM. Gauthier-Villars, qui n'ont pas hésité à nous donner toute la latitude possible pour augmenter plusieurs numéros, nous arrivons à une situation plus normale, et nous sommes bien près d'atteindre la période que nous avons plusieurs fois qualifiée d'*état de régime,* ce qui fait bien comprendre notre pensée.

Il est donc à prévoir que nous pourrons désormais arriver à une insertion rapide, sinon immédiate, des questions qu'on nous adressera, et que l'*Intermédiaire* deviendra de plus en plus un instrument *pratique,* permettant d'obtenir dans un délai assez court le renseignement, l'indication scientifique, la donnée bibliographique dont on a besoin pour continuer une étude entreprise.

Nous voudrions plus encore, l'ambition humaine n'ayant jamais de limites. Il nous semble que l'*Intermédiaire* doit arriver à étendre encore davantage son action, à pénétrer dans des milieux scientifiques où il paraît être encore ignoré, et notamment parmi les personnes qui ont à s'occuper des applications de la Mathématique. Nous comptons exclusivement pour y arriver sur la propagande de nos lecteurs.

Nous avons à remercier aussi les Directeurs des Publications scientifiques qui ont bien voulu nous offrir l'échange, et les auteurs qui nous adressent à chaque instant des Ouvrages publiés par eux. Nous devons même nous excuser à ce sujet, car notre cadre ne nous permettait pas, jusqu'ici, de mentionner ces envois. Ainsi que nous l'avons annoncé dans les *avis divers* du numéro de décembre dernier, nous donnerons cette année, au moins tous les deux mois, sous le titre ***Publications récentes***, un Bulletin bibliographique, forcément très sommaire, mais que le lecteur consultera néanmoins avec utilité dans bien des circonstances.

Malgré les heureuses modifications que nous venons d'indiquer, l'insertion des réponses ne pourra pas toujours être immédiate. Nous userons alors, au besoin, du procédé que nous avons employé déjà souvent, et qui consiste à communiquer la réponse à l'auteur de la question correspondante; nous devons croire, en effet, qu'il y est plus intéressé que tout autre, et nous considérons comme un devoir d'abréger autant que possible son attente, même au prix d'un peu de travail de correspondance supplémentaire.

D'un autre côté, il nous arrivera fréquemment aussi, comme par le passé, d'avoir recours à des correspondants dont nous connaissons la compétence spéciale pour les prier de nous venir en aide lorsque la nôtre est en défaut. Cet appel n'a jamais été fait en vain, et nous exprimons tout spécialement notre reconnaissance à ces bienveillants collaborateurs qui continueront, nous en sommes certains, à nous montrer le même empressement et la même amabilité.

Il y a un an, nous disions à nos lecteurs : ce journal sera surtout le vôtre; c'est par votre collaboration qu'il est appelé à vivre.

Vous voyez que nous pouvons tenir aujourd'hui le même langage en nous appuyant sur une année d'expérience.

La Table des auteurs qui termine l'année 1894 permet, à elle seule, de se rendre compte du concours empressé qui a été apporté à l'*Intermédiaire*. Un grand nombre de noms illustres, dans les pays où existe une culture scientifique, y figurent à côté de travailleurs modestes ou même de débutants, dont quelques-uns demain peut-être seront célèbres. De cette collaboration multiple, de cette promiscuité bienfaisante, sans hiérarchie, sans luttes d'amour-propre, de ces renseignements donnés obligeamment par des maîtres à des inconnus, est sorti déjà un résultat utile. Nous demandons à tous la continuation de cette bonne volonté, de cet effort constant, n'ayant d'autre inspiration que l'amour de la Science et le culte de la vérité.

La Rédaction.

OBSERVATIONS DIVERSES.

a. — Les indications entre crochets qui suivent le numéro de chaque question correspondent à celles de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.* Nous prions instamment les Auteurs de questions de vouloir bien donner eux-mêmes les indications dont il s'agit; à leur défaut, la Rédaction se chargera de ce soin, mais la classification pourra fort bien être alors moins précise et moins exacte.

b. — Quand une question porte l'indication (S) à la suite de son numéro, cela veut dire que l'auteur possède une solution, mais qu'il désirerait en obtenir une autre.

c. — Les signatures *en italiques* correspondent à des pseudonymes adoptés par les Auteurs. Les signatures réelles seront au contraire imprimées EN PETITES CAPITALES.

d. — Nous nous ferons un plaisir de communiquer à nos Correspondants, sur la demande qu'ils nous feront, leurs adresses réciproques, à moins, évidemment, qu'un Collaborateur ne nous ait exprimé le désir de garder un Anonyme absolu.

e. — Nous ne saurions trop recommander à nos Collaborateurs de nous adresser leurs Communications *écrites d'un seul côté de la feuille de papier.* Cette recommandation est tout à fait essentielle au point de vue de la composition typographique.

f. — Nous donnons ci-après les indications abrégées d'un certain nombre de *Recueils périodiques* auxquels nous aurons souvent à renvoyer le lecteur. Nous nous réservons de compléter ultérieurement cette liste.

A. D. M. — Annali di Matematica (Milan).
A. E. N. — Annales de l'École Normale (Paris).
A. F. — Association française pour l'avancement des Sciences.
A. G. — Annales de Gergonne.
A. Gr. — Archives de Grunert (Leipzig); (et continuation).
A. J. M. — American Journal of Mathematics (Baltimore).
A. M. — Acta mathematica (Stockholm).

A. M. C. — Archiv for Mathematik (Christiania).
A. T. — Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
B. A. B. — Bulletin de l'Académie de Belgique (Bruxelles).
B. D. — Bulletin des Sciences mathématiques de M. Darboux.
B. M. — Bibliotheca mathematica de M. G. Eneström (Stockholm).
B. M. S. — Bulletin de Mathématiques spéciales de M. Niewenglowski (Paris).
C. — Casopis (Prague).
C. A. A. — Comptes rendus de l'Académie des Sciences d'Amsterdam.
C. M. P. — Circolo matematico (Palerme).
C. R. — Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris).
Cr. — Journal de Crelle, et continuations (Berlin).
E. T. — Educational Times (Londres).
G. B. — Giornale di Matematiche, de Battaglini (Naples).
J. B. — Jahrbuch über die Fortschritte... (Berlin).
J. E. P. — Journal de l'École Polytechnique (Paris).
J. E., J. S. — Journal de Mathématiques élémentaires, de Mathématiques spéciales, de M. de Longchamps (Paris).
J. M. — Journal de Liouville, et continuations (Paris).
J. S. M. — Jornal de Sciencias matematicas (Coïmbre).
M. — Mathesis (Gand).
M. A. — Mathematische Annalen (Leipzig).
M. A. P. — Mémoires de l'Académie de Paris.
MH. — Monatshefte... (Vienne).
M. M. — The Messenger of Mathematics (Londres et Cambridge).
M. M. F. — Mathematical Monthly, de Finkel (Missouri).
N. A. — Nouvelles Annales de Mathématiques (Paris).
N. C. — Nouvelle Correspondance mathématique (Bruxelles).
P. M. — Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario (Rome).
P. M. S. — Progreso Matematico, de M. de Galdéano (Saragosse).
Q. J. — The Quarterly Journal.... (Londres).
R. M. — Rivista di Matematica (Turin).
R. M. S. — Revue de Mathématiques spéciales (Paris).
S. M. — Société mathématique de France (Paris).
S. M. A. — Société mathématique d'Amsterdam.
S. M. K. — Société mathématique de Kharkow.
S. M. L. — Société mathématique de Londres.
S. M. M. — Société mathématique de Moscou.
S. P. — Société philomathique de Paris.

S. R. L. — Société royale de Londres.

T. M. — Tidsskrifft for Mathematik (Copenhague).

T. R. S. L. — Philosophical Transactions of the Royal Society (Londres).

W. O. — Wiskundige opgaven (Amsterdam).

Z. — Zeitschrift für Mathematik (Dresde).

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

QUESTIONS.

401. [A3c] Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des polynomes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degrés égaux à m, tels que les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\ldots, f_n = 0$ aient leurs m^n solutions finies et distinctes. Soient

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

ces solutions; soit $D = \dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$; on suppose que D ne s'annule pas avec les f. On pose

$$f_i = (x_1 - \alpha_{1j}) f_{i1}^j + \ldots + (x_n - \alpha_{nj}) f_{in}^j,$$

et cela de telle sorte que les f_{ik}^j ne changent pas quand on permute à la fois α_{1j} et x_1, α_{2j} et x_2, $\ldots$; on pose aussi

$$\xi_j = \begin{vmatrix} f_{11}^j & f_{12}^j & \ldots & f_{1n}^j \\ f_{21}^j & f_{22}^j & \ldots & f_{2n}^j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} : \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})}.$$

Les fonctions ξ jouiront des propriétés suivantes que j'ai démontrées dans la quatrième Partie de mon *Traité d'Algèbre* (Gauthier-Villars et fils, 1894) :

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu = 1 \qquad (\mu = m^n).$$

Il n'y a pas de relation linéaire et homogène entre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$; mais on peut écrire une infinité de relations homogènes et du second degré entre les ξ telles que

$$\Sigma a_{ij}\xi_i\xi_j = 0; \tag{1}$$

dans ces relations, les coefficients des carrés $\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots$ sont nuls. On voudrait savoir combien il y a de relations telles que (1) (où les a_{ij} sont indépendants des x) réellement distinctes. Si cette question était résolue, il serait facile de trouver un criterium pour reconnaître si un polynome donné à n variables est ou n'est pas le produit de deux polynomes entiers.

H. Laurent.

402. [Q4c] Voici un petit jeu, qui doit rentrer dans la catégorie des Marelles et qui se joue volontiers, paraît-il, dans certaines régions d'Angleterre, où on l'appelle *Go Bang*, en un ou en deux mots dont j'ignore la signification. Je suppose deux adversaires : chacun d'eux a le même nombre de pions, et le jeu se joue sur un échiquier; comme il y a longtemps que l'on m'a parlé de ce jeu, et que je ne l'ai jamais vu jouer en France, je ne sais plus quel est le nombre de pions que chaque adversaire a, ni le nombre de cases de l'échiquier, mais cela importe peu; supposons un damier de 100 cases, et chacun des adversaires ayant 20 pions. On joue alternativement chacun un pion; le hasard décide de celui qui a le premier la pose. Les pions se jouent comme on veut, sur n'importe quelle case. La partie est gagnée pour le premier des joueurs qui a réussi à placer 5 (je suis sûr de ce nombre) pions dans le même alignement rectangulaire ou diagonal, de manière que ces cinq pions soient dans des cases qui se touchent, sans vide, et sans intercalation des pions de l'adversaire. S'il arrive que chacun des adversaires a placé ses pions sans que la partie soit gagnée, on la continue, en jouant alternativement un pion quelconque à son propre choix et en le déplaçant seulement d'une case dans chaque sens, comme le roi aux échecs. La partie est gagnée dans les mêmes conditions, c'est-à-dire quand un des adversaires a amené, par des déplacements successifs, cinq pions consécutifs dans le même alignement.

On peut très bien jouer ce jeu sur le damier avec les 20 pions blancs et les 20 pions noirs. On peut d'ailleurs jouer le même jeu à trois ou à un plus grand nombre, en avant des pions de différentes couleurs. Je crois, par exemple, qu'il faudrait ou diminuer le nombre des pions des adversaires ou augmenter le nombre des cases de l'échiquier. Les joueurs jouent toujours alternativement, et le gain de la partie a lieu dans les mêmes conditions. Ce petit jeu est assez intéressant et mérite peut-être une étude. Je demande, en tout cas, si un correspondant peut préciser les conditions du jeu tel qu'il se joue, c'est-à-dire quel est le nombre de pions de chaque adversaire et le nombre des cases de l'échiquier. A. Boutin.

403. [K14a] Quelles sont les propriétés communes à tous les quadrilatères plans dont les sommets se trouvent chacun sur une face d'un angle polyèdre à quatre faces? E. Lefrançois.

404. [K8a] En désignant par a, b, c, d les côtés consécutifs, et par e, f les diagonales d'un quadrilatère *convexe*, la quantité

$$2(ab+cd)(ad+bc)-(ac+bd+ef)(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2)$$

est toujours positive.

J'en ai une démonstration avec l'aide de la Trigonométrie; j'en désirerais une démonstration exclusivement géométrique.

N. B. — J'ai proposé cette question dans le Journal de M. Vuibert sous le n° 2305; mais on n'a envoyé, je crois, aucune réponse.

A. Goulard.

405. [K13a] Étant données trois droites telles que deux d'entre elles ne soient pas dans le même plan

$$\begin{aligned}&A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, && A_2x+\ldots=0, && A_3x+\ldots=0,\\ &A'_1x+B'_1y+C'_1z+D'_1=0, && B'_2x+\ldots=0, && A'_3x+\ldots=0,\end{aligned}$$

on sait que l'on peut former un parallélépipède, et un seul, qui ait ces droites pour arêtes. Un correspondant peut-il donner explicitement l'expression du volume de ce parallélépipède en fonction des coefficients des six équations qui représentent les trois droites? E. Lemoine.

406. [I19c] 1° L'équation $\frac{1}{a}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$ a-t-elle d'autres solutions entières que celles qui sont données par les expressions

$$a=mn, \qquad a_1=m(n+1), \qquad a_2=mn(n+1).$$

2° Y a-t-il des procédés pour trouver des solutions entières des équations $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \ldots \frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$, et peut-on me donner la bibliographie de la question, si elle a été traitée? A. Thorin.

407. **[J2f]** On prend un jeu de 32 cartes; on les abat une à une, en énonçant les noms des cartes dans un ordre déterminé à l'avance, sans distinction de couleurs, par exemple sept, huit, ..., dame, roi, as, sept, huit, ..., jusqu'à ce que le jeu soit épuisé. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait aucune rencontre entre le nom prononcé et le nom de la carte abattue? Pourrait-on aussi généraliser la question en supposant un jeu contenant p séries de n cartes différentes? J. Voyer.

408. **[Q4b]** Au jeu de dames sur un échiquier de p^2 cases, de combien de manières peut-on disposer n pions de la même couleur de manière que deux quelconques d'entre eux ne soient pas en prise réciproque? A. Boutin.

409. **[Q4b]** Au jeu de dames, sur un damier carré de p^2 cases, de combien de manières peut-on placer n pions blancs et m pions noirs, de manière que deux pions de couleurs différentes ne soient pas en prise réciproque? A. Boutin.

410. **[K13c]** Si l'on donne un tétraèdre par les longueurs a, b, c, a', b', c' des six arêtes avec leurs positions respectives, il est clair qu'il y a un point tel que la somme des carrés de ses distances aux six arêtes est un minimum. La recherche de ce point n'offre, en employant la Géométrie analytique, aucune difficulté théorique, mais les calculs à effectuer, tout élémentaires qu'ils soient, sont tellement compliqués que je n'ai jamais pu arriver au résultat que je désire, qui serait de *déterminer* la position de ce point, soit géométriquement, soit par des expressions explicitées en fonctions des six arêtes ou de fonctions de celles-ci (comme l'aire des faces, etc.), expressions qui donneraient les distances de ce point aux faces ou aux sommets, etc., de façon que, l'une de ces distances étant connue, les autres s'en déduisent par permutation de a, b, c, a', b', c', etc. Le résultat doit sans doute prendre une forme assez simple, mais je n'ai jamais pu la dégager. E. Lemoine.

411. **[R3a]** On donne un *répulsif* de la forme d'un tore,

disposé horizontalement (anneau métallique électrisé, balle de sureau, par exemple) et un corps pesant placé dans l'espace au-dessus du répulsif. Existe-t-il, au-dessus du plan du répulsif, une position d'équilibre *stable* pour le corps repoussé? — En d'autres termes, la balle de sureau peut-elle rester suspendue en l'air sous les actions combinées des forces répulsives émanées des différents éléments constituant l'anneau électrisé, et de la pesanteur?

Même question dans le cas d'un anneau *attractif*, le corps *attiré* se trouvant dans un plan inférieur à celui de l'anneau.

Le problème a-t-il été traité? Où l'a-t-il été? La position d'équilibre *stable* peut-elle exister pour certaines valeurs attribuées aux paramètres?... S'il n'a pas été traité, quelle solution mathématique comporte-t-il? *A.-P. Ericsson.*

412. **[H11c]** On demande de déterminer la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\varphi(x)\varphi(x+a)\varphi(x+2a)\ldots\varphi[x+(n-1)a]=\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant une fonction donnée. G. Oltramare (Genève).

413. **[I25b]** La proposition : « Tout multiple de 3 est la somme d'au plus trois nombres triangulaires multiples de 3 », est-elle exacte? G. de Rocquigny.

414. **[I19a]** L'équation $\dfrac{x(x+1)}{2}+1=y^2+(y+1)^2$ est-elle possible en nombres entiers? Autrement, le quadruple d'un nombre triangulaire peut-il être triangulaire?

G. de Rocquigny.

415. **[V7]** Le théorème : « Tout nombre entier est la somme de quatre carrés au plus », est-il dû à Bachet, du nom duquel plusieurs géomètres le désignent, ou à Fermat?

G. de Rocquigny.

416. **[X2]** Je possède la table des carrés du Dr O.-J. Broch, de Christiania, 1881. En existe-t-il une plus étendue? Elle donne les carrés des 3100 premiers nombres. Je ne parle pas des tables de *quarts* de carrés, mais des tables de *carrés*.

G. de Rocquigny.

417. **[I13bα]** Le théorème suivant est-il exact?

« En décomposant le produit

$$\mathrm{N}=\mathrm{A}^2(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)\ldots(\alpha_n^2+\beta_n^2)$$

en somme de deux carrés au moyen de la formule

$$(m^2+n^2)(m'^2+n'^2)=(mm'\pm nn')^2+(mn'\mp nm')^2$$

appliquée d'abord aux deux premiers facteurs, sommes de deux carrés, puis aux carrés obtenus et au troisième facteur, etc., on obtient toutes les décompositions de N en une somme de deux carrés ». S'il est exact, quel en est l'auteur et où a-t-il été démontré? P.-F. TEILHET.

418. [I13bα] L'identité

$$477\,069^4+8497^4=310\,319^4+428\,394^4,$$

indiquée par Euler dans les *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg* (tome XVII, p. 64) et reproduite dans la *N. C.* (tome V, p. 373) est fausse, car on a $470000^4>320000^4+430000^4$.

On demande quelle est la correction à faire à l'exemple ou peut-être aux formules d'Euler. E. GELIN (Huy).

419. [V7] Réunissant les matériaux d'un livre sur le *P. Marin Mersenne* (1588-1648) j'ai consulté, au cours de mes recherches, les lettres qu'il avait reçues des divers savants de son temps avec lesquels il entretenait une active correspondance, lettres qui, réunies par son biographe le P. Hilarion de Coste, forment trois gros recueils conservés à la Bibliothèque Nationale sous la cote : « Nouvelles acquisitions françaises 6204-05-06 ». Quelques-unes de ces lettres, écrites par les plus grands mathématiciens ou physiciens du XVII^e siècle : Frénicle de Bessy, Galilée, Gassendi, Grégoire de Saint-Vincent, Huygens, Niceron, etc., mériteraient d'être publiées à la fin de mon ouvrage si elles sont, comme je le crois, inédites. Un correspondant pourrait-il donc me dire si ces pièces le sont réellement et, dans le cas contraire, où et par qui elles ont été mises au jour? Je sais que celles concernant Huygens ont été insérées dans le tome II de ses *Œuvres complètes* (édit. de la Société hollandaise des Sciences, 1889, in-4°) et qu'aucun des documents que j'ai en vue ne se trouve dans les 20 volumes du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche* du prince Boncompagni. En outre, je serais reconnaissant à toute personne qui voudrait bien me communiquer sur Mersenne des renseignements autres que ceux indiqués par Hilarion de Coste (*Vie de Mersenne*. Paris, 1649, in-8°) et Niceron (*Mé-*

moires pour servir à l'histoire des hommes illustres..., tome XXXIII. Paris, 1736, in-12). J. BOYER.

420. **[O2cδ]** On sait que l'équation générale intrinsèque du premier degré représente la spirale logarithmique, tandis que la développante du cercle, la chaînette, la cycloïde, la clothoïde, etc. sont représentées par les équations

$$\rho^2 = 2as, \quad \rho = a + \frac{s^2}{a}, \quad \rho^2 + s^2 = a^2, \quad \rho s = a^2, \quad \ldots,$$

qui toutes sont du second degré en ρ et en s. Il y aurait donc un grand intérêt à *étudier les courbes planes représentées par l'équation générale du second degré en ρ et en s.*

CESÀRO (Naples).

421. **[D2aζ]** Si, pour n infini, nu_n tend vers une limite finie $k > 0$, la série $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$ est divergente, et l'on peut écrire avec une certaine approximation : $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = k \log n$. On demande de caractériser les séries pour lesquelles on peut affirmer l'existence de la constante

$$C = \lim_{n=\infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n - k \log n).$$

On demande aussi une étude des propriétés de cette constante, généralisation de la constante d'Euler. CESÀRO (Naples).

422. **[O3j]** On sait (*Rivista di Matematica*, 1892, p. 155) qu'au trièdre fondamental (tangente, binormale, normale principale) de toute courbe de Bertrand sont rigidement liés deux paraboloïdes hyperboliques, dont chaque génératrice d'un certain système engendre une surface développable. Je voudrais me représenter dans l'espace, d'une manière aussi simple que possible, toutes ces surfaces développables, ainsi que l'ensemble de leurs arêtes de rebroussement, etc., surtout pour me rendre compte de la manière dont elles sont, pour ainsi dire, *agencées* entre elles, et du rôle qu'y joue la courbe considérée.

CESÀRO (Naples).

423. **[K21aβ]** A-t-on déjà énoncé le théorème ci-après, dont je possède une démonstration :

« Toute construction réalisable par la règle et le compas l'est par le compas seul »? *Hubert Larsac.*

424. **[Q4bα]** On ne connaît actuellement que 110 carrés magiques résultant de la marche du cavalier (*A. F.*, Congrès de Pau et de Marseille, général Parmentier). *Tous* ces carrés sont incomplètement magiques. Les lignes et les colonnes donnent la constante 260, mais les diagonales ne la fournissent pas. Est-il possible d'obtenir aussi des carrés magiques parfaits, c'est-à-dire ayant 260 sur les diagonales? Sinon, démontrer l'impossibilité.

H. DELANNOY.

425. **[Q4aα]** Donner une démonstration *directe* et rigoureuse, ce qui n'a pas encore été fait à ma connaissance, du théorème de Tait :

« Dans un réseau à points triples, sans isthmes, on peut partager les $3n$ chemins en trois groupes de n chemins, de telle sorte que les trois chemins qui aboutissent à un même carrefour ou trivium quelconque appartiennent à trois groupes différents. » (Voir ED. LUCAS, *Récréations mathématiques*, t. IV, p. 189.)

H. DELANNOY.

426. **[I2b]** On trouve, au-dessous de 1000, 106 nombres qui admettent 6 diviseurs, 180 qui en admettent 8. Connaît-on une formule qui donne combien il y a de nombres ayant n diviseurs, en s'arrêtant à une limite donnée?

E. FRIOCOURT.

427. **[I2b]** Combien y a-t-il de fractions irréductibles dont le dénominateur n'a pas plus de n chiffres?

E. FRIOCOURT.

428. **[S6b]** Je demande des indications pour arriver à faire l'étude du mouvement d'un point matériel soumis : 1° à la pesanteur, 2° à une résistance tangentielle fonction linéaire $a(V - b)$ de la vitesse, et cela dans un milieu de densité variable suivant la loi $\delta = \delta_0(1 - \lambda y)$; δ est la densité du milieu, y l'ordonnée du point matériel; a, b, δ_0, λ sont des constantes positives.

Je voudrais surtout trouver des expressions simples (séries très convergentes) pour les divers éléments relatifs à un point, savoir :

L'abscisse, l'ordonnée, la durée du parcours depuis la projection, la vitesse tangentielle, le coefficient angulaire de la tangente en fonction d'une variable à choisir (l'ordonnée de préférence).

Les données sont : la vitesse de projection, l'angle de départ.

Je voudrais aussi obtenir une formule différentielle entre la variation de l'abscisse correspondant à l'ordonnée zéro et la variation de la vitesse de départ d'un côté, la variation de l'angle de départ de l'autre. *Trébig.*

429. [D2b] Un correspondant peut-il me donner l'expression du $n^{\text{ième}}$ terme des suites dont le premier terme est u, et dont les termes de rangs p et $p+1$ sont liés par une des deux relations

$$u_{p+1} = u_p + \frac{1}{u_p}, \qquad u_{p+1} = u_p - \frac{1}{u_p}.$$

Alauda.

430. (S) **[I18]** Tout nombre entier a est la somme de quatre cubes positifs fractionnaires; en d'autres termes l'équation indéterminée $ax^3 = y^3 + z^3 + s^3 + t^3$ admet toujours, quel que soit le nombre entier a, une solution dans laquelle les 5 variables sont positives et entières. G. Oltramare (Genève).

431. [M²7c] On sait que l'enveloppe de la droite qui joint les deux extrémités des aiguilles d'une montre supposées de longueurs égales est une épicycloïde à onze rebroussements; un correspondant peut-il donner une solution de la même question en supposant les aiguilles de longueurs différentes, ou dire si elle a été résolue? E.-N. Barisien.

432. [O2e] Je trouve : 1° que le cercle passant par deux points A et B d'une courbe quelconque Γ et par le pôle de AB par rapport à Γ devient à la limite, lorsque A et B se réunissent en M, un cercle tangent à Γ en M et ayant un rayon moitié de celui du cercle osculateur en M; 2° que, si C est un troisième point de Γ, le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes en A, B, C à Γ devient à la limite, lorsque A, B et C se réunissent en M, un cercle tangent à Γ en M et ayant un rayon égal au quart de celui du cercle osculateur en M.

Je ne sais si ces propriétés sont connues : mais un correspondant pourrait-il montrer la raison géométrique pour laquelle ces deux derniers cercles ne sont pas le *cercle osculateur* lui-même. E.-N. Barisien.

433. [Q4b] Étant donné un échiquier de n^2 cases et une *tour* placée en une case quelconque, faire occuper à cette tour toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois sur la même, et en aboutissant à une case déterminée, qui se confondra ou ne se confondra pas avec la case de départ.

Voici quelques renseignements relatifs à la question.

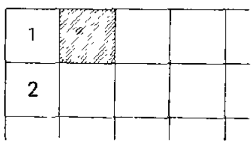
L'échiquier ayant n^2 cases :

1° Lorsque n est impair, le problème est possible si les cases de départ et d'arrivée sont de la même couleur (toutes deux blanches ou toutes deux noires); il est impossible si elles sont de couleurs différentes;

2° Lorsque n est pair, le problème est possible si les cases de départ et d'arrivée sont de couleurs différentes; il est impossible si elles sont de même couleur;

3° n étant impair, le problème impossible devient possible, si l'on supprime une case de la couleur des grandes diagonales, c'est-à-dire en assujettissant la tour mobile à ne parcourir que $n^2 - 1$ cases, la case retranchée étant de la couleur de la grande diagonale; la position de la case retranchée est indifférente;

4° n étant pair et le problème impossible, il devient possible par la suppression d'une case de couleur opposée à celle des cases de départ et d'arrivée (la position de la case supprimée est indifférente, sauf bien entendu quand cette position constitue immédiatement une impossibilité). (Si la case supprimée



est la case ombrée, et que la case de départ ou d'arrivée ne soit pas la case 1, le problème est bien évidemment impossible, car on ne pourra sortir de la case 1 qu'en passant deux fois sur la case 2).

Les règles précédentes me semblent justifiées dans tous les cas; les deux premières se démontrent assez aisément. Quand le problème est possible, le problème a plusieurs solutions, et l'on en trouve très facilement quelques-unes. Les recherches devraient, je crois, porter sur ces points :

a. Démontrer les deux paragraphes 3° et 4°;

b. Quand le problème est possible, *combien* a-t-il de solutions?

c. Quand au lieu de supprimer une case on en supprime plusieurs, quelle est, dans tous les cas, l'influence de la suppression d'une, deux, trois cases, de même couleur ou de couleurs différentes, sur la possibilité, l'impossibilité du problème et sur le nombre des solutions. A. BOUTIN.

434. [Q4c] Au jeu du Go-bang [1] importé du Japon et non anglais, la partie est gagnée lorsqu'au $n^{\text{ième}}$ coup un joueur a fait un *quine* ou placé 5 jetons d'une même couleur en ligne droite dans une direction quelconque. J'appelle *terne* et *quaterne* les dispositions qui comportent 3 et 4 jetons d'une même couleur en ligne droite; ils sont *ouverts,* si les 2 cases situées de part et d'autre dans leur prolongement sont libres, *fermés* si l'adversaire a mis 1 jeton sur l'une d'elles. Cela posé, pour faire quine au $n^{\text{ième}}$ coup, il faut et il suffit de placer au $(n-4)^{\text{ième}}$ coup 1 jeton qui produit soit 2 ternes ouverts, soit 1 quaterne amorcé et 1 terne ouvert ayant 2 cases libres dans un de ses prolongements, soit une autre combinaison analogue, permettant de faire quine en 2 coups.

On demande quel est le nombre de coups *minimum* pour avoir: 1° un terne ouvert; 2° un quaterne amorcé; 3° une combinaison quelconque permettant de faire *quine* en jouant 2 autres coups. On suppose le nombre des cases et des jetons illimité.

HAROLD TARRY.

435. [J2c] On lit, dans le *Traité d'Algèbre élémentaire* de Lionnet (3e édition, p. 295, Gauthier-Villars; 1868) l'exercice suivant :

« Quel est le nombre n de parties que doivent jouer deux personnes A et B, avec des chances égales de gagner ou de perdre chaque partie, pour qu'il y ait 1 contre 1 à parier que, après avoir joué n parties au plus, le joueur A en aura gagné 2 de plus que le joueur B ?

» *Remarque.* — En remplaçant 2 par b dans l'énoncé, on a celui d'un problème intéressant résolu par Laplace pour de grandes valeurs de b. Dans cette hypothèse, il obtient la formule $n = \dfrac{b^2 - 0{,}4611127}{0{,}4204994}$. »

---

[1] *Voir* question 402, p. 2, ci-dessus.

Pour $b=100$, on trouve que la valeur de n est comprise entre 23780 et 23781; d'où l'on conclut avec Laplace qu'il y a avantage à parier que A ne gagnera pas 100 parties de plus que B en 23780 coups et qu'il les gagnera en 23781 coups au plus.

En faisant le calcul dans le cas de l'énoncé de l'auteur, je trouve que la probabilité que A gagnera 2 parties de plus que B est toujours $<\frac{1}{2}$.

D'ailleurs *a priori*, à cause de la symétrie qui existe entre les deux joueurs, il semble que le problème n'est pas possible. N'y aurait-il pas une erreur d'énoncé? Comment alors doit-il être rectifié? J. Sadier.

436. **[V1a]** Existe-t-il en France ou à l'étranger un Ouvrage ou un article de revue reproduisant et *discutant* les divers essais de démonstration du *postulatum d'Euclide?*

Si cet Ouvrage n'existe pas, il serait désirable de voir entreprendre ce travail par un jeune professeur possédant bien la théorie des surfaces. Après la discussion des essais de démonstration, il faudrait mettre la théorie négative de Lobatchewski, et enfin on arriverait aux interprétations géométriques présentées par certains auteurs, qui seules peuvent donner une satisfaction complète à l'esprit.

Je signalerai l'essai de démonstration donné par Ricart dans ses *Éléments de Géométrie* (Garnier frères; 1875), qui me paraît voisin de celui que Legendre déduisait du principe de l'homogénéité.

En attendant, il serait bon que les auteurs de traités de Géométrie missent d'abord les théorèmes de la théorie des parallèles indépendants du postulatum, et en dernier lieu ceux qui en dépendent : c'est ce qu'a fait Ricart. H. Dellac.

437. **[K12b]** Trouver la valeur du rayon d'un cercle passant par les points d'intersection de trois cercles qui se coupent deux à deux, en fonction des rayons de ces cercles et des côtés du triangle formé par les distances des centres.

Ce problème a beaucoup d'analogie avec le problème d'Apollonius; comme lui, il donne lieu à quatre groupes de deux cercles dont le centre de similitude inverse se confond avec le centre radical des trois cercles donnés.

Je n'ai pu trouver explicitement la valeur du rayon, qui ne serait obtenue qu'avec de longs calculs.

Un correspondant connaît-il une solution? Ce problème a-t-il été déjà étudié? *P. Gustave.*

438. [L¹7b] 1° Si le centre d'un cercle bitangent à une conique est sur l'axe focal, la distance entre la corde de contact et la polaire d'un foyer par rapport au cercle est constante; 2° si le centre est sur l'axe non focal, le cercle est vu d'un foyer sous un angle constant.

Je désirerais savoir si ces propriétés sont connues et où l'on en trouve la démonstration. J. Réveille.

439. [R9bα] Une bille de billard étant supposée, ainsi que les bandes, parfaitement élastique, pourrait-on déterminer le chemin qu'elle doit suivre lorsqu'elle reçoit une impulsion horizontale donnée, en un des points de sa surface également donné : 1° sur un billard rectangulaire; 2° sur un billard circulaire; et indiquer le point où la bille s'arrêtera, le frottement de roulement étant connu. Il ne me semble pas que ce problème ait été explicitement traité par Coriolis dans son célèbre Mémoire. *D. Boin.*

440. [I19c] Je voudrais une solution (si une solution générale est possible) à la question suivante à laquelle je suis conduit en Géométrographie, pour chercher le moyen le plus simple d'obtenir, *avec la règle et le compas,* une longueur qui soit égale à m fois une longueur donnée : Exprimer un nombre entier avec le plus petit nombre possible de puissances de 2, ces puissances étant d'ailleurs précédées du signe + ou du signe — ; on a par exemple :

$$29 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 2^5 - 2^2 + 1 = 2^5 - 2 - 1,$$
$$95 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 2^6 + 2^5 - 1 = 2^7 - 2^5 - 1;$$

29 et 95 peuvent être exprimés, comme on le voit, avec 3 puissances de 2. E. Lemoine.

441. [I2bα] Soit un nombre entier N décomposé en facteurs premiers $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma, \ldots$ J'appelle dérivée de N le nombre entier $N' = N\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots\right)$. On a les théorèmes suivants :

1° La dérivée d'un nombre premier est l'unité ;

2° $(MN)' = MN' + NM'$;

3° $(MNP) = M'NP + N'PM + P'MN$, etc.

4° $\left(\frac{M}{N}\right)' = \frac{M'N - MN'}{N^2}$;

5° $(M^n)' = nM'M^{n-1}$.

Tous les nombres ne sont pas des dérivées ; ainsi 2 et 3 ne sont pas des dérivées.

6° On n'a pas $(M + N)' = M' + N'$.

Les dérivées successives de 15 sont : 8, 12, 16, 32, 80, 176, 358, 752, 1520, ... dont les différences sont

4, 4, 16, 48, 96, 192, 384, 768, ... ;

les cinq derniers nombres sont en progression géométrique ; on trouve facilement un certain nombre de résultats singuliers, où l'on rencontre tantôt des analogies avec la théorie des dérivées comme dans les numéros précédents 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, tantôt des dissemblances comme dans 6° ; je crois qu'il y a là la matière d'une étude originale qui pourrait conduire à quelques résultats intéressants.

Taurel.

442. [K10e] Étant donnés quatre points 1, 2, 3, 4 sur une circonférence, est-il possible de déterminer sur la circonférence, avec la règle et le compas, deux autres points 5 et 6 tels que les intersections des droites 13, 62 ; 24, 13 ; 35, 24 ; 46, 35 ; 51, 46 ; 62, 51 soient aussi sur une circonférence?

Muller.

443. [J2c] Jean a une urne contenant $2n$ boules blanches, $2n$ boules noires, n boules rouges. Il donne 1^{fr} à Pierre quand il sort une noire, 1^{fr} à Paul quand il sort une blanche, 1^{fr} à Pierre et 1^{fr} à Paul quand il sort une rouge. A chaque tirage Pierre et Paul lui donnent chacun $0^{fr},60$. Le jeu est équitable. Après un certain nombre de tirages il se trouve que Pierre a reçu p^{fr} et Paul q^{fr} $(p \leqq q)$; on demande la probabilité qu'il est sorti r rouges $(r \leqq p)$?

H. Delannoy.

444. [J2f] Un vote de la Chambre donne lieu à pointage. Pendant le dépouillement, tantôt les votes Pour l'emportent sur les Contre, et tantôt c'est l'inverse. Finalement il y a p Pour et q Contre. On demande la probabilité que, à aucun moment du dépouillement, la différence entre les Pour et les Contre n'a dépassé $\mu = p - q$, ni dans un sens ni dans l'autre. On peut aussi demander la probabilité que l'excès des Pour sur les Contre n'a pas dépassé μ et que l'excès des Contre sur les Pour n'a pas dépassé m. On a $P = \frac{H_{p,q}}{Q_{p,q}}$; $H_{p,q}$ est le nombre des marches de la tour sur un échiquier hexagonal dont les deux côtés sont égaux à μ dans le premier cas, et égaux à μ et à m dans le second.

$Q_{p,q} = C_{p+q}^{q}$ est le nombre des marches sur l'échiquier carré. Je demande une démonstration sans le secours de l'échiquier.

H. DELANNOY.

445. [I19c] Y a-t-il trois nombres entiers consécutifs autres que 2, 3, 4 dont le produit soit de la forme kx^3, k étant un nombre premier?

E. LEMOINE.

446. [B3d] Résoudre, s'il est possible, les équations

$$xyz\,\frac{x}{(y+z)^2} = yz - a^2,$$

$$xyz\,\frac{y}{(z+x)^2} = zx - b^2, \qquad xyz\,\frac{z}{(x+y)^2} = xy - c^2.$$

D. GRAVÉ (Saint-Pétersbourg).

447. [L¹1a] L'équation des coniques en coordonnées polaires a-t-elle été étudiée d'une manière absolument générale? Briot et Bouquet, Salmon et presque tous les bons auteurs se contentent d'examiner quelques cas particuliers. Existe-t-il sur la question un travail *complet*, et lequel?

448. [B1c] La valeur de $(h - x)^n$ peut être représentée par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & . & \cdots\cdots & \cdots & . & . \\
x & h & 1 & 0 & . & \cdots\cdots & \cdots & . & \\
x^2 & h^2 & 2h & 1 & 0 & \cdots\cdots & \cdots & . & \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & . & . & \cdots\cdots & \cdots & . & \\
x^k & h^k & kh^{k-1} & . & . & C_k^h h^{k-p} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdot & . & . & \cdots\cdots & \cdots & . & . \\
x^{n-1} & h^{n-1} & \cdots\cdot & . & . & \cdots\cdots & \cdots & & 1 \\
x^n & h^n & nh^{n-1} & & & \cdots\cdots & \cdots & . & nh
\end{vmatrix};$$

on demande si l'on peut représenter par des formules analogues les quantités $(h+x)^n$, $(h+x+y+\ldots)^n$.

P. Vernier.

449. (S) **[E5]** Je signale les propriétés des expressions suivantes

$$A=\int_0^a \frac{L(1+x)}{1+x^2}\,dx+\int_0^1 \frac{L(1+ax)}{1+x^2}\,dx,$$

$$B=\int_0^a \frac{Lx}{1+x^2}\,dx+\int_0^1 \frac{L[(1+ax)(a+x)]}{1+x^2}\,dx;$$

incidemment, faire voir que l'expression

$$G=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-$$

s'écrit

$$G=-\int_0^1 \frac{Lx}{1+x^2}\,dx=\int_0^\infty \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,x^2\,dx, \qquad \ldots.$$

Recherchер, de la même manière, les expresssions des quantités qui figurent sous le signe $\int$ dans les expressions A et B.

P. Vernier.

450. **[K13cγ]** On sait que, si deux triangles ABC, A′B′C′ sont tels que les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B′C′, C′A′, A′B′ sont concourantes, les perpendiculaires abaissées de A′, B′, C′ sur BC, CA, AB le sont aussi ; on appelle de tels triangles des *triangles orthologiques*. On sait aussi qu'il y a des triangles doublement orthologiques par permutation circulaire, et qu'ils le sont alors triplement (*voir* A. F., Congrès de Limoges, 1890). Cela posé, deux tétraèdres ABCD, A′B′C′D′ tels que les perpendiculaires abaissées de A, B, C, D sur B′C′D′, A′C′D′, A′B′D′, A′B′C′ sont concourantes, jouissent aussi de la propriété que les perpendiculaires abaissées de A′, B′, C′, D′ sur BCD, ACD, ABD, ABC sont concourantes; ils sont dits alors *tétraèdres orthologiques* [voir Neuberg, *Mémoire sur le tétraèdre* (t. XXXVII des *Mémoires couronnés publiés par l'Académie royale de Belgique*, § 16 et généralisation § 22)].

Y a-t-il des tétraèdres doublement, triplement, quadruplement orthologiques?

E. Lemoine.

451. [J2b] Une urne contient n boules numérotées $1.2.3\ldots n$. On en tire une au hasard et l'on continue indéfiniment à en tirer une jusqu'à ce que *l'urne soit vidée*, sous la condition suivante. On remet le numéro tiré dans l'urne après chaque tirage, toutes les fois que ce n'est pas le plus fort numéro qui soit dans l'urne qu'on a tiré; si c'est le plus fort numéro, on ne l'y remet pas et l'on continue. On demande la probabilité pour que l'urne soit vidée au coup de rang k.

E. Lemoine.

452. [J2c] Deux joueurs font la partie suivante : Ils tirent au hasard, alternativement, chacun une boule d'une urne qui en contient n, numérotées $1, 2, \ldots, n$. Ils la remettent chaque fois dans l'urne après leur tirage, excepté lorsqu'ils tirent le numéro le plus fort qui soit dans l'urne; ainsi le premier qui tire la boule numérotée n ne la remet pas dans l'urne et la partie continue; si le numéro tiré après n est 1, le joueur qui a tiré n a gagné l'enjeu. Si ce n'est pas 1 qui sort, la partie continue et le premier des joueurs qui tire $n-1$ ne remet pas ce numéro dans l'urne, il a gagné si au coup suivant son partner tire 1, etc.

On demande la probabilité pour que la partie soit gagnée lorsque l'on a fait en tout p tirages. E. Lemoine.

453. [Q4bα] Dans les *Mémoires de la Société de Flessingue*, Euler n'a pu trouver de solution pour ce qu'il appelle le problème des 36 officiers, sans cependant montrer qu'il n'y avait aucune solution. A-t-on trouvé une solution ou montré qu'il n'y en avait aucune?

Voici l'énoncé de ce problème : « Cette question roulait sur une assemblée de 36 officiers de 6 grades différents et tirés de 6 régiments différents qu'il s'agissait de ranger dans un carré de manière que sur chaque ligne, tant horizontale que verticale, il se trouvât 6 officiers tant de différents grades que de régiments différents. » On le cite dans les *Récréations math.* de Lucas, Introduction, p. 13, t. I; dans l'Ouvrage de M. Arnoux *Sur les espaces arithmétiques hypermagiques*, etc., p. 5, Gauthier-Villars; 1894. E. Maillet.

454. [Q4a] On forme un carré ABCD que l'on divise en $4n^2$ carrés par des lignes équidistantes et parallèles aux côtés

AB et BC du carré primitif. 1° De combien de façons différentes peut-on choisir $2n$ de ces carrés de façon qu'ils soient deux par deux dans une même rangée parallèle à AB et dans une même rangée parallèle à BC? 2° De combien de façons différentes peut-on choisir $4n$ de ces carrés de façon qu'il y en ait deux dans chaque colonne et deux dans chaque ligne. *Alauda.*

455. **[A1b]** Catalan (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XIX, n° 6; 1890) attire l'attention sur l'identité suivante :

$a, b, c, \ldots, h, k$ étant des quantités quelconques, inégales, la somme

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\ldots+\frac{1}{a-k}\right)\frac{1}{[(a-b)(a-c)\ldots(a-k)]^2}\\
+&\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}+\ldots+\frac{1}{b-k}\right)\frac{1}{[(b-a)(b-c)\ldots(b-k)]^2}\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&\left(\frac{1}{k-a}+\frac{1}{b-k}+\ldots+\frac{1}{k-h}\right)\frac{1}{[(k-a)(k-b)\ldots(k-h)]^2}
\end{aligned}$$

est nulle.

Il y dit que c'est une traduction de certaine proposition de Géométrie due à Liouville, mais que depuis treize ans il a essayé, à diverses reprises, de démontrer *directement* cette identité sans y parvenir. Je ne vois pas non plus de démonstration; je serai content s'il s'en présente une à l'esprit d'un correspondant qui veuille bien m'en faire part. *Alauda.*

456. **[V9]** Où pourrais-je trouver la démonstration de cette importante propriété du tore, d'ailleurs bien connue, et qui est due à Yvon Villarceau : « Le plan bitangent à un tore à méridien circulaire coupe la surface suivant deux circonférences »? Où l'auteur de cette proposition l'a-t-il publiée pour la première fois? A. Cléry.

457. **[K18e]** Je voudrais quelques renseignements bibliographiques sur les recherches ayant trait à la question suivante :

« Trouver le lieu d'un point donné d'une droite d'une longueur constante, dont les points extrêmes sont toujours sur les surfaces de deux sphères données dans l'espace », problème qui n'est autre chose que la généralisation de la théorie du parallélogramme de Watt. Giulio Borgonzoni (Ferrare).

458. [I19c] Les trois côtés d'un triangle ABC sont des nombres entiers. A' est un point sur CB tel que CA' est un nombre entier. Peut-on toujours mener par A' une ou plusieurs transversales coupant AC en B', AB en C' et telles que AB' et AC' soient des nombres entiers. E. Lemoine.

459. [I13bα] J'ai reconnu que 65 est le plus petit nombre dont le carré soit, de deux façons différentes, la somme de deux carrés, on a $4225 = \overline{65}^2 = \overline{16}^2 + \overline{63}^2 = \overline{33}^2 + \overline{56}^2$; que 325 est le plus petit nombre dont le carré soit de trois façons différentes la somme de deux carrés, on a

$$105625 = \overline{325}^2 = \overline{36}^2 + \overline{323}^2 = \overline{125}^2 + \overline{300}^2 = \overline{204}^2 + \overline{253}^2.$$

Connaît-on le plus petit nombre dont le carré soit de quatre façons différentes la somme de deux carrés? E. Lemoine.

460. [I13bα] Existe-t-il des nombres qui soient de n façons différentes la somme de deux carrés, quel que soit n?
E. Lemoine.

461. [I13bα] L'équation en nombres entiers $x^2 = y^2 + z^3$ a-t-elle d'autres solutions que celles qui sont données par

$$x = \frac{t(t+1)}{2}, \qquad y = \frac{t(t-1)}{2}, \qquad z = t?$$

Muller.

462. [L¹16a] Quel est le point M du plan d'un triangle ABC tel que la différence des aires de l'ellipse circonscrite et de l'ellipse inscrite qui ont ce point M pour centre soit minima?
Muller.

463. [L¹16a] Quelle est l'ellipse inscrite dans un triangle dont l'aire est maxima? *Muller.*

464. [L¹16a] Quelle est l'ellipse circonscrite à un triangle dont l'aire soit minima? *Muller.*

465. [R2bα] Un plan Q se déplace sur un plan P, de sorte que tous ses points décrivent des courbes fermées. Si l'on suppose que la masse d'un arc quelconque de ces courbes est proportionnelle à l'angle correspondant dont tourne le plan Q, toutes ces courbes hétérogènes ont le même centre de gravité; je demande une démonstration directe du théorème.

E. Duporcq.

466. **[V6]** Les bibliothèques publiques de France contiennent de nombreux exemplaires d'une Arithmétique du XVIe siècle, due à *Jean Trenchant* ou *Tranchant*. Cet Ouvrage paraît avoir eu un succès considérable, peut-être à cause d'un petit Discours sur les changes qui y est annexé. On en trouve, en effet, des éditions de Lyon (1558, 1561, 1566, 1571, 1578, 1588, 1602, 1605, 1631, 1643) et de Rouen (1647 et 1660). Les biographies sont muettes sur l'auteur de cet ouvrage. Quelque correspondant pourrait-il fournir des renseignements sur Jean Trenchant?

Setnof.

467. **[O2]** D'un point P situé sur la circonférence circonscrite à un triangle ABC, on mène des droites faisant un angle α avec les côtés du triangle. On peut ainsi mener deux droites rencontrant le côté BC en A_1 et A_2, puis deux autres droites rencontrant le côté AC en B_1 et B_2 et deux autres droites rencontrant le côté AB en C_1 et C_2. On sait que les six points A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 sont distribués sur deux droites, analogues aux droites de Wallace ([1]).

Je désire obtenir l'équation de l'enveloppe de ces droites, lorsque le point P se déplace sur la circonférence circonscrite à ABC, ainsi que le lieu du point de rencontre des deux droites, ou savoir si la question a déjà été traitée.

Je voudrais aussi connaître l'aire des courbes qui forment ces deux lieux, en particulier, lorsque le triangle ABC est équilatéral.

E.-N. Barisien.

468. **[L¹15f]** On trouve que, si l'on considère les cercles tangents à une ellipse en un point A et tangents à la tangente au point A' diamétralement opposé à A, et si du centre C de ce cercle on abaisse les trois normales à l'ellipse autres que CA, le lieu de l'orthocentre du triangle formé par les pieds des trois normales est la sextique ayant pour équation

$$(b^2y^2 + a^2x^2)(x^2 + y^2)^2 = (a^2y^2 - b^2x^2)^2.$$

([1]) Ordinairement appelées : *droites de Simson. Voir* t, I, p. 174.

Or, si $a = b$, cette équation devient $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2$, équation qui représente une lemniscate de Bernoulli, et cependant, dans le cas où l'ellipse devient un cercle, le lieu de l'orthocentre semble indéterminé.

Comment peut-on expliquer ce désaccord apparent?

E.-N. Barisien.

469. **[L¹18c]** Le lieu du sommet des paraboles tangentes à un cercle donné et ayant pour foyer un point fixe de la circonférence de ce cercle est une courbe fermée. Un correspondant pourrait-il m'indiquer le degré de cette courbe et donner l'expression de son aire? E.-N. Barisien.

470. **[K18g]** Si l'on cherche le nombre maximum des cercles de rayon r que l'on peut inscrire dans l'espace compris entre deux cercles concentriques de rayons nr et $(n+2)r$, n étant un nombre entier positif (les cercles de rayon r ne peuvent pas se couper), M. Cremona a trouvé que le nombre cherché est $3(n+1)+m$, m étant le plus grand entier compris dans $\frac{n}{7}$.

On demande de résoudre le problème analogue pour les sphères. Cte Antonino di Prampero (Rome).

471. **[K13cγ]** Le problème de Leibniz relatif au triangle, qui a fait l'objet de la question 3 et de plusieurs réponses intéressantes, a son analogue dans la *Géométrie de l'espace :* « Partager un tétraèdre en huit parties équivalentes au moyen de trois plans orthogonaux. » On reconnaît sans peine que ce problème est impossible, à moins que le tétraèdre donné ne remplisse une certaine condition particulière. Je demande quelle est cette condition et quel est le degré du problème lorsqu'elle est satisfaite. *Bertha Clarus.*

472. **[M¹2h]** Dans l'étude des courbes algébriques, on a d'abord introduit la notion de leur degré, puis la notion corrélative de leur classe. La théorie des transformations rationnelles algébriques ou plus généralement de la correspondance univoque entre les points de deux courbes a amené à considérer un élément nouveau, le *genre*. Or il semble qu'il y ait lieu, dans nombre de questions, d'introduire une nouvelle notion, celle de ce que l'on pourrait appeler l'*irrationalité* de la courbe. Une

courbe serait dite avoir un degré d'irrationalité p' si l'on peut déterminer sur elle un groupe de p' points en fonction rationnelle d'un paramètre, sans que l'on puisse déterminer individuellement des groupes de moins de p' points. Le degré limite, comme on sait, le genre p d'une courbe algébrique. Le genre, à son tour, limite le degré d'irrationalité p', car on démontre que sur une courbe de genre p on peut toujours déterminer rationnellement des groupes variables de $p+1$ points; ainsi p' est au plus égal à $p+1$, mais il peut être moindre. Ainsi, il peut être égal à 2 quel que soit p ; c'est le cas des courbes hyperelliptiques du genre p. Il me semble qu'il y aurait grand intérêt à étudier cet élément nouveau et à se rendre compte du rôle qu'y jouent les points multiples. On remarquera que les transformations rationnelles, qui laissent le genre invariant, laissent aussi invariant le nombre p' que nous appelons le degré d'irrationalité.

G. Kœnigs.

473. **[R1b]** Si deux figures planes A et B sont animées, l'une par rapport à l'autre, d'un mouvement résultant du roulement sans glissement d'une courbe sur une courbe symétrique par rapport à la tangente commune, le mouvement de A par rapport à B est identique au mouvement de B par rapport à A. Dans mon *Traité de Cinématique*, j'ai posé le problème de trouver tous les mouvements à un ou plusieurs paramètres qui présenteraient cette même particularité; j'en ai même indiqué un cas qui est celui d'une figure fixe par rapport à un plan quelconque de l'espace. Mais il resterait à trouver tous les autres cas.

G. Kœnigs.

474. **[H11c]** Trouver les fonctions $f(x)$ telles que

$$f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Louis Rossel (1).

475. **[M⁴aα]** Où a-t-on fait explicitement, pour la première fois, les remarques suivantes : Soient M un point d'une

(1) Cette question m'avait été posée, en 1866, par mon camarade d'enfance et ami, le capitaine Louis Rossel, fusillé à propos de sa participation à la Commune en 1871.

E. Lemoine.

épicycloïde et M′ le point qui lui est diamétralement opposé sur la circonférence génératrice. Soit O le centre du cercle fixe. La normale et la tangente en M à l'épicycloïde rencontrent OM′ aux points C et D, projections respectives (sur la normale et sur la tangente) de deux points A et B de MM′. *Le segment* MC *est égal au rayon de courbure*, MD *est égal à l'arc* (compté à partir du plus prochain sommet), MA *et* MB *sont constants; le symétrique de* M *par rapport à* M′ *est conjugué harmonique de* M *par rapport à* AB. *Rosace.*

476. **[K13a]** On peut concevoir une géométrie de trois droites dans l'espace, analogue à ce qu'on appelle la *géométrie du triangle :* s'en est-on déjà occupé? Par exemple, les trois droites données déterminent un certain hyperboloïde à une nappe. Le centre de cet hyperboloïde, les points centraux situés sur les trois droites, etc., sont des points remarquables, et aussi les sommets du triangle de périmètre minimum qui a ses sommets sur les trois droites (question 234). LEVAVASSEUR.

477. **[I19b]** Existe-t-il une démonstration rigoureuse du théorème que voici : L'équation

$$(x+1)^n = x^n + y^n$$

ne saurait être satisfaite par des nombres entiers? (celle de M. Kummer, pour le théorème de Fermat, ne s'appliquant pas, comme on sait, à une infinité de cas). Abel, dans sa lettre à Holmboë, énonce sans démonstration ce théorème : L'équation

$$a^n = b^n + c^n,$$

où n est un nombre premier, est impossible lorsqu'une ou plusieurs des quantités a, b, c sont des nombres premiers.

Après une étude approfondie de la question, la démonstration de ce théorème m'a paru difficile. Celle que l'on trouve dans la *Théorie des nombres* de Ed. Lucas (§ 206, exemple VI et § 192, exemple IV) n'est pas complète, car le cas où $a = b + 1$ n'y est pas traité.

La démonstration que ce cas ne peut pas se produire revien précisément à la question que je viens de poser.

V. MARKOFF (Saint-Pétersbourg).

478. **[M^{4}a]** Étudier les courbes planes (généralisation des

lignes cycloïdales) telles qu'une certaine conique, invariablement liée à la tangente et à la normale, passe par un point fixe.

CESÀRO (Naples).

479. **[Q4a]** On a une feuille de papier quadrillé, et au moyen de traits tous égaux à un des côtés des petits carrés, on ferme un certain nombre de ces carrés, soit isolés, soit groupés de telle manière qu'on voudra; mais un carré n'est pas considéré comme fermé par cela seul qu'il est compris dans un espace fermé; il faut qu'un trait ait été posé sur tous ses côtés.

1° Pour fermer n carrés, entre quelles limites doit être compris le nombre des traits dont on doit user? (Il est évident que la limite supérieure est $4n$, qui répond au cas où les carrés n'ont aucun côté commun).

2° On dispose de p traits; combien de carrés complètement fermés peut-on former avec ces p traits, et quel est le nombre des solutions?

A. BOUTIN.

480. **[H8f]** Où trouve-t-on indiquée la manière d'intégrer l'équation

$$F(x+pz, y+qz, z\sqrt{1+p^2+q^2}) = 0.$$

J'en connais une solution particulière, mais je désirerais, s'il se peut, en avoir la solution générale.

M. DE MONTCHEUIL.

481. **[H8f]** Soient z une fonction des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les dérivées partielles correspondantes de z; sait-on intégrer l'équation

$$F(x_1+p_1z, x_2+p_2z, \ldots, x_n+p_nz, z\sqrt{1+p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}) = 0\ ?$$

M. DE MONTCHEUIL.

482. **[L¹18c]** Les coniques qui ont entre elles un contact du troisième ordre en un point donné peuvent être définies géométriquement comme ayant en ce point même tangente, même diamètre et même rayon de courbure. Pourrait-on dès lors démontrer *géométriquement* que le lieu des foyers est une strophoïde?

(On sait que cette courbe peut se définir au moyen d'un point et d'une droite : la droite est ici le diamètre commun, et le point n'est autre que le foyer de la parabole du faisceau.)

A. GOULARD.

483. **[K9b]** Connaît-on une construction simple *faisant voir* que le côté du pentagone régulier est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont le rayon et le côté du décagone régulier? La meilleure que je connaisse est la construction indiquée dans la *Géométrie* de M. Dufailly (p. 124). Je voudrais trouver mieux encore. A. Goulard.

484. **[A3a]** La question suivante a-t-elle été traitée? $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots$ étant un polynome dont les coefficients sont commensurables, mais non entiers, trouver les conditions auxquelles ces coefficients doivent satisfaire pour que le polynome prenne toujours une valeur entière lorsqu'on donne à x une valeur entière quelconque.

Exemples : $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x$, $\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{12}x, \ldots$.

C.-A. Laisant.

485. **[D1a]** Soit $f(x)$ la fonction périodique

$$E(x) - x + \tfrac{1}{2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi},$$

M. Hermite a démontré (*A. M.*, t. V, p. 315) la formule

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} f\left(x+\frac{\nu}{n}\right) = f(nx).$$

En cherchant, à la demande de M. Frobenius, à généraliser ce résultat, nous sommes arrivé à cette conclusion que les quantités $f\left(x+\frac{\nu}{n}\right)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) sont racines d'une équation algébrique dont les coefficients dépendent rationnellement de $f(nx)$. On demande de former cette équation en calculant les sommes $\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} f^r\left(x+\frac{\nu}{n}\right) = h_r$ des puissances semblables des racines, r étant un exposant entier et positif. On a, par exemple,

$$nh_2 = f^2(nx) + \frac{n^2-1}{12},$$

$$n^2h_3 = f^3(nx) + \frac{n^2-1}{4} f(nx),$$

$$n^3h_4 = f^4(nx) + \frac{n^2-1}{2} f^2(nx) + \frac{(n^2-1)(3n^2-7)}{240}.$$

Si l'on veut que ces formules subsistent quand l'un des arguments $x+\frac{\nu}{n}$ est nul ou égal à un nombre entier, on devra remplacer $f(\text{o})$, dans les deux membres, soit par $+\frac{1}{2}$, soit par $-\frac{1}{2}$. Je serais désireux d'avoir l'indication d'une méthode qui amenât à ces résultats par une voie probablement différente de celle qui m'a permis de les obtenir. J. FRANEL (Zurich).

486. [M⁴a]. Je voudrais savoir quel est le lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont tangents à une cycloïde.

Nester.

487. [I19c]. J'ai rencontré autrefois, dans mes lectures, le théorème empirique suivant : *Les nombres* 8 *et* 9 *forment le seul couple de deux entiers consécutifs qui soient chacun une puissance d'un nombre entier.* Ce théorème a été démontré par Gerono, (*N. A.*, 1870, p. 469; 1871, p. 204), mais seulement pour le cas particulier où l'une des deux racines serait un nombre premier. Je demande s'il en existe une démonstration générale. DÉSIRÉ ANDRÉ.

488. [E5]. Je voudrais avoir des renseignements sur les publications, s'il y en a, qui traitent de l'intégrale $\int \frac{\log^n x}{1 \pm x}\,dx$ où n est un entier > 1. DAVIDE BESSO (Modène).

489. [V9]. Serait-il possible d'avoir quelques renseignements sommaires, et cependant précis, sur les monographies mathématiques publiées en Allemagne, ou en voie de préparation? Ces travaux sont notamment provoqués par l'initiative de M. le professeur E. Lampe, de Berlin. Il y est fait allusion dans les résolutions du Congrès de Caen (1894) qui ont été portées par l'*Intermédiaire* à la connaissance de ses lecteurs.

Milèse.

RÉPONSES.

145. (J. Tannery). *Quelques indications sur la question.*

(A). Soit $u_n = (2b)^n(b - x_n)$. Je poserai $b = \frac{1}{\alpha}$; b étant > 1, on a : $0 < \alpha < 1$.

On tire de l'égalité $u_n = (2b)^n(b - x_n)$, $x_n = b - \frac{u_n}{(2b)^n}$.

De même $x_{n-1} = b - \frac{u_{n-1}}{(2b)^{n-1}}$. Or $x_n^2 = b^2 - b + x_{n-1}$; donc $u_n^2 = (2b)^{n+1}(u_n - u_{n-1})$.

(B). En se servant de l'identité

$$u_n = u_0 + (u_1 - u_0) + \ldots + (u_{n+1} - u_{n-1}),$$

on trouve $u_n = u_0 + \frac{u_1^2}{(2b)^2} + \ldots + \frac{u_n^2}{(2b)^{n+1}}$. Si l'on pose $u = \lim_{n=\infty} u_n$, on a donc $u = u_0 + \frac{u_1^2}{(2b)^2} + \ldots + \frac{u_n^2}{(2b)^{n+1}} + \ldots$ ou

$$u = b + (b - x_1)^2 + (2b)(b - x_2)^2 + \ldots + (2b)^{n-1}(b - x_n)^2 + \ldots,$$

la série du deuxième membre est convergente.

On a aussi $\frac{b}{u_n} = \frac{(b + x_1)(b + x_2)\ldots(b + x_n)}{2^n b^n}$.

Donc $\frac{b}{u} = \prod_1^\infty {}^n \left[1 - \frac{u_n}{(2b)^{n+1}}\right]$, le produit du deuxième membre est absolument convergent.

(C). On s'aperçoit aisément que αu_n peut être développé suivant une série entière ordonnée par rapport aux puissances croissantes de α.

Nous poserons $\alpha u_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\alpha + \ldots + a_p^{(n)}\alpha^p + \ldots$.

La relation $u_n^2 = (2b)^{n+1}(u_n - u_{n-1})$ peut s'écrire

$$\alpha^n(\alpha u_n)^2 = 2^{n+1}[(\alpha u_n) - (\alpha u_{n-1})];$$

on conclut de là que les n premiers coefficients de αu_{n-1} sont aussi les n premiers coefficients de αu_n.

Autrement dit, *si l'on développe* αu_n *en série suivant les puissances croissantes de* α, *les* $(n+1)$ *premiers termes du développement sont aussi les* $(n+1)$ *premiers termes du développement de* αu *en série, suivant les puissances croissantes de* α.

Posons $\alpha u = a_0 + a_1 \alpha + \ldots + a_p \alpha^p + \ldots$.

De la formule $\alpha^n (\alpha u_n)^2 = 2^{n+1}(\alpha u_n - \alpha u_{n-1})$, on tire

$$(1)\quad a_0^{(n)} a_p^{(n)} + a_1^{(n)} a_{p-1}^{(n)} + \ldots + a_p^{(n)} a_0^{(n)} = 2^{n+1}\left(a_{n+p}^{(n)} - a_{n+p}^{(n-1)}\right),$$

puis on en déduit

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} a_n^{(n)} = a_n = {} & \frac{a_0^{(n)} a_0^{(n)}}{2^{n+1}} + \frac{a_0^{(n-1)} a_1^{(n-1)} + a_1^{(n-1)} a_0^{(n-1)}}{2^n} + \ldots \\ & + \frac{a_0^{(n-p)} a_p^{(n-p)} + a_1^{(n-p)} a_{p-1}^{(n-p)} + \ldots + a_p^{(n-p)} a_0^{(n-p)}}{2^{n-p+1}} + \ldots \\ & + \frac{a_0^{(1)} a_{n-1}^{(1)} + a_1^{(1)} a_{n-2}^{(1)} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} a_0^{(1)}}{2^2}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, tout nombre a_i^j où i est inférieur ou égal à j est égal à a_i. On pourra ainsi calculer de proche en proche les coefficients, en faisant $\left\{\begin{array}{l} p = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots, \end{array}\right.$ et en observant que $a_0 = 1$; on a ainsi $a_1 = \frac{1}{2^2}$, $a_2 = \frac{1}{2^2}$; puis $a_3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2} a_2^{(1)}$; mais la formule (1) donne $a_2^{(1)} = \frac{1}{2^3}$, donc $a_3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6}$, puis $a_4 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$, ...

Un coup d'œil jeté sur les formules suffit pour montrer que a_n est de la forme $a_n = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \ldots + \frac{1}{2^\lambda}$, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant des nombres entiers positifs.

LEVAVASSEUR.

150. (VICAIRE). *Note.* — La question posée soulève des difficultés bien considérables; il n'est pas sûr du tout en effet, lorsqu'on connaît une fonction expérimentalement, que la série de Taylor lui soit applicable dans un intervalle, aussi petit qu'il soit (même si la fonction admet des dérivées de tous les ordres); il est vrai qu'on peut toujours employer le développement de Taylor limité, *avec un reste.*

J'ai démontré dans ma Thèse [1] qu'une fonction de variable réelle, admettant des dérivées de tous les ordres, peut être représentée par la somme d'une série de Taylor et d'une série de Fourier, de telle sorte qu'on obtienne les dérivées de la fonction en différentiant les séries terme à terme; je suis persuadé que, dans certains cas, ce développement (en prenant un nombre convenable de termes dans chaque série) serait préférable, au point de vue où se place M. Vicaire, au développement de Taylor; c'est un point qui reste à étudier. ÉMILE BOREL.

158. (*Cemeda*). — Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* Tomes VII_2 et $VIII_2$ (année 1883, p. 278; 1884, p. 19 et 101) j'ai publié une série de notes *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité,* où j'ai réuni et discuté tous les témoignages connus sur la question. En dehors des lignes énumérées dans l'énoncé, on n'a guère, pour les courbes planes, qu'un nom, la courbe *de double mouvement* (Carpos d'Antioche, vers le premier siècle de l'ère chrétienne), liée à la quadrature du cercle et qui paraît être la cycloïde. La *paradoxos* de Ménélas (Rome? même époque) rentrait peut-être dans les courbes gauches.

Parmi ces dernières, les Grecs ont connu au moins, en dehors de la spirale cylindrique (employée par Archimède et spécialement étudiée par Apollonius dans un traité perdu *Sur la vis*), des spirales coniques et sphériques (avant l'ère chrétienne) et l'*hippopède* d'Eudoxe de Cnide (vers 360 av. J.-C. à Cyzique), intersection d'une sphère par un cylindre qui lui est tangent intérieurement (restitution de Schiaparelli). PAUL TANNERY.

On lit à la page 330 du Tome I de l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla (deuxième édition) :

« Je ne dois pas omettre une curiosité géométrique qu'on trouve dans Pappus, soit qu'elle soit son ouvrage, soit qu'elle soit celui d'un géomètre antérieur à lui : c'est la détermination sur la surface sphérique d'une portion absolument quarrable. Pappus démontre que si, du sommet d'un hémisphère, on décrit

---

[1] *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (Gauthier-Villars et fils, 1894), et *Annales de l'École Normale supérieure,* janvier et février 1895 (Sous presse).

une spirale par un point partant de ce sommet et marchant uniformément sur le quart de cercle qu'il parcourra pendant que ce quart de cercle fera une révolution entière autour de l'axe de l'hémisphère, la portion de surface sphérique, comprise entre la surface et la base, sera égale au quarré du diamètre ».

J'ai vu aussi quelque part, peut-être dans le même ouvrage, que le P. Sébastien s'occupa en 1699 de la « spirale de Pappus », courbe obtenue en traçant sur un « conoïde parabolique (¹) » un canal spiral issu du sommet et faisant un angle constant avec chaque génératrice, et démontra qu'un corps pesant, tombant le long de cette spirale, mettait le même temps à franchir chaque spire. Voilà donc deux courbes qui peut-être ont été connues des Grecs. Il y aurait lieu aussi de se demander ce que les Anciens ont pu trouver comme lieu dans un cas particulier du problème « ad tres aut plures lineas », dont parle aussi Montucla (t. I, p. 330-331). G. MAUPIN.

163. (*Macedo*). — Comme on a identiquement

$$(x+a)^3+(x-a)^3=2x^3+6xa^2,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}&(x+a)^3+(x-a)^3+(x+b)^3+(x-b)^3\\&\quad+(x+c)^3+(x-c)^3+(x+d)^3+(x-d)^3\\&\quad=8x^3+6x(a^2+b^2+c^2+d^2).\end{aligned}$$

Puisque tout nombre N peut se décomposer en la somme de quatre carrés, posons : $N=a^2+b^2+c^2+d^2=m(2x+m)$; en désignant par a^2 le plus grand des carrés dans la décomposition, nous pourrons écrire l'égalité précédente sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&(2x+m)^3=m^3+(x+a)^3+(x-a)^3+(x+b)^3+(x-b)^3\\&\qquad+(x+c)^3+(x-c)^3+(x+d)^3+(x-d)^3.\end{aligned}\right.$$

On aura donc, en supposant que $m=1$ (et nous ne considérerons que ce cas pour plus de simplicité)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&N^3=(2x+1)^3=1^3+(x+a)^3+(x-a)^3+(x+b)^3\\&\qquad+(x-b)^3+(x+c)^3+(x-c)^3+(x+d)^3+(x-d)^3.\end{aligned}\right.$$

(¹) L'expression de « conoïde parabolique » est prise dans le sens de surface engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe.

Si l'on observe que la plus grande valeur de a est inférieure à $\sqrt{2x+1}$ il faut, pour que tous les termes du second membre de l'égalité précédente soient positifs, que $x > \sqrt{2x+1}$; or cette inégalité est manifeste si $x > 2$. Pour $x = 1$, nous avons : $3^3 = 3.2^3 + 3.1^3$, pour $x = 2$, $5^3 = 4.3^3 + 2.2^3 + 1^3$.

Il en résulte que l'égalité (2) nous donnera toujours le moyen de décomposer un cube impair en la somme de neuf cubes plus petits, et cela de plusieurs manières, lorsque le nombre N peut affecter la somme de quatre carrés de plusieurs manières différentes. Si le nombre N^3 était un nombre pair, ce nombre serait nécessairement de la forme $2^{3k}(2x+1)^3$, et en multipliant chaque cube qui résulterait de la décomposition de $2x+1$ élevé au cube par 2^{3k}, on obtiendrait la décomposition du nombre $2^{3k}(2x+1)^3$ en neuf cubes ou moins de neuf cubes. Je me borne ici à répondre à la question qui est proposée, mais il y aurait beaucoup à ajouter si l'on voulait faire la discussion des différentes manières d'opérer cette décomposition.

G. Oltramare (Genève).

Note. — Le théorème qui vient d'être démontré est resté longtemps un théorème empirique. Voir *N. A.*, 1855, p. 118; Edouard Waring (*Meditationes algebricæ,* p. 349, 3e édition, Cambridge, 1782; *Cr.*, t. XLII, p. 41), avait vérifié que de 1 à 10000 tout nombre entier est la somme de 9 cubes entiers positifs au plus. E. Lemoine.

164. (E. Fauquembergue). — La suite récurrente $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 6$, $u_3 = 35$, ..., $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$ comprend tous les nombres dont le carré est un triangulaire. Les nombres cherchés sont donc ceux de cette suite qui sont triangulaires; les nombres de cette suite présentent la décomposition suivante

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2, \qquad u_{2n} = 2u_n(3u_n - u_{n-1}).$$

Une étude facile de ces nombres montre que u_n ne saurait être triangulaire, quand n est de l'une des formes $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$, $4k+3$, $12k+8$. Les seuls nombres que ces formes n'éliminent pas sont u_{6k}, u_{12k+1}, u_{12k+2}. On vérifie directement que u_6, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{18} ne sont pas triangulaires : donc si d'autres nombres que 0, 1 ou 6 répondent à la question, ils sont égaux ou supérieurs à $u_{24} = 417.501.372.047.787.720$.

A. Boutin.

166. (Cesàro). Ce problème, que j'ai rencontré dans des recherches sur la déformation, est un cas particulier du suivant, non encore traité à ma connaissance : *Déterminer toutes les figures de l'espace qui se reproduisent identiquement par une transformation homographique.*

Soient, en coordonnées homogènes, $\frac{x'}{mx} = \frac{y'}{ny} = \frac{z'}{pz} = \frac{u'}{qu}$ les équations d'une homographie rapportée à son tétraèdre invariant. Opérons, sur les figures, primitive et transformée, l'homologie $\frac{x}{u} = x_1$, $\frac{y}{u} = y_1$, $\frac{z}{u} = z_1$, puis la transformation exponentielle $x_1 = e^{x_2}$, $y_1 = e^{y_2}$, $z_1 = e^{z_2}$; l'homographie proposée se trouvera transformée en une translation

$$x'_2 = x_2 + \mathrm{L}\frac{m}{q}, \qquad y'_2 = y_2 + \mathrm{L}\frac{n}{q}, \qquad z'_2 = z_2 + \mathrm{L}\frac{p}{q}.$$

Si nous changeons enfin la direction de l'axe des z, de manière à le rendre parallèle à cette translation, les équations ci-dessus deviennent $x'_3 = x_3$, $y'_3 = y_3$, $z'_3 = z_3 + \mathrm{K}$.

Or, pour que $\mathrm{F}(x_3, y_3, z_3) = 0$ représente une surface invariante de cette dernière translation, il faut et il suffit que l'équation ci-dessus entraîne $\mathrm{F}(x_3, y_3, z_3 + \mathrm{K}) = 0$, c'est-à-dire que la fonction F soit périodique par rapport à l'un de ses trois arguments.

En raison de ce qui précède, la même équation représentera donc toutes les surfaces auto-homographiques si l'on y remplace x_3, y_3, z_3 par trois fonctions linéaires homogènes des trois expressions $\mathrm{L}\frac{x}{u}$, $\mathrm{L}\frac{y}{u}$, $\mathrm{L}\frac{z}{u}$.

Une ligne auto-homographique sera représentée par deux équations analogues où les périodes K seront égales, ou simplement commensurables.

On voit de suite qu'une figure ainsi déterminée se reproduit identiquement dans une infinité d'homographies formant un groupe généralement discontinu, qui devient continu si la période K est nulle. Dans ce dernier cas, z_3 disparaît de l'équation des surfaces invariantes, et elle prend la forme $\mathrm{F}(x_3, y_3) = 0$ où F est une fonction entièrement arbitraire.

Dans le cas beaucoup plus particulier où y_3 disparaît aussi de l'équation, x_3 est constant, ce qu'on peut écrire

$$x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} u^{\delta} = \text{const.} \quad (\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0);$$

c'est l'équation connue des surfaces anharmoniques, ou surfaces W de MM. Klein et Lie (*C. R.*, 1870). Ces dernières ne représentent donc pas à elles seules toutes les surfaces admettant un groupe continu d'homographies, comme il semblerait en lisant le Mémoire de ces deux illustres géomètres.

Ch. Rabut.

168. (J. de Vries). — Sans prétendre donner une réponse complète à la question, je me contente de signaler quelques travaux d'une importance capitale dans la matière :

Gauss (*Cr.*, t. XX, 312). — Lejeune-Dirichlet (*J. M.*, 1859). — Poincaré (*J. E. P.*, 1879). — Klein (*Evanston Colloquium*, New-York, 1893). Joseph Perott (U. S. A.)

170. (J. Franel.) — Je suis revenu sur la question 170 qui m'avait été suggérée par la question 42; et voici la solution que j'ai trouvée. Si l'on définit le polynome $U_n(x)$ par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz - (1 - x^2) z^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n(x) z^n,$$

on trouve, sans peine,

$$^{(4)}S_n = \frac{2^{2n}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{U_n^2(x)\, dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d'où l'on déduit, après un calcul assez laborieux,

$$\begin{aligned} n^3\, {}^{(4)}S_n = {} & 2(6n^3 - 9n^2 + 5n - 1)\, {}^{(4)}S_{n-1} \\ & + (4n - 3)(4n - 4)(4n - 5)\, {}^{(4)}S_{n-2}. \end{aligned}$$

Cette formule peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} (2n)^3\, {}^{(4)}S_n = {} & 4[3(2n - 1)^3 + (2n - 1)]\, {}^{(4)}S_{n-1} \\ & + 16[4(2n - 2)^3 - (2n - 2)]\, {}^{(4)}S_{n-2}. \end{aligned}$$

On a, d'autre part (voir *Intermédiaire*, 1894, p. 46),

$$(2n)^2\, {}^{(3)}S_n = [7(2n - 1)^2 + 1]\, {}^{(3)}S_{n-1} + 8(2n - 2)^2\, {}^{(3)}S_{n-2},$$

et l'on sait que

$$(2n)\, {}^{(2)}S_n = 4(2n - 1)\, {}^{(2)}S_{n-1}, \qquad {}^{(1)}S_n = 2\, {}^{(1)}S_{n-1}.$$

Il semble donc que l'on puisse énoncer le résultat suivant : *En* *faisant* $p = 2q + 1$ *ou* $p = 2q + 2$, *selon que* p *est impair ou pair, on a généralement*

$$(2n)^{p-1}\,{}^{(p)}S_n = f_0(2n-1)\,{}^{(p)}S_{n-1} + f_1(2n-2)\,{}^{(p)}S_{n-2} + \ldots + f_q(2n-1-q)\,{}^{(p)}S_{n-q-1},$$

où $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_q(x)$ *désignent des polynomes entiers, de degré* $p-1$, *satisfaisant à l'équation* $f_i(-x) = (-1)^{p-1} f_i(x)$, $(i = 0, 1, \ldots, q)$. Voici quelques indications pour les correspondants qui seraient tentés de vérifier cette formule dans le cas de $p = 5$. On a

$${}^{(5)}S_n = \frac{2^{2n}}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{x^n F_n(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$F_n(\cos\alpha, \cos\beta) = 2^n U_n\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] U_n\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right].$$

$F_n(x, y)$ est un polynome entier, de degré n, en x et en y. Parmi les nombreuses propriétés de ce polynome nous citerons les suivantes :

$$F_n(x, y) = F_n(y, x) = (-1)^n F_n(-x, -y),$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial x} = (2n-1) F_{n-1} + (y - x)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial y} = (2n-1) F_{n-1} - (y - x)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y},$$

$$(y - x)\frac{\partial^2 F_n}{\partial x\,\partial y} + n\left(\frac{\partial F_n}{\partial y} - \frac{\partial F_n}{\partial x}\right) = 0,$$

$$2(2n-1)\left[(1-x^2)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y}\right] = n^2 F_n - (2n-1)^2(x+y)F_{n-1} - (n-1)^2(x-y)^2 F_{n-2},$$

$$2(2n-1)\left[(1-x^2)\frac{\partial F_n}{\partial x} - (1-y^2)\frac{\partial F_n}{\partial y}\right] = (y-x)[n^2 F_n + (2n-1)^2(x+y)F_{n-1} - (n-1)^2(x-y)^2 F_{n-2}].$$

La fonction

$$y_p = \sum_{n=0}^{n=\infty} {}^{(p)}S_n \left(\frac{x}{2^p}\right)^n$$

satisfait à une équation différentielle linéaire homogène à coefficients rationnels. On a, par exemple,

$$(x^3+7x^2-8x)\frac{d^2y_3}{dx^2}+(3x^2+14x-8)\frac{dy_3}{dx}+(x+2)y_3=0,$$

$$(x^4+3x^3-4x^2)\frac{d^3y_4}{dx^3}+\frac{3}{2}(4x^3+9x^2-8x)\frac{d^2y_4}{dx^2}$$
$$+\left(\frac{111}{16}x^2+10x-4\right)\frac{dy_4}{dx}+\left(\frac{15}{16}x+\frac{1}{2}\right)y_4=0.$$

J. Franel (Zurich).

172. (S.- W. Tesch). *Deuxième réponse. — Addition à la solution publiée,* 1894, *p.* 203. — Le problème : « Placer un triangle donné de telle manière que chacun de ses sommets soit sur l'un de trois cercles donnés » est classé parmi les problèmes démontrés impossibles par la Géométrie canonique de la règle et du compas. (*Voir* Petersen, *Méthodes et Théories,* etc., trad. O. Chemin, 1880, p. 109). E. Fauquembergue.

174. (J. Cardinaal). Dans un Mémoire inséré dans le tome I des M. A. (*Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung*) Clebsch a démontré : 1° que sur toute surface du quatrième ordre à droite double, il existe 16 droites qui coupent la droite double et qu'*il n'y en a pas d'autres;* 2° qu'il y a 64 plans triplement tangents qui coupent la surface suivant deux coniques. E. Genty.

175. (J. Cardinaal). — *Voir* la réponse à la question **174**.

E. Genty.

182. (Korkine.) — Si p désigne un nombre premier de la forme $4n+3$, le produit $P=1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$ est congru, suivant le module p, à $+1$ ou à -1, selon que P est résidu ou non résidu quadratique de p.

En faisant $P\equiv(-1)^m(p)$, on aura donc

$$(-1)^m=\prod_{r=1}^{r=\frac{p-1}{2}}\left(\frac{r}{p}\right)\quad(2).$$

Mais, en vertu d'un lemme bien connu, dû à Gauss,

$$\left(\frac{r}{p}\right)=(-1)^{m_r},$$

où l'on a

$$m_r \equiv \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{rs}{p}\right) \quad (2),$$

de sorte que

$$m \equiv \Sigma m_r \equiv \sum_{r=1}^{r=\frac{p-1}{2}} \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{rs}{p}\right) \quad (2).$$

Si r et s sont différents, le terme $\mathrm{E}\left(\frac{rs}{p}\right)$ figure deux fois dans le second membre. On a donc simplement

$$m \equiv \sum_{r=1}^{r=\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{r^2}{p}\right) \quad (2);$$

or cette dernière somme est égale au nombre des points dont les coordonnées sont des nombres entiers situés dans la région comprise entre l'axe des x, la parabole $y = \frac{x^2}{p}$ et la droite $x = \frac{p-1}{2}$, les points situés sur cette dernière droite étant comptés et ceux de l'axe des x exclus. Semblablement, la somme

$$\sum_{y=1}^{y=\mathrm{E}\left[\frac{(p-1)^2}{4p}\right]} \mathrm{E}(\sqrt{py}) = \sum_{y=1}^{y=\frac{p-3}{4}} \mathrm{E}(\sqrt{py})$$

représente le nombre des points, à coordonnées entières, situés dans la région limitée par l'axe des y, la parabole $y = \frac{x^2}{p}$ et la droite $y = \frac{(p-1)^2}{4p}$, les points de l'axe des y n'étant pas comptés. Ces deux régions réunies formant un rectangle, on en conclut immédiatement

$$\sum_{r=1}^{r=\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{r^2}{p}\right) + \sum_{y=1}^{y=\frac{p-3}{4}} \mathrm{E}(\sqrt{py}) = \frac{p-1}{2}\,\frac{p-3}{4},$$

d'où

$$m \equiv \frac{p-1}{2}\,\frac{p-3}{4} + \sum_{y=1}^{y=\frac{p-3}{4}} \mathrm{E}(\sqrt{py}) \quad (2),$$

ou bien, puisque $\frac{p-1}{2}$ est impair,

$$m \equiv \frac{p-3}{4} + \sum_{y=1}^{y=\frac{p-3}{4}} \mathrm{E}(\sqrt{py}) \quad (2). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

J. Franel (Zurich).

186. (E. Chailan). — Soient r_1, x_1, r_2, x_2 les restes immédiats et les racines carrées de A à $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+p}$ près :

$$x_1^2 + r_1 = \mathrm{A}n^2; \qquad x_2^2 + r_2 = \mathrm{A}(n+p)^2.$$

La racine $\frac{x_2}{n+p}$ sera plus approchée que $\frac{x_1}{n_1}$ si $\frac{r_1}{n^2} > \frac{r_2}{(n+p)^2}$, ou, très simplement, si

$$(1) \qquad p > n\left(\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} - 1\right),$$

condition *nécessaire* et *suffisante*.

D'autre part, si l'on cherche une racine plus approchée, mais inconnue, on ignore la valeur de r_2. Nous prendrons alors une limite supérieure de r_2 et nous aurons ainsi une condition qui sera *suffisante,* mais pourra bien n'être pas nécessaire: $r_2 \leqq 2x_2$; et si x est une valeur approchée de $\sqrt{\mathrm{A}}$ *par excès,* mais d'ailleurs quelconque,

on aura $$\frac{x_2}{n+p} < x,$$

d'où la condition suffisante $p > n\left[\sqrt{\frac{2x(n+p)}{r_1}} - 1\right]$, inégalité du second degré; p entier, positif, devant être extérieur aux racines de l'équation correspondante, racines dont l'une est négative, est soumis à l'inégalité $p > n\left(\frac{2nx}{r_1} - 1\right)$. On a donc ce théorème :

Soient r_1 le reste immédiat de l'extraction de la racine carrée d'un nombre A *à $\frac{1}{n}$ près, et x une racine carrée approchée* *par excès de* A; *si l'on a* $p > n\left(\frac{2nx}{r_1} - 1\right)$ *la racine carrée à* $\frac{1}{n+p}$ *près de* A *est plus approchée que la racine à* $\frac{1}{n}$ *près.*

P.-F. Teilhet.

190. (H. Lez). — 1° Des deux équations données on déduit successivement

$$(1)\qquad y = r(2\sin\varphi + \sin 2\varphi),$$

$$(2)\qquad x = r(2\cos\varphi - \cos 2\varphi);$$

$$x^2 + y^2 = r^2(5 - 4\cos 3\varphi), \qquad = r^2(5 + 12\cos\varphi - 16\cos^3\varphi),$$

$$x = r(1 + 2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi);$$

$$(3)\qquad 3r - 2x = r(1 - 2\cos\varphi)^2,$$

$$(4)\qquad x^2 + y^2 = r^2[9 - 6(1 - 2\cos\varphi)^2 + 2(1 - 2\cos\varphi)^3];$$

multiplions par $6r$ les deux membres de (3) et ajoutons membre à membre avec (4), nous aurons

$$(5)\qquad x^2 + y^2 - 12rx + 9r^2 = 2r^2(1 - 2\cos\varphi)^3.$$

L'élimination de $(1 - 2\cos\varphi)$ entre (3) et (5) donne immédiatement

$$(6)\qquad (x^2 + y^2 - 12rx + 9r^2)^2 = 4r(3r - 2x)^3.$$

2° Dans le second système d'équations, faisons $\varphi = \pi - \varphi'$ et $r = 2r'$; elles deviennent :

$$y = r'(2\sin\varphi' + \sin 2\varphi'), \qquad x = -r'(2\cos\varphi' - \cos 2\varphi').$$

Ces équations ont, au signe près de x, la même forme que les équations (1) et (2). Donc, dans l'équation (6), il suffit de changer x en $-x$, et de remplacer r par $\frac{r}{2}$, pour avoir l'élimination de φ. On obtient ainsi, après avoir chassé les dénominateurs : $(4x^2 + 4y^2 + 24rx + 9r^2)^2 = 4r(3r + 4x)^3$.

E. Fauquembergue.

Depuis que je vous ai envoyé la question, j'ai trouvé pour la résoudre le procédé fort simple que voici.

Premier système d'équations. — Multipliant la première par $\sin\frac{\varphi}{2}$, la deuxième par $\cos\frac{\varphi}{2}$ et soustrayant, on a

$$y = r\left(3\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\right),$$

qu'on écrit facilement

$$(1) \qquad y = r(2\sin\varphi + \sin 2\varphi).$$

On trouve de même

$$(2) \qquad x = r(2\cos\varphi - \cos 2\varphi).$$

Élevant au carré chacune de ces deux nouvelles équations et additionnant, on a

$$x^2 + y^2 = r^2(5 - 4\cos 3\varphi),$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{5r^2 - x^2 - y^2}{4r^2} = \cos 3\varphi = \cos\varphi(4\cos^2\varphi - 3).$$

Mais l'équation (2) donne

$$x = r(2\cos\varphi - \cos 2\varphi) = r(2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi + 1),$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3r - 2x}{r}}.$$

Par suite, l'équation (3) se transforme et devient successivement

$$\frac{r^2 - x^2 - y^2}{4r^2} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3r - 2x}{r}}\right)\left[\frac{2(2r - x)}{r} \pm 2\sqrt{\frac{3r - 2x}{r}} - \frac{3r}{r}\right],$$

$$r^2 - x^2 - y^2 = 2r^2\left(\frac{7r - 6x}{r} \pm \frac{3r - 2x}{r}\sqrt{\frac{3r - 2x}{r}}\right),$$

et enfin

$$(x^2 + y^2 + 9r^2 - 12rx)^2 = 4r(3r - 2x)^3.$$

Deuxième système. — Élevant au carré les deux équations et ajoutant, on a $x^2 + y^2 = r^2\left(\frac{5}{4} + \cos 3\varphi\right)$, d'où

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - \frac{5r^2}{4} = r^2\cos\varphi(4\cos^2\varphi - 3);$$

mais de la valeur de x on tire $\cos\varphi = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x + 3r}{r}}$;

substituant dans l'équation (1), on arrive facilement à

$$(4x^2+4y^2+9r^2+24rx)^2=4r(4x+3r)^3.$$

H. Lez.

191. (A. Lemaire, A. Thorin, *Saurelles*). — Consultez le rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers par J.-P. Gram (*A. M.*, t. XVII, p. 301).

J. Tannery.

Je vois une Table des diviseurs des nombres jusqu'à 100000, et par suite des nombres premiers, dans le deuxième Volume (tout à la fin) des planches de l'*Encyclopédie* de d'Alembert, édition de 1780.

D. Boin.

Voici, à ma connaissance, l'état des travaux relatifs au dénombrement des diviseurs premiers :

1° *Cribrum arithmeticum*, de Chernac (1811) s'étendant jusqu'à 1020000 (soit le 1er million);

2° *Tables des diviseurs*, de Burckhardt (1814-1817), s'étendant jusqu'à 3036000 (soit le 3e million);

3° *Factoren Tafeln*, de Dahse (1862-1865), de 6000000 jusqu'à 9000000. Ouvrage posthume, publié par les soins du Dr Rosenberg, le 7e million en 1862, le 8e en 1863, et le 9e en 1865, en annonçant à ce moment l'achèvement prochain du 10e million;

4° *Factor Table for the 4th million* (1879), par M. J. Glaisher;

5° *Factor Table for the 5th million* (1880), par M. J. Glaisher;

6° *Factor Table for the 6th million* (1882), par M. J. Glaisher.

H. Brocard.

La plus grande Table des diviseurs calculée par la main de l'homme est celle de Kulik qui va de trois millions jusqu'à cent millions et occupe 4212 pages in-folio. Cette Table, léguée par l'auteur à l'Académie de Vienne, est restée manuscrite.

Les plus grandes Tables imprimées vont jusqu'à neuf millions, Burckhardt pour les trois premiers, Glaisher pour les trois suivants et Dahse pour les trois derniers. Toutes ces Tables sont faciles à se procurer.

Parmi les petites Tables publiées en France on peut, entre autres, signaler Lidonne (1808) qui donne tous les diviseurs de tous les nombres jusqu'à 10000.

Les Tables des diviseurs sont d'ailleurs très nombreuses, de sorte qu'une liste complète prendrait beaucoup de place.

J. PEROTT (U. S. A.).

A propos de nombres premiers, je signale une erreur dans les *Récréations mathématiques* de Lucas, page 235 du 2e Volume, Note II, dans la conjecture proposée pour remplacer celle de Fermat :

« Les seuls nombres premiers (et *tous*) de la forme $2^n + 1$ sont les suivants : $2+1, 2^2+1, 2^{2^2}+1, 2^{2^{2^2}}+1, \ldots$ ». Or cette suite ne comprend pas 2^8+1 qui pourtant est premier (257).

MALVY.

Hülsse, *Sammlung mathematischer Tafeln*. Leipzig, 1849. Ces Tables renferment, entre autres, les facteurs premiers des nombres entiers non divisibles par 2, 3, 5 de 1 à 102000, et les nombres premiers de 102001 à 400313. A propos des logarithmes naturels, on y trouve aussi les nombres premiers de 1009 à 9973.

Lebesgue, *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers* (Paris, Gauthier-Villars, 1864). On y trouve un tableau des nombres premiers, inférieurs à 5500, avec leur représentation au moyen de deux caractères.

Houël, *Tables de logarithmes à 5 décimales* (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1888). A leur suite, Table des plus petits diviseurs des nombres composés non divisibles par 2, 3, 5, 11, de 49 à 10841.

A. QUIQUET.

192. (A. LEMAIRE). — Il se trouve, ou il se trouvait, une publication, qui donne les résultats que l'on obtient en divisant le nombre 1000 par les nombres entiers de 1 à 1000. C'est un Recueil de Tables et de formules, intitulé « *Des Ingenieurs Taschenbuch* » (Berlin, Ernst et Korn); j'ignore si ce manuel utile est encore en vente, mais il a eu de nombreuses éditions.

W.-H.-L. JANSSEN VAN RAAIJ (Harlem).

Ramon Picarte a publié en 1859 (Paris, Mallet-Bachelier) « *La division réduite à une addition* ». Cet ouvrage contient, outre des Tables de logarithmes, une Table de division présentant à la vue avec dix et onze décimales la valeur de toutes les fractions dont le numérateur est 1, 2, 3, ..., 9 et dont le dénominateur est moindre que 10000.

E. FAUQUEMBERGUE, J. PEROTT (U. S. A.).

Le *Carnet de l'Ingénieur* (E. Lacroix, éditeur) et le *Formulaire de l'Électricien*, par E. Hospitalier (G. Masson) donnent les nombres demandés, le premier Ouvrage avec neuf décimales, le second avec cinq. *R.-Ch. Weitz, D. Boin.*

Les *Notes et Formules de l'Ingénieur et du Constructeur-Mécanicien*, par Cl. de Laharpe (8e édition, 1891, Paris, E. Bernard et Cie), renferment une « Table des quarrés, cubes, racines quarrées et cubiques, inverses ou réciproques des nombres entiers de 1 à 1600 et des logarithmes, circonférences et surfaces des cercles, pour les nombres entiers de 1 à 1000 » (*sic*).

De 1 à 1000, les inverses sont donnés avec cinq décimales; de 1001 à 1600 avec dix décimales.

J. GILLET (Maredsous).

Le Tome IX (2e série), 1882, des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége* contient un Mémoire de M. F. Folie, intitulé : *Tables des lignes trigonométriques naturelles et des inverses des nombres* (11 pages).

Les inverses dont il s'agit se rapportent aux nombres de 100 à 999. H. BROCARD.

Voir : *Table of the reciprocals of numbers, from* 1 *to* 100000, by Lieut.-Col. W.-H. Oakes. (London, Charles et Edwin Layton, 150, Fleetstreet, 1865, 21 sh.) Des tables de différences permettent de trouver les réciproques des nombres entiers jusqu'à dix millions.

Dr. R.-H. VAN DORSTEN (Rotterdam), A. QUIQUET,
S. DICKSTEIN (Varsovie).

On trouve, dans E. GELIN, *Recueil de Tables numériques* (Huy, 1894), une Table des réciproques des 1000 premiers nombres, à dix décimales.

193. (C. STEPHANOS). *Troisième réponse*. NOTE. — Les valeurs a, a_1, a_2, ..., obtenues successivement, peuvent tendre vers des limites différentes suivant le point de départ a. Toutes ces limites satisfont à l'équation $f(x) - x = 0$.

Mais parmi les racines de celle-ci il ne faut prendre que celles qui satisfont aux inégalités indiquées à la page 203 de l'année 1894; je les appellerai *centres d'attraction*.

Pour connaître les limites de l'attraction de chaque *centre* il faut classer les valeurs de x suivantes : 1° celles qui rendent $f(x)$ ou $f'(x)$ discontinus; 2° celles qui satisfont à l'équation $f'(x) - 1 = 0$; 3° celles qui satisfont à l'équation $f'(x) + 1 = 0$. On obtient ainsi différents intervalles, et l'attraction de chaque centre s'étend à tout l'intervalle dans lequel il tombe.

Exemple :

$$x = \frac{3(2x^2 + x)}{x^2 + 3x + 5}.$$

Racines 0, 1, 2; centres 0, 2. Pour 0, les limites sont $-0,55$ et $+0,36$. Pour 2, les limites sont $+1,51$ et $+\infty$.

H. Dellac.

195. (J. Gillet). — Soient ABCD le quadrilatère; a, b, c, d les lignes AB, BC, CD, DA; δ, δ' les diagonales AC, BD.

En projetant ABCD *stéréographiquement,* avec le point diamétralement opposé à A pour centre, nous trouvons que la projection se compose de deux lignes droites et de deux arcs. Si nous décrivons les tangentes bt, ct à l'arc bc, et ct', dt' à l'arc cd, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{E} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} - 2\pi &= 2\,tcb + 2\,t'cd = 2\,bc'd \\ &= 2\,tcb + 2\,t'cd = 2\,bc'd, \end{aligned}$$

où c, c' sont les points d'intersection des cercles de projection de BC, CD. Le triangle $bc'd$ donne

$$\sin^2\frac{\mathrm{E}}{4} = \sin^2\frac{1}{2}\,bcd = \frac{(bd + bc' - dc')(bd + dc' - bc')}{4\,bc'dc'}.$$

Mais

$$bd\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2} = \sin\frac{\delta'}{2},$$

$$bc'\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \cos\frac{b}{2},$$

$$dc'\cos\frac{d}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \cos\frac{c}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} 4\sin^2\frac{1}{4}\,\mathrm{E}\,\Pi\cos\frac{a}{2} = {} & \left(\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\delta'}{2} + \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}\right) \\ & \times\left(\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\delta'}{2} - \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}\right). \end{aligned}$$

Si le quadrilatère est cyclique,

$$\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\delta'}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2},$$

et le résultat demandé s'en déduit facilement.

Lorsque le quadrilatère est circonscrit à un cercle X et inscrit à un autre cercle Y, nous avons $a + c = b + d$, d'où

$$\sin^2\frac{1}{4}\,\mathrm{E} = \Pi \operatorname{tang}\frac{a}{2}.$$

W.-J. GREENSTREET (Strond. Glos.).

Une démonstration du premier de ces théorèmes se trouve dans l'ouvrage de M'Clelland and Preston, *A Treatise on spherical Trigonometry* (London, Macmillan and Co, 1886, t. II, art. 112 et 186). Le second théorème peut facilement être déduit en employant l'expression de $\cos^2\frac{1}{2}\widehat{bc'd}$ au lieu de celle de $\sin^2\frac{1}{2}\widehat{bc'd}$ (t. II, p. 165).

R.-H. VAN DORSTEN (Rotterdam).

M. E. GELIN (Huy) nous a aussi envoyé une solution détaillée de le question.

M. H. BROCARD nous a communiqué, de la question 195, une solution complète que nous avons transmise aux *N. A.*, où la question se trouve posée depuis longtemps. LA RÉDACTION.

200. (A. THORIN). — Feu Dormoy, ingénieur des Mines, a publié en 1867 chez Dunod, 49, quai des Augustins, à Paris, un fascicule in-4° de 28 pages intitulé : *Formule générale des nombres premiers et théorie des objectifs.* Les lignes suivantes (page 17) définissent le but qu'il s'est proposé et qu'il pense avoir atteint :

Je me propose de chercher une formule générale donnant tous les nombres premiers jusqu'à une certaine limite, aussi reculée qu'on voudra, et ne donnant rien que des nombres premiers. On sait que cette formule ne peut pas être de la forme d'un polynome algébrique; celle à laquelle je serai conduit contiendra plusieurs indéterminées, toutes au premier degré, mais on ne pourra l'appliquer qu'à la condition qu'on donnera à chacune d'elles des valeurs entières et inférieures à une certaine limite, et que, de plus, le nombre fourni par la formule ne s'élèvera pas lui-même au-dessus d'une certaine quantité. Moyennant ces deux restrictions, la formule ne donnera que des nombres premiers et les donnera tous. »

HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

On trouve, dans le Mémoire de Dormoy, cité plus haut, une formule qui donne, dit-il, tous les nombres premiers inférieurs au carré du nombre premier qui suit un nombre quelconque t et ne donne que ces nombres, connaissant tous les nombres premiers depuis 1 jusqu'à t; cela moyennant deux conditions (*voir* plus haut).

HENRY BOURGET.

201. (ARTEMAS MARTIN.) — *Deuxième réponse.* — Voir *Cr.*, 1830, t. 5, p. 380-382 (TH. CLAUSEN, *Ueber die Summe der Reihen*

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots \textit{ und } 1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \ldots\Big).$$

H. BROCARD.

202. (L. RIPERT.) — Dans la *Geometria analitica* (Turin, Lœpter, 1884) de E. d'Ovidio, ainsi que dans l'opuscule *Le proprietà fondamentali delle superficie di* 2° *ordine,* etc. (*Ibid.*, 1883), on peut trouver la démonstration demandée, et aussi une étude complète très détaillée du problème des plans principaux des quadriques et de celui des sections planes. Les formules y sont données pour le cas plus général des coordonnées cartésiennes et plückériennes obliques. *Prinz.*

La démonstration demandée a été donnée par M. Genty (*N. A.*, 1881, p. 414). Il en a déduit, sous leur forme habituelle, les conditions qui expriment qu'une surface du 2e degré est de révolution. *Molp.*

Nous avons reçu aussi des solutions très complètes de MM. WELSCH, V. HIOUX et de l'auteur; comme elles ont un certain développement, nous nous contenterons de donner les indications qui précèdent, puisque la question est déjà traitée ailleurs.

LA RÉDACTION.

203. (*D. Boin.*) — D'après le théorème de Bernoulli (*voir* BERTRAND, *Calcul des probabilités,* p. 83), si p désigne la probabilité de la rencontre de l'aiguille avec une des parallèles

$\left(p = \frac{2l}{e\pi}\right)$, l'intégrale

$$\varpi_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2Np(1-p)}}} e^{-t^2}\,dt,$$

représente la probabilité pour que, sur N épreuves, le nombre R des rencontres soit compris entre $pN + \alpha$ et $pN - \alpha$. Si l'on se donne ϖ_α, $\frac{\alpha}{\sqrt{2Np(1-p)}}$ prend une valeur correspondante K bien déterminée et α ou $K\sqrt{2Np(1-p)}$, variable avec p, passe par un *maximum* pour $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $\frac{l}{e} = \frac{\pi}{4} = \frac{50,00}{63,60} = 0,786\ldots.$

On retrouve ainsi la valeur du rapport indiquée par le *Magasin pittoresque;* mais, contrairement à son affirmation, cette valeur ne correspond pas du tout aux conditions les plus favorables pour le calcul de π, et l'on peut montrer que ces conditions se trouvent réalisées lorsque la longueur de l'aiguille est égale à l'équidistance des parallèles. Le rapport $\frac{2N\rho}{Re}$ ou $\frac{2N\rho}{(pN \pm \alpha)e} = \frac{\pi}{1 \pm \frac{\alpha}{Np}}$ fournit, en effet, une valeur d'autant plus approchée de π que le terme $\frac{\alpha}{Np} = K\sqrt{\frac{2}{N}\left(\frac{1}{p} - 1\right)}$ est plus petit. La plus grande approximation possible correspond donc au minimum de ce terme, minimum qui a lieu lui-même évidemment en même temps que le maximum de p. Mais $p = \frac{2l}{e\pi}$, avec la condition essentielle $l \leqq e$; donc p est maximum pour $l = e$. La valeur de p est alors $\frac{2}{\pi} = 0,637$ et l'erreur relative commise en substituant à π le rapport $\frac{\pi}{1 \pm \frac{\alpha}{Np}}$ est représentée par la fraction $\frac{\pm 1}{0,94\frac{\sqrt{N}}{K} \pm 1}$. Si l'on veut, par exemple, avoir 99 chances sur 100 ($\varpi_\alpha = 0,99$, $K = 1,83$) pour obtenir π avec deux décimales exactes, il faut prendre $N = 4000000$. En estimant à une seconde le temps exigé par une épreuve, il faudrait 45 jours de travail ininterrompu pour calculer π avec l'approximation demandée! F. Robellaz.

204. (C. Cailler.) — 1° On a

$$2\varphi_0(m, n) = \varphi_1(m, n) + \varphi_2(m, n) = \frac{(m+n+2)!}{(m+1)!\,(n+1)!}.$$

On peut obtenir les expressions des deux quantités $\varphi_0(m, n)$ et $\varphi_1(m, n)$ sous forme finie. La relation proposée se démontre alors aisément.

a. — Calcul de $\varphi_0(m, n)$:

Considérons l'expression

$$f(x) = (1+x)^m \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_p \sum_q \binom{m}{p} x^p \binom{n}{q} \left(\frac{1}{x}\right)^q;$$

en représentant, d'après Gauss, par $\binom{m}{p}$ l'expression

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p},$$

le terme indépendant de n s'obtient en faisant $q = p$, ce qui donne pour ce terme

$$\sum_p \binom{m}{p}\binom{n}{p}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi_0(m, n).$$

Or $f(x) = \dfrac{(1+x)^{m+n}}{x^n}$; le terme indépendant de x a pour coefficient $\dbinom{m+n}{n} = \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$.

On a donc $\varphi_0(m, n) = \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!} = \dbinom{m+n}{n}$.

b. — Calcul de $\varphi_1(m, n) = \displaystyle\sum_p \frac{m-p}{p+1}\binom{m}{p}\binom{n}{p}$.

Considérons l'expression

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{m}{m+1}(1+x)^{m-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \\ &= \sum_p \sum_q \frac{m}{n+1}\binom{m-1}{p} x^p \binom{n+1}{q+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{q+1}. \end{aligned}$$

Le terme en $\frac{1}{x}$ s'obtient en faisant $q=p$. Le coefficient de $\frac{1}{x}$ est

$$\sum_p \frac{m}{n+1}\,\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{p!}\,\frac{(n+1)n\ldots(n-p+1)}{(p+1)!}$$
$$=\sum_p \frac{m-p}{p+1}\binom{m}{p}\binom{n}{p}=\varphi_1(m+n).$$

Or $$F(x)=\frac{m}{n+1}\,\frac{(1+x)^{m+n}}{x^{n+1}}.$$

Le coefficient de $\frac{1}{x}=\frac{m}{n+1}\binom{m+n}{n}$.

Donc $$\varphi_1(m,n)=\frac{m}{n+1}\binom{m+n}{n}=\frac{m}{n+1}\,\varphi_0(m,n)$$

ou $$\varphi_1(m,n)=\frac{(m+n)!}{(m-1)!\,(n+1)!}.$$

Substituons dans le premier membre de la relation proposée. On a

$$\varphi_0(m,n)\left(2+\frac{m}{n+1}+\frac{n}{m+1}\right)$$
$$=\varphi_0(m,n)\left(\frac{m+1}{n+1}+2+\frac{n+1}{m+1}-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}\right),$$

ou, tous calculs faits,

$$\frac{(m+n+2)!}{(m+1)!\,(n+1)!}.$$

2° On voit aisément que le premier membre est la somme des n premiers termes de la série qui est le développement de $(1-x)^{-n}$ ou $\frac{1}{(1-x)^n}$, pour $x=\frac{1}{2}$.

Représentons par $\varphi(n,x)$ la somme des n premiers termes de la série qui est le développement de $(1-x)^{-n}$, $(x<1)$.

Or on a $$(1-x)(1-x)^{-(n+1)}\equiv(1-x)^{-n}$$

ou $$(1-x)^{-(n+1)}-n(1-x)^{-(n+1)}\equiv(1-x)^{-n}.$$

Si donc nous égalons la somme des $n+1$ premiers termes des deux membres, c'est-à-dire la somme des termes depuis 1 jusqu'au terme en x^n inclusivement, nous aurons

$$\varphi(n+1, x) - x\varphi(n+1, x) + x^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$
$$\equiv \varphi(n, x) + x^n\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Donnons à x la valeur $\frac{1}{2}$ et représentons par $\varphi(n)$ l'expression $\varphi(n, \frac{1}{2})$. Nous aurons

$$\tfrac{1}{2}\varphi(n+1) - \varphi(n)$$
$$= \frac{1}{2^n}\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n} - \frac{1}{2^{n+1}}\frac{(n+1)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!} - \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!}\right] = 0.$$

Donc $\varphi(n+1) = 2\varphi(n)$. Or

$$\varphi(1) = 1;$$

donc
$$\varphi(n) = 2^{n-1}$$

J. Sadier.

On a $\varphi_0(m, n) = \mathcal{E}\frac{(1+z)^{m+n}}{z^{n+1}} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}[(1+z)^{m+n}]_{x=0}$

$$= \frac{(m+n)!}{(m+1)!\,(n+1)!}(m+1)(n+1),$$

$$\varphi_1(m, n) = \mathcal{E}\frac{(1+z)^{m+n}}{z^{n+2}} = \frac{(m+n)!}{(m+1)!\,(n+1)!}m(m+1),$$

$$\varphi_1(n, m)\mathcal{E}\frac{(1+z)^{m+n}}{z^{m+2}} + \frac{(m+n)!}{(m+1)!\,(n+1)!}n(n+1);$$

d'où résulte le premier théorème.

Le premier membre de la dernière équation s'écrit

$$S = 2\mathcal{E}\left[\frac{(1+z)^{n-1}}{2z} + \frac{(1+z)^n}{(2z)^2} + \frac{(1+z)^{n+1}}{(2z)^3} + \ldots + \frac{(1+z)^{2n-2}}{(2z)^n}\right],$$

ou

$$S = 2\mathcal{E}\frac{(1+z)^{n-1}}{(2z)^n}\,\frac{(2z)^n - (1+z)^n}{z-1}.$$

En remplaçant z par $\frac{1}{z}$ dans cette expression, on obtient

$$S = 2\mathcal{E}\frac{(1+z)^{n-1}}{(2z)^n}\,\frac{2^n - (1+z)^n}{1-z}.$$

La somme des deux dernières équations se réduit à

$$S = \mathcal{L} \frac{(1+z)^{n-1}}{z^n} \frac{1-z^n}{1-z}.$$

Or, le développement

$$\frac{(1+z)^{n-1}}{z^n} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{z^n} [1+(n-1)z+\ldots+z^{n-1}] (1+z+\ldots+z^{n-1}$$

donne pour la valeur du résidu

$$1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\ldots+(n-1)+1 = 2^{n-1}.$$

On a donc $$S = 2n-1.$$

Tous les résidus indiqués ont pour pôle $x=0$.

Remarque. —

$$\left[\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^n}\right]_{z=1} = 2^n = 1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+2)(n+2)}{2.4.6}+\ldots \text{ ad inf}.$$

W. Kapteyn (Utrecht).

1° Rappelons la formule connue

$$(1) \quad C_{m+n+p}^n = C_{n+p}^p + C_m^1 C_{n+p}^{p+1} + \ldots + C_m^k C_{n+p}^{p+k} + \ldots + C_m^n \quad (m > n).$$

Pour $p=0$, elle devient

$$C_{m+n}^n = 1 + C_m^1 C_n^1 + \ldots + C_m^k C_n^k + \ldots = \varphi_0(m, n).$$

Pour $p=1$, en changeant n en $n-1$, elle donne

$$C_{m+n}^{n-1} = C_n^1 + C_m^1 C_n^2 + \ldots + C_m^k C_n^{k+1} + \ldots = \varphi_1(n_1, m).$$

Changeant dans cette dernière n en m, on a

$$C_{m+n}^{m-1} = C_m^1 + C_n^1 C_m^2 + \ldots + C_n^k C_m^{k+1} + \ldots = \varphi_1(m_1, n).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} 2\varphi_0(m, n) + \varphi_1(m_1, n) + \varphi_1(n_1, m) &= 2C_{m+n}^n + C_{m+n}^{m-1} + C_{m+n}^{n-1} \\ &= \frac{(m+n)!}{(m-1)!(n-1)!}\left[\frac{2}{m-n}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{m(m+1)}\right] \\ &= \frac{(m+n+2)!}{(m+1)!(n+1)!}. \end{aligned}$$

2° Multiplions les deux membres de l'égalité par 2^{n-1}, changeons ensuite n en $n+1$; et, observant que $C_{2n-k}^{n-k} = C_{2n-k}^{n}$, le développement s'écrira

$$(2) \qquad 2^{2n} = C_{2n}^{n} + 2^1 C_{2n-1}^{n} + \ldots + 2^k C_{2n-k}^{n} + \ldots + 2^n.$$

C'est la formule de M. Pellerin publiée dans les *N. A.*, 1887.

On peut aussi démontrer les formules (1) et (2) à l'aide de la méthode élégante que M. Franel a fait connaître (1894, p. 72).

1° Il faut évaluer

$$S = \sum_{k=0}^{k=n} C_m^k C_{n+p}^{n-k},$$

ou le coefficient de x^0 dans le développement de la fonction

$$\frac{(1+x)^{n+p}}{x^n} \sum_{=}^{k=n} C_m^k x^k$$

ou de

$$\frac{(1+x)^{n+p}}{x^n} \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k x^k = \frac{(1+x)^{m+n+p}}{x^n},$$

car nous supposons $m > n$. Ce coefficient est C_{m+n+p}^{n}.

2° Nous avons à chercher le coefficient de x^0 dans le développement de

$$\frac{(1+x)^{2n}}{x^n} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{(1+x)^k}.$$

Nous supposons $x > 1$; alors la progression géométrique est convergente, et le coefficient de x^0 dans le développement de la fonction précédente sera le même que dans la suivante :

$$\frac{(1+x)^{2n}}{x^n} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2^k}{(1+x)^k} = \frac{(1+x)^{2n+1}}{x^n(x-1)}.$$

Le coefficient est $C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$, ou la demi-somme des coefficients de $(1+x)^{2n+1}$, soit 2^{2n}. AUDIBERT.

206. (HOUSSIN.) *Deuxième réponse.* — Dans son ouvrage *Geometrical Analysisand Geometry of curve Lines* (Edinburgh, 1821), John Leslie traite brièvement quelques courbes, par exemple, la cissoïde, la conchoïde, la quadratrice, la courbe logarithmique, la cycloïde, l'épicycloïde, la chaînette, ..., les spirales. Il y a aussi un traité de Richard A. Proctor sur *The cycloid and all forms of cycloidal curves* (London, 1878).

J.-S. Mackay (Édimbourg).

La *Géométrie des courbes appliquées aux Arts*, de Bergery, est signalée (p. 205) comme devenue *extrêmement* rare. Je trouve pourtant cet ouvrage dans le catalogue de la librairie Croville-Morant (mai 1888), marqué au prix de 3fr. Dans le *Cours de Géométrie* de Bobillier (14e édition, Gauthier-Villars, 1870), se trouve une étude élémentaire sur les lignes courbes, et en particulier sur l'ovale de Cassini, la spirale d'Archimède, la spirale hyperbolique, la spirale logarithmique, les cycloïdes, les épicycloïdes, les conchoïdes. A. Goulard.

Sur la courbure, la torsion, l'osculation, traitées par la Géométrie pure, on peut encore indiquer les deux ouvrages que voici : Paul Serret, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure* (Gauthier-Villars, 1860). Ch. Ruchonnet, *Exposition géométrique des propriétés générales des courbes*, 5e éd., 1887). *Pix.*

208. (P.-F. Teilhet.) — Euclide, à la fin de son IXe Livre (prop. 36), paraît avoir donné le premier la définition des nombres parfaits et la manière de les former. (*Voir* édition Peyrard, Paris, Patris; 1816, 4 vol. in-4°, t. II, p. 107). Il en est fait aussi mention dans Théon de Smyrne qui leur consacre le XXXIIe Chapitre de son livre sur l'*Arithmétique* (*voir* édition d'Ismael Bouillaud : Lutetiæ Parisiorum, Ludovicus de Heuqueville, in-4°; 1644). Presque toutes les Arithmétiques qui ont vu le jour avant la fin du XVIe siècle font mention plus ou moins longuement des nombres parfaits. Presque toutes commettent des erreurs, faute de savoir reconnaître si un nombre (511 par exemple) est premier ou non. Peu d'ouvrages se sont occupés spécialement des nombres parfaits. On peut cependant citer :

1° Bovillus (Carolus) [1], *Liber de numeris perfectis*. Cet opuscule fait partie d'un volume dépourvu de titre général, dé-

---

[1] Charles de Boüelles ou de Bouvelles, auteur du premier Traité de Géométrie imprimé en français.

nommé par les catalogues : *Opusculo* ou *Opera* (Parisiis) (H. Stephanus, in-4°; 1510). Il est décrit dans la liste des livres d'un chanoine d'Autun (catalogue de M. Pellechet) et dans le catalogue des Incunables de Toulouse.

2° Cataldi, *Trattato di numeri perfetti* (Bologna, in-4°; 1603). D'après ce qu'en dit Libri dans le IIIe Volume de son *Histoire des Mathématiques en Italie*, ce traité contiendrait des choses intéressantes sur le sujet, dont Cataldi s'était occupé de longue date. Cataldi a, d'ailleurs, été, comme mathématicien, supérieur à Bovillus.

3° Bungus (Petrus). On trouve dans les *Numerorum Mysteria* de cet auteur (Paris, 1618, in-4°) quelques détails sur les nombres parfaits, mais il paraît avoir copié Bovillus. On peut consulter à ce sujet les *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, 9e série, t. V, année 1893, p. 371. (Pierre Bongo, arithméticien.)

4° Lucas (Ed.), *Théorie des nombres*, p. 374 et 424 (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891, in-8°). Il donne quelques détails et indique Mersenne (préface des *Cogitata physico-mathematica*, Paris, Ant. Bertier, 1644, in-4°), Fermat, Descartes (Lettre à Frenicle du 20 décembre 1638), Krafft (*Novi comm. Petr.*, 1734), enfin Lionnet (*N. A.*, 1879, p. 306), comme s'étant occupés de la question. *Setnof.*

Voici quelques indications bibliographiques relatives aux nombres parfaits :

1° Euclide, *Éléments*, Livre IX, prop. 36. — 2° Mersenne, *Cogitata physico-mathematica*, Paris, 1648. — 3° Prestet, *Nouveaux éléments de Mathématiques*, Paris, 1689. — 4° Krafft, *Mémoires de Pétersbourg*, 1734-1735. — 5° Lebesgue, *Note sur les nombres parfaits*. (*N. A.*, t. III, 1844, 552-553). — 6° Lionnet, *Note sur les nombres parfaits*. [*N. A.* (2), t. XVIII, 1879, 306-308]. — 7° Carvallo, *Théorie des nombres parfaits*. (*C. R.*, t. LXXXI, 2e sem., 1875). — 8° Ed. Lucas, *Recherches sur les ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure* (*Bullettino* de B. Boncompagni, t. X, 1877, 129-193, 239-293. Rome). — 9° Ed. Lucas, *Sur la série récurrente de Fermat* (*Bullettino*, etc., t. XI, 1878, 783-798. Rome). — 10° Desboves, *Questions d'Algèbre élémentaire* (Paris, 1878).

— 11° Ed. Lucas, *Les nombres parfaits*, t. I des *Récréations mathématiques*, 1882, p. 158-160, et Note IV, p. 240-242, Paris. *Voir* aussi la Note II du tome II, 1883, p. 230-235. — 12° Carvallo, *Théorie des nombres parfaits* (32 pages, in-8°. Barcelone, 1883).— 13° Seelhoff, voir *Archiv der Math. und Phys.* de Grunert-Hoppe, (2), t. II, p. 327-329, 1885.—14° Ed. Lucas, *Sur les nombres parfaits* (*Mathesis*, t. VI, p. 145-146, 1886, Gand). — 15° P. Mansion, Notes ajoutées au précédent article, p. 146-148 (Gand). — 16° Seelhoff, Indication du 9ᵉ nombre parfait. *Zeitschrift für Math. und Phys.*, t. XXXI, 1886 (Leipzig). — 17° M. Stern, *Extrait d'une lettre* (*Mathesis*, t. VI, p. 248-250, 1886 (Gand).— 18° Ed. Lucas, *Extrait d'une lettre* (*Ibid.*, p. 250, Gand). — 19° Ed. Lucas, *Sur le neuvième nombre parfait* (*Mathesis*, t. VII, p. 45-46, 1887, Gand). — 20° C. Servais, *Sur les nombres parfaits* (*Mathesis*, t. VII, p. 228-230, 1887, Gand). — 21° E. Cesàro, *Sur les nombres parfaits impairs* (*Mathesis*, t. VII, p. 245-246, 1887, Gand). — 22° J.-J. Sylvester, Plusieurs Notes sur les nombres parfaits, dans le journal anglais *Nature*, 15 et 22 décembre 1887, l'*Educ. Times*, 1ᵉʳ mars 1888, les *C. R.*, des 6, 13 et 20 février 1888. *Voir* aussi *Mathesis*, t. VIII, p. 57-61, 1888, Gand. — 23° C. Servais, *Sur les nombres parfaits* (*Mathesis*, t. VIII, p. 92-93 et 135, 1888, Gand). — 24° E. Catalan, *Sur les nombres parfaits* (*Mathesis*, t. VIII, p. 112-113 et p. 129-130, 1888, Gand).

H. Brocard.

216. (J. Sadier.) — La formule visée par M. J. Sadier n'est pas fautive; elle est absolument exacte, et en voici la démonstration. (*Suit* la démonstration.) P.-G. Tait (Édimbourg).

M. Tait a raison; la formule qu'il a indiquée dans *son* Traité est exacte, mais celle qui se trouve dans la *traduction* française contient une faute typographique et il n'est pas étonnant que l'auteur de la question 216 ait été arrêté. Voici cette faute; elle ne consiste que dans le déplacement d'une parenthèse, mais elle n'en rend pas moins la formule indémontrable :

Tome I, page 140, ligne 4 de la traduction française, il y a :

$$\Sigma\left\{(x^2+a_1^2+\rho_1^2)[(V\rho_2\rho_3)^2+2a_2a_3(S\rho_2\rho_3+x^2)]-x^2(\rho_2-\rho_3)^2\right\},$$

et il faut :

$$\Sigma\left\{(x^2+a_1^2+\rho_1^2)[(V\rho_2\rho_3)^2+2a_2a_3(S\rho_2\rho_3+x^2)-x^2(\rho_2-\rho_3)^2]\right\}.$$

M. James Byrnie Shaw (Jacksonville, Illinois) nous a également envoyé une démonstration de la formule, qu'il trouve exacte, s'étant évidemment servi du texte anglais.

La Rédaction.

217 (Gino Loria) et 280 (Paul Tannery). — D'une longue Note, très documentée, du prince Boncompagni dans son *Bulletin* (t. II, p. 472-476), il résulte :

1° Que Pierre Hérigone était du pays basque (j'en conclus qu'il avait francisé son nom, qui devait être quelque chose comme *Hiérigoyen*, forme que l'on rencontre encore dans ce pays); 2° qu'à la fin de l'année 1644, il n'était déjà plus en vie; 3° qu'il n'y a eu, en réalité, qu'une seule édition du *Cours mathématique,* mais que les feuillets de titre présentent jusqu'à quatre indications différentes. *a.* A Paris, chez l'autheur, en l'isle du Palais, à l'enseigne de l'Anguille et chez Henry Legras au troisième pilier de la grande salle du Palais (à l'L couronnée); dates : 1634 pour les quatre premiers Volumes, 1637 pour le cinquième, 1642 pour le sixième. *b.* A Paris, chez Siméon Piget, rue Saint-Jacques, à l'enseigne de la Fontaine, 1643. *c.* A Paris, chez Siméon Piget, etc., 1644. *d.* Parisiis, Sumptibus Ægidii Morelli, architypographi regii, 1644. M. Bierens de Haan a bien voulu m'informer, au contraire, que l'indication 1645 dans le Tome I de la *Correspondance de Huygens* est une faute d'impression pour 1644.

Enfin le prince Boncompagni, dans sa Note précitée, a décrit un exemplaire d'un autre ouvrage d'Hérigone intitulé : *Les six premiers Livres des* « Éléments d'Euclide », *demonstrez par Notes, d'une methode tres brieve et intelligible avec les principales parties des mathematiques expliquees succinctement sans Notes.* Et, de plus, un *petit Dictionnaire contenant les etymologies et significations des noms et termes plus obscurs des Mathematiques; par* Pierre Herigone, *professeur de mathematiques à Paris*, 1639, *chez l'autheur*, *etc.* et *chez Henry Legras*, *etc.*

Le même volume, de 468 pages dont 5 non numérotées, existe en double exemplaire à la Bibliothèque nationale de Paris (Inv. V 18273 et V 18287) mais postdaté, comme le *Cours mathématique,* chez Siméon Piget, 1644. En fait, sa première partie est une véritable réédition (avec quelques retouches) de la partie française du tome I du *Cours mathématique* qui contient l'exposé des six premiers Livres d'Euclide.

Hérigone, ayant fait une addition à son Tome VI, achevé d'imprimer le 2 juillet 1642, devait encore vivre à cette date; si l'on admet que les postdates des exemplaires de ses Ouvrages correspondent à des arrangements pris, par ses héritiers, pour écouler le stock invendu, on peut fixer approximativement sa mort vers 1643.

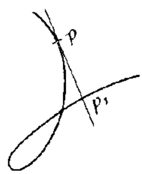
En dehors de ce que je viens de citer et des mentions qui se rapportent à l'ouvrage de P. Hérigone, je n'ai rencontré son nom que deux fois :

1° Dans la Lettre de Diodati à Galilée du 23 septembre 1636 (publiée dans l'édition Alberi) c'est très probablement lui qui figure sous le nom d'*Erizonio;*

2° Dans une lettre inédite de Cavalieri à Mersenne du 23 novembre 1641 (MS de la Bibl. nat. fd. nouv. acq., 6204) que je publierai dans les *Œuvres de Fermat.* PAUL TANNERY.

219. (CARONNET). — Sans apporter ici la solution complète du problème, je puis faire connaître une famille très étendue de lignes gauches satisfaisant à la condition proposée, de couper toutes leurs tangentes. Ce sont celles qui, possédant cette propriété, peuvent s'échanger par un groupe continu de transformations de contact.

Le point p décrivant la courbe, si la longueur de la tangente-sécante pp_1 vient à s'annuler, ce qui aura lieu aux points d'in-



flexion, il en sera de même dans les courbes transformées. Le groupe considéré conserve donc l'inflexion et, par suite, n'est autre que le groupe projectivo-corrélatif. Ses lignes invariantes sont les anharmoniques, perspectives de la parabole générale (1) $x = z^m$, $y = z^n$. Cette parabole, admettant elle-même un groupe continu d'homographies, coupera toutes ses tangentes si elle en coupe une seule; cette condition, qui s'exprimera par une équation entre m et n, réduit de deux à un le nombre des paramètres essentiels de la parabole; en effectuant sur elle l'homographie générale, qui a 14 paramètres et laisse invariants m et n, on obtient finalement une famille d'anharmoniques à 15 paramètres jouissant de la propriété demandée. La relation entre m et n est remarquable en ce qu'elle ne peut se traduire explicitement avec les signes ordinaires de l'Algèbre. La condition à exprimer est, en effet, dans le cas général,

$$\frac{dx}{x - x_1} = \frac{dy}{y - y_1} = \frac{dz}{z - z_1}, \tag{2}$$

l'indice 1 affectant les coordonnées du point p_1. Introduisant les valeurs (1) et posant $z_1 = tz$, il vient

$$\frac{t^m - 1}{m} = \frac{t^n - 1}{n} = t - 1. \tag{3}$$

La relation cherchée résulterait de l'élimination de t entre les équations transcendantes (3), qui est impossible en termes finis; mais si l'on se donne arbitrairement une valeur de t, on aura une solution en prenant pour m et n deux racines distinctes de l'équation transcendante en u : $t^u + (1 - t)u - 1 = 0$. La solution $u = 1$ exclue, comme ne fournissant que des courbes planes, il ne reste que des racines imaginaires. Mais, en projetant imaginairement les paraboles imaginaires ainsi obtenues, on peut trouver des courbes réelles; celles-ci peuvent d'ailleurs se déduire, par projection réelle, de la courbe obtenue en enroulant la parabole générale plane sur un cylindre à base de spirale logarithmique; les équations de cette courbe type sont, en coordonnées semi-polaires,

$$r = e^{p\varphi}, \qquad z = e^{q\varphi}.$$

Si l'on exprime, avec ces variables, la condition fondamentale (2) et qu'on pose $\varphi_1 = \varphi + \tau$, on aboutit aux équations $\dfrac{e^{p\tau}\cos\tau - 1}{p} = \dfrac{e^{q\tau} - 1}{q} = e^{p\tau}\sin\tau$, entre lesquelles il faudrait éliminer τ pour exprimer la relation qui doit exister entre p et q. Cette élimination étant impossible, on aura une solution en se donnant arbitrairement une valeur de τ et en prenant pour p et q

deux racines respectives des deux équations transcendantes

$$(e^{\tau}\cos\tau)^{p} - pe^{\tau}\sin\tau - 1 = 0,$$
$$(e^{\tau})^{q} - qe^{\tau}\sin\tau - 1 = 0.$$

Chacune de ces équations possède, outre la racine zéro qui ne fournit que des courbes planes, une seconde racine réelle; les anharmoniques gauches ainsi déterminées coupent donc réellement toutes leurs tangentes; elles peuvent même les couper deux fois si le paramètre τ est convenablement choisi. Toutes sont transcendantes.

On peut poser divers problèmes du même genre; par exemple, celui de déterminer des lignes gauches coupant une quatrième fois toute droite menée de manière à les rencontrer en trois points; la ligne droite peut être remplacée ici, en augmentant le nombre des intersections, par une courbe quelconque de définition donnée. Si cette définition est projective, il existe une famille d'anharmoniques, à 15 paramètres, jouissant de la propriété indiquée; on déterminerait ainsi une famille d'anharmoniques coupant chacune, en huit points, une infinité simple de coniques, en onze points une infinité d'anharmoniques planes, etc.

Ch. Rabut.

220. (S. Dickstein.) — Servois (François-Joseph), né à Mont-de-Laval (dép. du Doubs) le 19 juillet 1767, décédé le 17 avril 1847 [1]. Ouvrage publié à part : *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique pour servir de supplément aux Traités de cette Science*, Metz et Paris, 1805, in-8° (Quérard, *La France littéraire*, in-8°, t. IX, Paris, 1838, p. 96). Mémoires insérés dans les *Annales de Gergonne* ou dans les *Mémoires de l'Académie de Turin* : 1. *De principio velocitatum virtualium* (*M. A. Turin*, 1809-1810, pte 2, p. 177). — 2. *Démonstration de quelques formules de Trigonométrie sphérique* (*A. G.*, II, 1811-1812, p. 84). — 3. *Remarques rela-*

---

[1] Ces dates sont tirées des pièces officielles qui se trouvent dans le dossier de Servois aux Archives du Ministère de la Guerre. Je consacrerai prochainement une étude biographique à ce savant que M. Marie ne mentionne même pas dans son *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*.

tives à la formule logarithmique

$$lx = \frac{x-1}{x}\left\{\frac{x+1}{2} - \left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \frac{1}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 + \ldots\right]\right\}$$

(*A. G.*, *ibid.*, p. 178). — 4. *Calendrier perpétuel* (*A. G.*, IV, 1813-1814, p. 84). — 5. *Lettre au rédacteur des Annales sur la Théorie des quantités imaginaires* (*A. G.*, *ibid.*, reproduite dans le Livre *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, par R. Argand, 2ᵉ édit., précédée d'une Préface par J. Houel. Paris, Gauthier-Villars; 1874, petit in-8°, p. 101). — 6. *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du Calcul différentiel* (*A. G.*, V, 1814-1815, p. 93). — 7. *Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du Calcul différentiel et, en particulier, sur la doctrine des infiniment petits* (*A. G.*, V, 1814-1815, p. 141). — 8. *Mémoire sur les quadratures* (*A. G.*, VIII, 1817-1818, p. 73). — 9. *Lettre sur la théorie des parallèles* (*A. G.*, XVI, 1825-1826, p. 233).

Jacques Boyer.

228. (*Altschrauber*). — Il y a environ six ans que, sans avoir connaissance des travaux de M. Clebsch, j'ai trouvé que les pentagones dérivés d'un pentagone convexe P, au moyen des diagonales, tendaient à se réduire à un point. Ce point, que j'ai nommé le *nombril* du pentagone, n'est autre que le pôle double intérieur aux coniques inscrites et circonscrites. Cette propriété est vraie pour tout polygone convexe à la fois inscriptible et circonscriptible à des coniques; de plus, la transformation peut se faire indifféremment, en joignant les sommets de 2 en 2, de 3 en 3, ..., de n en n. On le voit immédiatement comme application de la transformation linéaire ou homographique; on peut le voir aussi en rapportant la figure au triangle conjugué aux deux coniques, lequel reste invariable dans la transformation. On trouve que les diagonales qui joignent les sommets de 2 en 2, par exemple, touchent une conique ayant mêmes pôles doubles. En transformant par polaires réciproques, on arrive à ce résultat que, étant donné un polygone à la fois inscriptible et circonscriptible à des coniques, les côtés de ce polygone, pris de 2 en 2, par exemple, se coupent sur une co-

nique ayant mêmes pôles doubles. La propriété énoncée s'en déduit.

Remarques. — 1° Si l'on rapporte la figure au triangle formé par les pôles doubles, les sommets homologues sont sur des courbes dont l'équation, en coordonnées normales, est de la forme $\alpha^p\beta^q\gamma^r = \text{const.}$, avec $p+q+r=0$. 2° Les polygones dérivés successivement du premier au moyen des diagonales sont inscriptibles et circonscriptibles à des coniques ayant toutes mêmes pôles doubles que les deux premières; et réciproquement, si un polygone et l'un de ses dérivées au moyen des diagonales sont inscriptibles (ou circonscriptibles) à des coniques, ils sont en même temps circonscriptibles (ou inscriptibles) à des coniques. WELSCH.

230. (*Alauda.*) — L'équation demandée est la suivante :

$$\begin{aligned}9x^6 &+ (10y^2 + 2ay - 35a^2)x^4 \\ &+ (y^4 + 20ay^3 - 80a^2y^2 + 90a^3y - 27a^4)x^2 \\ &\qquad + ay^3(y-2a)(2y-a) = 0,\end{aligned}$$

les axes rectangulaires étant choisis en sorte que le cercle donné soit $x^2 = 2ay - y^2$, et la tangente donnée $y = 2a$. La courbe déterminée par cette équation comprend une branche parabolique extérieure au cercle et dont les tangentes satisfont à une condition différente de celle de l'énoncé. La partie intérieure au cercle est fermée et présente trois points de rebroussement. PAUL TANNERY.

Prenons des axes rectangulaires, A étant l'origine et AD l'axe des x. Posons $AD = a$. L'équation de BCD est

$$(1) \qquad y = m(x-a).$$

Celle du cercle est $x^2+y^2-2Ry=0$. On trouve pour l'aire S du triangle ABC : $S = \dfrac{am}{1+m^2}\sqrt{m^2(R^2-a^2)+2aRm}.$ Cette aire est maximum pour les valeurs de m fournies par l'équation

$$(2) \qquad aRm^2 + 2m(R^2-a^2) - 3aR = 0.$$

En éliminant m entre (1) et (2), on trouve l'équation en a

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &a^3(2y-3R) + 2a^2y(3R-x) \\ &\qquad - aR(3x^2+2Ry-y^2) + 2R^2xy = 0.\end{aligned}\right.$$

En éliminant a entre (1) et sa dérivée par rapport à a, on trouve l'équation du huitième degré

$$\begin{aligned} x^2[9Ry(3R-2y)+(y-3R)(3x^2+2Ry-y^2)]^2 \\ =[3R(2y-3R)(3x^2+2Ry-y^2) \\ +4x^2(y-3R)^2][12yx^2(y-3R) \\ +(3x^2+2Ry-y^2)^2]. \end{aligned}$$

Si l'on développe cette équation, elle se réduit à

$$\begin{aligned} 9x^6+(10y^2-42Ry+9R^2)x^4 \\ +(y^4-28Ry^3+64R^2y^2-42R^3y+9R^4)x^2 \\ +Ry(2R-y)^3(2y-3R)=0. \end{aligned}$$

E.-N. BARISIEN, J. DÉPREZ (Tournai).

Pour démontrer que dans le triangle maximum ABC la droite qui joint les points de Brocard de ABC est perpendiculaire à BC, il suffira de démontrer que la droite qui joint le centre du cercle ABC au point de Lemoine de ABC est parallèle à BC. Soient DB′C′, DB″C″ deux sécantes infiniment voisines de DBC, les triangles AB′C′, AB″C″ seront équivalents et, comme il est facile d'établir que $\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AD}}{4\mathrm{R}}\left(\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2\right)$, on en déduit

$$\overline{\mathrm{AC}''}^2-\overline{\mathrm{AB}''}^2=\overline{\mathrm{AC}'}^2-\overline{\mathrm{AB}'}^2,$$

ce qui donne $\mathrm{C'C''.MP}=\mathrm{B'B''.M'P'}$; M, M′ étant les milieux des cordes C′C″, B′B″ et P, P′ étant les projections de A sur ces cordes. Mais $\frac{\mathrm{C'C''}}{\mathrm{B'B''}}=\frac{\mathrm{DC'}}{\mathrm{DB''}}$, et, par suite,

$$\lim\left(\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{MP}}\right)=\lim\left(\frac{\mathrm{DC'}}{\mathrm{DB''}}\right)=\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DB}}=\frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{AB}^2}.$$

A la limite M′P′, MP deviennent les projections de AB, AC sur les tangentes en B, C, ou, ce qui est la même chose, sur la tangente DA. Mais ces projections sont proportionnelles aux segments formés sur BC par le diamètre OA. *Ce diamètre et la symédiane issue de* A *rencontrent donc* BC *en des points isotomiques* N, N′. Par suite, S étant le pôle de BC, K l'intersection de la symédiane AN′ *avec le diamètre* OK *parallèle à* BC, on aura O(AN′SK) = − 1, d'où K est le point de Lemoine de

ABC et il est sur la parallèle menée par O à BC. Voici une construction de cette sécante DBC. Soit A_1 le point diamétralement opposé à A sur la circonférence O. Si la circonférence décrite de D avec le rayon DA rencontre le cercle O en A', et si la circonférence décrite de A_1 avec le rayon A_1A rencontre OA' en E, E étant du même côté de AA_1 que D, DBC sera perpendiculaire sur AE. SOLLERTINSKY (Saint-Pétersbourg).

232. (H.-A. RESAL.) — Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'hyperboloïde.

Soient α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus des angles des axes satisfaisant à la condition indiquée, avec les axes de la surface.

On devra avoir

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=\\
&\frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}-\frac{\gamma'^2}{c^2}=\\
&\frac{\alpha''^2}{a^2}+\frac{\beta''^2}{b^2}-\frac{\gamma''^2}{c^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right).
\end{aligned}$$

Les axes cherchés devront donc être tous trois sur le cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)(x^2+y^2+z^2),$$

sur lequel on peut appliquer un trièdre trirectangle d'une infinité de manières.

Du reste, l'équation d'une surface du second degré rapportée à de tels axes étant de la forme

$$A(x^2+y^2+z^2)+2By z+2B'zx+2B''xy=1,$$

le cône précité a pour équation

$$2Byz+2B'zx+2B''xy=0.$$

Si l'on passe d'un système d'axes satisfaisant à l'énoncé à un autre analogue, les coefficients des carrés ne varient pas.

WELSCH, E. DUPORCQ.

233. (J. NEUBERG.) — Les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″, ... sont entre eux comme les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Le cercle circonscrit au triangle A′B′C′ est, en effet, le cercle des neuf points du triangle ABC, le cercle circonscrit au triangle A″B″C″ est le cercle des neuf points du triangle A′B′C′, et ainsi de suite. De plus, le centre O′ du cercle circonscrit à A′B′C′ est le milieu de OH, O étant le centre du cercle circonscrit à ABC; le centre de similitude externe des cercles O et O′ est donc l'orthocentre H. Considérons le triangle $A'_1B'_1C'_1$, homothétique au triangle A′B′C′ par rapport à ce centre de similitude, le rapport d'homothétie étant 2, le triangle $A'_1B'_1C'_1$ sera inscrit dans le cercle O. On pourra ainsi, de proche en proche, supposer les triangles A″B″C″, A‴B‴C‴, ... amplifiés de façon à être représentés par des triangles homothétiques $A''_1B''_1C''_1$, $A'''_1B'''_1C'''_1$, ..., inscrits dans le cercle O, et inversement on retrouvera la position des triangles A′B′C′, A″B″C″, A‴B‴C‴, ..., en composant géométriquement les longueurs

$$\frac{OH}{2}, \quad \frac{OH'_1}{4}, \quad \frac{OH''_1}{8}, \quad \ldots, \quad \frac{OH_1^{(n)}}{2^{n+1}},$$

transportant en chacun des sommets O′, O″, O‴, ... de la ligne polygonale ainsi déterminée le centre du cercle O dont le rayon sera réduit de moitié à chaque déplacement, et inscrivant dans chacun des cercles obtenus un triangle homothétique au triangle correspondant. Si nous appelons α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, ... les arcs compris entre une origine fixe prise sur la circonférence O et les sommets A, B, C, A'_1, B'_1, C'_1, A''_1, B''_1, C''_1, ..., il est facile de voir que l'on a, pour deux triangles successifs $A_1^{(n)}B_1^{(n)}C_1^{(n)}$, $A_1^{(n+1)}B_1^{(n+1)}C_1^{(n+1)}$, les relations

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\equiv \beta_n + \gamma_n - \alpha_n + \pi, \\ \beta_{n+1} &\equiv \gamma_n + \alpha_n - \beta_n + \pi, \\ \gamma_{n+1} &\equiv \alpha_n + \beta_n - \gamma_n + \pi \end{aligned}\right\} \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

L'origine des arcs peut toujours être choisie de telle sorte qu'on ait $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0$. Il résulte des relations précédentes que, si l'on adopte cette hypothèse, on aura, quel que soit n,

$$\alpha_{2n-1} + \beta_{2n-1} + \gamma_{2n-1} \equiv \pi, \qquad \alpha_{2n} + \beta_{2n} + \gamma_{2n} \equiv 0;$$

$$\alpha_{2n+1} \equiv \pi - 2\alpha_{2n}, \qquad \beta_{2n+1} \equiv \pi - 2\beta_{2n}, \qquad \gamma_{2n+1} \equiv \pi - 2\gamma_{2n};$$

$$\alpha_{2n+2} \equiv -2\alpha_{2n+1} \equiv 4\alpha_{2n},$$

$$\beta_{2n+2} \equiv -2\beta_{2n+1} \equiv 4\beta_{2n}, \qquad \gamma_{2n+2} \equiv 2\gamma_{2n+1} \equiv 4\gamma_{2n};$$

$$\alpha_{2n} \equiv 2^{2n}\alpha, \qquad \alpha_{2n+1} \equiv \pi - 2^{2n+1}\alpha, \qquad \beta_{2n} \equiv 2^{2n}\beta;$$

. . . .

Remarquons que dans tout triangle le centre de gravité est au tiers de la ligne qui joint le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre. Il en résulte que l'abscisse et l'ordonnée de ce dernier point sont respectivement égales à la somme des abscisses et à la somme des ordonnées des trois sommets, et que, par exemple, les coordonnées de l'orthocentre du triangle $A_1^{(n)} B_1^{(n)} C_1^{(n)}$ sont

$$\cos\alpha_n + \cos\beta_n + \cos\gamma_n \quad \text{et} \quad \sin\alpha_n + \sin\beta_n + \sin\gamma_n.$$

En conséquence, les coordonnées des sommets et de l'orthocentre du triangle $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ sont

$$x_{A^{(n)}} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \frac{\cos 2^p\alpha + \cos 2^p\beta + \cos 2^p\gamma}{2^{p+1}} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}},$$

$$y_{A^{(n)}} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{\sin 2^p\alpha + \sin 2^p\beta + \sin 2^p\gamma}{2^{p+1}} + \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}},$$

$x_{B^{(n)}} =$ . . . . ,

. . . . ,

$$x_{H^{(n)}} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \frac{\cos 2^p\alpha + \cos 2^p\beta + \cos 2^p\gamma}{2^{p+1}}$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{\cos 2^{n+1}\alpha + \cos 2^{n+1}\beta + \cos 2^{n+1}\gamma}{2^{n+1}},$$

$$y_{H^{(n)}} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{\sin 2^p\alpha + \sin 2^p\beta + \sin 2^p\gamma}{2^{p+1}}$$
$$+ \frac{\sin 2^{n+1}\alpha + \sin 2^{n+1}\beta + \sin 2^{n+1}\gamma}{2^{n+1}}.$$

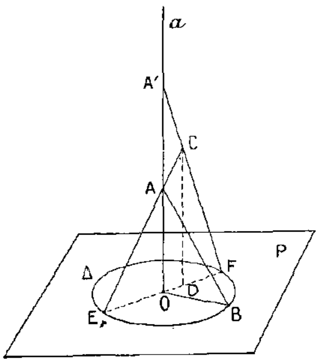
On peut les écrire symboliquement sous la forme

$$
\begin{aligned}
x_{A^{(n)}} + y_{A^{(n)}}\sqrt{-1} = {} & \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \left(e^{(-2)^p \alpha \sqrt{-1}} + e^{(-2)^p \beta \sqrt{-1}} + e^{(-2)^p \gamma \sqrt{-1}} \right) \\
& + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} e^{(-2)^{n+1} \alpha \sqrt{-1}}, \\
x_{B^{(n)}} + y_{B^{(n)}}\sqrt{-1} = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_{H^{(n)}} + y_{H^{(n)}}\sqrt{-1} = {} & \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \left(e^{(-2)^p \alpha \sqrt{-1}} + e^{(-2)^p \beta \sqrt{-1}} + e^{(-2)^p \gamma \sqrt{-1}} \right) \\
& + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \left(e^{(-2)^{n+1} \alpha \sqrt{-1}} + e^{(-2)^{n+1} \beta \sqrt{-1}} + e^{(-2)^{n+1} \gamma \sqrt{-1}} \right).
\end{aligned}
$$

Les lieux des points $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $H^{(n)}$ s'obtiendraient par l'élimination de n entre les valeurs des abscisses et celles des ordonnées; mais ces valeurs sont données par des séries dont la somme ne paraît pas facile à obtenir.

Ce qu'on voit aisément, c'est qu'aucune des coordonnées ne peut atteindre la valeur 3, la somme des valeurs absolues des coefficients des cosinus ou des sinus étant 1. On voit aussi que la position limite est la même pour les points A, B, C et H, et qu'elle est bien déterminée. WELSCH.

234. (L. LECORNU.) — Soient a, b, c les droites données et ABC le triangle cherché. Supposons les points B, C connus;



alors A est le point de la droite a dont la somme des distances aux points B et C est minimum. Soient Δ la circonférence engendrée par le point B tournant autour de a, et E un point quelconque de Δ; A est aussi le point de a pour lequel la somme AE + AC est minimum. Le plan mené par a et C coupe Δ aux extrémités E, F d'un diamètre; tirons les droites CE, CF qui rencontrent a aux points A, A′ situés le premier sur CE même, le second sur le prolongement de CF. Pour un point quelconque X de a, on a

$$XE + XC > CE, \qquad XF - XC < CF,$$

d'où

$$XB + XC > AC + AB, \qquad XB - XC < A'B - A'C.$$

Ainsi A est le point de a pour lequel la somme AB + AC est minimum, et A′ est le point de a qui rend maximum la différence des distances A′B′, AC. La droite a fait des angles égaux avec les droites AB, AC ou avec A′B, A′C; mais une rotation autour de a amène AB sur le prolongement de CA, et A′B sur A′C. Ce premier résultat peut encore être énoncé ainsi : la droite a est située dans le plan bissecteur intérieur de l'angle BA′C (plan perpendiculaire au plan de l'angle et passant par la bissectrice), et dans le plan bissecteur extérieur de l'angle BAC.

D'après cela, les droites a, b, c se projettent sur le plan du triangle ABC suivant les bissectrices extérieures de ABC. Ces bissectrices forment un triangle A′B′C′ dans lequel A, B, C sont les pieds des hauteurs. Par suite, le problème revient à mener par a, b, c trois plans parallèles à une même droite et tels que les plans menés par les arêtes du prisme ainsi formé perpendiculairement aux faces opposées, rencontrent respectivement les droites a, b, c en trois points A, B, C qui soient situés dans une même section droite du prisme. Le problème est transformé, mais il n'est point résolu et cette construction n'est probablement point linéaire. J. Neuberg (Liége).

Nous avons reçu une réponse analogue de M. Welsch; il fait remarquer que le problème dépend du huitième degré, mais qu'une seule solution répond à l'énoncé, les autres correspondant aux cas où les côtés du triangle étant groupés 2 à 2, de toutes les façons possibles, la condition que les côtés d'un même groupe aient une somme minimum serait remplacée par la condition que leur différence fût maximum, et cela pour un seul groupe (3 solutions) pour deux groupes (3 solutions) pour les trois groupes (1 solution). M. Welsch ajoute que la solution unique convenable ne paraît pas pouvoir être séparée des autres, même dans le cas plus simple où l'un des sommets est donné, au lieu de la droite sur laquelle il doit se trouver.

237. (A.-S. Ramsey.) — *Deuxième réponse.* — La question a été proposée sans doute parce que, il y a quelques années, en Angleterre, l'Association instituée pour l'amélioration de l'enseignement de la Géométrie (*Association for the improvement of Geometrical Teaching*) a demandé une démonstration simple de ce théorème, afin de faciliter la démonstration du contact du cercle inscrit avec le cercle des neuf points. Or, dans la démonstration donnée, 1894, p. 144, cette proposition est supposée connue; on peut éviter ainsi cette hypothèse.

Du triangle HIO, où G situé sur HO est le centre de gravité de ABC, par le théorème de Robert Simson (souvent attribué à Mathew Stewart), on tire

$$\mathrm{IO}^2.\mathrm{GH} + \mathrm{HI}^2.\mathrm{GO} = \mathrm{GI}^2.\mathrm{HO} + \mathrm{GO}.\mathrm{GH}.\mathrm{HO}$$

ou

$$2\,\mathrm{IO}^2.\mathrm{GO} + \mathrm{HI}^2.\mathrm{GO} = 3\,\mathrm{GI}^2.\mathrm{GO} + 6\,\mathrm{GO}^3;$$

donc

$$2\,\mathrm{IO}^2 + \mathrm{HI}^2 = 3\,\mathrm{GI}^2 + 6\,\mathrm{GO}^2$$

et

$$\mathrm{HI}^2 = 3\,\mathrm{GI}^2 + 6\,\mathrm{GO}^2 - 2\,\mathrm{IO}^2.$$

Maintenant, sans trop de difficulté, on peut établir que

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{GI}^2 &= 3r^2 - p^2 + \tfrac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2),\\ 6\,\mathrm{GO}^2 &= 6\,\mathrm{R}^2 - \tfrac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2),\\ 2\,\mathrm{IO}^2 &= 2\,\mathrm{R}(\mathrm{R} - 2r),\\ 2\,\mathrm{AH}.\mathrm{HD} &= a^2 + b^2 + c^2 - 8\,\mathrm{R}^2; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit le théorème à démontrer.

Toutefois, une démonstration plus simple, tirée directement des relations de la figure, reste à désirer pour répondre au but didactique qui a, certainement, inspiré la question.

J.-S. Mackay (Édimbourg).

239. (P.-F. Teilhet.) — Lagrange a donné une méthode générale pour résoudre les équations indéterminées du second degré non seulement en nombres rationnels, mais aussi en nombres entiers, dans ses *Additions* à l'Algèbre d'Euler. Cette méthode se trouve reproduite dans la *Théorie des Nombres* de Legendre.

L'Analyse indéterminée du second degré a été aussi pour Euler l'objet de différents Mémoires qui font partie des *Novi Commentarii* et des *Nova acta Academiæ Scientiarum imperialis Petropolitanæ*, Mémoires reproduits dans les *Commentationes Arithmeticæ Collectæ* (*voir* t. I, p. 4, 297, 549, 570).

On consultera avec intérêt les *Notes élémentaires sur le problème de Pell*, par M. H. Brocard (*N. C.*, t. IV), ainsi que les *Quelques Questions* se rattachant au même problème par S. Realis (*N. C.*, t. VI). E. Fauquembergue.

242. (Voyer.) — *Deuxième réponse.* — Si, après avoir posé

$$\left(\frac{a}{b}\right)_n = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{b(b-1)(b-2)\ldots(b-n+1)},$$

on veut étudier l'expression symbolique

$$\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)\right]^n,$$

on trouve d'abord que, pour $n=1, 2, \ldots$, elle prend les valeurs

$$1-\left(\frac{a}{b}\right)_1 = \left(\frac{b-a}{b}\right)_1, \quad 1-2\left(\frac{a}{b}\right)_1 + \left(\frac{a}{b}\right)_2 = \left(\frac{b-a}{b}\right)_2, \quad \ldots,$$

et l'on est conduit à penser qu'elle est égale à $\left(\frac{b-a}{b}\right)_n$. En supposant qu'il en soit ainsi pour les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$ de l'indice, il est aisé de montrer que cela ne cesse pas d'être vrai pour la valeur n. On trouve, en effet, par une décomposition facile,

$$\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)\right]^n = \left[1-\left(\frac{a}{b}\right)\right]^{n-1} - \frac{a}{b}\left[1-\left(\frac{a-1}{b-1}\right)\right]^{n-1};$$

puis

$$\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)\right]^n = \left(\frac{b-a}{b}\right)_{n-1} - \frac{a}{b}\left(\frac{b-a}{b-1}\right)_{n-1} = \left(\frac{b-a}{b}\right)_n.$$

En d'autres termes,

$$1-\frac{n}{1}\frac{a}{b}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{a(a-1)}{b(b-1)}-\ldots$$
$$=\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b-1}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{b-n+1}\right).$$

Il suffit de faire $n=a$ pour retrouver l'identité de M. Voyer.

CESÀRO.

Soit

$$f(a,b)=1-\frac{a^2}{b}+\frac{1}{1.2}\frac{[a(a-1)]^2}{b(b-1)}-\ldots$$
$$+\frac{(-1)^a}{1.2\ldots a}\frac{[a(a-1)\ldots 1]^2}{b(b-1)\ldots(b-a+1)},$$

où a est un nombre entier et b une variable arbitraire,

$$f(a,b+1)=1-\frac{a^2}{b+1}+\frac{1}{1.2}\frac{[a(a-1)]^2}{(b+1)b}-\ldots$$
$$+\frac{(-1)^a}{1.2\ldots a}\frac{[a(a-1)\ldots 1]^2}{(b+1)b\ldots(b-a+2)};$$

on en déduit l'identité

$$(1)\qquad f(a,b+1)-f(a,b)=\frac{a^2}{b(b+1)}f(a-1,b-1).$$

Or

$$f(a,a)=1-a+\frac{a(a-1)}{1.2}-\ldots$$
$$+(-1)^a\frac{a(a-1)\ldots 1}{1.2\ldots a}=(1-1)^a=0,$$

pourvu que $a>0$,

$$f(a,a+1)=f(a,a)+\frac{a^2}{a(a+1)}f(a-1,a-1)=0$$

si $a>1$,

$$f(a,a+2)=f(a,a+1)+\frac{a^2}{(a+1)(a+2)}f(a-1,a)=0$$

si $a>2$, et, en général,

$$f(a,a+\rho)=0 \qquad \text{si} \qquad a>\rho.$$

Donc $f(a,b)$ est une fonction de b qui s'annule pour les valeurs $b=a, a+1, \ldots, 2a-1$; par suite,

$$f(a,b)=\frac{(b-a)(b-a-1)\ldots(b-2a+1)}{b(b-1)\ldots(b-a+1)}\varphi(a).$$

En substituant cette expression dans l'identité (1), on trouve

$$\varphi(a) = \varphi(a-1) = \varphi(a-2) = \ldots = \varphi(1) = 1$$

et

$$f(a,b) = \left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{b-1}\right)\cdots\left(1 - \frac{a}{b-a+1}\right),$$

quel que soit b, pourvu que a soit entier. EUGÈNE FABRY.

244. (NIEWENGLOWSKI.) — On conclut du théorème de Rolle que, si l'équation algébrique $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en sera de même des équations

$$f(x) + af'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad af(x) + f'(x) = 0,$$

a étant réel et quelconque.

En généralisant cette proposition, il est facile de voir qu'en désignant par $a, b, c, \ldots, k, l$, P quantités réelles quelconques, les équations

$$f(x) + \Sigma af'(n) + \Sigma abf''(x) + \ldots + abc\ldots klf^{(P)}(x) = 0$$

et

$$f^{(P)}(x) + \Sigma af^{(P-1)}(x) + \Sigma abf^{(P-2)}(x) + \ldots + abc\ldots klf(x) = 0$$

auront aussi toutes leurs racines réelles.

Faisant $f(x) = x^P$, ces deux équations deviennent

$$(1)\quad x^P + \Sigma aPx^{P-1} + \Sigma abP(P-1)x^{P-2} + \ldots + abc\ldots klP! = 0,$$

$$P! + \Sigma a.2.3\ldots Px + \Sigma ab.3.4\ldots Px^2 + \ldots + abc\ldots klx^P = 0.$$

Divisons cette dernière par P! et changeons x en $\frac{1}{x}$; la transformée, dont les racines demeurent réelles, s'écrira

$$(2)\qquad x^P + \frac{\Sigma a}{1}x^{P-1} + \frac{\Sigma ab}{1.2}x^{P-2} + \ldots + \frac{abc\ldots kl}{P!} = 0.$$

Mais, dans (1), nous pouvons remplacer Σa, Σab, ... par les coefficients d'une équation algébrique quelconque de degré P à racines réelles, telles que

$$F(x) \equiv (x+a_1)(x+b_1)\ldots(x+k_1)(x+l_1).$$

Faisant cette substitution avec les coefficients de (2), le résultat est l'équation

$$x^P + \Sigma a\frac{P}{1}x^{P-1} + \Sigma ab\frac{P(P-1)}{1.2}x^{P-2} + \ldots + abc\ldots kl = 0,$$

dans laquelle nous pourrons encore remplacer Σa, $\Sigma ab\ldots$ par les coefficients $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$ de la proposée

$$ax^{P} + bx^{P-1} + cx^{P-2} + \ldots = 0,$$

et notre équation devient finalement

$$ax^{P} + b\frac{P}{1}x^{P-1} + c\frac{P(P-1)}{1.2}x^{P-2} + \ldots = 0.$$

Elle a, ainsi que les dérivées de tout ordre, ses racines réelles.

La dérivée d'ordre $P - m$, égalée à zéro et divisée par le facteur $P(P-1)\ldots(m+1)$, s'écrira

$$ax^{m} + \frac{m}{1}bx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}cx^{m-2} + \ldots = 0.$$

AUDIBERT.

249. (MARIUS LIVON.) — La théorie complète des hausses a été donnée par Wuich dans les *Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie und Genie Wesens* et traduite par le capitaine Gossot, de l'Artillerie de Marine (t. XV du *Mémorial d'Artillerie de la Marine*). De cette théorie on déduit les formules qui permettent d'étudier la question envisagée par l'auteur. Soient ρ, λ, σ les coordonnées du guidon par rapport à trois plans convenablement choisis, l la longueur de la ligne de mire, p la portée réelle (distance de la bouche au but comptée suivant la droite qui les joint), α l'angle de projection, β l'angle de site, H et d les hausses verticale et latérale, on a, en considérant le but dans le plan de tir, c'est-à-dire en admettant que l'angle de dérivation est négligeable,

$$H = l\,\text{tang}(\alpha - \beta) + l\frac{\rho - \lambda\,\text{tang}(\alpha - \beta)}{\lambda + p\cos(\alpha - \beta)},$$

$$d = l\frac{-\sigma}{\lambda + p\cos(\alpha - \beta)}.$$

Si l'on suppose que l'objectif s'élève suivant une verticale, il y a lieu de remplacer p par $\frac{P}{\cos\beta}$, où P est une constante; l'angle de projection α nécessaire pour atteindre l'objectif se déduira d'une équation approchée de la trajectoire, telle que la suivante, par exemple,

$$y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2\alpha}(1 + KV^2 x),$$

dans laquelle on remplacera x et y par les coordonnées du but. On aura, d'ailleurs, aisément une première approximation très voisine de la valeur réelle, en remarquant que l'angle $\alpha - \beta$ est sensiblement l'angle de projection convenant à la portée p (hypothèse de la rigidité de la trajectoire). Cet angle $\alpha - \beta$ se déduira simplement de l'équation des portées

$$\sin 2(\alpha - \beta) = \frac{gp}{V^2}(1 + KV^2 p)$$

ou de la Table de tir équivalente.

Il n'y a pas, à notre connaissance, de formule analytique simple permettant de relier H à α et β en tenant compte de la résistance de l'air, mais les relations précédentes suffisent à tous les besoins de la pratique. *Gaston Frondes.*

250. (Schobloch). — L'équation $y = a\cos^n\varphi$ dans laquelle a et n sont des constantes, y l'ordonnée par rapport à une base rectiligne, φ l'angle de la tangente avec cette base, représente une famille de courbes satisfaisant à la condition proposée. Car si une telle courbe roule sur une nouvelle base fixe, l'ancienne base, entraînée, enveloppera la courbe $y = a\cos^{n+1}\varphi$. Ces lignes ont des propriétés remarquables.

Le rayon de courbure est à la normale dans le rapport constant n. L'aire de la courbe, la longueur de l'arc, les coordonnées de leurs centres de gravité, sont des fonctions rationnelles de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. Si, en particulier, on donne à n la série des valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient des courbes alternativement transcendantes et algébriques; celles-ci, correspondant aux valeurs paires de n, sont des unicursales de degré $2n^2$ si $n > 0$, et $2(n+1)^2$ si $n < 0$. Les valeurs positives de n donnent alternativement la forme ovale (courbes algébriques) et la forme cycloïdale (courbes transcendantes); aux valeurs négatives correspond toujours une forme parabolique (courbes algébriques ou transcendantes). Si $n > 0$, l'arc compris entre les valeurs $\pm\infty$ de φ est limité, et sa longueur est commensurable avec la circonférence $2\pi a$ qui correspond à $n = 1$. Si l'on fait

$n = -2, -1, 0, 1, 2$, on obtient successivement une parabole, une chaînette, un point, un cercle, une cycloïde. Cette génération de la cycloïde comme enveloppe d'un diamètre du cercle roulant a déjà été signalée par Chasles. CH. RABUT.

255. Deux coniques conjuguées, rapportées aux asymptotes communes, ont pour équations $xy - kz^2 = 0$, $xy + kz^2 = 0$. Soient maintenant, en coordonnées normales trilinéaires, respectivement,

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy = 0,$$
$$f_1 = A_1x^2 + \ldots, \qquad f_2 = A_2x^2 + \ldots$$

les équations des mêmes courbes et du faisceau de leurs asymptotes communes.

$ax + by + cz = 0$ représentant la droite de l'infini, une transformation de coordonnées montre que l'on a

$$f = f_2 - \lambda(ax + by + cz)^2, \qquad f_1 = f_2 + \lambda(ax + by + cz)^2,$$

d'où l'on conclut $f_1 = f + 2\lambda(ax + by + cz)^2$, c'est-à-dire

$$A_1 = A + 2\lambda a^2, \qquad B_1 = \ldots; \qquad D_1 = D + 4\lambda bc, \qquad E_1 = \ldots.$$

La question revient à déterminer λ en fonction de A, B, C, ..., mais $f_2 = f + \lambda(ax + by + cz)^2$ représente les deux asymptotes, donc son discriminant est nul. On peut écrire ce discriminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda a & 2(A + \lambda a^2) & F + 2\lambda ab & E + 2\lambda ca \\ 2\lambda b & F + 2\lambda ab & 2(B + \lambda b^2) & D + 2\lambda bc \\ 2\lambda c & E + 2\lambda ca & D + 2\lambda bc & 2(C + \lambda c^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchant respectivement, des trois dernières colonnes, la première multipliée par a, b, c et divisant après cela par 2λ la première colonne on a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2\lambda} & -a & -b & -c \\ a & 2A & F & E \\ b & F & 2B & D \\ c & E & D & 2C \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire immédiatement la valeur de λ en fonction du discriminant de f, des mineurs de ce discriminant et de a, b, c; tous calculs faits, on obtient

$$-\lambda = \left\{ \frac{AD^2 + BE^2 + CF^2 - DEF - 4ABC}{\begin{array}{r} a^2(D^2 - 4BC) + b^2(E^2 - 4CA) + c^2(F^2 - 4AB) \\ + 2bc(2AD - EF) + 2ca(2BE - FD) + 2ab(2CF - DE) \end{array}} \right\}.$$

J. Neuberg (Liége), Welsch.

Note. La question à laquelle il vient d'être donné réponse était l'une des questions posées dans les placards de préparation du journal; elle y avait été énoncée d'une façon un peu ambiguë : la réponse qu'on vient de lire satisfait complètement à la nouvelle rédaction, mais M. Welsch nous a envoyé depuis fort longtemps une réponse qui, en outre de la solution précédente, contient des résultats qui répondaient au premier énoncé compris dans son sens le plus général. Comme ils résultent de calculs certainement laborieux et qu'il peut être utile de les avoir, nous les donnons ici. La Rédaction.

λ ayant la même valeur que ci-dessus, si l'on considère les deux coniques qui ont même centre et même direction d'axes que la conique donnée et telles que les carrés de deux axes correspondants soient égaux, ceux des deux autres axes correspondants étant égaux et de signes contraires, les équations de ces coniques sont

$$\Phi - 2\lambda\left(A + B + C - D\cos\alpha - \quad \cos\beta - F\cos\gamma \pm \sqrt{PQ}\right)$$
$$(ax + by + cz)^2,$$

α, β, γ étant les angles du triangle de référence.

De plus, on a posé

$$\begin{aligned} \Phi = {} & [2A^2 + E^2 + F^2 - 2AB - 2AC \\ & \qquad - 2(EF - AD)\cos\alpha - 2AE\cos\beta - 2AF\cos\gamma]x^2 \\ & + 2(EF - AD + BD + CD - 4BC\cos\alpha - 2CF\cos\beta - 2BE\cos\gamma)y^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ = {} & (A + B + C - D\cos\alpha - E\cos\beta - F\cos\gamma)^2 \\ & + [(D^2 - 4BC)\sin^2\alpha + (E^2 - 4CA)\sin^2\beta + (F^2 - 4AB)\sin^2\gamma \\ & \qquad + 2(2AD - EF)\sin\beta\sin\gamma \\ & \qquad + 2(2BE - FD)\sin\gamma\sin\alpha + 2(2CF - DE)\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

On remarquera que la partie entre crochets n'est autre que le dénominateur de λ, multiplié par $\frac{\sin^2 \alpha^2}{a^2}$.

La solution repose sur ce que X, Y étant les distances d'un point quelconque d'une conique à ses asymptotes, l'équation de cette conique peut être mise sous la forme $XY = k$ et celle de ses conjuguées (le mot conjugué étant entendu comme nous venons de le dire) sous celles-ci : $XY = -k$, $X^2 + Y^2 = \pm 2k$. Les calculs sont fort longs, mais une simplification considérable résulte de ce que le produit PQ ne renferme pas λ. P et Q, que nous n'avons pas encore définis, sont les dénominateurs des expressions de la distance d'un point aux asymptotes ; ils contiennent le paramètre λ qui disparaît dans leur produit. On arrive immédiatement à la valeur de PQ en remarquant qu'elle est égale à ce que devient $\frac{1}{2}\Phi$ quand on y remplace les carrés x^2, y^2, z^2 par l'unité et les rectangles yz, zx, xy respectivement par $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$.

WELSCH.

258. (E. LEMOINE). — *Troisième réponse.* — Si l'on désigne par F_A, F_B, F_C et F_D les faces du tétraèdre opposées aux sommets A, B, C et D, par λ, μ et ν les angles $\widehat{BDC}$, $\widehat{CDA}$ et $\widehat{ADB}$, et si l'on pose $\lambda + \mu + \nu = 2\omega$, les conditions du problème obtenues par un calcul direct très simple sont les suivantes :

La somme de deux des faces du tétraèdre doit être égale à la somme des deux autres. Si cette condition est remplie et si l'on a, par exemple, (1) $F_B + F_C = F_A + F_D$, il faut, en outre, qu'on ait

$$(2) \qquad \sin(\omega - \lambda) = 2 \sin\omega \sin(\omega - \mu) \sin(\omega - \nu).$$

Pour un tétraèdre équifacial, la condition (1) est satisfaite ; mais la seconde ne l'est pas en général ; elle devient d'ailleurs, dans ce cas, $\cos\lambda = 2 \cos\mu \cos\nu$, ou $\tan\mu \tan\nu = 3$.

Il y a lieu de remarquer que, la condition (1) étant satisfaite, si l'on désigne par Δ_A, Δ_B, Δ_C et Δ_D les diamètres des sphères exinscrites dans les trièdres de sommets A, B, C et D respectivement et par H_A, H_B, H_C et H_D les hauteurs issues de ces sommets, on a

$$\Delta_A = H_D, \qquad \Delta_B = H_C, \qquad \Delta_C = H_B \qquad \text{et} \qquad \Delta_D = H_A.$$

On peut aussi donner autrement les conditions précédentes; appelons O_a, O_b, O_c, O_d, r_a, r_b, r_c, r_d les centres et les rayons des sphères ex-inscrites de première espèce qui sont dans les angles trièdres A, B, C, D; pour que l'hyperboloïde des hauteurs soit de révolution, il faut et il suffit qu'en choisissant convenablement deux sommets A et D de ce tétraèdre : 1° les droites AO_d et DO_a soient parallèles; 2° qu'on ait $\overline{DO_a}^2 = 3r_a^2$. Si la première condition est remplie, les quatre droites AO_d, DO_a, BO_c et CO_b sont parallèles et l'on a $F_A + F_D = F_B + F_C$. Si la seconde l'est aussi, on a $\overline{CO_b}^2 = 3r_b^2$, $\overline{BO_c}^2 = 3r_c^2$, $\overline{AO_d}^2 = 3r_d^2$. E. Genty.

Le fait que l'une des sphères ex-inscrites a son diamètre égal à la hauteur du tétraèdre qui correspond à la face jumelle de la face opposée au trièdre contenant la sphère considérée (ce qui est le cas ici), a pour conséquence que le cône circonscrit à cette sphère et ayant son sommet au sommet du tétraèdre par lequel passe la hauteur en question, coupe la face opposée, suivant une parabole dont l'axe passe par la projection du sommet. Ce cône n'est pas, en général, le cône L (*voir* 1894, p. 208), dont l'intersection avec la même face est une parabole, telle que sa directrice passe par la projection du sommet.

En somme, étant donnée une face ABC, le sommet opposé D est astreint à se trouver sur une certaine courbe, intersection de la surface lieu des sommets des cônes de révolution ayant pour directrices les paraboles inscrites à ABC, avec le cylindre droit ayant pour base la courbe lieu des points d'intersection des axes et des directrices des mêmes paraboles. Cette courbe est du 4ième degré, elle a un point triple à l'orthocentre de ABC, elle passe deux fois par les points circulaires de l'infini, et est circonscrite à ABC.

La courbe de l'espace a pour ordonnée perpendiculaire à ABC, en chacun de ses points, le paramètre de la parabole correspondante, multiplié par $\sqrt{2}$.

On peut remarquer que l'angle du cône L est constant, quel que soit le tétraèdre ABCD, si l'hyperboloïde des hauteurs est de révolution. L'angle α de L est tel que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ $\tang\alpha = 2\sqrt{2}$.

C'est d'ailleurs le fait de tout cône de révolution dont le sommet se projette sur le plan parallèle à un plan tangent, en un point de la directrice de la parabole d'intersection, lequel point est forcément sur l'axe de cette parabole.

Les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'hyperboloïde auquel appartiennent les hauteurs d'un tétraèdre soit de révolution peuvent être énoncées sous une autre forme.

Première condition. — La somme des aires de deux des faces du tétraèdre doit être égale à la somme des aires des deux autres. Dans ce cas, il existe un cône de révolution tel que, transporté parallèlement à lui-même, de façon que son sommet coïncide successivement avec les quatre sommets du tétraèdre, il soit dans chacune de ses positions ex-inscrit au trièdre correspondant. La somme totale des angles plans formés autour des sommets A et D est alors égale à quatre droits; de même la somme totale des angles plans formés autour des sommets B et C, l'une des arêtes AD et BC étant celle du comble où se trouve la sphère ex-inscrite de deuxième espèce dont le centre est rejeté à l'infini.

Deuxième condition. — Le sommet D doit se projeter sur le plan de la face opposée ABC, au point d'intersection de l'axe et de la directrice d'une même parabole inscrite au triangle ABC. Cette condition équivaut à celle que l'angle au sommet du cône L ait pour tangente $2\sqrt{2}$, ou que l'angle de l'axe de ce cône avec les génératrices ait pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On en déduit que les angles dièdres AD et BC satisfont aux relations $\tang \frac{AD}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\omega}$, $\tang \frac{BC}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\omega'}$, ω, $\pi-\omega$, ω', $\pi-\omega'$ étant respectivement la demi-somme des angles plans formés autour des sommets A, D, B, C. Toutes ces propositions étant réciproques, on voit que, pour que l'hyperboloïde des hauteurs d'un tétraèdre soit de révolution, il faut et il suffit : 1° que la somme totale des angles plans formés autour de deux sommets A et D par les faces du tétraèdre soit égale à quatre angles droits; 2° que l'on ait la relation $\tang \frac{AD}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\omega}$, ω étant la demi-somme des angles plans en l'un des sommets A et D. Les quelques propriétés rencontrées à propos de la question 258 font pressentir que l'étude de ces tétraèdres donnerait d'autres résultats intéressants.

WELSCH.

260. (Korkine.) — Soit $f(n)$ une fonction arithmétique du nombre entier n définie par l'équation $\Pi f(d) = n$, où le produit s'étend à tous les diviseurs du nombre n. On sait [1] que

$$f(n) = 1,$$

quand n est égal à 1 ou divisible par plusieurs nombres premiers différents et que $f(n) = p$, lorsque n est de la forme p^λ, p étant un nombre premier. Faisons

$$\varphi(n) = \prod_{k=1}^{k=\left[\frac{n}{2}\right]'} \operatorname{tang}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

$\left[\frac{n}{2}\right]' = \frac{n-1}{2}$ si n est impair, $\left[\frac{n}{2}\right]' = \frac{n-2}{2}$ si n est pair, et $\Psi(n) = \prod \operatorname{tang}^2\left(\frac{\nu\pi}{n}\right)$, ce dernier produit s'étendant aux nombres positifs $< \frac{n}{2}$ et premiers avec n. On détermine immédiatement $\varphi(n)$ en remarquant que l'équation

$$\frac{(1+ix)^n - (1-ix)^n}{2ix} = 0$$

a pour racines les quantités $\operatorname{tang}\frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$; on trouve ainsi $\varphi(n) = n$ quand n est impair et $\varphi(n) = 1$ quand n est pair. Si n est impair, on a évidemment $\Pi\, \Psi(d) = \varphi(n) = n$, et, par conséquent, (1) $\Psi(n) = f(n)$. Considérons maintenant le cas de n pair et soit $n = 2^r.m$, m étant impair. Dans l'équation $\varphi(n) = \prod_{k=1}^{k=\frac{n-2}{2}} \operatorname{tang}^2\left(\frac{k\pi}{2^r.m}\right)$, séparons le produit en deux parties, les facteurs de la première partie correspondant aux valeurs paires de k, ceux de la seconde partie aux valeurs impaires de k, et désignons ce dernier produit par $\chi(n) = h(m)$. Il vien-

(1) *Voir* dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet-Dedekind (3e ou 4e édition), le VIIe supplément intitulé *Ueber einige Sätze der Theorie der Kreistheilung*.

dra $\varphi(n) = \varphi\left(\frac{n}{2}\right)\chi(n)$, de sorte que $\chi(n) = h(m) = 1$ lorsque $r > 1$ et $\chi(n) = h(m) = \frac{1}{m}$ lorsque $r = 1$. Si l'on désigne le produit $\psi(n) = \prod \text{tang}^2\left(\frac{\nu\pi}{2^r . m}\right)$, considéré comme fonction de m, par $j(m)$, on aura $h(m) = \Pi j(d)$, le produit s'étendant à tous les diviseurs de m, d'où, par l'application de la formule du VII[e] supplément cité en note, $j(m) = \psi(n) = 1$ lorsque $r > 1$, $j(m) = \psi(n) = \frac{1}{f(m)}$ lorsque $r = 1$.

La fonction $\psi(n)$ est ainsi déterminée dans tous les cas et des expressions trouvées résulte $\prod_{n=1}^{n=N} \psi(n) = \prod p^{m_p}$, où

$$m_p = \mathrm{E}\left(\frac{\log N}{\log p}\right) - \mathrm{E}\left[\frac{\log\left(\frac{N}{2}\right)}{\log p}\right].$$

Le premier membre n'est autre chose que $\Pi\,\text{tang}^2 \rho\pi$, le produit s'étendant à toutes les fractions irréductibles $\rho < \frac{1}{2}$ dont les dénominateurs ne surpassent pas la quantité N. Quant à l'exposant m_p, il indique le nombre des exposants entiers et tels que $\frac{N}{2} < p^\alpha \leqq N$, de sorte que la formule trouvée est bien celle de M. Korkine. J. Franel (Zurich).

261. (J. Duran Loriga.) — *Deuxième réponse.* — Ce problème est dû à Euler (*Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques.* Voir Préface des *Récréat. math.* d'Édouard Lucas). Lorsque n est impair, il est facile de le résoudre par le procédé de formation des carrés diaboliques d'Édouard Lucas (*Note sur le Mémoire de M. Frolov*).

Si n est impair, on peut en effet toujours trouver deux nombres p et q inférieurs à n tels que $p-1$, $q-1$, $q-p$ soient premiers à n (il suffit de prendre $q = 2^{\alpha+1}+1$, $p = 2^\alpha + 1$).

Soient $a = 1$, $b = 2$, ...; considérons une permutation circulaire des n premiers nombres. Écrivons sur une ligne une permutation rectiligne provenant de cette permutation circulaire. Au-dessous, écrivons la permutation rectiligne provenant de la même permutation ayant pour nombre initial le $p^{\text{ième}}$ de la précédente; ...; dérivons de même la $k+1^{\text{ième}}$ ligne de la $k^{\text{ième}}$, jusqu'à ce que nous ayons formé un tableau carré. Le nombre occupant la $g^{\text{ième}}$ colonne dans la première ligne occupera la $\gamma^{\text{ième}}$ colonne dans la $k+1^{\text{ième}}$ ligne $\gamma \equiv g - k(p-1)$ (mod. n). Donc $\gamma \not\equiv g$, puisque $k < n$ et que $p-1$ est premier à n. Donc, en formant le tableau des lettres correspondant à ce tableau de nombres, on n'aura aucune répétition dans aucune ligne et dans aucune colonne.

Formons de même un deuxième tableau en partant d'une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres, en opérant d'une façon analogue, et prenant q au lieu de p. Ce tableau possède les mêmes propriétés que le premier. Le nombre occupant la $g^{\text{ième}}$ colonne dans la première ligne occupera la $\eta^{\text{ième}}$ colonne dans la $k+1^{\text{ième}}$ ligne

$$\eta \equiv g - k(q-1) \qquad (\text{mod. } n).$$

Superposons les deux tableaux, le problème est résolu; en effet, d'après nos hypothèses, aucun symbole n'est répété, puisqu'on ne peut avoir

$$k < n \left\{ \begin{array}{ll} g - k(p-1) \equiv g - k(q-1) & (\text{mod. } n) \\ \text{ou bien} & \\ k(q-p) \equiv 0 & (\text{mod. } n). \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que le nombre de solutions obtenu par ce procédé est, si $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$,

$$(1.2.3,\ldots,n)^2 \frac{n}{abc\ldots}(a-1)(b-1)(c-1)\ldots \frac{n}{abc\ldots}(a-2)(b-2)(c-2)\ldots,$$

ou

$$\left(n!\frac{n}{abc\ldots}\right)^2 (a-1)(b-1)(c-1)\ldots(a-2)(b-2)(c-2)\ldots.$$

(Voir dans la *Théorie des nombres* de Lucas la troisième extension de l'Indicateur. Pour $n=4$, voir la Note III de Lucas qui suit le Mémoire *Les carrés magiques, nouvelle étude* par M. Frolov, grand in-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1886.)

ADR. AKAR.

271. (*Lauserbracht*). — Posons $xy' - y = x_1$. En supposant

x_1 constant, nous aurons l'intégrale de cette dernière équation

$$(1) \qquad y + x_1 - x y_1 = 0,$$

où y_1 est une constante arbitraire. Si nous prenons y_1 comme nouvelle fonction inconnue, x_1 étant la variable indépendante, nous aurons, à l'aide de la formule (1),

$$(2) \qquad y' = y_1, \qquad x = \frac{1}{y'_1}, \qquad \ldots,$$

et l'équation proposée sera transformée en la suivante :

$$y'_2 = \sqrt[4]{\frac{1 + y_1^2}{a^2 x_1^2 + b^4}}, \qquad \ldots.$$

L'intégrale de cette dernière est

$$(3) \qquad \int \frac{dy_1}{\sqrt[4]{1 + y_1^2}} - \int \frac{dx_1}{\sqrt[4]{a^2 x_1^2 + b^4}} = C.$$

En éliminant x_1, y_1 entre les équations (1), (2), (3), nous trouverons l'intégrale cherchée. SALTYKOF (Charkow).

274. (É. VIGARIÉ.) — C'est dans le numéro d'août 1800 de la *Correspondance* de Zach ([1]) que se trouve un article d'une dizaine de pages in-8°, intitulé : *Berechnung des Osterfestes*, von Doctor Gauss, in Braunschweig. J'en ai extrait ce qui suit aussi fidèlement que possible, en traduisant de l'allemand, mais en respectant la disposition des formules :

« Règles générales pour le calcul de la fête de Pâques dans les calendriers juliens et grégoriens :

Si le reste de la division du millésime de l'année		par	19 est a
»	»		4 est b
»	»		7 est c
»	nombre $19a + M$		30 est d
»	nombre $2b + 4c + 6d + N$	par	7 est e
Pâques tombe le $22 + d + e^{\text{ième}}$			Mars
ou le $d + e - 9$			Avril

([1]) *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde*, herausgegeben von Fr. von Zach, Oberstwachtmeister und Director des Sternwarts Seeberg. Zweiter Band. (Gotha, im Verlage der Beckerischen Buchhandlung, p. 121 à 130; 1800).

» M et N sont des constantes pour le calendrier julien ($M=15$, $N=6$); pour le calendrier grégorien, elles varient, au contraire, chaque siècle (de l'année $100k$ à l'année $100k+99$) étant déterminées comme suit pour chaque quantième k du siècle. Soit :

p	le quotient (entier) de k par		3
q	» »	k	4
M	est le reste de la division de	$15+k-p-q$ par 30,	
N	» »	$4+k-q$ par 7. »	

Gauss signale deux exceptions à la règle *pour le calendrier grégorien :* 1° Si le calcul donne le 26 avril, il faut toujours prendre le 19 avril; 2° Si le calcul donne $d=28$, $e=6$, et si, de plus, le reste de la division par 30 du nombre $11M+11$ est plus petit que 19, au lieu du 25 avril, il faut prendre le 18. Il affirme qu'en dehors de ces exceptions, ses règles sont tout à fait générales. M. CANTOR (Heidelberg). P. TANNERY.

277. (E. GENTY). — Cette transformation peut être considérée comme résultant de deux transformations connues. En effet, menons par O la parallèle à Mm, jusqu'à sa rencontre en M' et m' avec les normales en M et m. On construit ainsi les parallélogrammes $OAMM'$, $Oamm'$; et, comme on le voit sans difficulté, les surfaces (M') et (M) sont *parallèles;* il en est de même pour les surfaces (m) et (m'). Quant aux surfaces (M') et (m'), elles sont inverses par rapport au point O, car on a

$$OM'=AM, \qquad Om'=am \qquad \text{et} \qquad OM'.Om'=K^2,$$

en vertu de la relation $AM.am=K^2$. TH. CARONNET.

280. (P. TANNERY). — J'ai un bel exemplaire du Tome premier du *Cours mathématique* de Pierre Hérigone, portant la date de 1634, ayant appartenu à Michel Chasles. A la suite des 983 pages numérotées, il y a 3 pages d'errata, puis 2 pages pour le privilège. Viennent ensuite 6 autres pages d'errata et 10 pages d'annotations, qui, peut-être, font défaut dans certains exemplaires. E. GELIN.

NOTE. — Les exemplaires des divers Volumes du *Cours mathématique* d'Hérigone diffèrent, en effet, parfois, par la présence ou l'absence de certains feuillets d'additions diverses ou encore par la place que les relieurs ont donnée à ces feuillets. Notamment la feuille du Tome I marquée R*rr* (pages non numérotées), les pages 297 à 328 du Tome II, la feuille Y (*p.n.n*) du Tome III, la feuille *kk* du Tome IV (*p.n.n*), les pages 861-884 du Tome V que l'on rencontre réunies en une même brochure (Bibl. nat. Inv. V 18279), doivent avoir été imprimées ensemble et seulement en 1638, date d'un Ouvrage de Morin auquel il est répondu dans l'addition au Tome V.

Voir ci-dessus, p. 55, ma réponse à la question 217, liée à celle-ci. P. TANNERY.

283. (L. LAUGEL). — Le Tome 41 du *Journal de Crelle*, qui a paru en 1851, contient, p. 141-190 : G. EISENSTEIN, *Tabelle der reducirten ternären quadratischen Formen, nebst den Resultaten neuer Forschungen* ...; — p. 190, *Berichtigungen in dieser Arbeit :* — p. 227-242, *Anhang zu der « Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen*, etc. ».

GINO LORIA (Gênes). A. POORT (Groningue). *Enène.*

288. (E.-N. BARISIEN). — Cette courbe s'appelle plutôt la *versiera. Voir* J. D'ARCAIS, *Corso di Calcolo infinitesimale* (t. I, p. 531). *Voir* D^a MARIA, G. AGNESI *Istituzioni analitiche* (t. I, p. 381, Milan; 1748). Voici, textuellement, comment Agnesi pose le problème : « Dato il semicircolo ADC del diametro AC; si ricerca fuori di esso il punto M tale, che condotta MB normale al diametro AC, che taglierà il circolo in D, si a AB, BD :: AC alla BM, e perchè infiniti sono i punti M, che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo. » Si $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, on obtient $y = a\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}$ et, changeant x en $a-x$, $y = a\sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$. Dans les *Istituzioni* il n'est pas question de la courbe $y = \sqrt{\dfrac{a}{2a-x}}$.

G. PEANO (Turin). J. D'ARCAIS (Padoue). A. REBIÈRE.

291. (P. VERNIER.) — Les propositions énoncées ressortent au domaine de l'Algèbre. Le lemme préliminaire est, au fond, un cas particulier du suivant : Si a et b sont impairs et ont p pour plus grand commun diviseur, x^a+1 et x^b+1 ont x^r+1 pour plus grand commun diviseur; ce qui se déduit immédiatement de l'application de la méthode ordinaire pour la recherche du plus grand commun diviseur. Quant au théorème à démontrer, il revient à dire que, si p est pair et i impair premier avec $p+1$, l'expression entière $\dfrac{n^{(p+1)i}+1}{n^i+1}$ a un diviseur. Mais cela est vrai pourvu que $p+1$ ne divise pas i; soit, en effet, dans ce cas, r le plus grand commun diviseur de i et de $p+1$. Le numérateur est divisible par $n^{p+1}+1$, qui aura n^r+1 comme plus grand commun diviseur avec le dénominateur. Donc, l'expression proposée sera divisible par $\dfrac{n^{p+1}+1}{n^r+1}$, polynôme entier différent de l'unité d'après l'hypothèse. Enfin, si le cas particulier indiqué à la fin de l'énoncé ne se déduit pas immédiatement de ce théorème, on peut voir qu'en général (et non seulement si $n=2$), $n^{4m}-n^{2m}+1=\dfrac{n^{6m}+1}{n^{2m}+1}$ sera divisible par $\dfrac{n^6+1}{n^2+1}$ ou n^4-n^2+1, pourvu que $n^{6m}+1$ soit divisible par n^6+1 (par conséquent, que m soit impair) et ait n^2+1 pour plus grand commun diviseur avec $n^{2m}+1$ (ce qui aura lieu si, en outre, m n'est pas divisible par 3, c'est-à-dire s'il est de la forme $6n\pm 1$). Ainsi, il n'est pas nécessaire que m soit premier. PAUL TANNERY.

1° Si N^2 appartient à l'exposant q, suivant le module p, p étant un diviseur commun à $N^{N_1}+1$ et à $N^{N_2}+1$ ou à $N^{N_2}-1$, q doit diviser à la fois N_1 et N_2, ce qui ne peut avoir lieu que pour $q=1$.

2° $N^{(P+1)I}+1$ est divisible par $N^{P+1}+1$ et par N^I+1. D'après (1°), les nombres ont pour plus grand commun diviseur $N+1$. Il en résulte que $\dfrac{N^{(P+1)I}+1}{N^I+1}$ est divisible par $\dfrac{N^{P+1}+1}{N+1}$. WELSCH.

297. (P. SONDAT). — La proposition énoncée découle immédiatement de ce que deux triangles homologiques sont conjugués par rapport à une certaine conique, et inversement que deux triangles conjugués par rapport à une conique sont homologiques.

En effet, si les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont conjugués, par rapport à une conique, les triangles formés par les points (BC_1, B_1C), (AC_1, AC), (AB_1, A_1B) et par les droites (bc_1, b_1c)

(ac_1, a_1c), (ab_1, a_1b) sont également conjugués par rapport à cette conique.

De plus, chacun des deux nouveaux triangles est homologique à chacun des deux premiers.

Si l'on désigne par T et T′ les deux triangles donnés, par Δ et Δ' les deux triangles qui s'en déduisent par les constructions indiquées, et dans l'ordre où ces constructions sont énoncées, les triangles T, T′, Δ, pris deux à deux, ont même axe d'homologie, et leurs centres d'homologie sont en ligne droite. Les triangles T, T′, Δ', pris deux à deux, ont le même centre d'homologie et leurs axes d'homologie passent par un même point. Les triangles T, T′, Δ forment un groupe réversible, en ce sens que T′ se déduit de T et Δ par la même construction que Δ se déduit de T et T′; de même T se déduit de T′ et Δ' par etc.

De même aussi, T, T′, Δ' forment un groupe réversible.

La même construction, qui donne Δ' au moyen de T et T′, fournit deux nouveaux triangles Δ'_1, Δ'_2, au moyen de T, Δ et de T′, Δ.

La même construction qui fournit Δ au moyen de T et T′ permet d'obtenir deux triangles Δ_1, Δ_2, au moyen de T, Δ' et de T′, Δ'; T, Δ, Δ'_1 ont même centre d'homologie et leurs axes d'homologie passent par un même point.

De même, pour T′, Δ, Δ'_2, T, Δ', Δ_1 ont même axe d'homologie, et leurs centres d'homologie sont en ligne droite. De même pour T′, Δ', Δ_2. On peut ainsi obtenir une infinité de triangles dérivés des premiers. WELSCH.

Pour simplifier les calculs, je supposerai que les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont rendus semblables par une projection conique, puis équilatéraux par une projection cylindrique, et je vais établir le théorème dans ce cas. Prenons ABC pour triangle de référence et soit a son côté. Les équations de C_1B_1, A_1C_1, B_1A_1 sont respectivement

$$x(a+\lambda)+ay+az=0, \qquad ax+(a+\mu)y+az=0,$$
$$ax+ay+(a+\nu)z=0.$$

Les points (BC_1, B_1C), (CA_1, C_1A), (AB_1, A_1B), ou bien A′, B′, C′, ont respectivement pour coordonnées

$$-a\mu\nu, \qquad \mu(a\lambda+a\nu+\lambda\nu), \qquad \nu(a\lambda+a\mu+\mu\lambda), \qquad \ldots.$$

Les droites qui joignent respectivement l'intersection de A_1C_1

avec AB et l'intersection de A_1B_1 avec AC, etc., ont pour équations $ax + (a+\mu)y + (a+\nu)z = 0$, etc., de sorte que le triangle $A'_1B'_1C'_1$ qu'elles forment a pour coordonnées de ses sommets A'_1, B'_1, C'_1 : $-(a\mu + a\nu + \mu\nu)$, $\nu(a+\lambda)$, $\mu(a+\lambda)$, etc. On déduit de là que la droite $A'A'_1$ a pour équation

$$\begin{aligned} &x(a+\lambda)(\nu-\mu)(a\mu\nu + a\nu\lambda + a\lambda\mu + \lambda\mu\nu)\\ &\quad + y\nu[\mu\nu(a+\lambda)(a+\mu) + a\lambda(a\nu + a\mu + \mu\nu)]\\ &\quad - z\mu[\mu\nu(a+\lambda)(a+\nu) + a\lambda(a\nu + a\mu + \mu\nu)] = 0, \end{aligned}$$

et l'on a, par symétrie, les équations de $B'B'_1$, $C'C'_1$.

Si l'on ajoute ces trois équations, leur somme se réduit identiquement à zéro; donc les droites passent au même point. C. Q. F. D.

E. Lemoine.

307. (Eug. Catalan.) — Dans cette question, on demande quand les équations ont été réduites à zéro. Je trouve, pour la première fois, dans l'*Arithmetica integra* de Michael Stifel, de 1544, au recto de la feuille 283, une équation écrite de cette manière qui, avec nos lettres modernes, s'écrirait

$$216 + 41472\sqrt{x} - 18x - 648\sqrt{x} = 0.$$

Pour le signe d'égalité, Stifel emploie le mot *æquantur*. Cet exemple, d'ailleurs, ne peut être regardé que comme fortuit, puisque Stifel ne lui donne aucune suite. Jobst Buergi, l'ami de Kepler, en revanche, écrivait l'équation de cette manière en parfaite connaissance de cause. Kepler, dans ses *Harmoniæ mundi* de 1619, donne, d'après Buergi, l'équation du côté de l'heptagone régulier inscrit dans le cercle du rayon 1 sous les mots : « Figuræ nihili æque valent quantitates hæ $7^{\mathrm{I}} - 14^{\mathrm{III}} + 7^{\mathrm{V}} - 1^{\mathrm{VII}}$ vel $7 - 14^{\mathrm{II}} + 7^{\mathrm{IV}} - 1^{\mathrm{VI}}$ », c'est-à-dire $7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = 0$ ou $7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0$. L'usage ne s'en répandit pas plus par Buergi que par Stifel. Ce fut Descartes qui introduisit définitivement la réduction des équations à zéro dans sa *Géométrie* de 1637. M. Cantor (Heidelberg).

Voir aussi dans le prochain numéro, une réponse de M. P. Tannery à la question 306.

308. (M. d'Ocagne.) — La question des points-racines de l'équation dérivée a été traitée par M. van den Berg dans le *Nieuw Archief voor Wiskunde* (Journal publié par la Société mathématique d'Amsterdam), t. IX, 1-14 et 60, t. XI, 153-186, t. XV,

100-165. On y trouve encore des renseignements sur le théorème, cité par M. d'Ocagne, et dont l'énoncé remonte à Gauss (*Werke*, III, 112). Le dernier article de M. van den Berg contient le remarquable théorème que voici :

« Les points-racines de la dérivée d'une équation à n racines différentes sont les foyers d'une courbe de $(n-1)^{\text{ième}}$ classe qui touche dans leurs milieux les $\frac{1}{2}n(n-1)$ côtés du n-gone complet déterminé par l'équation originale.

» L'équation originale ayant des racines multiples, la jonction d'un point-racine m^{ple} et d'un point-racine p^{ple} est divisée dans le rapport de m à p par le point de contact. »

JAN DE VRIES (Delft).

Nous publions cette Note intéressante à propos de la question 308, mais celle-ci, qui vise spécialement l'étude de la *stabilité* de l'équilibre aux points-racines, n'en reste pas moins posée.

309. (TH. CARONNET.) — La question peut être énoncée sans infiniment petits. Élevons du point O une perpendiculaire à OM et appelons μ le point où cette droite coupe la normale en M à la courbe demandée. Si l'on désigne par $d\omega$ la variation angulaire de OM, on a $d.\mathrm{OM} = \mathrm{O}\mu\, d\omega$, $d.\mathrm{O} = \mathrm{M}\mu\, d\omega$. Portant ces valeurs dans la relation donnée, celle-ci devient

$$\frac{\mathrm{OM} \times \mathrm{O}\mu}{\mathrm{M}\mu} = \frac{\mathrm{K}}{2}\mathrm{MP}.$$

Le premier membre de cette égalité exprime la distance du point O à Mμ, donc : *la courbe demandée est telle que la distance du point arbitraire* M *à la droite donnée est proportionnelle à la distance du point fixe* O *à la normale en* M *à cette courbe*. D'où l'on déduit sans difficulté l'équation différentielle des courbes qui répondent à la question. *Canon.*

Les coordonnées de M peuvent être obtenues explicitement en fonction de l'angle θ, qui mesure l'inclinaison de la tangente sur la droite fixe D. Cette droite étant prise comme axe des x, supposons que l'axe des y soit la perpendiculaire abaissée sur D par le point fixe O, situé à la distance a de l'origine. Soient u et v les distances de O à la normale et à la tangente, en M, à la courbe considérée, de sorte que

$$(1) \qquad x = v\sin\theta - u\cos\theta, \qquad y = a - u\sin\theta - v\cos\theta.$$

On a $\frac{dx}{\cos\theta} = \frac{dy}{\sin\theta} = \frac{\rho\, du}{v - \rho} = \frac{\rho\, dv}{-u} = \rho\, d\theta = ds$. L'égalité de définition $\frac{d}{ds}(u^2 + v^2) = \mathrm{K}y$ devient donc $u = -\frac{1}{2}\mathrm{K}y$, d'où l'on déduit par dérivation (2) $v = \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{K}\sin\theta\right)\rho$. Qu'on remarque, en passant, que l'élimination de K entre cette égalité et la précédente conduit à une proportion, dont voici l'interprétation géométrique : *Le centre de courbure appartient à la droite joignant le point* O *au pied de la tangente sur* D. La dérivation de (2) donne ensuite

$$u + v\frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{2}\mathrm{K}\rho\cos\theta. \tag{3}$$

Maintenant, si l'on tient compte des égalités (2) et (3), la deuxième égalité (1) devient $v^2 = \frac{1}{2}\mathrm{K}a\rho\frac{ds}{d\rho}$, d'où l'on déduit, en y substituant la valeur (2) de v, $\rho = \int \frac{2\mathrm{K}a\, d\theta}{(2 - \mathrm{K}\sin\theta)^2}$. Cette intégrale est facilement calculable. Si l'on en substitue la valeur à la place de ρ dans (2) et (3), on obtient u et v en fonction de θ; puis, enfin, les formules (1) feront connaître x et y.

Rosace.

310. (E. Lemoine.) — *Remarque.* Ce théorème empirique a une certaine analogie avec le théorème suivant de Lagrange (*Œuvres,* t. III, dernière page; 1869), théorème également empirique : Tout nombre premier de la forme $4\mu - 1$ est la somme d'un nombre premier de la forme $4\mu' + 1$ et du double d'un nombre premier aussi de la forme $4\mu' + 1$.

E. Catalan (Liége).

Réponse adressée à l'auteur de la question, à la suite de l'envoi des placards de préparation du journal.

312. (*Rachel Straub.*) — L'équation admet l'intégrale *complète* $z = ax + by + cu + \frac{ab}{c}v + d$.

E. Goursat.

Réponse analogue de M. Saltykof.

QUESTIONS.

490. **[H4j]** Dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 587 (1850), Cauchy a inséré un *Mémoire sur les systèmes d'équations linéaires ou aux dérivées partielles à coefficients périodiques et sur les intégrales élémentaires de ces mêmes équations*, et en a fait une application à la théorie mathématique de la lumière : *Mémoire sur les perturbations produites dans les mouvements vibratoires d'un système de molécules par l'influence d'un autre système* (*C. R.*, t. XXX, 1850).

Je désirerais savoir s'il existe des travaux antérieurs sur le même sujet et quels sont les travaux postérieurs. E. SARRAU.

491. **[V8]** Peut-on savoir en quelle année Bayes écrivit, ou acheva d'écrire, son Mémoire posthume : *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances,* by the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S., communicated by Mr. Price in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S. (*Philosophical Transactions,* vol. LIII for the year 1763), publié en 1764?

L. CERTO (Palerme).

492. **[R8f]** Dans le *Journal de Liouville,* t. XVII, M. J. Bertrand a inséré un *Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique*. La même question a été traitée par M. Rouché et aussi par M. Korkine.

Je voudrais savoir si d'autres mathématiciens se sont occupés de questions analogues sur les intégrales des équations différentielles. *Enesca.*

493. **[Q4a]** Étant donné un fil dont les entrelacements sont connus, déterminer à l'avance le nombre des nœuds qui se formeront quand on tirera sur les bouts du fil. (Extrait de ma correspondance avec Lucas.) H. DELANNOY.

494 [Q4b] *Le jeu de la Tchouka.* — Il se compose de $2n$ cases, contenant chacune n boules, et de la Rouma

o o o ... o o ◯.
Rouma.

On prend les billes d'une case et on les distribue une par une dans les cases suivantes à droite, y compris la Rouma, et en reprenant vers la gauche s'il en reste.

1° Si la dernière boule tombe dans la Rouma, on recommence l'opération où l'on veut.

2° Si la dernière boule tombe sur une case pleine, on prend toutes les boules de cette case et on les distribue comme ci-dessus.

3° Si la dernière boule tombe sur une case vide, la partie est perdue.

Il s'agit de placer toutes les billes dans la Rouma. Les billes de la Rouma ne sortent pas.

Combien y a-t-il de solutions pour les valeurs successives de n?

Pour $n = 2$ il n'y a qu'une solution, obtenue en jouant les coups dans l'ordre indiqué ci-après :

2	2	2	2	◯
2	2	0	3	1
3	3	0	0	2
3	0	1	1	3
3	0	0	2	3
4	0	0	0	4
0	1	1	1	5
0	1	1	0	6
0	0	2	0	6
0	0	0	1	7
0	0	0	0	8

Je crois que, pour $n = 3$, il n'y a pas de solution.

Le premier coup est forcé et commence à la $(n+1)^{\text{ième}}$ case ; sinon au bout de 2 coups on aboutit à une case vide.

Il y a divers cas d'impossibilité.

1° Quand le nombre des pions de la case d'arrivée est zéro (règle du jeu).

2° Quand le nombre des pions de la case d'arrivée est $2n$ (excepté pour la Rouma).

3° Quand la somme des pions de la case de départ et de la case d'arrivée (autre que la Rouma) $= 2n$.

4° Quand le nombre des pions de la case de départ $= 2n + 1$.

Voilà tout ce que j'ai trouvé.

Ces cas d'impossibilité limitent les recherches qui ne laissent pas d'être excessivement longues, même pour $n = 4$. (Extrait de ma correspondance avec Lucas.) H. Delannoy.

495. **[Q4c]** Lucas dit dans sa *Théorie des nombres* (p. 93) : « Les problèmes suivants : Décomposition d'un polygone en triangles, les files de soldats, etc. reviennent l'un à l'autre. » Montrer *directement* la relation ou plutôt l'identité qui existe entre ces diverses questions. H. Delannoy.

496. **[Q4b]** On place 2 jetons sur 2 cases de l'échiquier de 36 cases ; en placer 4 autres de telle sorte que le nombre des jetons contenus sur chaque ligne, colonne ou diagonale, soit un nombre pair. Combien de solutions? (Extrait de ma correspondance avec Lucas.)

J'ai trouvé 544 solutions. Mais ma méthode nécessitant d'assez longs calculs, je ne suis pas très sûr du résultat. H. Delannoy.

497. **[$L^1 5$]** On considère deux ellipses concentriques et homothétiques. Toute tangente à l'ellipse intérieure rencontre l'ellipse extérieure en deux points A et B.

On trouve facilement que si, du point P de rencontre des normales en A et B, on abaisse les deux autres normales PC et PD, la droite CD *enveloppe une développée d'ellipse*. Il serait intéressant de compléter cette question en cherchant l'enveloppe des 4 autres droites joignant les points A, B, C, D, c'est-à-dire des droites AC, BD, AD, BC. Je me suis heurté à des calculs inextricables. E. N. Barisien.

498. **[$L^1 15f$]** Je crois savoir que les questions suivantes ont été traitées. Un correspondant peut-il me dire à quel endroit?

1° Déterminer les triangles équilatéraux maxima et les triangles équilatéraux minima circonscrits à une conique.

2° Trouver le lieu des centres de gravité des triangles équilatéraux circonscrits à une conique. *Nester.*

499. **[$L^1 14a$]** Parmi les ellipses circonscrites à un quadrilatère (ellipses dont les demi-axes sont désignés par a et b)

quelles sont celles pour lesquelles les expressions $a+b$, $a-b$, a^2+b^2, a^2-b^2, ab, $\frac{a}{b}$ sont maxima ou minima? *Nester.*

500. **[L[1]14a]** Parmi les ellipses inscrites à un quadrilatère (ellipses dont les demi-axes sont désignés par a et b) quelles sont celles pour lesquelles les expressions $a+b$, $a-b$, a^2+b^2, a^2-b^2, ab, $\frac{a}{b}$ sont maxima ou minima? *Nester* (1)

501. **[L[1]15f]** Si par un point fixe O du plan d'une conique, on mène une sécante quelconque qui rencontre la conique en A et B, et si sur AB comme diamètre on décrit un cercle, ce cercle rencontre la conique en deux autres points C et D. On trouve facilement que le lieu du point de rencontre des cordes AB et CD est une hyperbole équilatère. Le lieu du point de rencontre des autres cordes communes à la conique et au cercle (BC et AD, AC et BD) n'est pas, me semble-t-il, aussi commode à trouver. Un correspondant pourrait-il me donner l'équation de ce dernier lieu?

J'aurais aussi besoin d'avoir l'équation du lieu des pôles des cordes d'intersection du cercle et de la conique : 1° par rapport à la conique; 2° par rapport au cercle. *Onponale.*

502. **[O2n]** J'ai démontré, dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1892), que si un réseau de courbes planes était la projection des lignes asymptotiques d'une surface, ce réseau avait ses invariants égaux. Si l'on suppose que l'une des familles du réseau soit composée de lignes droites, on arrive aisément à déterminer, sans quadratures, les lignes de l'autre famille et l'on retrouve ainsi des formules que j'avais obtenues en 1888, sur les surfaces réglées rapportées à leurs lignes asymptotiques. Mais il ne me semble pas que ce cas soit le seul qui puisse amener à un résultat explicite, et je crois qu'il y aurait profit à étudier, du moins dans certains cas particuliers, la question suivante :

Une famille de courbes planes étant tracée dans un plan,

(1) J'ai été amené à ces deux dernières questions en cherchant à trouver, parmi les ellipses circonscrites à un quadrilatère et parmi les ellipses inscrites à un quadrilatère, celles qui se rapprochent le plus du cercle, question intéressante, mais que je n'ai pas résolue.

trouver une autre famille formant, avec la première, un réseau à invariants égaux. G. Koenigs.

503. **[R4bα]** Où trouve-t-on les travaux faits sur les questions suivantes : Distribution des tensions dans une étoffe flexible, affectant la forme d'une surface donnée et soumise en chaque point à une pression normale uniformément répartie? Conditions de l'équilibre stable? Influence des courbures opposées? Existe-t-il des formules assez simples?

De la Campa (Ceuta).

504. **[V7]** Dans les *N. A.* (1859, Bibl., p. 96) Terquem demandait des renseignements biographiques sur le géomètre hollandais Abraham Cufueler, auteur du *Specimen artis ratiocinandi,* in-12, Hamburgi; 1684. Je pose aujourd'hui la même question en m'adressant aux lecteurs de l'*Intermédiaire.*

H. Brocard.

505. **[K14b]** Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les nombres $f_3, f_4, f_5, \ldots, f_{n-1}$ puissent représenter respectivement les nombres des faces triangulaires, quadrilatérales, pentagonales, ..., polygonales de $n-1$ côtés, d'un polyèdre convexe ayant n faces?

C. Flye Sainte-Marie.

506. **[K14b]** Si l'on regarde comme appartenant à un même type tous les polyèdres convexes dans lesquels les faces, considérées au seul point de vue du nombre de leurs côtés, présentent la même disposition, combien existe-t-il de types différents pour les polyèdres de n faces?

C. Flye Sainte-Marie.

507. **[K14b]** Parmi tous les polyèdres de n faces ayant même volume, quel est celui dont l'aire est la plus petite?

C. Flye Sainte-Marie.

508. **[V]** Y a-t-il eu en France un Ouvrage portant le titre de *Dictionnaire des Mathématiques* ou de *Dictionnaire mathématique,* avant celui d'Ozanam? Paul Tannery.

RÉPONSES.

37. (Brisse). — *Sixième réponse.* — Soit

$$f(x) = a_0 x^p + \ldots + a_p$$

un polynome entier, à coefficients entiers; on suppose que pour toute valeur entière de x la valeur de $f(x)$ est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un entier. Le nouveau polynome

$$(1) \qquad F(x) = f(x) f(x + b_1) \ldots f(x + b_{n-1}),$$

où $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont des entiers quelconques, jouira de la même propriété. Si l'on ordonne $F(x)$ suivant les puissances décroissantes de x, le premier terme $a_0^n x^{np}$ sera une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite. Si donc on développe $\sqrt{F(x)}$, suivant les puissances décroissantes de x, on aura un développement de la forme

$$(2) \qquad \sqrt{F(x)} = \alpha_0 x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots + \alpha_p + p\left(\frac{1}{x}\right),$$

où les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres rationnels et $p\left(\frac{1}{x}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x}$, sans terme connu. Ce développement est valable pour toutes les valeurs de x dont le module dépasse une certaine limite. Réduisons les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ au même dénominateur D et multiplions les deux membres de l'équation (2) par D. Il viendra

$$(3) \qquad D\sqrt[n]{F(x)} - \varphi(x) = Dp\left(\frac{1}{x}\right),$$

où maintenant $\varphi(x)$ est un polynome à coefficients entiers. Le premier membre de l'égalité (3) sera donc un nombre entier pour toute valeur entière attribuée à x. Or, si l'on se donne un nombre $\delta < 1$, on pourra déterminer une quantité N telle que $D\left|p\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ soit $< \delta$ pour toutes les valeurs de $x > N$. On aura donc $D\sqrt[n]{F(x)} - \varphi(x) = Dp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ pour toutes les valeurs entières de x supérieures à N. Si l'on fait, pour un instant, $\frac{1}{x} = Z$, on voit que l'équation $p(Z) = 0$ aura une infinité de racines dans tout l'entourage de l'origine. Il en résulte que les coefficients de la série $p(z)$ sont tous nuls et que l'on a identiquement $D\sqrt[n]{F(x)} = \varphi(x)$, c'est-à-dire

$$F(x) = \frac{\varphi^n(x)}{D^n}.$$

Le polynome $F(x)$ est donc la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un polynome à coefficients rationnels et, par suite, puisque ses coefficients sont entiers, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un polynome à coefficients entiers (Gauss, *Disq. arith.*, art. 42).

Soit $F(x) = \psi^n(x)$. Dans l'équation (1)

$$F(x) = \psi^n(x) = f(x)\,f(x+b_1), \ldots, f(x+b_{n-1}),$$

on peut toujours choisir les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, de telle sorte que les polynomes $f(x), f(x+b_1), \ldots, f(x+b_{n-1})$ soient premiers deux à deux, d'où l'on conclut facilement que chacun d'eux est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un polynome à coefficients entiers, ce qu'il faut démontrer.

Remarque I. — Il suffit de supposer que la valeur de $f(x)$ est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un entier pour toutes les valeurs entières de x qui dépassent une certaine limite, aussi grande d'ailleurs qu'on voudra.

Remarque II. — Notre méthode s'applique aussi à la démonstration du théorème suivant : Si pour toute valeur entière de x le polynome $f(x) = a_0x^p + \ldots + a_p$, où les coefficients $a_0, \ldots, a_p$ sont des fonctions entières, à coefficients entiers, d'un nombre quelconque d'indéterminées $t_1, \ldots, t_m$, est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une fonction entière, à coefficients entiers, de ces indéterminées, ce polynome $f(x)$ est nécessairement la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un autre polynome $\varphi(x)$, de même nature que $f(x)$. On en déduit ensuite que, si la fonction entière à plusieurs variables $F(x_1, \ldots, x_m) = \Sigma C x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_m^{\alpha_m}$, où les C sont des entiers, est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un entier pour tous les systèmes de valeurs entières attribuées aux variables; que cette fonction F est nécessairement de la forme $[\varphi(x_1, \ldots, x_m)]^n$, où φ est de même nature que F. J. Franel (Zurich).

82. (M. Cantor.) — Le théorème connu actuellement sous le nom de *théorème de Rolle*, est une généralisation de celui qui se trouve énoncé pour la première fois dans le *Traité d'Algèbre ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique*, par M. Rollé, de l'Académie royale des Sciences et professeur en mathématique [Paris, 1690 (1), in-4], p. 128, sous la forme suivante : « Lorsqu'il y a des racines effectives dans une cascade, les hypothèses de cette cascade donnent alternativement l'une + l'autre —. » Ces termes ont besoin d'un peu d'explication.

Rolle appelle *racines effectives* d'une équation ses racines positives. Il nomme *cascade* une équation $\varphi(x) = 0$ dans laquelle $\varphi(x)$ est un polynome entier, et il donne le même nom aux équations $\varphi'(x) = 0$, $\varphi''(x) = 0$. .... Les *hypothèses* d'une cascade $\varphi^i(x) = 0$ sont, pour lui, les racines de l'équation $\varphi^{i+1}(x) = 0$ et en même temps une limite supérieure des racines de $\varphi^i(x) = 0$. Avec ces renseignements, je pense qu'il sera facile de comprendre le passage suivant de son Algèbre, dans lequel il expose la *première règle des cascades* (p. 125). J'ai respecté l'orthographe et les notations. « On multipliera tous les termes de l'égalité chacun par son propre exposant, on divisera la somme de tous les produits par l'inconnuë, et l'on supposera que le quotient est égal à θ. » (Rolle explique plus haut, p. 11, ce que signifie θ : « On observera que, pour marquer le *rien*, on mettra quelquefois θ, c'est-à-dire que le signe θ signifiera la privation absolue de toute quantité, soit affirmative, soit négative. »)

(1) L'adresse de l'éditeur est donnée textuellement ainsi : Chez Estienne Michallet, premier imprimeur du roy, rüe Saint-Jacques, à l'image Saint-Paul, près la Fontaine Saint-Séverin. M.DC.LXC (in-4°, 270 pages). Cette signification insolite des chiffres romains veut dire 1690, ainsi que le prouve la lecture du texte.

» On multipliera tous les termes de cette nouvelle égalité chacun par son propre exposant, on divisera la somme de tous les produits par l'inconnuë, et l'on supposera que le quotient est égal à θ.

» On fera la mesme chose sur cette dernière égalité et sur chaque égalité formée par les quotiens à mesure que la règle les fera naistre, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à une égalité du premier degré, en observant de diviser le premier quotient par l'inconnuë seulement, le second quotient par le double de l'inconnuë, le troisième quotient par le triple de l'inconnuë, et ainsi de suite. Chacune de ces égalitez s'appellera *cascade :* ainsi, quand on parlera des cascades dans la suite, il faudra entendre non seulement une suite d'égalitez; mais il faudra encore se souvenir que ces égalitez ont pu estre fournies par la règle que l'on explique icy ou par une règle équivalente. La cascade du premier degré s'appellera la *première cascade,* celle du second degré sera nommée *seconde cascade,* et ainsi de suite. Si l'on prend, par exemple, l'égalité (Rolle emploie le signe ∞ pour le signe $=$ et désigne la seconde puissance de v, par exemple, par vv au lieu de v^2 : je trouve cela assez bizarre, car il désigne v^3, v^4, ... comme nous)

$$v^4 - 24v^3 + 198\,vv - 648\,v + 473 \infty \theta,$$

on multipliera chaque terme par son exposant, scavoir v^4 par 4, $-24v^3$ par 3, $198vv$ par 2, $-648v$ par 1, $+473$ par θ; et la somme de tous ces produits donnera

$$4v^4 - 72v^3 + 396\,vv - 648\,v;$$

l'on divisera cette somme par l'inconnuë v et, supposant que le quotient est égal à θ, l'on trouvera cette cascade

$$4v^3 - 72\,vv + 395\,v - 648 \infty \theta.$$

Pour en trouver une autre, l'on multipliera chaque terme par son propre exposant, c'est-à-dire $4v^3$ par 3, $-72vv$ par 2, $+396v$ par 1, -648 par θ, et divisant la somme de tous ces quotients par $2v$, l'on trouvera $6vv - 72v + 198 \infty \theta$. Enfin, si l'on multiplie tous les termes de cette cascade chacun par son exposant et si l'on divise la somme de tous les produits par $3v$, l'on trouvera cette dernière cascade $4v - 24 \infty \theta$.

» Et l'on pourra disposer toutes ces cascades en cette manière :

» Première cascade... $4v - 24 \infty 0$
» Seconde cascade ... $6vv - 72v + 198 \infty 0$
» Troisième cascade... $4v^3 - 72vv + 396v - 648v \infty 0$
» Quatrième cascade.. $v^4 - 24v^3 + 198vv - 648v + 473 \infty 0$ »

Cette citation donne une idée de ce qu'est la méthode des cascades de Rolle; pour en compléter l'étude il suffira de se reporter à l'Ouvrage lui-même qui, quoique un peu difficile à lire (vu les notations et les expressions employées qui peuvent dérouter à première vue), mérite certainement d'être consulté encore aujourd'hui.

Si M. Cantor veut bien le feuilleter, je lui souhaite de trouver à sa lecture autant de plaisir que j'en ai éprouvé moi-même, car là où je ne croyais trouver que l'Algèbre à l'état d'ébauche, je rencontrai une Science déjà toute formée.

JACQUES BOYER. S. RINDI (Lucques). *Setnof.*

Note. — Extraits d'une Lettre adressée aux Rédacteurs :

..... Il n'y a pas à s'étonner que Rolle ait écrit vv à côté de v^3, v^4, ... Rolle n'a fait que suivre Descartes dans cette habitude; mais qui plus est : Gauss faisait de même au milieu de notre siècle. Gauss trouvait que des exposants entiers et positifs n'étaient qu'une abréviation, et que les abréviations n'avaient leur raison d'être que quand elles abrégeaient effectivement; or vv n'est pas plus long que v^2... (voir les *Vorles. über Gesch. d. Mathematik,* par M. Cantor, t. II, p. 723).

97. (*Alauda.*) Cette question peut être résolue comme il suit : Soit V le volume du tétraèdre donné OABC et $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = a'$, $CA = b'$, $AB = c'$. On sait que

$$(1) \qquad 288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) \qquad 6\,V = aa'\,D \sin\alpha,$$

et, d'après un théorème de Chasles, D étant la plus courte distance entre les arêtes a et a' et α l'angle de ces arêtes. Si donc nous arrivons à exprimer $\sin\alpha$ en fonction des six quantités $a, \ldots,$

c', nous aurons tout ce qui est nécessaire. Nous prendrons à cet effet respectivement les arêtes OA, OB, OC, pour axes OX, OY, OZ d'un système cartésien et nous rappellerons que l'angle de deux droites r, r' ayant pour coordonnées homogènes [1] $(l, m, n, \mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N})$ et $(l', \ldots)$ est déterminé par l'équation (*voir* d'Ovidio, *Teoria analitica delle forme geometriche fondamentali*, Turin, p. 174; 1884)

$$\cos^2 rr' = \frac{[ll' + \ldots + (mn' + m'n)\cos \mathrm{YOZ} + \ldots]^2}{(l^2 + \ldots + 2mn\cos \mathrm{YOZ} + \ldots)(l'^2 + \ldots + 2m'n'\cos \mathrm{YOZ} + \ldots)}.$$

Si l'on fait

$$\cos \mathrm{YOZ} = \frac{-a'^2 + b^2 + c^2}{2bc}, \qquad l = a, \qquad l' = 0; \qquad \cos \mathrm{ZOZ} = \ldots,$$

on en tire $\cos\alpha$, d'où $\sin^2\alpha$, et l'équation (2) donne alors

$$\mathrm{D}^2 = \frac{144\,\mathrm{V}^2}{(2aa' + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2)(2aa' - b^2 - b'^2 + c^2 + c'^2)},$$

ce qui, à cause de l'équation (1), résout complètement la question.
J. Cardinaal (Delft), Gino Loria (Gênes).

Pour répondre à la deuxième partie de la question 97, désignons $\mathrm{A}'_1\mathrm{C}$, $\mathrm{A}'_1\mathrm{B}$, $\mathrm{A}_1\mathrm{O}$, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}$ respectivement par $\lambda a'$, $\lambda' a'$, μa, $\mu' a$; A'_1 et A_1 étant les pieds de la plus courte distance entre BC et OA respectivement sur BC et sur OA, on a

$$(1) \qquad \lambda + \lambda' = 1; \qquad\qquad (2) \qquad \mu + \mu' = 1.$$

Le théorème de Stewart appliqué aux quatre triangles CAB, AOB, COB, COA donne AA'_1, BA_1, OA'_1, CA_1 respectivement par

$$\overline{\mathrm{AA}'_1}^2 = b'^2\lambda' + c'^2\lambda - a'^2\lambda\lambda'; \qquad \overline{\mathrm{BA}_1}^2 = \ldots.$$

Pour exprimer que $\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1$ est perpendiculaire à OA et BC, j'écris

$$\overline{\mathrm{AA}'_1}^2 - \overline{\mathrm{OA}'_1}^2 = \overline{\mathrm{AA}_1}^2 - \overline{\mathrm{OA}_1}^2,$$
$$\overline{\mathrm{CA}_1}^2 - \overline{\mathrm{BA}_1}^2 = \overline{\mathrm{CA}'_1}^2 - \overline{\mathrm{BA}'_1}^2.$$

Par ces équations, combinées aux équations (1), (2), on a,

[1] On sait que les coordonnées homogènes de la droite qui joint les points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont définies par les équations suivantes

$$\frac{x_1 - x_2}{l} = \frac{y_1 - y_2}{m} = \frac{z_1 - z_2}{n} = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{\mathrm{L}} = \frac{z_1 x_2 - z_2 x_1}{\mathrm{M}} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\mathrm{N}}.$$

tous calculs faits, en posant, pour abréger l'écriture,

$$k^2 = c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2,$$

$$\lambda = \frac{2a^2(b'^2 + a'^2 - c'^2) + (a^2 + b'^2 - c'^2)k^2}{4a^2a'^2 - k^4},$$

$$\lambda' = \frac{2a^2(a'^2 + c'^2 - b'^2) - (c'^2 + b'^2 - a'^2)k^2}{4a^2a'^2 - k^4},$$

$$\mu = \frac{2a'^2(a^2 + c^2 - b'^2) + (b'^2 + a'^2 - c'^2)k^2}{4a^2a'^2 - k^4},$$

$$\mu' = \frac{2a'^2(a^2 + b'^2 - c^2) - (c^2 + b'^2 - a^2)k^2}{4a^2a'^2 - k^4},$$

ce qui résout immédiatement la deuxième partie de la question posée.

Le théorème de Stewart appliqué au triangle CA_1B donne

$$\overline{A_1C}^2.A'_1B + \overline{A_1B}^2.A'_1C = BC(\overline{A_1A'_1}^2 + BA'_1.CA'_1),$$

d'où

$$\mu(c^2 + b^2) + \mu'(c'^2 + b'^2) - a^2\mu\mu' - a'^2\lambda\lambda' = \overline{A_1A'_1}^2.$$

Cette expression fournit donc aussi le moyen de calculer $A_1A'_1$, c'est-à-dire de répondre à la première partie de la question, d'une façon très élémentaire, mais le calcul paraît devoir être assez long.

E. Lemoine.

Soit le tétraèdre SABC dans lequel $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $SA = a'$, $SB = b'$, $SC = c'$. Considérons le prisme SDECBA ayant pour base ABC et SA pour l'une des arêtes latérales, BD, CE pour les deux autres. La hauteur SH de la section droite SMN de ce prisme est égale à la plus courte distance des arêtes a et a' (M est sur CE, N sur BD). Menons HK parallèle à SA et par son intersection K avec BC menons KK' parallèle à SH, K' étant sur AS; KK' est la perpendiculaire commune aux arêtes a et a', et le point K partage a dans le même rapport que le point H partage MN.

Désignons par α, β, γ les côtés MN, SM, SN du triangle SMN et par l_1 la diagonale BE du parallélogramme BCED.

Voici l'indication et les résultats des calculs :

$$\frac{MH}{NH} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2};\ \alpha^2 = \frac{4a^2a'^2 - (b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2)^2}{4a'^2},\ \beta^2 = \ldots,\ \gamma^2 = .$$

$$\text{Donc}\quad \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{NH}} = \frac{2a'^2(a^2+b^2-c^2)+(b^2+a'^2-c'^2)(c^2+c'^2-b^2-b'^2)}{2a'^2(a^2+c^2-b^2)-(c^2+a'^2-b'^2)(c^2+c'^2-b^2-b'^2)}.$$

D'ailleurs $\mathrm{SH}^2 = \dfrac{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}$, d'où

$$h^2 = \frac{\left\{\begin{array}{l} a^2a'^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)+b^2b'^2(c^2+c'^2+a^2+a'^2-b^2-b'^2) \\ \quad +c^2c'^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2)-a^2b^2c^2-a^2b'^2c'^2-b^2a'^2c'^2-c^2a'^2b'^2 \end{array}\right\}}{(2aa'+b^2+b'^2-c^2-c'^2)(2aa'-b^2-b'^2+c^2+c'^2)}.$$

SH pourrait aussi se déduire de la formule $\mathrm{SH} = \dfrac{6\,\mathrm{V}}{\alpha\alpha'}$, où V est le volume du tétraèdre. E. FAUQUEMBERGUE.

En désignant par M l'aire du parallélogramme dont les sommets se trouvent aux milieux des arêtes b, b', c, c', et par d la plus courte distance entre les arêtes a et a', on obtient pour le volume du tétraèdre $\mathrm{V} = \frac{2}{3}d\mathrm{M}$; M étant le double d'un triangle dont les côtés sont $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a'$ et la médiane μ, c'est-à-dire la droite qui joint les milieux de b et b'; on pourra déterminer son aire en fonction des arêtes.

En observant que l'aire d'un triangle ayant les côtés p, q, r est exprimée par $\frac{1}{4}\sqrt{2p^2q^2+2q^2r^2+2r^2p^2-p^4-q^4-r^4}$ et que la médiane μ vérifie l'équation

$$4\mu^2 = a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2,$$

on arrive à $64\mathrm{M}^2 = 4a^2a'^2-(b^2+b'^2-c^2-c'^2)^2 = \rho^2$. On trouve donc $d^2 = \dfrac{\Delta}{2\rho^2}$. On a donc l'expression cherchée (la valeur de $\Delta = 288\,\mathrm{V}^2$ se trouve dans la solution précédente). (Comp. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, 3e édition, p. 76.) JAN DE VRIES (Delft).

M. J. DÉPREZ (Tournai) nous a aussi envoyé une solution complète, analogue aux précédentes.

129. (*Alauda*). — Dans l'énoncé de cette question il y a une confusion qui vient de ce que l'on ne tient pas compte des signes des bissectrices, lesquelles doivent être regardées comme étant de mêmes signes si elles sont toutes deux dans l'angle A ou toutes deux dans l'angle supplémentaire, et de signes contraires si elles sont l'une dans l'angle A et l'autre dans l'angle supplémentaire. Dans ces conditions, si les deux bissectrices extérieures sont égales et de mêmes signes, le triangle est *toujours* isoscèle.

Ce qui a pu amener à cette forme de l'énoncé, c'est la démonstration algébrique, dans laquelle on égale les expressions des deux bissectrices après les avoir élevées au carré; leur signe disparaît donc. Après avoir supprimé la solution $b=c$, on trouve que l'égalité peut encore être satisfaite par une certaine valeur positive de a comprise entre $b+c$ et $b-c$: cette racine étant aussi comprise entre b et c donne des valeurs de signes contraires pour les deux bissectrices extérieures. Nous n'entrerons pas dans le détail qui serait nécessaire pour légitimer notre observation, parce que nous croyons qu'il suffit d'attirer l'attention sur ce point pour que l'on puisse reconnaître sa justesse. H. DELLAC.

L'observation de M. Dellac est fort juste; l'énoncé **129**, dont je voudrais avoir une démonstration *géométrique*, doit donc être ainsi modifié : Démontrer que si l'on a $4Rr_a = a^2 + bc$ la somme de la bissectrice extérieure de l'angle B et de la bissectrice extérieure de l'angle C est égale à zéro. *Alauda.*

138. (E. LEMOINE). — Voici une autre décomposition du nombre 54

$$2+4+2^2+3^2+2^3+3^3.$$

Cette décomposition répond (en remplaçant $2+4$ par $1+2+3$) au *problème arithmétique de l'âme*. Selon Platon, l'âme a été constituée de la manière suivante : « Le Dieu sépara d'abord du Tout une partie; puis une autre, double de la première; puis une troisième, valant une fois et demie la seconde ou trois fois la première; une quatrième, double de la seconde; une cinquième, triple de la troisième; une sixième, valant huit fois la première; une septième, valant la première vingt-sept fois. » (Le *Timée* de Platon.) E. FAUQUEMBERGUE.

Remarque. — Le nombre 108 est égal à $3^3+3.3^3$ et 3 était un nombre sacré. H. DELANNOY.

Dans le *Timée* (35bc), Platon, pour exposer la constitution harmonique de l'âme, part explicitement de la série des nombres suivants

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 9,\quad 8,\quad 27 \qquad \text{ou} \qquad 1,\quad \begin{Bmatrix}2\\3\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}2^2\\3^2\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}2^3\\3^3\end{Bmatrix}.$$

On y reconnaît facilement : l'unité; les deux premiers nombres *plains* 2 et 3 (1 ne comptant pas comme nombre); les deux carrés (*quadrangulaires*) et les deux *cubes* des mêmes nombres 2 et 3. La somme de la série fait 54, qui est bien la moitié du nombre 108, formellement indiqué par Rabelais dans le texte cité. Cette partie du *Timée* a été désignée de très bonne heure sous le terme de *psychogonie de Platon;* Plutarque, par exemple, a écrit un traité spécial, que nous avons, *Sur la psychogonie dans le Timée* (Περὶ τῆς ἐν Τιμαίῳ ψυχογονίας), et les questions arithmétiques qui se rapportent à ce sujet n'ont jamais soulevé de difficultés sérieuses. C'est, sans doute, par une simple fantaisie que Rabelais a rattaché à cette *psychogonie* le nombre 108 double de 54 et construit d'une autre façon. Il faut lire avec les bonnes éditions, non : « pleins », mais : « plains », c'est-à-dire *plans* dans le sens opposé à carré et à cube. Ce sens est exceptionnel chez les géomètres grecs, où nombre *plan* signifie en général nombre « composé de deux facteurs »; mais il n'y a pas néanmoins de doute, parce que la phrase de Rabelais est tirée de Plutarque : *De animæ procreatione in Timæo,* Chap. XI, et que Plutarque dit πρώτους ἐπιπέδους en désignant expressément les nombres 2 et 3. PAUL TANNERY.

Extrait d'une lettre adressée à la Rédaction :

« ... Quant au rapport de 54 avec le nombre de Platon, je n'y comprends rien; mais je ne pense pas que Rabelais y ait compris plus que moi. Le tout me fait à peu près le même effet que le *Hexeneinmaleins* dans *Faust.* Gœthe y a donné à ses lecteurs une noix à casser qui était trop dure pour ses propres dents et il riait sous cape de voir les gens y mordre.... »

155. (GINO LORIA.) — La question 155 est une de celles qui ont été publiées, avant l'apparition de l'*Intermédiaire,* dans les placards que nous avions adressés à divers savants pour indiquer notre but et annoncer le Journal; *c'est pour cela que nous l'avons maintenue,* car son auteur nous avait prévenus dès le mois d'octobre 1893, qu'elle avait été traitée de diverses façons, postérieurement à l'envoi qu'il avait bien voulu nous faire, dans le *P. M.* (sept. et oct. 1893), par MM. MARIANTONI, G. MAROTTA, V. CERUTTI, V. FAZZANI, U. SCARPIS, F. FERRARI et par M. BETTAZZI (Turin), lequel nous a aimablement adressé sa solution. Nous en avons reçu aussi de fort élégantes signées : *Setnof,* L. MEURICE (Liége), MAILLET, H. BROCARD, DE MONTCHEUIL, PAUL TANNERY, J. HURWITZ (Halle a. S.), H. DELANNOY.

M. l'amiral DE JONQUIÈRES nous signale que dans le fascicule du 16 avril 1894 des *Atti dell' Accademia de' nuovi Lincei,* elle est traitée dans toute sa généralité par le professeur PIETRO DE SANCTIS. Il serait évidemment intéressant de reproduire ici toutes les solutions qui nous ont été adressées (dont plusieurs différentes) et qui généralisent la question; la place nous manquant absolument pour cela dans *l'Intermédiaire,* nous nous contenterons de signaler les observations ou propositions qui s'y trouvent, inspirées directement par la question.

LA RÉDACTION.

La proposition est un cas particulier de la suivante :

Étant donnés x nombres consécutifs, on en fait la somme et on la met sous la forme $(\alpha - 1)m - y$, où $y < \alpha - 1$, α étant la base du système de numération; faisant ensuite la somme des chiffres et répétant l'opération sur cette somme s'il y a lieu, etc., on arrivera toujours au chiffre $(\alpha - 1 - y)$.

J. HURWITZ (Halle a. S.).

La proposition représente le sens probable d'un passage quelque peu amphigourique des *Theologumena Arithmetices;* elle se trouve aussi dans le commentaire de Jamblique sur l'Arithmétique de Nicomaque; il est clair, au reste, que la somme de trois nombres consécutifs $3n+1$, $3n+2$, $3n+3$ est $9n+6$, donc, etc.; il est établi d'autre part que les anciens connaissaient le caractère de divisibilité par 9. En général, dans un système de numération dont la base est $ab+1$,

$$\sum_{x=1}^{x=b}(na+x) = nab + \frac{b(b+1)}{2} \equiv \frac{b(b+1)}{2} \pmod{ab}.$$

PAUL TANNERY.

Soit $ab+1$ la base d'un système de numération.

Si l'on prend b nombres consécutifs dont le plus grand soit divisible par a, qu'on en fasse la somme, etc., on arrivera à un nombre divisible par $\frac{b(a-b+1)}{2}$.

Si l'on prend b nombres consécutifs dont le plus petit soit divisible par a, on arrivera à une somme de chiffres divisible par $\frac{b(b-1)}{2}$.

L. MEURICE (Liége).

Jamblichus, qui ne connaissait pas la numération décimale, mais qui s'était fait une idée nette de la composition décimale des nombres, n'avait pas formulé le théorème dans les termes qu'emploie M. Gino Loria. *Voir* sur cette question : Terquem (*Bull. de Bibl. math., N. A.*, 1855, p. 191), et une Note sur Pierre Bungo (*Mém. de l'Ac. des Sc., Inscript. et Belles-Lettres de Toulouse,* 9e série, t. V, 1893, p. 379). *Setnof.*

Si le plus grand chiffre a d'un système de numération se décompose en deux facteurs α, c et si l'on prend α nombres consécutifs quelconques, pourvu que le premier soit toujours congru au même nombre par rapport au module c, en additionnant les chiffres de ces α nombres, ceux du nombre que l'on obtient ainsi, etc., on parviendra toujours à un nombre d'un chiffre qui est toujours le même. R. Bettazzi (Turin).

MM. de Montcheuil et Maillet ont aussi généralisé la question d'une façon analogue aux précédentes.

164. (E. Fauquembergue). — *Deuxième réponse.* — Cette question a été déjà posée par Lionnet dans les *N. A.* sous le nº **1406** (1882, p. 336). Elle n'a pas encore été résolue. J'ai envoyé dernièrement à son sujet une Note assez étendue à la direction des *N. A.* H. Brocard.

173. (Carvallo.) — L'équation considérée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u = 0 \tag{1}$$

peut être ramenée à la forme suivante : (2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - u = 0$ en posant : $r - t = 2x$, $r + t = 2y$.

Le problème consiste maintenant à déterminer une intégrale de l'équation (2) se réduisant à une constante **K** pour $x = 0$ et prenant les valeurs d'une fonction donnée pour $x + y = 0$.

Posons $\lambda(x, y) = 1 + \dfrac{x}{1}\dfrac{y}{1} + \dfrac{x^2}{1.2}\dfrac{y^2}{1.2} + \ldots$

Dans le voisinage du point analytique ($x = 0$, $y = 0$), l'intégrale cherchée supposée continue sera de la forme suivante :

$$u = \mathrm{K}\,\lambda(x, y) + \int_0^x \varphi(\alpha)\,\lambda(x - \alpha, y)\,d\alpha + \int_0^y \psi(\beta)\,\lambda(x, y - \beta)\,d\beta, \tag{3}$$

$\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ désignant des fonctions arbitraires.

Faisons $x = 0$; on trouve, d'après les conditions initiales :

$$\int_0^{\gamma} \psi(\beta)\, d\beta = 0$$

et, par suite, $\psi(\beta) = 0$. En tenant compte de ce résultat et de la seconde des conditions initiales, il reste à déterminer la fonction $\psi(\alpha)$ pour que l'intégrale $\int_0^{x} \varphi(\alpha)\lambda(x-\alpha, -x)\,d\alpha$ représente une fonction donnée de x s'annulant pour $x = 0$; ce problème peut être résolu par approximations successives, suivant une méthode analogue à celle dont M. Picard a fait usage dans son Mémoire sur les équations aux dérivées partielles du second ordre (*J. M.*, 1890). J'en ai donné une solution dans ma Thèse *Sur les Intégrales des équations linéaires*, etc., actuellement sous presse et qui paraîtra en 1895 dans les *Annales de l'École Normale supérieure*. J. Le Roux.

193. (Cyp. Stephanos). — *Quatrième réponse.* — MM. E.-M. Lémeray et A. de Reffey ont fait sur cette question une étude intéressante, mais trop développée pour trouver place ici; M. Lémeray, en 1894, a fait à ce sujet une communication à la Section de Mathématiques, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences tenu à Caen; nous nous contentons de la signaler. La Rédaction.

224. (E.-N. Barisien). — La solution de la question se trouve dans un Mémoire de Steiner intitulé *Vom Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven.* (*Gess. Werke*, I, p. 99.)

Dans ce Mémoire, Steiner établit (p. 122) la proposition suivante :

Par rapport à une courbe fermée et *partout convexe*, l'aire V de la podaire d'un point quelconque P égale celle de la podaire v du « centre des courbures S », augmentée de l'aire d'un demi-cercle dont le rayon est la distance PS.

(Si l'on applique à tout élément ds d'une courbe une masse proportionnelle à la courbure, le centre de gravité de ces masses s'appellera le *centre des courbures* S.)

Évidemment l'ellipse et sa développée ont le même centre des courbures S, qui n'est autre que leur centre commun; donc il suit de la proposition citée que la différence des aires des deux podaires considérées ne dépend pas du choix du point P.

Il est vrai que Steiner suppose les courbes données *partout convexes;* je crois pourtant que ses raisonnements subsistent pour la développée de l'ellipse, qui n'a pas d'inflexions.

J.-C. Kluyver (Liège).

Lorsqu'un segment de droite se meut dans un plan, il engendre une aire dont l'élément équivaut à celle du parallélogramme construit sur le segment et sur l'élément de la trajectoire de son milieu. Lorsqu'un parallélogramme se meut dans son plan, de manière que la tangente à la trajectoire du centre soit toujours parallèle à deux des côtés, les diagonales engendrent des aires égales. Si d'un point fixe O on abaisse des perpendiculaires OT et ON sur la tangente MT et sur la normale MN en un point M d'une courbe, les diagonales OM et NT engendrent des aires égales, qui sont l'aire de la courbe donnée et l'aire entre les podaires de la courbe et de sa développée, ce qui démontre la proposition et la généralise.

W. Mantel (Delft).

M. A. Hurwitz envoie une élégante solution analytique de la même question en démontrant que le théorème est vrai si, au lieu de l'ellipse, on prend une courbe quelconque fermée et sans points doubles. Il déduit de son analyse des formules simples, d'où peuvent se conclure les résultats que Steiner expose dans le Mémoire déjà cité dans la réponse de M. Kluyver.

M. Eug. Vigneron nous a également envoyé une solution de la question 224; nous ne la reproduirons pas, puisque nous donnons plusieurs démonstrations qui la généralisent.

224 et 225. (E.-N. Barisien.) — La proposition est vraie pour une courbe fermée quelconque.

Prenons pour origine d'un système de coordonnées polaires le point par rapport auquel sont prises les podaires. Représentons par

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{1}$$

l'équation de la tangente à la courbe proposée; p est une certaine fonction de α, et p et α sont les coordonnées polaires du point de la podaire de la courbe. L'aire de cette podaire se trouvera donc exprimée par l'intégrale suivante étendue à tout le contour de la courbe supposée fermée : $A = \frac{1}{2}\int_{(S)} p^2\,d\alpha$.

Désignons par p' la dérivée $\frac{dp}{d\alpha}$; l'équation de la normale à la courbe sera

$$(2) \qquad - x \sin \alpha + y \cos \alpha - p' = 0.$$

On a en effet le point où la droite (1) touche son enveloppe, en prenant la dérivée par rapport à α du premier membre de l'équation (1); on obtient ainsi une droite (2), qui est évidemment rectangulaire avec la première; c'est donc la normale.

L'équation (2) s'écrit

$$x \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + y \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - p' = 0;$$

en sorte que p', $\alpha + \frac{\pi}{2}$ sont les coordonnées polaires du point de la podaire de la développée. L'aire de cette podaire sera donc : $A_1 = \frac{1}{2}\int_{(S)} p'^2\, d\alpha$, l'intégration ayant lieu tout le long de la courbe proposée, comme pour A.

Il vient dès lors $A - A_1 = \frac{1}{2}\int_{(S)} (p^2 - p'^2)\, d\alpha.$

Désignons maintenant par ρ, θ les coordonnées polaires du point de la courbe proposée elle-même. L'aire de cette courbe a pour valeur $C = \frac{1}{2}\int_{(S)} \rho^2 d\theta$, l'intégrale étant encore prise le long de la courbe. Or p et p', étant les distances de l'origine à la tangente et à la normale, se trouvent être les projections du rayon vecteur ρ sur la normale et la tangente, et comme $\theta - \alpha$ est l'angle du rayon vecteur avec la normale, on a

$$\rho \cos(\theta - \alpha) = p; \qquad \rho \sin(\theta - \alpha) = p';$$

d'où $\quad \rho^2 = p^2 + p'^2 \quad$ et $\quad \theta - \alpha = \text{arc tang} \frac{p'}{p}.$

On tire de la dernière équation

$$d\theta - d\alpha = \frac{(pp'' - p'^2)\, d\alpha}{p^2 + p'^2}; \qquad \text{d'où} \qquad d\theta = \frac{p' + pp''}{p^2 + p'^2}\, d\alpha;$$

et par suite, eu égard à l'expression de ρ^2,

$$\rho^2 d\theta = (p^2 + p'^2)\, d\theta = (p^2 + pp'')\, d\alpha.$$

On a ainsi $\qquad C = \frac{1}{2}\int_{(S)} (p^2 + pp'')\, d\alpha.$

Mais d'un autre côté on a, en intégrant par parties,

$$\int pp'' \, d\alpha = pp' - \int p'^2 \, d\alpha;$$

et comme, après un tour effectué sur la courbe, pp' reprend sa valeur, il vient, en intégrant le long de la courbe,

$$\int_{(S)} pp'' \, d\alpha = -\int_{(S)} p'^2 \, d\alpha;$$

donc enfin $C = \frac{1}{2}\int_{(S)} (p^2 - p'^2)\, d\alpha = A - A_1$.

Le théorème est démontré, et la démonstration convient aussi pour la $n^{\text{ième}}$ développée de l'ellipse.

L. Lecornu. G. Kœnigs. J. Neuberg (Liége).

Ce joli théorème est vrai pour un contour convexe fermé quelconque. Comme conséquence, on en déduit la solution immédiate de la question 225.

Soient O le point donné, M et M' deux points consécutifs de la courbe donnée, P et P' les projections de O sur les tangentes en M et M', S et S' les points symétriques de O par rapport à ces tangentes, N et N', enfin, les projections de O sur les normales en M et M'.

On pose $OM = r$, $OP = p$, $ON = n$, et l'on désigne les quatre aires limitées par les lieux géométriques des quatre points M, P, N et S par (M), (P), (N) et (S). Enfin on pose $MOM' = d\theta$, $PMP' = d\varphi$; il suit de là $SMS' = 2\,d\varphi$. On a donc $(M) = \frac{1}{2}\Sigma r^2\, d\theta$, $(P) = \frac{1}{2}\Sigma p^2\, d\varphi$, $(N) = \frac{1}{2}\Sigma n^2\, d\varphi$; d'où, puisque l'on a $r^2 = p^2 + n^2$,

$$\frac{1}{2}\Sigma r^2\, d\varphi = (P) + (N). \tag{1}$$

Mais $(S) = 4(P)$. Donc on a

$$\begin{aligned} 4(P) &= (M) + \Sigma(MSS'M') \\ &= (M) + \Sigma(SMM') + \Sigma(M'SS'), \end{aligned}$$

$$4(P) = 2(M) + \Sigma r^2\, d\varphi. \tag{2}$$

Éliminant $\Sigma r^2\, d\varphi$ entre (1) et (2), on trouve $(P) - (N) = (M)$.

Quand O est en dehors du contour fermé, il faut prendre les parties différentes des aires (P) et (N) avec des signes convenables.

C. Juel (Copenhague). E. Duporcq.

246. (Youssoufian.) — Il existe des Dictionnaires de Mathématiques en assez grand nombre. Voici ceux que je connais. Christian von Wolf pourrait bien, en 1716, avoir publié le premier Ouvrage de ce genre sous le titre de *Mathematisches Lexikon* (2e édition en 1732). Le *Dictionnaire encyclopédique des Mathématiques* rédigé par MM. d'Alembert, l'abbé Bossut, de la Lande, le marquis de Condorcet, etc., en trois gros volumes, est de 1789. Charles Hutton donna ensuite (1795-1796) *A mathematical and philosophical dictionary* (2e édition en 1815). La suite chronologique nous mène au *Mathematisches Wörterbuch* de Georg Simon Klügel (1803-1836). Klügel lui-même ne put achever que les trois premiers Volumes (1803-1808); le quatrième est de Carl Brandau Mollweide (1823); le cinquième (1831) et deux volumes supplémentaires (1833, 1836) de Johann August Grunert. Alexandre-André-Victor-Sarrazin de Montferrier publia en 1834-1840 (2e édition en 1844) un *Dictionnaire des Sciences mathématiques* en trois Volumes. Enfin Ludwig Hoffmann commença d'une manière très malheureuse en 1857 un *Mathematisches Wörterbuch* achevé avec un succès mérité pour les derniers Volumes par L. Natani en 1867. Je suis loin d'affirmer que dans cette citation je n'aie pas omis encore d'autres Dictionnaires de Mathématiques. Un autre correspondant pourra peut-être suppléer à ce qui m'est inconnu pour faire de la réponse à M. Youssoufian une bibliographie des Dictionnaires de Mathématiques aussi complète que possible. M. Cantor (Heidelberg).

A new mathematical and philosophical Dictionary; comprising an explanation of the terms and principles of pure and mixed mathematics, and such branches of natural philosophy as are susceptible of mathematical investigation, by Peter Barlow.

Cet Ouvrage (London, 1814) a 12 planches et des figures dans le texte. J.-S. Mackay (Édimbourg).

Nous avons supprimé de cette réponse, comme nous le faisons toujours quand il y a plusieurs réponses à une même question, diverses parties déjà énoncée dans celle de M. Cantor. La Rédaction.

Le projet, inauguré au Congrès de Halle (1891) d'une sorte de Dictionnaire ou Encyclopédie des Mathématiques, va être réalisé sous peu. A Halle, nous avions chargé M. Félix Müller de se mettre à l'œuvre. Ce savant nous annonçait qu'il avait recueilli depuis vingt-cinq ans des Notices classées pour un Ouvrage de cette nature, et qu'il avait ainsi 5000 articles. Malheureusement, la santé lui a fait défaut, et il n'a pas pu préparer ses matériaux pour l'impression. Aussi, à Vienne, avons-nous prié M. Franz Meyer de se charger de l'exécution du projet. C'est lui qui est l'auteur du Rapport sur la théorie des invariants, dont une traduction française partielle a été publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*. M. Teubner, libraire-éditeur de Leipzig, qui remplit en Allemagne, pour les publications mathématiques, un rôle analogue à celui de MM. Gauthier-Villars et fils en France, avait envoyé un délégué pour assister à nos délibérations. Nous avons résolu de limiter l'étendue du nouveau Dictionnaire mathématique à six Volumes au plus. Les Académies de Vienne, Munich, Göttingue et Leipzig ont promis des subventions, et M. Franz Meyer est actuellement en négociations avec les savants qui pourraient devenir ses collaborateurs.

E. Lampe (Berlin).

258. (Lemoine.) — *Quatrième réponse.* — Appelons a, b, c, d les sommets d'un tétraèdre, aa' une hauteur, α l'orthocentre du triangle b, c, d.

La perpendiculaire à la face b, c, d élevée de α appartient à l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre. Le centre o de cette surface est sur la perpendiculaire élevée du milieu de $\alpha a'$ à la face b, c, d et sur les perpendiculaires analogues relatives aux autres faces.

Si l'hyperboloïde des hauteurs est de révolution, il y a un cercle de gorge; donc les perpendiculaires abaissées de o sur les hauteurs doivent être dans un même plan et égales.

Mais la perpendiculaire abaissée de o sur aa' est parallèle à $\alpha a'$ et égale à la moitié de ce segment. On trouve ainsi que : *si d'un point, on mène des droites égales et parallèles aux segments tels que* $\alpha a'$, *elles doivent être dans un même plan et leurs extrémités doivent être sur une circonférence du cercle.*

En outre : *les hauteurs doivent être également inclinées sur ce plan qui est perpendiculaire à l'axe de révolution de l'hyperboloïde des hauteurs.*

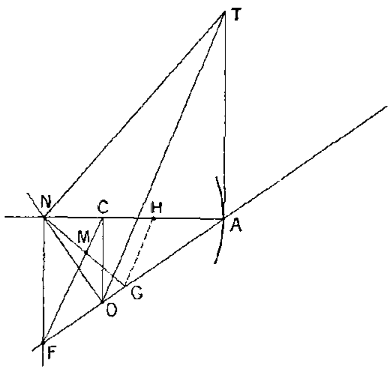
Telles sont les conditions demandées.

A propos de la question 391, j'ajoute que *l'hyperboloïde des hauteurs d'un tétraèdre est équilatère.*

La section de cette surface par le plan *bcd* passant par *b*, *c*, *d*, *α* est une hyperbole équilatère. La section du cône asymptote par un plan mené de *o* parallèlement à la face *bcd* se compose alors de deux droites rectangulaires.

Comme la perpendiculaire abaissée de *o* sur le plan *bcd* est une génératrice du cône asymptote, il existe sur cette surface trois génératrices qui sont les arêtes d'un trièdre trirectangle, donc, etc. MANNHEIM.

295. (HUSQUIN DE RHÉVILLE.) — Soit, en un point A d'une courbe rapportée au pôle O, AN la normale limitée à la perpendiculaire élevée en O au vecteur OA. Élevons en N à AN la perpendiculaire NF qui coupe OA en F. Appelons, en outre, C le centre de courbure répondant au point O, NG la normale, limitée à OA, à la courbe décrite par le point N. Une transformation facile de l'énoncé du théorème I d'une Note que j'ai publiée en 1890 (*J. S.*, p. 32) conduit à celui-ci : *La droite* FC *passe par le milieu* M *de la normale* NG. De là, le moyen de construire le centre de courbure C si l'on connaît la normale NG et réciproquement, car on voit immédiatement que le point G est sur la parallèle à FC menée par le point H tel que NH $=$ 2NC.

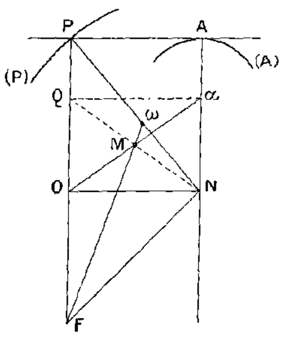


Si, sur le rayon vecteur OA, on prend le point correspondant A′ d'une conchoïde de la courbe (A) pour le pôle O, le point N et, par suite, la normale NG, étant les mêmes pour A et pour A′, on déduit de là le moyen de construire le centre de courbure C′, connaissant le centre de courbure C. La construction ainsi obtenue est précisément celle qu'a donnée M. Husquin de Rhéville. Elle se trouve ainsi établie par une voie purement géométrique. On voit, en outre, que la droite NG, mentionnée par cet auteur comme droite auxiliaire de la construction, a une signification géométrique intéressante; c'est la normale au lieu décrit par le pied commun des normales des diverses conchoïdes. Le théorème II de ma Note déjà citée est le suivant : *La droite qui joint le pôle* O *au point de rencontre* T *de la tangente à la courbe* (A) *et de la tangente à la courbe* (N) *est isogonale de* OC *par rapport à l'angle* NOA.

De là, une seconde construction du centre de courbure C′, connaissant le centre de courbure C, en prenant comme auxiliaire la droite NTT′.

Le théorème, énoncé ci-dessus, qui lie le centre de courbure à la normale à la courbe lieu de l'extrémité de la sous-normale polaire peut recevoir diverses autres applications, notamment aux podaires.

Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée du pôle O sur la tangente en A à la courbe (A). Abaissant du point O la perpendiculaire ON sur la normale AN en A, on a en PN la normale à la podaire.



Il s'agit, du centre de courbure α répondant au point A de la courbe (A), de déduire le centre de courbure ω répondant au point P de la podaire (P).

Le lieu du point N n'est autre que la podaire de la développée de A par rapport au point O. Donc, si la normale αQ à cette développée coupe OP en Q, NQ est la normale au lieu du point N. Par suite, en vertu du théorème précédent, si la perpendiculaire élevée en N à NP coupe OP en F, le centre de courbure ω s'obtient en joignant le point F au milieu M de NQ. Or, la figure ONαQ étant un rectangle, le milieu de NQ est aussi celui de Oα. Donc, *le centre de courbure* ω *de la podaire est sur la droite joignant le point* F *au milieu* M *de* Oα. M. d'Ocagne.

Voir aussi un Article de M. d'Ocagne, *J. S.*, p. 2-7; 1895.

296. (M. de Montcheuil). — M. J. Weingarten a publié, en 1858, les équations suivantes :

$$x = \varphi'(\alpha)\sin\alpha + \varphi''(\alpha)\cos\alpha + \Phi'(\beta)\sin\beta + \Phi''(\beta)\cos\beta,$$
$$y = \varphi'(\alpha)\cos\alpha - \varphi''(\alpha)\sin\alpha + \Phi'(\beta)\cos\beta - \Phi''(\beta)\sin\beta,$$
$$z = i[\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha) - \Phi(\beta) - \Phi''(\beta)].$$

(*Z.*, 3. Jahrgang, Leipzig, p. 44.)

En substituant au lieu de x, y, z, α, $\varphi(\alpha)$, β, $\Phi(\beta)$ respectivement x, $-y$, z, ν, $F(\nu)$, $\pi+\nu_1$, $-F_1(\nu_1)$, on obtient les formules proposées par M. de Montcheuil.

M. E. Beltrami a exposé, en 1868, les mêmes formules dans son célèbre Mémoire : *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima* (*Memorie dell' Accademia delle Scienze del Istituto di Bologna*, série 2, t. VII, p. 447).

Les formules de M. Weingarten se trouvent aussi dans un Mémoire de M. A. Ribaucour, intitulé : *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (*Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers*, t. XLIV, p. 131. Bruxelles, 1882). H.-A. Schwarz (Berlin).

302. (*R.-Ch. Weitz.*) — La première recherche sur la chaînette paraît due à Galilée qui la considéra comme une parabole. Suivant Leibniz, Joachim Jungius montra que cette assimilation n'était pas justifiée, mais il ne put reconnaître la nature de la courbe. C'est Leibniz qui, le premier, en donna l'équation dans les *Acta eruditorum*. Leipzig; 1691. Jacques Bernoulli en fit une étude plus détaillée dans le *Traité du Calcul intégral* composé pour le marquis de L'Hospital. Ces deux documents sont, croyons-nous, les plus anciens qui aient trait à la Géométrie de cette courbe. H. Brocard.

Note. — Sur les propriétés tautochrones et hypertautochrones de la chaînette dans le vide et dans un milieu résistant, *voir* Amodeo (*Monografia delle curve tautocrone*, p. 27, 55, 74. Napoli, B. Pellerano, Avellino, 1883).

Je retrouve dans des Notes de Mécanique inédites les propriétés suivantes de la chaînette, qui ne sont peut-être pas connues :

1° *La chaînette et la sinusoïde sont homographiques.*

2° *Si un angle droit enveloppe une chaînette, le produit* $SA_1.SA_2$ *des longueurs d'arcs comprises entre le sommet de la courbe et les points de contact est constant.*

3° *Si un polygone équiangle enveloppe une chaînette, la somme algébrique des produits* $SA_n.SA_{n+1}$ *des longueurs d'arc comprises entre le sommet de la courbe et deux points de contact consécutifs est constante.*

4° *Si une chaînette roule sur une droite, le centre de courbure du point de contact décrit une parabole.*

5° *Si une chaînette et une parabole ont en* M *un contact du troisième ordre, les longueurs respectives des normales* MN, MN′ *sont dans le rapport de* 2 *à* 1, *et celles des tangentes* MT, MT′ *dans le rapport de* 3 *à* 2, NT, N′T′ *étant les directrices des deux courbes*; ce qui détermine entièrement la parabole osculatrice à une chaînette, ou la chaînette osculatrice à une parabole en un point donné.

Ch. Rabut.

304. (Harold Tarry). — D'après un dénombrement que j'ai fait avec assez de soin pour avoir quelque confiance dans les résultats obtenus, il y aurait 197 299 manières différentes de jouer les quatre premiers coups d'échecs, conformément aux règles du jeu, et 71 870 dispositions différentes des pièces sur l'échiquier, après le quatrième coup joué.

C. Flye Sainte-Marie.

306. (Eug. Catalan.) — La question demande un renseignement sur la date des signes d'égalité dont on a fait usage. Sans parler des signes employés dans l'antiquité, je me tiens à ceux du xvi^e siècle. Le plus ancien est celui dont on se sert actuellement. Robert Recorde (1510–1558), médecin de la Cour royale en Angleterre, a publié en 1556 une Algèbre sous le titre : *The Whetstone of witte.* Il y dit : « And to avoide the tediouse repetition of these wordes *is equalle to* I will sette us I doe often in woorke use a pair of paralleles, or Gemove lines of one length, thus : $=$, because noe 2 thynges can be more equalle. » Guillaume Xylander (1532-1576), professeur de Logique à Heidelberg, dans sa traduction latine de Diophante (imprimée en 1575), a employé le signe || sans l'expliquer. On sait que, dans les manuscrits grecs de Diophante, égal (ἴσοι) est exprimé par un ι; peut-être y en avait-il deux (ιι) dans le manuscrit que Xylander avait sous les yeux. Les deux grands algébristes néerlandais Simon Stevin et Albert Girard n'ont employé aucun signe d'égalité. Thomas Harriot, dans sa *Artisan analyticæ praxis* (imprimée en 1631, dix ans après la mort de l'auteur), et aussi William Oughtred, ne font usage que du signe $=$ de leur compatriote. Descartes, dans sa *Géométrie* (1637), écrit $\propto$, signe provenant des deux lettres *a* et *e* réunies, retournées et tronquées. Ce signe s'est conservé pendant un certain temps en France. Peu à peu il a cédé la place au signe de Recorde. Je cite, seulement comme curiosité, que Pierre Hérigone, dans son *Cours mathématique* (1634), imprime $a\ 2/2\ b$ pour *a est égal à b*, et $a\ 3/2\ b$ pour *a est plus grand que b*. M. CANTOR (Heidelberg).

Il est difficile de se rendre compte exactement du sens que le regretté professeur de Liége voulait donner à ces deux questions. Il n'ignorait certainement pas (*voir* le second volume du *Vorlesungen* de M. Cantor) que le premier emploi du signe $=$ pour l'égalité est dû à l'Anglais Robert Recorde (*The Whetstone of witte,* 1556), et que l'habitude de mettre les équations sous la forme d'un premier membre égalé à 0 date de la *Géométrie* de Descartes. Le signe $=$ a d'ailleurs été employé par les Anglais, Harriot, Wallis, etc., alors que, sur le continent, il avait un autre sens; ainsi, pour Viète, $A = B$ signifie la valeur absolue de $A - B$; dans la correspondance de Descartes, il signifierait $A \pm B$; Viète n'a pas d'ailleurs de signe pour l'égalité, tandis que Descartes emploie le symbole $\propto$, qui s'est perpétué quelque temps après lui; mais, en France, on trouve également le signe || (Clerselier dans la correspondance de Descartes; les originaux portent bien $\propto$). Leibniz enfin, dans ses manuscrits, emploie le signe $\sqcap$.

En résumé, l'adoption générale du signe $=$ pour l'égalité est due à l'exemple donné par les mathématiciens anglais; il peut être curieux de rechercher quel a été en fait le dernier exemple, dans tel ou tel pays, de l'emploi d'un signe différent; mais la question ne présente évidemment qu'un intérêt secondaire.

Quant à l'emploi, dans l'algèbre de Rolle, du signe 0 pour marquer le zéro, je n'y puis voir qu'un essai particulier pour éviter la confusion avec la lettre *o*, qui n'était pas encore bannie du symbolisme algébrique, Viète et ses disciples l'ayant couramment employée avec les autres voyelles, pour désigner les inconnues. C'est d'ailleurs peut-être un motif analogue qui a fait choisir par Descartes, pour cette désignation, les dernières lettres x, y, z de l'alphabet. PAUL TANNERY.

313. (*Clara Ter Busch.*) — J'ai publié dans le *J. M.* de M. Jordan (1887 et 1888) trois Mémoires assez étendus sur les transformations birationnelles de contact (que j'ai appelées « substitutions crémoniennes ») linéaires et quadratiques. La théorie se confond avec celle des transformations ponctuelles dans l'espace ordinaire, qui admettent un certain invariant différentiel. On pourra consulter aussi les six premiers Chapitres de mon Mémoire sur l'équation différentielle du premier ordre inséré au LI^e Cahier du *J. É. P.* LÉON AUTONNE.

314. (P.-F. TEILHET). — Pour $m=3$, ce théorème a été démontré par Euler. Puis Legendre le démontra pour $m=10$, Lamé pour $m=7$, Lejeune-Dirichlet dans le cas de $m=5$, enfin M. Kummer pour tous les exposants pairs et pour un grand nombre d'exposants premiers; mais beaucoup échappent encore à son analyse. Parmi les plus grands mathématiciens qui, depuis deux siècles, ont aussi recherché vainement la solution de ce problème, qui semble jeté comme un perpétuel défi à l'intelligence humaine, nous signalerons encore les essais intéressants de Sophie Germain, d'Abel, de Liouville et de Lebesgue; Gauss lui-même s'en est occupé très longtemps.

(LUCAS, *Théorie des Nombres*, Introduction, p. XXIX.)

H. DELANNOY.

Le dernier théorème de Fermat a été démontré pour $m=3$, $m=4$ (Euler); $m=5$ (Legendre); $m=14$ (Lejeune-Dirichlet); $m=7$ (Lamé), cas qui comprend le précédent. Kummer l'a démontré pour une infinité de nombres premiers et en particulier pour tous ceux qui sont inférieurs à 100.

Voir à propos de ce théorème les intéressantes Notes de

M. de Jonquières (*Atti dell' Accademia pontificia dei Nuovi Lincei*, 1884) et de Catalan (*Mélanges mathématiques*, t. II, p. 387-397). E. FAUQUEMBERGUE.

Voici quelques travaux où ce sujet est traité, et la liste n'est certes pas complète :

Lagrange. Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante. (*Mémoires de Berlin*, 1777, p. 140-154.) — *Euler*. Introduction à l'Algèbre, t. II, § 204 et § 243. — *Legendre*. Théorie des Nombres. Edit. de l'an VI, 4[e] Partie, § 1. — *Ibid*. Second Supplément (1825). — *Lebesgue*. Note sur un théorème de Fermat. (*J. M.*, 1840, p. 164-165.) — *Lamé*. Mémoire d'analyse indéterminée. (*Ibid.*, 1840, p. 195-215.) — *Lebesgue*. Théorèmes nouveaux sur l'équation indéterminée $x^5+y^5=z^5$. (*Ibid.* 1843, p. 49-70.) — *Ibid*. Démonstration de l'impossibilité, etc. (*Ibid.* 1840, p. 276-279.) *Lamé*. Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^5+B^5+C^5=0$. (*Ibid.*, 1847, p. 137-171.) — *Ibid*. Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^n+B^n+C^n=0$. (*Ibid.* 1847, p. 172-184.) — *Kummer*. Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés des racines de l'unité et de nombres entiers. (*Ibid.*, 1851, p. 376-498). Ce même Mémoire est publié dans les tomes XXX, XXXV et XL de *Cr*. — *Pepin*. Sur la décomposition d'un nombre entier dans la somme de deux cubes rationnels. (*J. M.*, 1870, p. 217-236.) — *Abel*. Extrait d'une lettre à Holmboe. (*Œuvres*. Edit. de 1881, t. II, p. 254-255.) — *Lamé*. Etude des binômes cubiques. (*C. R.*, t. LXI, p. 921-924 et 961-965.)

J'ai cité Euler d'après une traduction hollandaise. La plupart des auteurs mentionnés s'occupent du cas où $n=3$ ou 4; l'impossibilité de résoudre l'équation proposée dans ces cas est, je crois, pour la première fois démontrée complètement par Euler. Legendre, dans le deuxième Supplément à la *Théorie des nombres*, la démontre pour $n=7$, et dans le Mémoire de M. Kummer il est donné, à l'aide de la théorie des *nombres idéaux*, une démonstration qui s'applique à tous les exposants au-dessous de 100, à l'exception des nombres 37, 59 et 67. (*Voir* surtout la dernière page du Mémoire.)

W.-H.-L. JANSSEN VAN RAAIJ (Harlem).

Nous donnons ces diverses réponses, tout en remarquant qu'elles ne sont pas *absolument* concordantes.

316. (A. Boutin.) — D'après les formules (5) et (8 *bis*) de mon *Mémoire sur les suites récurrentes* (*J. E. P.*, 64^e Cahier), on a, en posant

$$(1)\quad \sum_{i=0}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{2}\right)} \mathrm{C}_{n-1-i}^{i} p^{n-1-2i} q^{i} = y_n, \qquad \sum_{i=0}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{2}\right)} \mathrm{C}_{n-1-i}^{i} p'^{n-1-2i} q'^{i} = y'_n,$$

les expressions suivantes pour u_n et u'_n

$$(2)\qquad u_n = u_1 y_n + u_0 q\, y_{n-1}, \qquad u'_n = u'_1 y'_n + u'_0 q' y'_{n-1}.$$

Les formules (1) et (2) permettent d'exprimer, en fonction de u_0, u_1, p, q, u'_0, u'_1, p', q', que l'on a $u_n = u'_{n'}$.

Supposons que cette relation soit satisfaite, ainsi que celle qui exprime que $u_{n+k} = u'_{n'+k'}$.

La formule (40) de mon Mémoire montre alors que si l'on a

$$(-q)^k = (-q')^{k'} \qquad \text{et} \qquad y_{k+1} + q\, y_{k-1} = y'_{k'+1} + q' y'_{k'-1}$$

[les y et y' étant remplacés par leurs valeurs tirées de (1)], les termes de la suite (u), pris de k en k à partir de u_n, sont identiques à ceux de la suite (u') pris de k' en h' à partir de $u'_{n'}$.

M. d'Ocagne.

317. (A. Boutin.) — Si les quatre carrés w^2, x^2, y^2, z^2 étaient en progression arithmétique, ils vérifieraient les équations simultanées $2x^2 - y^2 = w^2$, $2y^2 - x^2 = z^2$.

Or, le professeur Mathew Collins, de Dublin, a démontré l'impossibilité, en nombres entiers, de ce genre d'équations dans un opuscule intitulé *A Tract on the possible and impossible cases of quadratic duplicate equalities in the Diophantine Analysis* (Dublin, 1858). *Voir* p. 16, art. 18, cor. 3.

Lebesgue (*N. A.*, 1863) a ramené le problème à la résolution de l'équation $r^2 = m^4 + 14 m^2 n^2 + n^4$, qu'il démontre impossible en nombres entiers.

L'impossibilité de cette dernière équation avait été démontrée aussi par Euler (voir *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, t. II, p. 411).

Genocchi a également rencontré cette équation dans un Mémoire : *Intorno ad alcune egualità duplicate nella dottrina* *dei numeri*, inséré dans le tome IV (1881) des *Memorie della Società italiana delle Scienze* (*detta dei* XL).

E. FAUQUEMBERGUE.

Lebesgue a énoncé et démontré cette proposition (*N. A.*, 1863, p. 74-75). Il ajoute que, dans le tome II, Mém. 77, des *Commentationes Arithmeticæ Collectæ* (Mém. de Pétersbourg), Euler s'appuie sur l'impossibilité *reconnue* de trouver quatre carrés en progression arithmétique, mais il n'indique pas l'ouvrage où se trouve la démonstration. H. BROCARD.

325. (FERBER.) — *Renseignement.* — Cette question, ainsi que la question **326**, est étudiée dans les *Vorlesungen über Dynamik* de Kirchhoff et dans un Mémoire de M. Sautreaux (*A. E. N.*, 1893). MAILLET.

326. (FERBER.) — *Voir* la réponse précédente à la question **325**.

MAILLET.

330. (E. LEMOINE.) — Le problème **32** peut, ainsi que l'a signalé M. Franel (t. I, p. 31), être généralisé en prenant pn hommes, au lieu de p^2, parmi lesquels on fait sortir le premier, le $(p+1)^{\text{ième}}$, etc. (*voir* p. 9). La solution graphique que nous avons indiquée (p. 190) s'applique évidemment à ce cas en considérant un échiquier rectangulaire de n lignes et de p colonnes.

Soit M le numéro d'ordre de la place occupée par le dernier point (399 dans l'exemple cité).

On voit facilement que le numéro de la dernière des n boules enlevées de p en p est $pn+1-\mathrm{M}$. Dans le cas de $n=20$, $p=20$, la boule restante porte donc le numéro 2.

Le procédé que j'ai employé pour résoudre la question **32** (*voir* p. 189) s'applique aussi à la question **330**. Les deux problèmes, d'ailleurs, diffèrent peu.

On trouve un cas particulier de ce problème dans les Recueils de Bachet, d'Henrion, Ozanam. C'est le célèbre *problème de Josèphe* ($n=41$, $p=3$).

Il semble qu'il y ait un grand nombre de problèmes de Géométrie de situation qui pourraient être ramenés à cette intéressante question. ADR. AKAR.

Soit $(p-1)h+k$ (k variant de 0 à $p-2$) un nombre de boules qui, comptées de p en p, laissent comme boule restante celle qui porte le numéro l ($l < p$) :

Avec $(p-1)h+k+1$	boules, il reste la boule	$l+p$
» $(p-1)h+k+2$	»	$l+2p$
....		
» $(p-1)h+k+h$	»	$l-k$, si $k<l$
» $(p-1)h+k+h+1$	»	$(p-1)+l-k$, si $k \geqq$

Cette remarque permet de trouver assez rapidement le numéro de la boule restante.

Soit $n=200$ et $p=5$:

	La boule restante est		La boule restante est
Avec $5=(5-1).1+1$.....	2	Avec $37=(5-1).9+1$.	1
» $6=(5-1).1+2$.....	1	» $47=(5-1).11+3$...	4
» $8=(5-1).2$.........	3	» $58=(5-1).14+2$...	1
» $10=(5-1).2+2$	3	» $73=(5-1).18+1$...	3
» $12=(5-1).3$.........	1	» $91=(5-1).22+3$...	2
» $15=(5-1).3+3$.....	1	» $114=(5-1).28+2$...	3
» $19=(5-1).4+3$.....	2	» $142=(5-1).35+2$...	1
» $24=(5-1).6$.........	3	» $178=(5-1).44+2$...	3
» $30=(5-1).7+2$.....	3		

$$200-178=22,$$
$$22\times 5=110.$$

La boule restante est donc $3+110=113$.

J'ai donné le moyen de trouver le numéro de la boule restante quand $n>p$. Il est encore facile de calculer ce numéro quand $n \leqq p$. Appelons $b_{n,p}$ le numéro de la boule restante pour n boules comptées de p en p, n étant $\leqq p$. Si $p=\mathrm{M}n+k$, on a $b_{n,p}=b_{n-1,p}+k$ si cette somme est $\leqq n$, ou $=b_{n-1,p}+k-n$ si cette somme est $>n$. Comme $b_{2,p}$ est toujours égal à 1 ou à 2 suivant que p est pair ou impair, il est toujours possible de calculer $b_{p,p}$ de proche en proche, sans faire l'opération sur les boules elles-mêmes.

Ainsi, pour $p=10$, on a

$$b_{2,10}=1,\quad b_{3,10}=2,\quad b_{4,10}=4,\quad b_{5,10}=4,\quad b_{6,10}=2,$$
$$b_{7,10}=5,\quad b_{8,10}=7,\quad b_{9,10}=8,\quad b_{10,10}=8.$$

Note. — $b_{p,p}$ est toujours égal à $b_{p-1,p}$.

H. Delannoy.

Si l'on définit une suite de nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par l'équation récurrente $A_r = p + A_{r-1} - r\left(\frac{p + A_{r-1}}{r}\right)'$ avec la condition initiale $A_1 = 1$, où $(x)'$ est égal à $x - 1$ quand x est entier et à $E(x)$ dans les autres cas (*voir* BUSCHE, *Cr.*, t. CIII, p. 118), le nombre cherché sera précisément A_n.

J. FRANEL (Zurich).

M. A. BOUTIN nous a aussi envoyé une solution qui revient à la précédente.

332. (*Clara ter Bush.*) — *Note.* — Il n'est pas toujours commode de deviner l'intérêt que peut avoir telle ou telle question de Mathématiques, surtout si cet intérêt se rapporte aussi à autre chose qu'à la Mathématique. Je fais cette remarque parce que l'auteur de la question **332** paraît, dans l'espèce, douter un peu de cet intérêt et qu'il y a eu dans le Journal, 1894, p. 8, question 30, une question sur le nombre des figures calculées de π.

L'auteur de cette dernière question, qui est aussi un musicien fort distingué, a eu l'idée curieuse que rien ne serait plus facile pour un compositeur que de faire retenir à un musicien un nombre indéfini de figures du nombre π. Il suffirait pour cela de composer un morceau dont les basses chiffrées auraient pour chiffres précisément les chiffres successifs du nombre π; le morceau, plus ou moins long suivant le nombre des chiffres à retenir, chanterait π, et voilà sans doute l'objet de sa question. C'est donc simplement un amusement, une curiosité, mais dont la réalisation n'est pas à la portée de tout le monde; je ne sais s'il a été donné suite à cette originale fantaisie harmonique.

Puisque j'en suis à parler de curiosités sur le nombre π, je rappellerai le quatrain mnémotechnique (en pitoyables vers d'ailleurs)

> $\overset{3}{\text{Que}}$ $\overset{1}{\text{j'}}\overset{4}{\text{aime}}$ $\overset{1}{\text{à}}$ $\overset{5}{\text{faire}}$ $\overset{9}{\text{apprendre}}$ $\overset{2}{\text{un}}$ $\overset{6}{\text{nombre}}$ $\overset{5}{\text{utile}}$ $\overset{3}{\text{aux}}$ $\overset{5}{\text{sages}}$
> $\overset{8}{\text{Immortel}}$ $\overset{9}{\text{Archimède,}}$ $\overset{7}{\text{artiste,}}$ $\overset{9}{\text{ingénieur,}}$
> $\overset{3}{\text{Qui}}$ $\overset{2}{\text{de}}$ $\overset{3}{\text{ton}}$ $\overset{8}{\text{jugement}}$ $\overset{4}{\text{peut}}$ $\overset{6}{\text{priser}}$ $\overset{2}{\text{la}}$ $\overset{6}{\text{valeur?}}$
> $\overset{4}{\text{Pour}}$ $\overset{3}{\text{moi}}$ $\overset{3}{\text{ton}}$ $\overset{8}{\text{problème}}$ $\overset{3}{\text{eut}}$ $\overset{2}{\text{de}}$ $\overset{7}{\text{pareils}}$ $\overset{9}{\text{avantages;}}$

lequel permet de retenir les 32 premiers chiffres de π qui sont successivement le nombre de lettres de chaque mot de ces vers.

E. Lemoine.

333. (H. Lez.) — Dans *An Elementary Treatise on Trilinear coordinates*, de Ferrers, dont j'ai sous les yeux la troisième édition (London; Macmillan and Co; 1876), on trouve la détermination des axes (p. 94), celle des asymptotes (p. 83) et celle des foyers des coniques (p. 177) dans ce système de coordonnées.

M. d'Ocagne.

Renseignements bibliographiques. — Voir *N. A.*, 1863, p. 289-300, l'extrait d'un Mémoire de M. H. Faure sur les coordonnées trilinéaires, dans lequel on indique (p. 293-299) plusieurs formules relatives aux coniques, entre autres les coordonnées du centre, et les équations des asymptotes, des axes principaux et des directrices. Ces mêmes déterminations, en y ajoutant celle des foyers, sont exposées dans le t. I des *Exercices de Géométrie analytique* de J. Kœhler, p. 151-168, 1886, et de nombreuses et importantes applications sont données (p. 187-236). On peut citer, dans le même ordre d'idées, l'Ouvrage de J. Casey, *A Treatise on Conic Sections*, 1885.

H. Brocard.

334. (A. Thorin.) — 1° Le produit des nombres premiers jusqu'à 17, diminué de l'unité, est égal au produit des *deux* nombres premiers 61 et 8369.

2° Les produits des nombres premiers jusqu'à 19 et jusqu'à 23, augmentés de l'unité, sont des produits de deux nombres premiers. Voir E. Gelin, *Traité d'Arithmétique élémentaire*, 2e édition, p. 117, Huy, 1885, et E. Lucas, *Théorie des Nombres*, p. 352; mais on ne connaît pas, il me semble, de moyens pour découvrir de tels nombres, en dehors de la recherche empirique.

On a

$$2.3\ldots17+1=19.97.277,$$

$$2.3\ldots19+1=347.27953, \qquad 2.3\ldots23+1=317.703763.$$

E. Fauquembergue.

335. (Paul Tannery.) — Desboves (*Questions d'Algèbre élémentaire*, 2e édition, p. 328; Paris, 1878) donne le développement complet et ajoute que Descartes (*Œuvres*, édition Cousin, t. XI, p. 146) obtient, pour les coefficients du quatrième, du septième et du quatorzième terme, $+10$, -76, $+416$ au lieu de $+40$, -176 et -416 qu'il faut trouver.

E. Gelin.

La réponse se trouve dans E. Lucas, *Théorie des Nombres*, p. 121-123. A. Akar.

Cette question revient évidemment à celle qui a pour but de rendre rationnelle l'équation

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}=0.$$

Or, d'après Flauti (*Analisi algebrice elementare*, Parte I, 1re éd., Naples, 1819; comp. G. Loria, *Nicole Fergole e la scuola di matematici che lo ebbe aduce*, p. 102; Gênes, 1892, et M. Cayley [*On the rationalisation of certain algebraic equations* (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. VIII, p. 97-101; 1853) ou bien *Mathematical Papers*, t. II, p. 40-44; 1889], ce problème peut se réduire à celui d'éliminer les y entre les équations

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=0,\quad y_1^2=n_1,\quad y_2^2=n_2,\quad \ldots,\quad y_n^2=n_n.$$

Si n est pair, M. Cayley, dans le Mémoire cité, a indiqué un procédé de calcul très élégant pour mettre le résultat de l'élimination sous la forme d'un déterminant; dans ce cas, on peut, par conséquent, considérer comme connue la loi de formation des coefficients du polynome cherché. Je ne sais pas si l'on a généralisé la méthode de M. Cayley, de manière à embrasser le cas de n impair; ce que M. Sylvester a déjà remarqué (*voir* la Note citée de M. Cayley), c'est qu'on peut l'appliquer à la question analogue relative à une somme de radicaux d'un ordre supérieur au second. Gino Loria (Gênes).

336. (L. Meurice.) — Une liste des principaux Ouvrages relatifs à l'emploi de la règle est donnée dans le *J. E.*, 1885, p. 11-18, par M. de Longchamps (*Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre*) et dans le cours du même travail ou dans l'Ouvrage à part, publié en 1890. H. Brocard.

348. (*Milèse*). — Le groupe positiviste orthodoxe de Rio-Janeiro a publié *récemment* une édition française de la *Géométrie* de Descartes, celle qui se termine par ces mots : « J'espère que nos neveux me sauront gré, etc. »

A la suite de cette œuvre géniale, est imprimé, à titre d'appendice, le texte français complet du *Traité élémentaire de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions*, par Auguste Comte; le tout en un Volume.

On trouve l'Ouvrage à Paris, chez Louis Bahl, rue Chauveau-Lagarde, 14. H. Brocard, Léon Philippe, A. Goulard.

On trouve une réponse à la question dans le *Catalogue de la Librairie française Nilsson*, p. 70. J. Perott (U. S. A.).

391. (E. Genty). — *Voir* ci-dessus, p. 112, la réponse de M. Mannheim.

393. (A. Goulard). — Le résultat, toujours exact, que signale M. Goulard, est une conséquence directe du principe qui sert de base à la construction des *échelles génératrices*, dont il est question (1894, p. 163) pour la recherche du minimum, qui ont pour type $[1, 2, a, b, \ldots, m(2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^\alpha, \ldots)]$, et parmi lesquelles la progression géométrique $(1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^\alpha, \ldots)$ est la plus rapidement ascendante de toutes, puisque, dans cette question, aucun terme de la série ascendante ne peut excéder le double du terme qui le précède.

En effet, on connaît, par hypothèse, le minimum absolu $\boxed{m}$ de m et la série $(1, 2, a, b, \ldots, m)$ d'où ce minimum dérive, ou, s'il y en a plusieurs (ce qui a lieu fréquemment), l'une de celles qui y conduisent par le même nombre minimum de degrés. Après qu'on s'est élevé de 1 à m par cette échelle, il ne reste pour atteindre $m2^\alpha$, en partant de m pris pour nouvelle unité, qu'à la prolonger par l'adjonction des termes de la progression

$$m(2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^\alpha)$$

composée de α échelons, qui est, de toutes, celle qui en compte le moins. Donc, pour aller le plus rapidement possible de 1 à $m2^\alpha$, on a $\boxed{m} + \alpha$ échelons à franchir. On aboutit à la même conclusion en montant d'abord de 1 à 2^α par la progression $1, 2, 2^2, \ldots, 2^\alpha$, et en la prolongeant par l'échelle qui fournit le minimum de m, mais en prenant dans celle-ci 2^α pour unité, c'est-à-dire par la série $2^\alpha(2, a, b, \ldots, m)$; ce qui revient à intervertir l'ordre des facteurs m et 2^α.

Cette démonstration n'est autre que celle sur laquelle repose le théorème III (1894, p. 162), relativement à deux facteurs *quelconques* m, n. Seulement, afin d'embrasser tous les cas dans une même formule, il a fallu alors écrire $\boxed{mn} \overline{\overline{<}} \boxed{m} + \boxed{n}$, avec le double signe $\overline{\overline{<}}$, parce qu'il arrive souvent, dans ce cas général où la progression géométrique précitée n'intervient pas direc-

-tement, qu'il se présente, pour aller de 1 à mn, des *raccourcis* qu'un calculateur attentif met à profit. Ces incidents favorables, impossibles à prévoir et capricieux, ne se rencontrent jamais, pour un facteur, quand on peut y faire exclusivement usage de la progression géométrique, de premier terme 1 et de raison 2, sans être obligé de la compléter par plus de deux de ses termes choisis parmi ceux (quels que soient leurs rangs) qui précèdent le dernier auquel on a dû s'arrêter dans sa marche régulièrement ascendante pour ne pas dépasser le terme assigné mn.

Pour plus de clarté, soit, entre autres exemples,

$$N = 157 . 157 = 24649.$$

D'après le théorème III et la Table de la page 164, le minimum est $\leqq 10 + 10$ ou $\leqq 20$. On peut aussi, 157 étant premier, recourir au théorème IV en écrivant $24649 = 24648 + 1$, et décomposer 24648 en ses facteurs premiers. On trouve ainsi

$$24648 = 2^3 . 3 . 13 . 79, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{24649} \leqq 3 + 2 + 5 + 9 + 1 \leqq 20,$$

comme plus haut. Mais si, après avoir trouvé les deux premiers facteurs $2^3, 3$, on s'en tient à la décomposition $24648 = 2^3.3.1027$, en remarquant que $1027 = 2^{10} + 2 + 1$, d'où $\boxed{1027} = 12$, on en conclut $\boxed{24649} \leqq 18$, au lieu de 20.

En général, on doit autant que possible, dans les conditions permises, mettre en évidence les puissances de 2 dans les décompositions, directes ou secondaires, du nombre donné, afin de bénéficier de l'effet diminutif qui les caractérise dans la solution de ce problème. E. DE JONQUIÈRES.

394. (CH. BIOCHE). — Exemple d'une fonction dont la dérivée est discontinue quoique déterminée et finie dans un intervalle où la fonction est continue :

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Si l'on convient d'attribuer à $f(0)$ la valeur zéro, $f(x)$ est finie et continue dans tout intervalle commençant à un nombre négatif $-a$ et finissant à un nombre positif b.

Pour toute valeur de x *autre que zéro*, la dérivée de $f(x)$ a pour expression

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Pour $x = 0$, la dérivée $f'(0)$ est par définition

$$\lim_{h=0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim h \sin \frac{1}{h}.$$

Donc $f'(0) = 0$.

Par conséquent, dans tout l'intervalle $(-a, b)$, la dérivée $f'(x)$ est déterminée et finie.

Cependant, à cause de la présence du terme $\cos \frac{1}{x}$ dans son expression générale, cette dérivée est *discontinue* dans tout intervalle comprenant $x = 0$.

Il est aisé, en s'inspirant de cet exemple particulier, de construire des types très généraux de fonctions continues à dérivées discontinues.

Outis.

395. (J. Gillet). — Lorsqu'on ajoute un même nombre à tous les éléments d'une ligne d'un déterminant, celui-ci augmente du produit du nombre ajouté par la somme des mineurs complémentaires de tous les éléments de la ligne considérée. On en déduit aisément que le premier des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \alpha & a & a & \ldots & a \\ b & \beta & b & \ldots & b \\ . & . & . & \ldots & . \\ l & l & l & \ldots & \lambda \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha - a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta - b & 0 & . & 0 \\ & \ldots & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda - l \end{vmatrix}$$

(qu'on peut considérer comme obtenu en ajoutant $a, b, \ldots, l$ aux éléments des diverses lignes du second déterminant), a la valeur

$$(\alpha - a)(\beta - b)\ldots(\lambda - l)\left(1 + \frac{a}{\alpha - a} + \frac{b}{\beta - b} + \ldots + \frac{l}{\lambda - l}\right).$$

Il suffirait de changer $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ en $a^n, b^n, \ldots, (s-a)^n, (s-b)^n, \ldots$ pour avoir le déterminant de M. Gillet; mais ces changements ne donnent aucun résultat digne d'être remarqué.

Rosace.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Charles Henry. — *Sur une méthode permettant de mesurer l'intensité de la vision mentale et l'aberration longitudinale de l'œil.* — *Sur des lois nouvelles de la contraction pupillaire.* — *Sur les variations de grandeur apparente des lignes et des angles, dans la vision directe et dans la vision par des mouvements des yeux et de la tête.* — *Influence de la forme sur la sensibilité lumineuse et aberration de l'œil* (Extrait des *C. R.*, 1894).

G. Humbert. *Sur la théorie générale des surfaces unicursales* (*M. A.* 1894). — *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (*J. M.*, 1894). — *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre* (*J. E. P.*, 1894). — *Sur les surfaces de Kummer elliptiques* (*A. J. M.* 1894).

G. Maupin. — *Questions d'Algèbre, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, avec une préface de C.-A. Laisant;* gr. in-8°; Nony, 1895; 5fr.

C. Burali-Forti. — *Logica matematica;* in-18, VI-158 p.; Milan, Hœpli, 1894; 1fr,50.

E. Pascal. — *Calcolo infinitesimale;* 2 vol. in-18, X-316, VI-318 p.; Milan, Hœpli, 1895; 3fr le vol.

F. Castellano. — *Lezioni di Meccanica razionale;* 1 vol. gr. in-8°, 512 p.; Turin, 1894.

Dr A. Tafelmacher. — *Sobre el teorema de Fermat* (impossibilité de l'équation $x^m + y^m = z^m$); 1892. — *Sobre la ecuacion* $x^4 + y^4 = z^4$; 1893. — Santiago de Chile, in-8°.

Rivista di Matematica, edita da G. Peano. Vol. V, 1894; in-8°. Turin; 7fr.

Il Pitagora. — Directeur . Prof. G. Fazzari; 1re année, n° 1; janvier 1895; in-4°, 8 p.; Avellino (Italie), 6 nos par an; 1fr.

Les Tablettes du Chercheur, journal des jeux d'esprit et de combinaisons. — 5e année. Paris, 1894; in-4°. 24 nos par an; 12fr.

Il nuovo Cimento, Giornale fondato da C. Matteucci e R. Piria, per la fisica e la Chimica; 3e série, t. XXXV. Pise; 1894.

Journal de Mathématiques elémentaires, dirigé par M. G. de Longchamps; 18e année. Paris, 1894; in-8°, 12 nos par an; 9fr.

Journal de Mathematiques speciales, dirigé par M. G. de Longchamps; 18e année. Paris, 1894; in-8°, 12 nos par an; 9fr.

Revue de Mathématiques speciales, rédigée par MM. E. Humbert et G. Papelier; Paris, in-4°, 12 nos par an; 7fr.

Bulletin de Mathématiques spéciales, dirigé par M. B. Niewenglowski; Paris, in-8°, 12 nos par an; 5fr.

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam; in-8°, t. III, 1re partie, 1895; 2 fascicules par an; 8fr,50.

QUESTIONS.

509. [R7g] Je serais désireux d'avoir la solution du problème posé par MM. Thomson et Tait dans le n° 353 de leur *Philosophie naturelle*, problème relatif au mouvement d'un point assujetti à rester sur la surface d'un tore.

J. PEROTT (U. S. A.).

510. [O2f] Le problème auquel est ramené celui qui sert (*voir* p. 144 ci-après) à résoudre la question 343 peut être généralisé comme il suit : on demande l'enveloppe de la droite AA′ lorsque les rayons OA et O′A′ tournent avec des vitesses angulaires qui sont dans un rapport constant m.

Lorsque les cercles O et O′ coïncident, la droite AA′ enveloppe une épicycloïde. Il est donc probable que dans le cas général l'enveloppe a une certaine analogie avec les épicycloïdes. Nous avons vainement cherché cette analogie. Un correspondant pourrait-il nous donner quelque renseignement sur cette question?

A. GOB (Hasselt).

511. [C1a] En posant $\frac{d}{dx}=\mathrm{D}$, $z=f(x)$, $\frac{dz}{dx}=z_1$, $\frac{1}{z_1}=\xi_1$, $\frac{d\xi_1}{dx}=\xi_2$ et en appliquant n fois successivement le symbole $\xi_1\mathrm{D}$, on obtient l'expression générale de $\frac{d^n}{[d\,f(x)]^n}$, très commode dans les applications. Trouver la loi générale des coefficients numériques (la partie littérale est connue *a priori*). Je n'ai trouvé jusqu'ici qu'une démonstration inductive, c'est-à-dire qui suppose que la loi hypothétique est exacte pour les n premières dérivées, d'où je déduis la même loi pour $n+1$.

Je signale quelques propriétés de ces coefficients.

1. On trouve aisément que la somme des coefficients M pour

$\Sigma M \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \ldots \xi_{n+k}^{m_{n+k}}$ est égale au coefficient $c_{n,k}$ du développement

$$\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1) = c_{n,0}\lambda^n + c_{n,1}\lambda^{n-1} + \ldots.$$

On a donc $z^n D_z^n y = D_x(D_x - 1)\ldots(D_x - n + 1)y$, si $z = e^x$ (formule bien connue).

2. On trouve $c_{-n,k}$ = coefficient de λ^k dans

$$\frac{1}{\Pi(1-n\lambda)} = \Sigma N_{n+k,n}, \qquad \text{où}$$

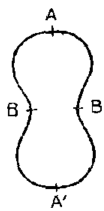
$$N_{n+k,n} = \frac{n+k!}{m_1!\,m_2!\ldots m_{n+k}!\,(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n+k!)^{m_{n+k}}}.$$

Exemple : $6!\left(\frac{1}{1!\,5!} + \frac{1}{2!\,4!} + \frac{1}{3!\,3!\,2!}\right) = c_{-2,4} = 31.$

Les coefficients N sont ceux de $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ (problème inverse).

M. Philippoff (Saint-Pétersbourg).

512. **[O5a]** Une balle de paume a son enveloppe formée de deux morceaux d'étoffe taillés sur le même patron, ressemblant



à la section d'un rail à double champignon, et cousus l'un à l'autre, de façon que les sommets saillants A, A' de l'un joignent les sommets rentrants B, B' de l'autre.

Quel doit être le contour de ce patron pour que la balle soit *aussi ronde que possible*, ce qui peut s'exprimer, par exemple, par la condition que le rapport du volume à la surface soit maximum? *Bertha Clarus.*

513. **[V7]** Dans l'intention de compléter des recherches historiques, et en même temps scientifiques, sur la Cosmographie, je serais reconnaissant aux lecteurs de l'*Intermédiaire* de vouloir bien me signaler : 1° les Œuvres, Mémoires ou Notes publiés par Vincent Coronelli, cosmographe de la République

Vénitienne, fin du XVII^e siècle; 2° où l'on pourrait se les procurer, surtout son *Epitome cosmographique* (Paris, in-f°; 1692) et son *Atlante Veneto* en 13 vol. (Venise, in-f° impér.; 1692-1696).

Cordelier.

514. **[Q4bα]** Je serais fort obligé aux correspondants qui me donneraient, avec les noms d'auteurs, l'indication des Brochures, Livres, Articles de journaux, etc., en anglais ou en allemand, sur les carrés magiques, diaboliques, etc., les égalités à plusieurs degrés, et ne figurant, ni dans la liste publiée à la fin du premier Volume des *Récréations mathématiques* d'Ed. Lucas, ni dans les *Comptes rendus* de l'Association française pour l'avancement des Sciences. B. Portier.

515. **[Q4bα]** Me référant aux pages XIX et XXI de l'Introduction des *Récréations mathématiques* d'Ed. Lucas (premier Volume) et à la page 51 du troisième Volume, je désirerais bien savoir si réellement les fabricants de tissus se servent, même inconsciemment, de procédés fondés sur les carrés magiques ou diaboliques, et si parmi eux il y aurait quelque amateur mathématicien, qui saurait tirer parti des nombreux moyens que j'ai mis à la disposition du public dans ma dernière Brochure : *Constructions nouvelles des carrés diaboliques de* 9 *et du carré satanique de* 9; Alger, A. Jourdan, 1893.

Il semble qu'il pourrait y avoir là des applications industrielles utiles. B. Portier.

516. **[D1d]** Si la fonction $f(x, y)$ est finie et continue sur un contour fermé C et à l'intérieur de ce contour, ainsi que ses dérivées partielles des différents ordres, il existe au moins un point, à l'intérieur du contour, pour lequel auront lieu les inégalités suivantes :

$$f \gtrless 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \lessgtr 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0.$$

D. Gravé (Saint-Pétersbourg).

517. **[J2f]** Dans quel travail, et à quelle époque, *Leslie Ellis* s'est-il occupé du « Problème de l'aiguille [1] »?

L. Certo (Palerme).

---

[1] *Voir* question 203, t. II, p. 45.

518. **[V9]** N'y aurait-il pas grand intérêt, pour les géomètres, à voir publier chaque année une liste méthodique des Articles et des Mémoires parus, pendant l'année, dans les différents journaux de Mathématiques? Si cette liste existait, les recherches sur tels sujets seraient beaucoup plus faciles. Cette nomenclature pourrait également être faite par un homme de bonne volonté, à partir du moment où le premier journal de Mathématiques a paru. Le *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* et la *Revue semestrielle des Publications mathématiques* répondent-ils entièrement à ce desiderata?

Spes.

519. **[K9]**. Une bille de billard est lancée sur un billard obliquement à la bande; son mouvement est supposé se continuer indéfiniment, la bille n'obéissant qu'à la loi : L'angle de réflexion sur une bande égale l'angle d'incidence. Ira-t-elle passer par un point du billard qu'on fixe seulement après que la bille est lancée?

Piol.

520. **[O6h]**. Si, sur une surface minima, on peut limiter un polygone de géodésiques planes ou rectilignes, la surface, dans toute son étendue, peut se déduire de la partie élémentaire limitée par le polygone considéré; et cela, par réflexion par rapport aux plans et par renversement autour des lignes droites du contour; et ainsi de suite, par rapport aux plans et aux lignes droites qu'on obtient successivement. Si le groupe ainsi obtenu est proprement discontinu, la surface se reproduira dans l'espace d'une manière uniforme et sera dite *périodique*. Or, pour la surface adjointe de Bonnet, on peut limiter un polygone semblable formé de lignes droites et de plans, orthogonaux aux plans et aux lignes droites du premier polygone; et plusieurs exemples démontrent que, si la première surface est périodique, la surface adjointe de Bonnet le sera aussi.

Un correspondant pourrait-il donner une démonstration générale; et, si elle existe, pourrait-il me faire savoir où elle a été publiée?

Ceretti (Rieti).

521. **[I2]**. Je désirerais savoir si la proposition suivante est déjà connue : Le produit de n nombres entiers quelconques, mais différents, multiplié par celui de leurs $\frac{n(n-1)}{2}$ différences,

prises deux à deux positivement, est un multiple du nombre

$$2^{n-1}\,3^{n-2}\,4^{n-3}\ldots(n-1)^2\,n,$$

qu'on peut aussi écrire

$$2!\,3!\,4!\ldots n!$$

Nauticus.

522. **[A1b].** J'ai vérifié, au moyen des remarquables données de M. Amagat, l'équation de Van der Waals pour les fluides, savoir $\left(p+\frac{A}{V^2}\right)(V-B)=C$, et j'ai trouvé, à ma grande surprise, que A, B, C étaient imaginaires, c'est-à-dire que l'équation ne représente point les résultats de l'expérience. Je demande alors s'il y a un moyen, plus simple que la résolution directe, d'établir le théorème suivant :

Les constantes A, B, C de l'équation $\left(p+\frac{A}{V^2}\right)(V-B)=C$ étant déterminées par les trois couples de valeurs de p et de V, p et a, q et b, r et c, elles sont imaginaires, à moins que les deux expressions $P+Q+R$ et

$$P(ab-bc+ca)^2+Q(ab+bc-ca)^2+R(-ab+bc+ca)^2$$

ne soient toutes deux de même signe.

On a posé, pour abréger l'écriture,

$$P=p\,\frac{b-c}{b^2c^2},\qquad Q=q\,\frac{c-a}{c^2a^2},\qquad R=r\,\frac{a-b}{a^2b^2}.$$

P.-G. Tait (Edimbourg).

523. **[E3a].** Le problème ci-dessous m'a été proposé par M. le lieutenant d'artillerie Lafay, qui prépare une thèse de Physique au laboratoire de la Faculté de Lyon.

Soient s une variable complexe et $V(t)$ une fonction réelle de la variable réelle t. Dans l'intervalle de $t=a$ à $t=b$, $V(t)$ est supposée avoir une variation limitée, au sens de M. Jordan (*Cours d'Analyse*, t. III, p. 567; 1887). Posons

$$(1)\qquad \varphi(s)=\int_a^b e^{ts}V(t)\,dt;$$

on aura inversement, pour t compris dans le champ réel ab,

$$(2)\qquad \pi i[V(t+0)+V(t-0)]=\lim_{n=\infty}\int_{m-ni}^{m+ni}\varphi(s)\,e^{-ts}\,ds,$$

intégrale prise le long de la droite $x=m$.

Pour les cas les plus simples, $\varphi(s) = s, s^2, \ldots$, le second membre de (2) est indéterminé.

On demande de prouver que la formule (2) est fausse, ou de lever l'indétermination.

M. Lafay tient à la disposition du correspondant de l'*Intermédiaire* que la question intéresserait sa démonstration de la formule (2). C'est une application de la série de Fourier.

LÉON AUTONNE.

524. **[M¹].** La structure du fruit de l'hélianthe (tournesol ou soleil des jardins) offre une mosaïque de graines juxtaposées dessinant un réseau dont les lignes de joint forment deux systèmes de courbes semblables, symétriques, et dont il serait intéressant de faire la comparaison avec d'autres courbes géométriques (spirales, épicycloïdes, développante de cercle, etc.).

Si cette étude n'a pas encore été faite, je conseillerais de l'entreprendre sur des épreuves photographiques de grandeur naturelle, ou agrandies s'il est nécessaire.

Le fruit doit être cueilli avant complète maturité et il suffit de le brosser légèrement pour enlever les stigmates qui recouvrent chacune des graines.

Le diamètre de la fleur primitive atteint facilement 20^{cm} et le nombre des graines visibles n'est pas inférieur à 1300.

H. BROCARD.

525. **[K11d].** Dans beaucoup de recherches élémentaires, on a besoin de ce théorème très connu :

Le lieu géométrique des points dont les puissances par rapport à deux cercles donnés sont dans un rapport donné est une circonférence.

Je voudrais savoir le nom du mathématicien auquel on doit attribuer ce théorème. C. JUEL (Copenhague).

526. **[H11c]** Y a-t-il, pour satisfaire à la condition

$$\varphi(ax) = b\varphi x,$$

d'autres fonctions (analytiques ou non) que

$$\varphi(x) = \mathrm{K}x^{\alpha}, \qquad \left(\alpha = \frac{\mathrm{L}b}{\mathrm{L}a}\right)?$$

PAUL TANNERY.

RÉPONSES.

13. (*Lerusse*). — *Sixième réponse.* — Parmi les ouvrages dont j'ai envoyé la liste à M. *Lerusse*, il y a lieu de signaler spécialement la petite brochure suivante : *Geometrie in the Grammar School, an Essay*, by Paul H. Hanus, Ph. D., of Harvard University. D.-E. SMITH (Ypsilanti, Mich.).

44. (ED. COLLIGNON). — *Cinquième réponse.* — L'idée d'un centre de gravité superficiel n'est pas aussi nette qu'elle peut le paraître à première vue, et les définitions proposées pour ce point sont loin d'être équivalentes. Examinons, par exemple, le cas d'une aire fermée, prise sur la surface d'un cylindre de révolution, de telle sorte qu'il y ait symétrie par rapport à une génératrice G ; décomposons cette aire en une infinité de bandes infiniment étroites par des plans perpendiculaires aux génératrices. Le centre de gravité superficiel de chacune de ces aires élémentaires sera sur la génératrice G, quelle que soit la définition adoptée, mais la force censée appliquée en ce point dans le cas où on le considère comme un centre de pression n'étant pas proportionnelle à l'aire de la bande infinitésimale, le point d'application de la résultante ne coïncidera pas, en général, avec le centre de gravité de l'aire supposée développée.

Considérons maintenant le cas où la surface S est une sphère.

Le centre de pression ne coïncide pas non plus alors avec le point G qui rend minima la somme $\Sigma m.\overline{GA}^2$ des produits des masses des éléments donnés par les carrés de leurs distances à ce point, mesurées sur la surface de la sphère. Supposons le système réduit à deux points matériels A_1 et A_2 dont les masses soient entre elles comme les nombres 1 et 2. Le centre de pression est sur le rayon qui divise la corde A_1A_2 dans le même rapport. Si même le système se compose de trois points matériels de même masse, le centre de pression ne coïncide pas avec le point G, puisque le cas précédent n'est autre chose que la limite de celui-ci, quand deux des points sont amenés à coïncider.

Ainsi, dans ces deux cas particulièrement simples du cylindre de révolution et de la sphère, les définitions du centre de gravité superficiel indiquées par M. Collignon ne correspondent pas à un seul et même point. L'équivalence des définitions ne saurait, à plus forte raison, exister dans le cas d'une surface quelconque. Il semble qu'il faille s'en tenir à celle qui représente le centre de gravité superficiel comme rendant minima la somme $\Sigma m.\overline{GA}^2$, mais, ainsi que le remarque M. Collignon, la détermination d'un point ainsi défini ne paraît pas devoir être obtenue d'une façon simple dans le cas général.

Il y a quelque analogie entre le centre de gravité superficiel d'une aire donnée et ce qu'on pourrait appeler le centre de gravité tangentiel d'un arc de courbe, point qui n'est autre que le milieu de la longueur de l'arc, si celui-ci est homogène. Il est clair que ce point n'a aucun rapport simple, en général, avec le centre de gravité ordinaire, ni avec le point de passage de la résultante des forces normales à la courbe, en chacun de ses points, et proportionnelles aux masses de ses éléments, dans le cas où la courbe donnée est plane.

La définition de M. Siacci (1894, p. 161) donne le centre de pression dont parle M. Collignon (1894, p. 18) lorsque la surface est une sphère, mais non si c'est une surface quelconque. Cela se voit aisément dans le cas d'une aire prise sur un cylindre quelconque et limitée par deux sections droites infiniment voisines. La normale menée par le centre de gravité ordinaire coïncide avec la résultante de forces issues d'un quelconque de ses points et proportionnelles aux distances de ce point à tous les points de l'aire considérée, et non en général avec la résultante de pressions normales égales. En somme, chacune des définitions données par M. Collignon et par M. Siacci conduit à des points différents.

L'étude de la question 44 m'a conduit aux deux théorèmes suivants; j'ignore s'ils sont connus :

1° Étant donné un système de points matériels de même masse ou de masses différentes, si l'on joint tous ces points à un même point quelconque, la résultante des forces mesurées par le produit de chacune des lignes obtenues par la masse du point correspondant passe par le centre de gravité du système. (Extension immédiate aux courbes et aux surfaces homogènes ou non.)

2° La résultante (unique ou accompagnée d'un couple) d'un nombre quelconque de forces appliquées à un système de points matériels est parallèle à la droite qui joint un point quelconque de l'espace au centre de gravité du système des extrémités des forces transportées en ce point. Elle est également parallèle à la droite qui joint le centre de gravité du système des points matériels considérés comme ayant même masse, au centre de gravité de celui des extrémités des forces appliquées en ces points.

WELSCH.

98. (*Macedo*). — En désignant par v l'une quelconque des deux racines de l'équation

$$(1)\qquad \frac{av+b}{a'v+b'} = v,$$

nous pourrons poser, quelle que soit la valeur de z,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\dfrac{az+b}{a'z+b'}-v} &= \frac{a'z+b'}{(a-a'v)z+(b-b'v)} \\ &= \frac{a'}{a-a'v}+\frac{ab'-ba'}{(a-a'v)^2}\,\frac{1}{z+\dfrac{b-b'v}{a-a'v}}. \end{aligned}\right.$$

Mais comme on a, à l'aide de la relation (1), $\dfrac{b-b'v}{a-a'v} = -v$, nous pourrons écrire la relation précédente sous la forme

$$\frac{1}{\dfrac{az+b}{a'z+b'}-v} = \frac{a'}{a-a'v}+\frac{ab'-ba'}{(a-a'v)^2}\,\frac{1}{z-v},$$

et en posant, pour abréger,

$$(3)\qquad \frac{a'}{a-a'v} = \beta,\qquad \frac{ab'-ba'}{(a-a'v)^2} = \gamma,$$

nous obtiendrons $\dfrac{1}{\dfrac{az+b}{a'z+b'}-v} = \beta+\dfrac{\gamma}{z+v}.$

En substituant dans cette identité, à la place de l'indéterminée z, la fonction $\varphi(x)$, nous aurons, en tenant compte de l'équation $\varphi(x+1) = \frac{a\varphi(x)+b}{a'\varphi(x)+b'}$, la relation

$$\frac{1}{\varphi(x+1)-v} = \beta + \frac{\gamma}{\varphi(x)-v}.$$

Si maintenant nous posons $\frac{1}{\varphi(x)-v} = \Psi(x)$, la fonction $\Psi(x)$ satisfera à l'équation linéaire

$$(4) \qquad \Psi(x+1) = \beta + \gamma\Psi(x),$$

qui a pour intégrale

$$(5) \qquad \Psi(x) = \frac{\beta}{1-\gamma} + C\gamma^x,$$

C désignant une constante arbitraire.

Nous obtiendrons ainsi pour la fonction cherchée

$$(6) \qquad \varphi(x) = v + \frac{1}{\frac{\beta}{1-\gamma} + C\gamma^x}.$$

Dans le cas où $\gamma = 1$, nous devrons substituer aux équations (4) et (6) les suivantes :

$$\Psi(x) = \beta x + C, \qquad \varphi(x) = v + \frac{1}{\beta x + C}.$$

En remplaçant dans l'équation (6) β et γ par leurs valeurs (3), nous verrons, en posant

$$v = \frac{a-b'}{2a'} \pm \frac{1}{2a'}\sqrt{(a-b')^2+4ba'},$$

que l'expression

$$\varphi(x) = v + \frac{1}{\frac{a'(a-a'v)}{(a-a'v)^2-(ab'-ba')} + C\left[\frac{ab'-ba'}{(a-a'v)^2}\right]^x}$$

est l'intégrale cherchée de l'équation proposée.

Cas particuliers :

L'équation $\varphi(x+1) = \frac{a\varphi(x)}{\varphi(x)+b'}$ a pour intégrale

$$\varphi(x) = \frac{a-b'}{1+C\left(\frac{b'}{a}\right)^x}.$$

L'équation $\varphi(x)\,\varphi(x+1) = a^2$ admet comme intégrale

$$\varphi(x) = a\,\frac{1 - C\,(-1)^x}{1 + C\,(-1)^x}.$$

L'équation $\varphi(x+1) = \dfrac{1+\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$ a pour intégrale

$$\varphi(x) = \frac{C + e^{\frac{\pi x}{2}\sqrt{-1}}}{C - e^{\frac{\pi x}{2}\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}.$$

C. Cailler (Genève).

Si l'on pose $\varphi(x) = \dfrac{1}{\chi(x)} + \alpha$ et que l'on substitue dans l'équation proposée, on peut déterminer la constante α de façon que l'équation résultante soit linéaire.

On voit facilement ainsi que $\varphi(x)$ est de la forme $\dfrac{mk^x + n}{pk^x + q}$; avec cette valeur l'équation proposée devient

$$\frac{mkk^x + n}{pkk^x + q} = \frac{(am + bp)k^x + an + bq}{(a'm + b'p)k^x + a'n + b'q},$$

et l'on a, pour déterminer les constantes m, n, p, q, k, les relations

$$\frac{am + bp}{mk} = \frac{a'm + b'p}{pk} = \frac{an + bq}{n} = \frac{a'n + b'q}{q},$$

auxquelles il faut joindre $\dfrac{m+n}{p+q} = \varphi(0)$.

On tire de là $\dfrac{m}{p} = z_1$, $\quad \dfrac{n}{p} = z_2$, z_1 et z_2 étant les deux racines de l'équation

$$a'z^2 - (a - b')z - b = 0,$$

puis $\quad \dfrac{q}{p} = \dfrac{z_1 - \varphi(0)}{\varphi(0) - z_2} \quad$ et $\quad k = \dfrac{a'z_1 + b'}{a'z_2 + b'}.$

On a donc enfin

$$\varphi(x) = \frac{z_1[\varphi(0) - z_2]k^x - z_2[\varphi(0) - z_1]}{[\varphi(0) - z_2]k^x - [\varphi(0) - z_1]},$$

z_1, z_2 et k étant déterminés comme il vient d'être dit.

Lorsque les deux racines de l'équation en z sont égales, l'expression précédente de $\varphi(x)$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, mais il est facile d'en déduire pour ce cas particulier

$$\varphi(x) = \frac{\frac{a-b'}{2a'}\left[\varphi(0) - \frac{a-b'}{2a'}\right]x + \frac{a+b'}{2a'}\varphi(0)}{\left[\varphi(0) - \frac{a-b'}{2a'}\right]x + \frac{a+b'}{2a'}}.$$

C. Moreau.

Posons $\varphi(x) = u$ et $\varphi(x+1) = u'$, et désignons les racines de l'équation $u = \frac{au+b}{a'u+b'}$ par c et c'.

On trouve alors $\frac{u'-c'}{u'-c} = \frac{a'c+b'}{a'c'+b'}\,\frac{u-c'}{u-c}$.

Donc la fonction $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-c'}{\varphi(x)-c}$ peut être définie par l'équation linéaire $\psi(x+1) = \frac{a'c+b'}{a'c'+b'}\psi(x)$.

En posant $c' = c + \Delta c$, on trouve pour $c' = c$

$$\frac{1}{u'-c} = \frac{1}{u-c} + \frac{a'}{a'c+b'},$$

et la fonction $\chi(x) = \frac{1}{\varphi(x)-c}$ sera déterminée par l'équation linéaire

$$\chi(x+1) = \chi(x) + \frac{a'}{a'c+b'}.$$

Jan de Vries (Delft).

On sait qu'en posant

$$\psi(x) = \frac{\alpha\,\varphi(x)+\beta}{\gamma\,\varphi(x)+\delta},$$

α, β, γ, δ étant des constantes convenablement choisies, on peut ramener l'équation proposée à l'une des deux formes [1]

$$\psi(x+1) = A\,\psi(x), \qquad \psi(x+1) = \psi(x) + A,$$

---

(1) On a la première forme ou la seconde suivant que l'équation $(a-s)(b'-s) - a'b = 0$ a ses racines inégales ou égales. La constante A est, dans le premier cas, égale au rapport des racines.

qui admettent visiblement pour solutions générales

$$\psi(x) = A^x \theta(x), \qquad \psi(x) = Ax + \theta(x),$$

$\theta(x)$ étant une fonction arbitraire de période 1. Emile Borel.

Solutions analogues de MM. E. Cahen et Ch. Rabut.

144. (H. Léauté). — Comme il est à présumer que la théorie devra s'appliquer à des résultats d'expériences, il me paraît utile de conseiller l'usage du kinétographe, déjà employé avec succès à des études d'hydrodynamique, et de rechercher les dispositifs qui donneront le moyen d'arrêter le mouvement du récipient, sans choc ni réaction d'aucune sorte. A cet effet, il me semble qu'il faudra employer un cylindre bien centré placé sur un axe vertical mobile entre plusieurs colliers, et portant vers la partie inférieure un tore de cuivre rouge et un anneau Gramme, actionné par un courant électrique. Ce courant fera donc tourner le système sans l'intermédiaire d'engrenages et, pour arrêter brusquement, sans réaction ni percussion, un courant électrique, lancé dans un électro-aimant au moyen d'un commutateur, agira sur le disque de cuivre rouge et produira l'arrêt instantané du mouvement de giration. De cette façon, le liquide n'éprouvera pas d'autre action que celle de la pesanteur et de la capillarité. Au moyen du kinétographe, on saisira les premières phases de la déformation du paraboloïde, et en opérant avec des liquides de viscosité différente, on reconnaîtra sans doute les caractères communs de ces déformations, ce qui donnera une base précise à l'étude théorique.

L'axe vertical de l'appareil devra être assez allongé pour que le liquide ne soit pas soumis à une influence électromagnétique.

H. Brocard.

153. (J. Neuberg). — Mascheroni, dans sa *Géométrie du compas*, indique (nos 266 et suivants) des procédés avec des erreurs des 0,0002 à 0,0004. *D. Boin.*

178. (G. de Rocquigny). — Principaux ouvrages ayant trait à l'*Histoire des Mathématiques* :

Vossius, *De Scientiis mathematicis*, 1650.

Wallis, *Tractatus Algebræ historicus et practicus*, 1684.

Milliet-Dechales, *Cursus seu mundus mathematicus*, Lyon, 1690.

CASSINI, *De l'origine et du progrès de l'Astronomie*, 1693.

WEIDLER, *Historia Astronomiæ*, 1741.

J.-C. HEILBRONNER, *Historia Matheseos universæ*, Leipzig, 1742, in-4°.

MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, Paris, 1758. 2 vol. in-4°. Continuée par LALANDE, Paris, 1802, 4 vol. in-4°.

CHR. WOLF, *De præcipuis scriptis mathematicis*, 1763.

BAILLY et DELAMBRE, Leurs ouvrages sur l'*Histoire des Mathématiques et de l'Astronomie.*

A.-G. KÆSTNER, *Geschichte der Mathematik*, Gœttingue, 1796-1800, 4 vol. in-8°. — J.-W.-A. MURHARD, *Bibliotheca mathematica*, Leipzig, 1797-1804.

COSSALI, *Origine dell'Algebra*, Parme, 1798-1799, 2 vol. in-4°.

BOSSUT, *Histoire générale des Mathématiques*, Paris, 1810, 2 vol. in-8°.

G. LIBRI, *Histoire des Mathématiques en Italie.*

M. CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, 1837.

NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen*, Berlin, 1842.

PEACOCK, *History of Arithmetic.*

E. QUÉTELET, *Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, 1866.

M. CANTOR, *Euclide et son siècle*, Allemagne, 1867.

BRETSCHNEIDER, *La Géométrie et les géomètres avant Euclide*, Allemagne, 1870.

R. WOLF, *Handbuch der Mathematik*, Zurich.

H. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Leipzig, 1874, 1 vol. in-8°.

F. HOEFER, *Histoire des Mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du* XIX^e *siècle*, Paris, 1874, 1 vol. in-8°.

H. SUTER, *Histoire des Mathématiques*, Allemagne. (Traduite en partie dans le *Journal de Mathématiques élémentaires de Bourget.*)

M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1880-1894, 3 vol. in-8°.

MAXIMILIEN MARIE, *Histoire des Sciences mathématiques*, Paris, 1883-1887, 12 vol. in-8°.

A ces indications, très sommaires, il conviendrait d'ajouter les titres de nombreux recueils périodiques, où il est fait une étude particulière de divers points de l'*Histoire des Mathématiques*. Nous signalerons seulement :

Le *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, fondé en 1868 par M. B. Boncompagni, Rome; le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, fondé en 1870, par MM. G. Darboux, J. Houel et J. Tannery, Paris; et le recueil : *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, qui paraît depuis 1856, Leipzig. H. Brocard.

On peut citer :

Ramus (Petrus), *Prœmium mathematicum*, Parisiis, 1561, in-8°. Parisiis, Wechelus; 1567, in-12. — *Scholarum mathematicarum libri*, t. XXXI, etc.; Basileæ, Episcopius, 1569, in-folio; *iidem libri, a Lazaro Schonero recogniti et emendati*, Francofurti ad Mœnum, Wechelus; 1599 et 1627, in-4°.

Il y a dans Ramus bien des choses qui méritent d'être lues et qu'on ne lit pas assez.

Buquoy (von), *Chronologischer Auszug aus der Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1829, in-12.

Poggendorf (Jean-Chrétien), *Linien zu einer Geschichte der exacten Wissenschaften*. Berlin, 1853.

Hoefer (Ferdinand), *Histoire des Mathématiques*. Paris, Hachette; 1880, in-12.

Les ouvrages énumérés ci-dessus ont trait à l'*Histoire générale des Mathématiques*. Il en existe d'autres, antérieurs à Max. Marie, qui ne s'appliquent qu'à une nation; on en formerait aisément une liste assez importante au moyen des notes et des renvois des *Vorlesungen* de M. Moritz Cantor. *Setnof.*

Nous avons supprimé dans cette réponse les indications bibliographiques qui se trouvent déjà dans la précédente. M. J. Boyer nous a envoyé aussi une étude fort intéressante, mais trop étendue pour trouver place dans l'*Intermédiaire;* si elle est publiée dans un autre Recueil, comme nous le désirons, nous ne manquerons pas de la signaler.

193. (C. Stéphanos). — *Cinquième réponse.* — La réponse publiée en janvier, t. II, p. 42, n'est pas exacte en général; les limites obtenues ne tendent pas, dans certains cas, vers les racines de $f(x) - x = 0$. Les limites d'attraction des centres peuvent s'étendre au delà de celles indiquées par l'auteur. Ainsi, dans l'exemple choisi, on peut converger vers le centre 2 en

partant de la valeur initiale 1,1 inférieure à la limite 1,51 assignée par l'auteur.

E.-M. Lémeray.

197. (J. Gillet). — Le nombre des différents moyens d'appliquer p couleurs différentes est évidemment $\frac{n!}{(n-p)!}$ lorsque les différentes faces sont distinctes. Maintenant, chacun des polyèdres essentiellement différents est compté ici pq fois, q étant le nombre des côtés de chacune des faces; car, si nous numérotons les faces du polyèdre conformément à une loi fixée, en prenant une des p faces pour la première et une des q faces adjacentes pour la suivante, ces deux faces détermineront le nombre des faces restantes. Donc le nombre des polyèdres essentiellement différents est $\frac{n!}{pq(n-p)!}$. Si deux polyèdres, dont l'un est la réflexion de l'autre, ne sont pas considérés comme essentiellement différents, nous devrons avoir ce résultat.

H.-W. Curjel (Chester).

343. (*Ramsiu*). — En transformant la figure par polaires réciproques relativement au point F, on est ramené à la question suivante : Étant données deux circonférences O et O′, on mène deux rayons OA et O′A′, faisant entre eux un angle constant ω. Trouver l'enveloppe de la droite AA′. Si l'on prend O pour origine et OO′ pour axe des x, les coordonnées des points A et A′ seront respectivement $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$ et $R'\cos(\omega+\varphi)+d$, $R'\sin(\omega+\varphi)$, R et R′ désignant les rayons et d la distance des centres. L'équation de AA′ est de la forme

$$A\sin\varphi + B\cos\varphi + C = 0,$$

A, B, C désignant des facteurs linéaires en x et y. L'enveloppe de AA′ est donc une conique ayant pour équation (Salmon-Chemin, *Courbes planes*, p. 99) : $A^2+B^2=C^2$ Une solution analytique est due à M. Neuberg (*N. C.*, 1880, p. 463 et 514), qui en a donné aussi une solution géométrique (*J. E.*, 1888, p. 111).

A. Gob (Hasselt).

QUESTIONS.

527. [D4c] Pour qu'un développement de Taylor à coefficients rationnels $\frac{A_n}{B_n} z^n$ représente une fonction méromorphe, n'est-il pas nécessaire que $\sqrt[n]{B_n}$ augmente indéfiniment? A_n et B_n sont des entiers premiers entre eux ([1]). ÉMILE BOREL.

528. [A3j] A propos de la question n° 244 (Niewenglowski) j'ai établi une proposition qui peut être formulée ainsi. En désignant respectivement par $A_0, A_1, A_2, \ldots$; $B_0, B_1, B_2, \ldots$; $C_0, C_1, C_2, \ldots$, les coefficients successifs de trois équations algébriques $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(x)=0$ et en supposant les relations

$$C_0 = A_0 B_i, \qquad C_1 = A_1 B_{i+1}, \qquad C_2 = A_2 B_{i+2}, \qquad \ldots,$$

l'équation $h(x)=0$ aura toutes ses racines réelles si les racines des équations $f(x)=0$, $g(x)=0$ sont toutes réelles et en outre de même signe pour l'une des deux, par exemple pour $g(x)=0$.

Serait-il possible de démontrer que la condition d'avoir ses racines toutes réelles et de même signe subsistant à l'égard de l'équation $g(x)=0$, mais $f(x)$ étant maintenant tout à fait quelconque, l'équation $h(x)=0$ a au plus autant de racines imaginaires que celle-ci? E. MALO.

529. [I10] Étant données l'équation

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = n,$$

et la condition restrictive

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leqq n,$$

([1]) Cf., *Comptes rendus*, 11 février 1895.

Interm., II (Avril 1895).

où les inconnues doivent être entières, positives ou nulles, trouver : 1° Le nombre de systèmes de solutions ; 2° Une formule générale pour calculer les valeurs des inconnues.

FERBER.

530. **[V6]** Dans l'inventaire des livres d'un Fr. de Saint-Offange, décédé en 1607, figurent : 1° L'Arithméticque de Anthoyne Faure ; 2° La Géométrie d'Oroun ; 3° L'Arithméticque metaire de Allexandre de Vauduban. Le second de ces livres est probablement : *La practique de la Géométrie d'Oronce* (Fine), *revue et traduite par Pierre Forcudel, lecteur du roi ès Mathématiques* (Paris, Gilles Gourbin, 1570, in-8°, 64 pages). Peut-on identifier les deux autres, qui ne figurent pas notamment dans le *Répertoire des Ouvrages pédagogiques du* XVI^e^ *siècle* (Paris, Hachette, 1886) ? PAUL TANNERY.

531. **[V]** Je serais curieux d'avoir des renseignements sur l'origine (étymologie, premier emploi, sens primitif, etc.) du mot *fonction* en Algèbre. A. GOULARD.

532. **[I9b]** De 31398 à 31468 il y a une série de 71 nombres consécutifs ne contenant aucun nombre premier. Quelle est la première série de cette nature plus longue que celle-là ?

H. TARRY.

533. **[Q4a]** Le plan étant partagé en une infinité de triangles équilatéraux égaux formant carrelage, on dispose de traits égaux, chacun, au côté de ces triangles ; résoudre les deux questions suivantes : 1° Pour fermer complètement n de ces triangles, quel nombre minimum de traits faut-il tracer ? (Le maximum est évidemment $3n$ et le minimum correspond au périmètre minimum.) 2° On dispose de p traits ; combien de triangles au maximum et au minimum peut-on fermer complètement ? A. BOUTIN.

534. **[Q4a]** Mêmes questions que dans l'énoncé précédent, le plan étant partagé en une infinité d'hexagones réguliers égaux, formant carrelage. A. BOUTIN.

535. **[O2a]** 1° On trouve facilement l'aire et le périmètre des podaires successives d'une cardioïde par rapport à son point de rebroussement.

L'aire de la $p^{\text{ième}}$ podaire est

$$U = \pi a^2 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)(2p+3).$$

Le périmètre de cette podaire est

$$(1) \qquad S = 4a(p+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+1}\alpha\, d\alpha,$$

$2a$ désignant la distance du point de rebroussement de la cardioïde à son sommet, et l'on trouve la valeur de l'intégrale (1) selon que p est pair ou impair.

On désirerait avoir de même les formules donnant l'aire et le périmètre des podaires successives de la cardioïde par rapport à son sommet.

2° J'ai trouvé que la développée de la $p^{\text{ième}}$ podaire de la cardioïde par rapport à son point de rebroussement est une courbe unicursale dont l'aire est

$$U = \pi a^2 \left(\frac{p+1}{p+3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)$$

et le périmètre

$$S = \frac{4a(p+2)}{p+3}.$$

Les développées successives de cette $p^{\text{ième}}$ podaire sont des courbes unicursales.

Un correspondant pourrait-il donner l'aire et le périmètre de la $n^{\text{ième}}$ développée de la $p^{\text{ième}}$ podaire? *Nester.*

536 [O2a] Je désirerais savoir si la propriété suivante, que j'ai démontrée dans le cas de l'ellipse et dans celui de la cycloïde, s'étend à toutes les courbes, comme je suis porté à le croire.

Le cercle osculateur en un point M quelconque d'une courbe donnée rencontre la normale en M en un second point N : soient P et Q les extrémités du diamètre du cercle perpendiculaire à MN. Les courbes lieux des points N, P et Q ont chacune une aire équivalente à l'aire de la courbe donnée. *Nester.*

537. [H3a] Je considère l'équation différentielle $yy'' = a$. On pose

$$y = 1 + ax + \frac{A_2}{1.2}x^2 + \frac{A_3}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{A_n}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots,$$

On a, pour déterminer les coefficients inconnus $A_2, \ldots A_n \ldots$, des équations de la forme

$$A_n A_2 + n A_{n-1} A_3 + \frac{n(n-1)}{1.2} A_{n-2} A_4 + \ldots + n a A_{n+1} + A_{n+2} = 0.$$

Les coefficients de $A_i A_j$ sont ceux du binome. Pour les premières valeurs de n, on trouve $A_2 = a$, $A_3 = -a^2$, $A_4 = 2a^3 - a^2$,

$$A_5 = -6a^4 + 7a^3, \qquad A_6 = 24a^5 - 46a^4 + 7a^3,$$
$$A_7 = -120a^6 + 326a^5 - 127a^4,$$
$$A_8 = 720a^7 - 2556a^6 + 1720a^5 - 127a^4 \ldots,$$
$$A_n = (-1)^n (n-2)! a^{n-1} + (-1)^{n-1} \alpha_n a^{n-2} + (-1)^{n-2} \beta_n a^{n-3} + \ldots.$$

Quelle est la loi des coefficients α_n, β_n, γ_n, ...? Quelle est leur expression explicite en n? Pour les coefficients α, je trouve entre eux la relation

$$\alpha_{n+1} = (n-1)!\,\alpha_n + (n-2)!\,(n-2).$$

A. Boutin.

538. **[O2a]** Je suis parvenu à démontrer le théorème qui fait le sujet de la question 224 et dont je soupçonnais alors la vérité. J'ai trouvé aussi les deux propriétés suivantes qui se rattachent à ce théorème :

1° Le lieu des points du plan d'une ellipse, tels que les podaires de l'ellipse par rapport à ces divers points aient toutes même aire, est un cercle concentrique à l'ellipse.

2° Le lieu des points du plan d'une ellipse, tels que les podaires de la développée de l'ellipse par rapport à ces divers points aient toutes même aire, est un cercle concentrique à l'ellipse.

Je suis porté à croire que la question 224 et les deux propriétés précédentes sont tout à fait générales et s'appliquent à une courbe quelconque, même transcendante. J'ai, en particulier, vérifié ces propriétés dans le cas de la cycloïde.

Un correspondant pourrait-il en montrer la vérité pour une courbe quelconque? E.-N. Barisien.

539. **[V9]** S'il est vrai (ainsi que l'a annoncé je ne sais plus quel journal) que Catalan, quelque temps avant sa mort, ait découvert une importante proposition d'Analyse, quelque correspondant pourrait-il me dire en quoi elle consiste? Où a-t-elle été publiée? *Pierref.*

540. [A1a] Le dernier numéro des *Nieuw Opgaven* contient, sous le n° **183**, une question proposée, relative *aux fractions étagées*. On trouve (p. 148 et 149) dans la *Théorie des nombres* d'Ed. Lucas la définition des fractions étagées et les énoncés de quelques propositions les concernant. C'est vers 1875 (exactement, au t. XV del *Giornale di Matematiche* del Prof. G. Battaglini) que j'ai donné la définition des fractions étagées et démontré quelques-unes de leurs propriétés. Cette idée avait-elle été mise en lumière antérieurement?

La question de priorité, l'oubli de travaux personnels, le silence fait sur eux me sont, dans ce cas comme dans d'autres, parfaitement indifférents. Mais il y a un intérêt scientifique à remonter aux sources, souvent inconnues. Cet intérêt motive seul cette question et la suivante. G. DE LONGCHAMPS.

541. [I1] J'ai présenté au Congrès de l'Association française, tenu à Besançon, en 1893, une petite Note sur *les nombres à figures négatives*. Cette Note a été reproduite dans le numéro de décembre 1894 du *Journal de Mathématiques élémentaires*. Des lettres, que j'ai reçues de MM. Brocard et Neuberg, m'ont signalé un Mémoire de Cauchy, sur le même sujet, publié au t. XI des *Comptes rendus*, p. 789. L'idée, dans laquelle je me suis rencontré avec Cauchy, a-t-elle été produite par quelqu'un, antérieurement au Mémoire cité? G. DE LONGCHAMPS.

542. [H2c] Étant données les équations différentielles du premier ordre :

1°
$$\frac{dy}{dx} = f(y) + \varphi(x),$$

2°
$$\frac{dy}{dx} = 1 + f(y)\,\varphi(x),$$

dans lesquelles $\varphi(x)$ désigne une fonction déterminée de x, quelles sont les différentes formes de la fonction $f(y)$ de y qui permettent de ramener l'intégration aux quadratures?

Gaston Frondes.

543. [H2c] Quelles sont les différentes formes de la fonction $f(y)$ permettant de ramener aux quadratures l'intégration de l'équation du premier ordre

$$2x\frac{dy}{dx} = f(y) + \frac{x-1}{x+1}?$$

Gaston Frondes.

544. [V1a] Je m'occupe de rédiger une petite histoire de l'origine et du développement de la Logique symbolique. Je prie les mathématiciens de tous les pays de bien vouloir me communiquer l'indication des Notices, Brochures ou Livres utiles pour mon entreprise. Mon adresse est : M. Ventura Reyes Prosper, Catedrático, Cuença (Espagne).

Dr Ventura Reyes Prosper (Cuença).

545. [I2] Je désire savoir où je pourrais trouver une démonstration, *simple et rigoureuse à la fois*, de la validité, pour les nombres entiers, de l'axiome V d'Archimède. *Trinitario.*

546. [I19c] Lejeune-Dirichlet et V.-A. Le Besgue, qui se sont occupés de l'équation

$$x^5 + y^5 = Az^a,$$

se sont surtout attachés à en démontrer l'impossibilité pour certaines formes générales de A; mais, à ma connaissance du moins, ils n'ont pas donné la résolution de cette équation pour des valeurs de A qui la rendent possible. D'autres géomètres se sont-ils occupés de cette recherche? En particulier, pourrait-on signaler des valeurs de A pour lesquelles l'équation admet au moins deux solutions, et quelles sont ces solutions?

E. Fauquembergue.

547. [O2a] Les courbes parallèles à l'hypocycloïde à quatre rebroussements ont toutes leur *quadrature* et leur *rectification* en fonction du nombre π.

En est-il de même pour les courbes parallèles aux hypocycloïdes et épicycloïdes à n rebroussements? Et, si la loi n'est pas générale, pour quelles valeurs de n peut-on obtenir la *rectification* de ces courbes? *Onponale.*

548. [V9] Existe-t-il des traductions en français des divers Mémoires de Riemann? *Milèse.*

549. [V9]. Existe-t-il une traduction en français du Mémoire suivant d'Eisenstein?

Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Enstehung verdanken. L. Laugel.

RÉPONSES.

37. (Ch. Brisse). — *Septième réponse.* — Je n'ai rien à ajouter à la démonstration de M. Ivanoff (t. I, p. 74) pour le cas où l'on suppose que le degré m de $f(x)$ est multiple de p et que le coefficient de x^m est une $p^{\text{ième}}$ puissance parfaite. Ce cas étant établi, ne faisons plus aucune hypothèse sur le polynome (à coefficients entiers) $f(x)$, et considérons le polynome

$$F(x) = f(x)\,f(x+h_1)\,f(x+h_2)\ldots f(x+h_{p-1}),$$

où $h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}$ sont des nombres entiers choisis arbitrairement, mais de telle sorte que les polynomes $f(x), f(x+h_1), \ldots, f(x+h_{p-1})$ soient premiers entre eux deux à deux. Le polynome $F(x)$ vérifie les hypothèses rappelées plus haut, et par suite est une $p^{\text{ième}}$ puissance algébrique parfaite. Ses facteurs étant premiers entre eux deux à deux, il en est de même de chacun d'eux. A. Goulard.

Nous avons reçu une Remarque tout à fait analogue de M. H. Dellac; nous avons choisi la plus courte.

100. (E. Lemoine). — Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème plus général : *Dans tout triangle* ABC, *à un plus grand côté correspond une plus petite symédiane.*

Soit $AC > AB$. Si les symédianes BK_b, CK_c, K_b, K_c étant respectivement sur AC et sur AB, rencontrent la circonférence ABC en B′, C′, on sait que B′C′ et la tangente en A concourent sur la droite BC; d'où $AB' > AC'$ et, par suite,

$$\widehat{ABK_b} > \widehat{ACK_c}.$$

Soit K_cD le segment équipollent à BK_b. On aura

$$\widehat{K_cDK_b} = \widehat{ABK_b} \qquad \text{et} \qquad DK_b (= BK_c) < CK_b;$$

d'où

$$\widehat{K_b DC} > \widehat{K_b CD} \quad (1),$$

Remarquons maintenant que $\widehat{K_c D K_b}$ qui est égal à $\widehat{K_c B K_b}$ a pour mesure $\frac{1}{2}$ AB′ : il est donc plus grand que $\widehat{K_b C K_c}$ qui a pour mesure $\frac{1}{2}$ AC.

L'inégalité (1) donne donc, *a fortiori*,

$$\widehat{K_b DC} + \widehat{K_c D K_b} > \widehat{K_b CD} + \widehat{K_b C K_c}$$

ou

$$\widehat{K_c DC} > \widehat{K_c CD};$$

on en déduit

$$CK_c > DK_c \qquad \text{ou} \qquad CK_c > BK_b. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

B. Sollertinsky (Saint-Pétersbourg).

M. Welsch nous a envoyé plusieurs démonstrations analogues, mais leur exposition est moins simple que celle que nous venons de donner.

La question **100** est donc résolue, mais il reste un desideratum qui, au fond, est ce qui l'a motivée. Si l'on prend comme définition de la symédiane que c'est la ligne symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice, on établit, avec les théorèmes des deux premiers Livres de Géométrie, que : dans un triangle isoscèle deux symédianes sont égales; il serait désirable de démontrer aussi la réciproque sans avoir recours à des théorèmes qui exigent la connaissance de propositions sur les lignes proportionnelles ; je n'y ai pas réussi, et aucune des nombreuses démonstrations envoyées à l'*Intermédiaire* n'est dans ces conditions. E. Lemoine.

183. (H. Dellac). — La question, pour $N = 100$, est posée dans les *Tablettes du Chercheur* sous le n° 999 (1893, p. 192) et résolue dans le même Recueil (1893, p. 233), par une analyse assez ingénieuse. L'auteur de la solution, qui signe *Un vieil X*, trouve comme résultat 36296. Mais la question générale posée par M. Dellac reste toujours à résoudre. *D. Boin.*

241. (J. Voyer). — En changeant légèrement la notation [F en u, E en $E(u)$], on trouve

$$\int_0^u F\,dE = \int_0^u u\,\frac{dE(u)}{du}\,du = u\,E(u) - \frac{u^2 E}{2k} - \log\frac{\theta(u)}{\theta(0)},$$

où

$$\theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{k} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{k} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{k}\cdots$$

Legendre a publié (*Fonctions elliptiques*, t. II) des Tables qui donnent les valeurs des intégrales complètes k et E et aussi celles de u et de $E(u)$ pour toute valeur de α et de k.

Dans une Table de Jacobi (*Cr.*, t. 24) on trouve pour chaque module k la valeur de la quantité q, à l'aide de laquelle on calcule la fonction $\theta(u)$. J.-C. Kluyver (Leyde).

245. (Cesàro). — La constante

$$C_r = \lim\left[\tfrac{1}{2}(\log 2)^r + \tfrac{1}{3}(\log 3)^r + \ldots + \frac{1}{n}(\log n)^r - \frac{(\log n)^{r+1}}{r+1}\right],$$

pour $n = \infty$, a la signification suivante

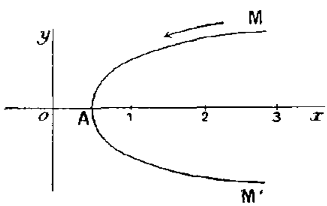
Si l'on fait, avec Riemann, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}$, on aura

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{1.2\ldots r} C_r (s-1)^r,$$

C étant la constante d'Euler. Or, si l'on suppose la partie réelle de $s > 1$, on aura, en vertu d'un théorème de Cauchy,

$$\zeta(s) = \int \frac{1}{t^s}\,\frac{dt}{e^{2\pi i t} - 1},$$

l'intégrale étant prise, dans le sens direct, le long d'un chemin indéfini tel que MAM′ comprenant à son intérieur les pôles 1, 2, 3, …, de la fonction sous le signe somme. L'expression $\frac{1}{t^s}$ est



définie par l'exponentielle $e^{-s\log t}$ où $\log t$ a sa valeur principale. Au chemin d'intégration MAM′ on peut substituer une parallèle à l'axe des y passant par le pôle $x = 1$, si l'on a soin d'éviter ce pôle par un demi-cercle de rayon infiniment petit, situé à gauche de cette parallèle.

On obtient ainsi l'équation

$$(1)\quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{i}\int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\left[\frac{1}{(1-it)^s} - \frac{1}{(1+it)^s}\right],$$

qui montre que la fonction $\zeta(s)$ est uniforme dans tout le plan et n'a qu'un point singulier à distance finie, le pôle $s=1$. En développant les deux membres de cette équation suivant les puissances de $s-1$, on trouve

$$C_r = \frac{1}{i}\int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\left\{\frac{[\log(1-it)]^r}{1-it} - \frac{[\log(1+it)]^r}{1+it}\right\},$$

comme réponse à la question que nous traitons.

Puisque $\zeta(-2n)=0$, n étant un entier positif, il résulte de la formule (1)

$$0 = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{i}\int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}[(1-it)^{2n} - (1+it)^{2n}],$$

équation qui permet de calculer de proche en proche les nombres de Bernoulli.

Abel a fait connaître (*Œuvres*, t. I, p. 38) une formule qui comprend la nôtre comme cas particulier, mais sa démonstration est insuffisante. On établira cette formule plus générale au moyen des mêmes principes en faisant sur la nature de la fonction $\varphi(t)$ des hypothèses indiquées par notre mode de démonstration.

J. Franel (Zurich).

En posant

$$C_r = \lim\left[\frac{(\log 1)^r}{1} + \frac{(\log 2)^r}{2} + \ldots + \frac{(\log n)^r}{n} - \frac{(\log \overline{n+1})^{r+1}}{r+1}\right]_{n=\infty},$$

on a $(-1)^2 C^2 = \displaystyle\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right]e^{-z}[\Pi(1)+\log z]^r\,dz,$

la puissance $[\Pi(1)+\log z]^r$ étant *symbolique* et représentant le développement

$$\Pi^{(r)}(1) + \frac{z}{1}\Pi^{(r-1)}(1)\log z + \frac{r(r-1)}{1.2}\Pi^{(r-2)}(1)\log^2 z + \ldots,$$

où $\Pi^{(r)}(1)$ est la valeur, pour $\mu=1$, de la dérivée d'ordre r de la fonction $\Pi(\mu)$, définie comme l'inverse de l'intégrale eulérienne de deuxième espèce : $\Pi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}$.

On aura donc, r étant successivement $0, 1, 2, \ldots,$

$$C_0 = C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log\overline{n+1} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right) e^{-z}\,dz,$$

$$C_1 = \frac{\log 1}{1} + \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \ldots + \frac{\log n}{n} - \frac{(\log\overline{n+1})^2}{2}$$
$$= -\int_0^\infty \left[\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right] e^{-z}(C + \log z)\,dz = -0{,}0728\ldots,$$

$$C_2 = \frac{(\log 1)^2}{1} + \frac{(\log 2)^2}{2} + \frac{(\log 3)^2}{3} + \ldots + \frac{(\log n)^2}{n} - \frac{(\log\overline{n+1})^3}{3}$$
$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right] e^{-z}[2C^2 - \Gamma''(1) + 2C\log z + \log^2 z]\,dz.$$

Les résultats ci-dessus peuvent être généralisés ; en attendant la publication d'un petit travail sur ce sujet, je signalerai seulement la formule

$$(-1)^{r+1} \lim \left\{ \sum_1^n \frac{(\log\overline{n+x})^r}{n+x} - \frac{1}{r+1}\left[(\log\overline{n+x+1})^{r+1} - (\log\overline{x+1})^{r+1}\right] \right\}_{n=\infty}$$
$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right] e^{-(x+1)z}[\Pi(1) + \log z]^2\,dz.$$

E. Malo.

Je désigne par $\zeta(s)$ la fonction uniforme qui, pour des valeurs de s dont la partie réelle est > 1, est représentée par la série $\sum_1^n \frac{1}{n^s}$. A l'égard de cette fonction au pôle unique $s = 1$, on établit le développement valable dans tout le plan

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = C + C_1\frac{(1-s)}{1} + C_2\frac{(1-s)^2}{1.2} + \ldots + C_r\frac{(1-s)^r}{r!},$$

où j'ai remplacé $1 + C_0$ par la constante C d'Euler.

En supposant positive la partie réelle de s, on peut démontrer en outre l'égalité

$$\Gamma(s)\left\{\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right\}=\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right\},$$

dont le second membre se développe en série entière, ce qui donne

$$\Gamma(s)\left\{\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right\}=J_0+J_1\frac{(s-1)}{1}+J_2\frac{(s-1)^2}{1.2}+\ldots,$$

où

$$J_r=\int_0^\infty(\log x)^r\,dx\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right\}=\int_0^\infty(\log x)^r f(x)\,dx.$$

Du rapprochement des deux séries ainsi obtenues on conclut, en désignant par $\Gamma^{(r)}$ la constante $\left[\frac{d^r\,\Gamma(s)}{ds^r}\right]_{s=1}$,

$$J_0=\Gamma^{(0)}C,\quad J_1=\Gamma'C-\Gamma^{(0)}C_1,\quad J_2=\Gamma''C-2\Gamma'C_1+\Gamma^{(0)}C_2,$$
$$J_3=\Gamma'''C-3\Gamma''C_1+3\Gamma'C_2-\Gamma^{(0)}C_3,$$
$$\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Évidemment ces relations permettent d'exprimer les constantes C_r par les intégrales J_r. On trouve

$$C_1=-\begin{vmatrix}\Gamma^{(0)} & J_0\\ \Gamma' & J_1\end{vmatrix},\qquad C_2=-\begin{vmatrix}\Gamma^{(0)} & 0 & J_0\\ \Gamma' & -\Gamma^{(0)} & J_1\\ \Gamma'' & -2\Gamma^{(0)} & J_2\end{vmatrix},$$

$$C_3=+\begin{vmatrix}\Gamma^{(0)} & 0 & 0 & J_0\\ \Gamma' & -\Gamma^{(0)} & 0 & J_1\\ \Gamma'' & -2\Gamma' & \Gamma^{(0)} & J_2\\ \Gamma''' & -3\Gamma'' & 3\Gamma' & J_3\end{vmatrix},$$

ou bien, en tenant compte de la valeur connue de $\Gamma^{(r)}$,

$$C_1=-\int_0^\infty f(x)\,dx(\log x+C),$$

$$C_2=\int_0^\infty f(x)\,dx\,[(\log x)^2+2C\log x+C^2-\zeta(2)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots$$

J'écris encore ici les formules suivantes, qui sont peut-être utiles pour évaluer les constantes C_r :

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_1^\infty \frac{-e^{-m}}{m} = -J_0 - \Gamma' - \sum_1^\infty (-1)^m \frac{B_m}{2m!}\,\frac{1}{2m},\\
&\sum_1^\infty \frac{li(e^{-m})}{m} = -J_1 - \tfrac{1}{2}\Gamma'' + \frac{1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^m \frac{B_m}{2m!}\,\frac{1}{(2m)^2};\\
&\sum_1^\infty \frac{1}{m}\int_m^\infty \frac{li(e^{-x})}{x}\,dx = -\tfrac{1}{2}J_2 - \tfrac{1}{6}\Gamma''' + \frac{1}{2} - \sum_1^\infty (-1)^m \frac{B_m}{2m!}\,\frac{1}{(2m)^3};\\
&\sum_1^\infty \frac{1}{m}\int_m^\infty \frac{dx}{x}\int_x^\infty \frac{li(e^{-x})}{x}\,dx = -\tfrac{1}{6}J_3 - \tfrac{1}{24}\Gamma^{\mathrm{IV}} + \frac{1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^m \frac{B_m}{2m!}\,\frac{1}{(2m)^4};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

Les nombres B_m sont ceux de Bernoulli : $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$; la fonction li est le logarithme intégral.

Remarquons qu'on trouve, en ajoutant ces équations, après les avoir multipliées successivement par 1, $(s-1)$, $(s-1)^2$, $(s-1)^3$, ...,

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\,\zeta(s) = {} & \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} - \sum_1^\infty (-1)^m \frac{B_m}{2m!}\,\frac{1}{2m+s-1}\\
& - \sum_1^\infty \frac{-e^{-m}}{m} - (s-1)\sum_1^\infty \frac{li(e^{-m})}{m}\\
& - (s-1)^2 \sum_1^\infty \frac{1}{m}\int_m^\infty \frac{li(e^{-x})}{x}\,dx - (s-1)^3 \sum_1^\infty \frac{1}{m}\int_m^\infty \frac{dx}{x}\int_x^\infty \frac{li(e^{-x})}{x}\,dx\\
& - (s-1)^4 \sum_1^\infty \frac{1}{m}\int_m^\infty \frac{dx}{x}\int_x^\infty \frac{dx}{x}\int_x^\infty \frac{li(e^{-x})}{x}\,dx - \ldots;
\end{aligned}$$

l'expression analytique du produit $\Gamma(s)\,\zeta(s)$ est conforme au théorème de M. Mittag-Leffler sur les fonctions uniformes.

La première formule (A) donne la valeur de C, la deuxième la valeur de C_1 et ainsi de suite, à l'aide de séries très convergentes. En effet, la deuxième formule s'écrit

$$C_1 = -\tfrac{1}{2}C^2 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} - \sum_1^\infty (-1)^m \frac{B_m}{2m!}\,\frac{1}{(2m)^2} + \sum_1^\infty \frac{li(e^{-m})}{m};$$

d'où l'on tire, au moyen d'une Table du logarithme intégral,

$$C_1 = 0,0728756.$$

Si l'on calcule auparavant l'intégrale $\int_m^\infty \frac{li(e^{-x})}{x}dx$ par l'équation

$$\int_m^\infty \frac{li(e^{-x})}{x}dx = \tfrac{1}{2}C^2 + \frac{\pi^2}{12} - C\log m - \tfrac{1}{2}(\log m)^2$$
$$+ \frac{1}{1^2}\cdot\frac{m}{1!} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{m^2}{2!} + \frac{1}{3^2}\cdot\frac{m^3}{3!} - \ldots,$$

il résultera de la troisième formule (A) : $C_2 = -0,00903$.

J.-C. Kluyver (Leyde).

259. (E. Lemoine.) — Voici les résultats remarquables trouvés par M. T.-J. Allersma (*Warfum*, Hollande) et publiés dans les *W. O.* (t. VI, p. 246-252).

L'auteur se sert d'un système de coordonnées rectangulaires (x, y) à origine O (centre du cercle circonscrit) et parallèles aux coordonnées d'inertie (ξ, η) à centre Z (centre de gravité), caractérisées par la condition $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = 0$, où (ξ_i, η_i) $(i = 1, 2, 3)$ représentent les sommets du triangle. En introduisant des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ définis par les relations

$$\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_2 = \alpha, \qquad \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 + \eta_1\eta_2 = \beta,$$
$$\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_1 + \xi_1\eta_2 = -(\eta_2\xi_3 + \eta_3\xi_1 + \eta_1\xi_2) = \gamma,$$
$$\lambda = -\frac{\gamma}{3\alpha} = -\frac{\beta}{\gamma}, \qquad \mu = \frac{\gamma}{3\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad 3\lambda\mu = -1;$$

les équations des deux coniques, lieux de M et de M′, deviennent

$$K \equiv 3\mu x^2 + 2xy + 3\lambda y^2 + 4q'x + 4p'y = 0,$$
$$K' \equiv 3\mu x^2 - 2xy - 3\lambda y^2 - 4qx - 4py = 0.$$

Dans ces équations figurent les coordonnées (p, q) et (p', q') des centres S et S′ de K et de K′. Ces coordonnées s'expriment par les relations

$$\nu p = \lambda x_0 - y_0, \qquad \nu p' = \lambda x_0 + y_0,$$
$$\nu q = -x_0 + \mu y_0, \qquad \nu q' = x_0 + \mu y_0;$$

où $\nu = \lambda + \mu$, dans les coordonnées (x_0, y_0) de Z.

A l'aide de ces équations et de l'équation

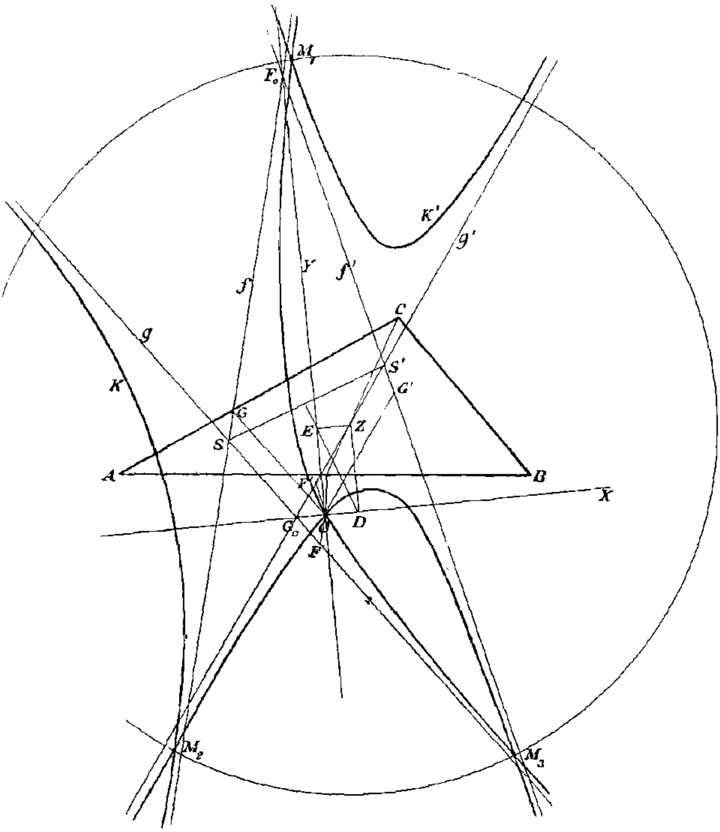
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$
$$= x_0^2 + y_0^2 + \frac{8}{3\nu^2}[(1 + 3\lambda^2)x_0^2 + (1 + 3\mu^2)y_0^2],$$

l'auteur démontre les résultats géométriques suivants

1° Les deux coniques K et K′ sont des hyperboles;

2° Les asymptotes (f, g) de K sont anti-parallèles aux asymptotes (f', g') de K′ par rapport aux axes de coordonnées;

3° Les asymptotes anti-parallèles se coupent sur les axes de coordonnées (f et f' sur OY, g et g' sur OX);



4° On a OF = OF′, OG = OG′, de manière que les parallélogrammes OFSG et O′F′S′G′ sont congruents;

5° Lhyperbole conjuguée de K est congruente à K′;

6° La seconde diagonale du rectangle OZ sur les axes bissecte orthogonalement le segment SS′ limité aux centres;

7° Les coniques K et K′ passent par O et se coupent en trois autres points réels situés à la même distance de Z;

8° Si l'ordre circulaire $M_1 M_2 M_3$ de ces points M_1, M_2, M_3 est égal à l'ordre circulaire de ABC, on a

$$AM_1 = BM_2 = CM_3, \quad AM_2 = BM_3 = CM_1, \quad AM_3 = BM_1 = CM_2.$$

P.-H. Schoute (Groningue).

La réponse qui précède est fort intéressante, mais elle ne résout pas la question précise que j'avais posée, de trouver explicitement les équations des lieux de M et de M′ en coordonnées normales, résultat où la seule difficulté était pour moi la longueur du calcul. Il y a déjà plus d'un an que M. Welsch m'a envoyé cette équation explicite; si elle n'a pas paru encore, c'est qu'il complète des recherches autour de ce sujet. J'ai aussi reçu une réponse de M. J. Neuberg. E. Lemoine.

285. (Cesàro). — J'ai été frappé aussi, il y a quelques années, de ce que l'équation d'une épi- (ou hypo-) cycloïde puisse donner une courbe réelle, même quand les rayons sont imaginaires, et que ces courbes (*pseudocycloïdes*) ont beaucoup de propriétés communes avec les cycloïdes usuelles. Voici la génération que j'ai trouvée alors : construisons un cône dont la base soit une spirale logarithmique, et dont la hauteur passe par le pôle; si nous faisons rouler ce cône sur un plan, le lieu géométrique des points de contact de la spirale avec le plan, ou le développement de la spirale, sera une pseudocycloïde. On peut ensuite remplacer la spirale par une des courbes construites et ainsi obtenir toutes les courbes de ce genre.

C. Juel (Copenhague).

Nous avons aussi depuis longtemps une réponse de M. G. Tarry, qui sera publiée ultérieurement.

344. (E.-M. Lémeray). — *Deuxième réponse.* — Les adhésions de principe que nous avons reçues sont trop nombreuses pour que nous puissions les mentionner, ce qui ne présenterait du reste qu'un intérêt médiocre. Il nous suffira de dire qu'elles ont déterminé la création définitive de la *Bibliothèque mathématique des travailleurs*, qui fonctionne dès à présent et dont le Directeur est M. le Dr Hulmann, 4, rue de la Cure, Paris (Auteuil). La Rédaction.

QUESTIONS.

550. **[R2a]** Il y aurait, je crois, un intéressant Volume à écrire sur une partie des Sciences que j'ai appelée (il y a bien longtemps, en 1857) *Géométrie des masses*, et qui comprend les théories dans lesquelles on n'allie aux notions géométriques que la seule conception de masse, sans y mêler, comme dans le reste de la Mécanique, celles du temps et de la force. J'ai eu longtemps le projet d'écrire ce Livre; mais les années s'écoulent, les fonctions publiques m'absorbent de plus en plus; il convient qu'un plus jeune se charge de cette utile besogne.

J'ai déjà, dans un Article assez développé, cherché à appeler l'attention sur ce corps de doctrine (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 15 juin 1893); mais l'excellent Recueil qui m'avait donné cette hospitalité embrasse à la fois toutes les Sciences, et ne pénètre pas aussi directement dans le monde des mathématiciens que l'*Intermédiaire*. Je reviens donc à la charge dans ce peu de mots, avec l'espoir que quelque lecteur sera tenté d'entreprendre cette œuvre importante, en commençant, comme je l'avais fait, par rassembler dans ses lectures un ensemble de documents sur les théories très nombreuses et peu répandues qui se rattachent au centre de gravité, au moment d'inertie et au potentiel, en vue de les coordonner un jour en autant de parties distinctes de la *Géométrie des masses*.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

551. **[X6]** On trouve, dans la *Statique graphique* de Culmann, la description de deux variantes du *planimètre* d'Amsler, étudiées en vue d'obtenir non seulement l'aire, mais encore le moment statique et le moment d'inertie d'une figure donnée.

L'emploi d'un instrument pour rechercher une aire, ou un moment statique, ne me paraît pas présenter un intérêt pratique bien sérieux ; il n'en est pas ainsi à l'égard du moment d'inertie, dont la détermination, même au moyen de règles ou de machines à calculer, de tables ou d'abaques, est toujours beaucoup plus longue.

Je désirerais savoir s'il a été imaginé, pour construire, soit le moment d'inertie $I = \int\int y^2\,dx\,dy$, soit le moment résistant $\frac{I}{v}$ d'une section, d'autres instruments que ceux décrits par Culmann, si les uns ou les autres se trouvent dans le commerce, et où l'on peut se les procurer. CH. RABUT.

552. **[O8c]** Quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans fixes; les points de la droite décrivent alors des ellipses. A-t-on cherché la relation qui existe entre les longueurs des arcs de ces courbes simultanément décrits? MANNHEIM.

553. **[O8c]**. A quelles conditions faut-il assujettir les déplacements d'une figure de grandeur invariable pour que, dans l'une quelconque de ses positions, les normales aux surfaces trajectoires de ses points passent par un même point?

MANNHEIM.

554. **[$L^2$7a]** Comment reconnaître si les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde peuvent être les axes de courbure des trajectoires des points d'une droite mobile?

MANNHEIM.

555. **[O2a]**. Je suis parvenu, par des calculs assez laborieux, à la propriété suivante :

Si, en chacun des points M *d'une ellipse, on considère la tangente et la normale en* M *à la courbe, les bissectrices de l'angle formé par ces deux droites enveloppent chacune une courbe fermée,* Γ *et* Γ'. *Ces deux courbes ont une même aire, équivalente à la demi-différence des aires de l'ellipse donnée et de sa développée.*

La simplicité de ce résultat semble indiquer qu'il doit en exister une démonstration simple, soit par le calcul, soit par la géométrie. Un correspondant pourrait-il la donner?

Je trouve aussi que *la normale au point de contact de la bissectrice avec la courbe* Γ *passe par le centre de courbure de l'ellipse, relatif au point* M.

Je désirerais obtenir l'enveloppe de cette normale, c'est-à-dire la *développée* de la courbe Γ, et particulièrement son *aire.*

E.-N. Barisien.

556. **[O2f]** Étant donnée une ellipse de centre O, on projette un point M quelconque de son périmètre sur le grand axe en H. Je voudrais avoir *l'enveloppe des bissectrices de l'angle* $\widehat{OMH}$. Un correspondant peut-il en donner l'équation, ou tout au moins celle *de la podaire du centre de cette enveloppe?*

Cette question offre de l'intérêt en ce sens que, lorsque l'ellipse devient un cercle, les bissectrices de l'angle $\widehat{OMH}$ passent par deux points fixes qui sont les extrémités du diamètre du cercle parallèle à MH. *Nester.*

557. **[O2qα]** Je trouve que la podaire négative ou antipodaire d'une hypocycloïde à quatre rebroussements par rapport à son centre est une courbe du 22^e degré. Peut-on, *a priori,* déterminer le degré de cette anti-podaire et généraliser la question pour une épicycloïde ou une hypocycloïde à n rebroussements?

Peut-on de même déterminer le degré des développantes d'une épicycloïde ou d'une hypocycloïde à n rebroussements?

Nester.

558. **[V1]** On raconte de prétendues observations (sur la cane, la poule, la pie) tendant à prouver que les oiseaux compteraient jusqu'à un nombre en rapport avec celui de leurs doigts. Quelle est l'origine de ces récits et jusqu'à quel point peut-on y ajouter foi? Paul Tannery.

559. **[U1]** Deux planètes P et T, dont les éléments sont supposés connus, décrivent, autour d'un même foyer S, des ellipses d'après les lois de Kepler. La distance de P à T passe par des maxima et des minima successifs. On demande de déterminer les limites entre lesquelles varient les intervalles de temps qui séparent deux minima successifs. Trouver une formule de calcul pratique et suffisamment approchée.

Paul Tannery.

560. **[Q4b]** Une partie d'échecs se termine par le coup

faisant le roi adverse échec et mat. Il y a quatre parties différentes qui peuvent se terminer ainsi au quatrième coup (deuxième coup des noirs). Combien y a-t-il de parties d'échecs qui se terminent au cinquième coup, au sixième coup?

H. Tarry.

561. [$M^2 3 a \alpha$] La surface $xyz = 1$ a été étudiée à divers points de vue et l'on sait y tracer deux systèmes de coordonnées curvilignes rectangulaires. Dans un problème d'hydrodynamique bien connu, les lignes géodésiques de cette surface interviennent. D'après un premier aperçu, celles-ci ne peuvent être algébriques, mais je désirerais savoir si elles ont été l'objet de quelques recherches, et si l'on en connaît d'autres que celles qui sont évidentes ($y = \pm x, \ldots$) R. Liouville.

562. [I2c] Soient m et n deux nombres, tels que $n + 1$ soit racine primitive, relativement au module m. Soit, de plus, N un nombre écrit dans le système de numération de base $n + 1$ avec $\varphi(m)$ chiffres tous égaux à n, $\varphi(m)$ désignant combien il y a de nombres premiers à m et non supérieurs à m. Appelons N_1 le quotient de N par m. Alors, on obtiendra le produit de N_1 par un nombre p, par une permutation circulaire convenablement choisie des chiffres de N_1, p étant inférieur à m et premier avec m. Cette proposition, facile à démontrer, doit être connue. Je désirerais avoir à ce sujet des indications bibliographiques. A. Palmström (Bergen.)

563. [D2b] Étant donnée une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, absolument convergente, comment reconnaître que la série retournée sera convergente?

E.-M. Lémeray.

564. [E5]. Trouver les fonctions f, telles que, si l'on pose $\int_p^q f(x, n)\,dx = S_n$, on ait, quel que soit n, $S_{n+1} = \varphi(n, S_n)$, p et q étant des nombres donnés, φ étant une fonction donnée.

Ainsi les intégrales Γ satisfont à la relation $S_{n+1} = n S_n$. A défaut de solution, prière de donner des renseignements bibliographiques, même dans les cas particuliers, par exemple, ceux où n est entier, où φ est indépendant de n, où p et q ont des valeurs propres à simplifier la question. E.-M. Lémeray.

565. **[A1b]**. La relation

$$1.2.3\ldots n = n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \ldots$$

est une conséquence facile à tirer d'un problème de probabilités. Cette relation curieuse a-t-elle été démontrée directement? C. COUTURIER (Louvain).

566. **[$L^1$1a]**. A-t-on étudié l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

où A, B, C, D, E, F sont des fonctions du second degré des coordonnées (x', y') d'un point variable?

J. NEUBERG (Liége).

567. **[K]** Les problèmes de géométrie élémentaire proposés par les divers auteurs sont classés par livres. Existe-t-il pour ces problèmes, qui deviennent très nombreux, ainsi que pour ceux qui ont été proposés aux examens, une classification plus rationnelle? Je désirerais savoir si un essai de ce genre a été tenté. J. SADIER.

568. **[O2qα]** Dans quel ouvrage puis-je trouver des renseignements sur les questions suivantes qui m'intéressent? Nature des développées successives, et des podaires relatives au pôle, des trois spirales suivantes : 1° Spirale d'Archimède; 2° Spirale logarithmique ; 3° Spirale hyperbolique.

Onponale.

569. **[U10]** On sait qu'il est impossible de rendre mathématiquement perpendiculaires au plan du limbe le grand miroir et le petit miroir d'un sextant; de plus, l'axe optique de la lunette n'est jamais parallèle au plan du limbe. On demande une formule *rigoureuse* donnant l'erreur qui en résulte dans la mesure d'une distance angulaire? G. FRIOCOURT.

570. **[D2b]** Où peut-on trouver, étudiée par la méthode de Cauchy, la convergence de la série de Paoli?

E.-M. LÉMERAY.

RÉPONSES.

154. (J. Neuberg). — M. J.-S. Mackay (Édimbourg) et M. E. Vigarié nous ont envoyé des réponses dont nous extrayons ci-dessous les renseignements bibliographiques pouvant intéresser le lecteur. Le premier croit que la signature *Eutaris* était le pseudonyme (par anagramme) de M. Restiau, ancien élève de l'École Polytechnique, répétiteur au Collège Chaptal en 1877; M. Vigarié, au contraire, croit que l'article dont il s'agit avait pour auteur M. Vuibert. Quoi qu'il en soit, la circonférence dite *de Taylor* est signalée : dans le *J. de Math. élém. de M. Vuibert* (15 novembre 1877, p. 30); dans les *Théorèmes et Problèmes* de Catalan (6e édit., 1879, p. 132-134); dans *Mathesis* (t. I, 1881, p. 14), par M. Neuberg; dans le *Messenger of Mathematics* (t. XI, 1882, p. 177-179), où M. H. Taylor donne une Note (*On a six-points circle connected with a triangle*). *Voir* aussi, même Recueil, t. XII, p. 36 et p. 181-182, des articles de MM. Rowe et Tucker sur le même sujet. A noter enfin qu'en janvier 1882, M. H. Taylor a proposé la question (n° 7) dans *The Mathematical Tripos examination papers*. La Rédaction.

157. (G. Oltramare). — *Simple remarque empirique.* — Il suffit de considérer le Tableau suivant pour voir que la proposition, évidemment asymptotique, et qui paraît très régulièrement vérifiée au début en prenant les nombres de 6 en 6, n'est plus exacte au delà de 21, si l'on s'arrête du moins à un nombre quelconque; car il est possible qu'on puisse trouver au delà des nombres tels que, pour l'ensemble des entiers qui les précèdent, la formule soit vérifiée.

Nombres..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Résultats..	3	3	3	3	6	6	3	3	3	3	6	6	3	3	3	3

Nombres..	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Résultats..	6	6	3	3	6	3	6	6	6	3	3	3	6	6	3	3
Nombres..	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
Résultats..	3	3	3	6	3	3	6	3	3	3	3	3	3	3	6	6

Les nombres de la suite naturelle, pour lesquels la proposition se vérifie, sont peu nombreux. Comme le montre la continuation du Tableau précédent, qui demande quelques minutes, jusqu'à 280, on ne trouve que 6, 12, 18, 21, 42, 48, 51, 81, 90, 93, 258, 261. Cela n'infirme d'ailleurs en rien la loi prévue par M. Oltramare, et dont la démonstration paraît difficile.

P.-F. Teilhet.

240. (P. Girardville). — Dans un *Cours de Physique,* publié en 1878, j'ai donné l'indication d'une lunette stadimétrique fixe et d'une lunette portative pouvant servir à l'appréciation des distances.

Un abaque, avec instruction sommaire pour son emploi, est gravé sur la garniture de l'instrument.

Ces deux types de lunettes ont été construits sur les plans du colonel Goulier, par M. Avizard, Paris, 57, rue de Rambuteau.

H. Brocard.

Il y a deux ans, j'ai fait construire à Londres, pour mon usage, un instrument dont je publie aujourd'hui la première description et qui remplit toutes les conditions demandées par M. Girardville, sauf une seule. Il est très facile de modifier l'appareil pour les remplir toutes.

L'instrument est un théodolite qui porte, à l'oculaire, un micromètre filaire de position. La lunette anallatique a une ouverture de $0^m,041$ et une distance focale de $0^m,32$; elle a un pouvoir de grossissement de 57 diamètres dans les conditions ordinaires. Les cercles ont un diamètre de $0^m,125$ et sont lus chacun par deux microscopes micrométriques à $10''$ près ou à $1''$ par l'estimation. On observe une mire horizontale portée en croix sur une verticale. On met la pièce horizontale graduée à même hauteur au-dessus du terrain, que l'axe de l'instrument pour chaque station.

On dirige l'axe du collimateur au milieu de la pièce verticale; alors on lit le cercle vertical et l'on ajuste le cercle de position à la même inclinaison; on met les deux fils d'araignée, au moyen des vis micrométriques, aux extrémités d'une longueur convenable sur la mire, et l'on trouve le nombre de révolutions entre les deux fils sur les têtes des vis, ce qui donne, par une Table, la distance cherchée.

Soient (*fig.* 1) T le théodolite, M la mire et (*fig.* 2) M, M′

Fig. 1.

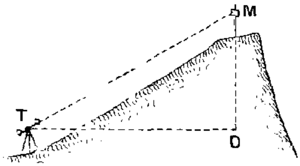
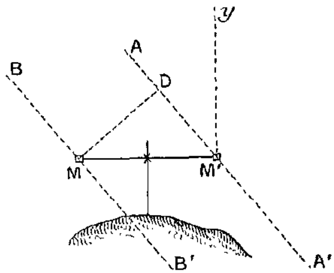


Fig. 2.



les extrémités de la mire vues par l'oculaire; enfin, AA′, BB′ les fils d'araignée.

L'angle AM′ est égal à MTD; My est proportionnelle à TM; alors MD est proportionnelle à TD.

Il faut ainsi deux lectures : 1° le cercle; 2° la tête de la vis micrométrique.

Maintenant, supposons que le théodolite porte une lunette coudée et que le micromètre de position soit situé à l'extrémité de l'axe vertical; si l'on fixe les fils d'araignée tandis que la lunette tourne dans un plan vertical, les fils s'ajustent à l'angle d'eux-mêmes; et si l'on décrit une hélice sur la tête du fil micrométrique, on peut graduer cette hélice pour donner les distances sans une Table. J'obtiens avec mon instrument une précision de 0,15 pour cent jusqu'à 300^{m}. Si M. Girardville veut bien m'écrire, je lui enverrai une photographie de mon appareil, et toutes les autres indications qu'il pourrait désirer.

E. Synge-Cooper (Hillmorton Paddox, Rugby, sept. 1894).

254. (*Atlantique*). — Dans le cas pratique en question, on peut supposer la flexion des fils assez faible pour que leur section droite reste circulaire.

Le problème se réduit alors au suivant : On enroule sur un cylindre de rayon $R + x$, un ruban de largeur nx, de manière que les bords du ruban se touchent. Quel est le pas p de l'hélice formée? On trouve alors très facilement que

$$p = \frac{2\pi(R+x)\,nx}{\sqrt{\pi^2(R+x)^2 - n^2x^2}}.$$

Mais évidemment on ne peut expliciter x que par une équation du quatrième degré.

Si p est l'inconnue, on peut l'avoir par une construction très simple : Sur une droite AB de longueur $2\pi(R+x)$, on trace un demi-cercle, en B on mène une perpendiculaire à AB. De B comme centre, on décrit un cercle de rayon nx, qui coupe le premier en C; on mène AC jusqu'à sa rencontre D avec la perpendiculaire. BD est le pas. E.-M. Lémeray.

En développant le cylindre de rayon $R + x$, sur lequel sont enroulés les axes des fils considérés, on obtient un triangle rectangle, dont la hauteur perpendiculaire à l'hypoténuse, a pour longueur $2nx$, et dont les côtés de l'angle droit sont égaux, l'un au pas h de l'hélice, l'autre au périmètre $2\pi(R+x)$ de la section droite du cylindre développé. On a donc la relation

$$\frac{1}{4n^2x^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4\pi^2(R+x)^2}.$$

Ernest Duporcq.

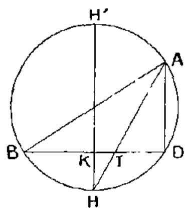
Une solution nous a été adressée aussi par M. Audibert. Elle se rapproche des deux précédentes.

269. (E. Friocourt, *D. Boin*). — Nous avons reçu différentes réponses à cette question, notamment de MM. H. Brocard, G. Delahaye, Gino-Loria, A. Goulard, C. Juel, G. Tarry, Welsch. Quelques-unes contiennent uniquement des renseignements bibliographiques que nous résumons ci-dessous. Nous reproduirons ensuite les démonstrations qui nous semblent avoir un caractère direct et original.

Discussion of a geometrical problem, with bibliographical Notes, by Marcus Baker, U. S. Coast Survey, Washington, D. C. (Extrait du *Bulletin of the philosophical Society of Washington*. Philadelphie, Collères, printer; 703, Jayne Str.). — *N. A.*, 1894, p. 28-40. — *Nieuw Archiv. der Wisk.*, t. XVI, 1889, p. 179-199; *voir* un article de M. Van den Berg. — Le problème dont il s'agit fait l'objet de la première question proposée dans les *N. A.*, t. I, 1842, p. 57; il est résolu dans le même volume, p. 138 et 311; *voir* même Recueil, question 289, t. XIII, 1854, p. 192 et 331; t. XIV, 1855, p. 32; t. XVI, 1857, p. 102. — *Mathesis*, 1894, p. 92. — *Journal de Vuibert*, 9e année (1884-1885), p. 130-132.— *Le Journal de Crelle*, t. XVIII, 1844, contient une démonstration et une généralisation par Steiner; *voir* aussi *J. Steiner's Gesammelte Werke* (Berlin, 1882, t. II, p. 321-326). LA RÉDACTION.

Considérons les deux triangles qui ont pour bases les bissectrices égales et pour sommet le sommet du triangle correspondant à la troisième bissectrice. Il s'agit de démontrer l'égalité de ces deux triangles, qui ont leurs bases égales, même angle au sommet et même bissectrice de cet angle. Il suffira de démontrer qu'un triangle est déterminé quand on connaît la base, l'angle au sommet et sa bissectrice, ce qui revient à faire voir que par le milieu M d'un arc de circonférence AB on ne peut mener qu'une corde, dont la partie comprise entre l'autre extrémité et la droite AB ait une longueur donnée. Supposons que la corde, d'abord perpendiculaire à AB, tourne autour du point M jusqu'à ce qu'elle passe par le point A ou B. Dans ce mouvement, la corde diminuera constamment, tandis que la partie comprise entre l'extrémité M et la droite AB croîtra sans cesse. Donc l'autre partie ira toujours en diminuant, et il n'y aura que deux positions symétriques pour lesquelles cette partie aura une longueur donnée. G. TARRY.

Soit ABC un triangle ayant deux bissectrices égales BD = CE. Les deux triangles ABD, ACE, qui ont même base, même



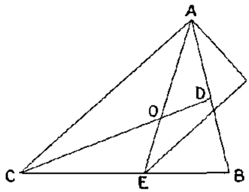
angle au sommet et même bissectrice issue de ce sommet, sont égaux. En effet, considérons le cercle circonscrit au triangle ABD.

La bissectrice de l'angle en A passe par le milieu H de l'arc BD. Or, le segment AI de cette bissectrice, compris entre l'arc BAD et la corde BD, est d'autant plus grand que la sécante AH se rapproche davantage du diamètre mené par H, ce qui résulte immédiatement de $AI = AH - IH$. Les triangles ABD, ACE sont donc égaux et le triangle ABC est isoscèle. WELSCH.

Dans le *Tidsskrift f. Mathematik* (1893, *A.*, p. 55) se trouve la démonstration désirée, due à M. Hertz.

« *Lemme.* — Un quadrilatère, dans lequel deux côtés opposés et deux angles opposés *obtus* sont respectivement égaux, est un parallélogramme.

» Soient ABC le triangle, AE et CD les bissectrices égales qui



se coupent en O. Nous construisons le triangle AFE symétriquement égal à DAC. Dans le quadrilatère AFEC, on aura

$$FE = AC \qquad \widehat{FAC} = \widehat{FAE} + \frac{A}{2} = \widehat{ADC} + \frac{A}{2} = \widehat{AOC},$$

$$\widehat{FEC} = \frac{C}{2} + \widehat{AEC} = \widehat{AOC}.$$

Comme $\widehat{AOC} = 90^\circ + \frac{B}{2} > 90^\circ$, le quadrilatère AFEC est dans les conditions du lemme, et l'on aura $AFE = ACE$ ou $A = C$. »

J'ai cherché en vain d'autres démonstrations directes; la démonstration originale de Steiner est indirecte.

C. JUEL (Copenhague).

270. (H. LEZ, *Zamart*). — Une grande partie des renseignements relatifs à la question 269 s'appliquent à celle-ci. A ceux qui se trouvent dans l'intéressante Note qui suit, nous ajouterons l'indication de la question 1244 des *N. A.* (1877, p. 527).

Note bibliographique. — Ce problème a été proposé : le cas général dans la *N. C.* (questions 57 et 222), et le cas particulier du triangle rectangle dans les *N. A.*, question 1327, résolue *ibid.*, 1880, p. 464-467. Une monographie de ce dernier problème a été faite par M. Marcus Baker, U. S. Coast Survey, Washington, dans le *Bulletin of the phil. Society of Washington*. On y trouve l'exposé de six solutions et de deux constructions. Ce même problème a été proposé dans le *Ladie's Diary*, en 1797, et dans d'autres Recueils depuis cette époque. La question générale du triangle par les trois bissectrices a été traitée depuis longtemps aussi. A propos de relations remarquables découvertes ou signalées par Euler dans la Géométrie du triangle (*Mém. de Pétersbourg*, t. XI, 1765), O. Terquem dit (*N. A.*, t. I, 1842, p. 86) :

« Soit d la longueur de la bissectrice angulaire intérieure allant de l'angle C au côté c. On trouve facilement

$$4d^2(a+b)^2a^2b^2 - d^4(a+b)^4 = 16a^2b^2S^2.$$

On obtient deux équations semblables pour les deux autres bissectrices intérieures : ainsi, connaissant les trois bissectrices intérieures, il y a une possibilité analytique de déterminer les trois côtés; mais l'élimination mène à une équation de degré très élevé, parce qu'elle renferme probablement aussi les solutions pour les bissectrices extérieures. Lorsque deux bissectrices sont égales, ajoute Terquem, les équations peuvent être mises sous une forme où l'on voit que deux côtés doivent être égaux, à quoi l'on parvient également par des considérations géométriques » (c'est précisément l'objet de la question 269 de l'*Intermédiaire*). Les *N. A.* renferment d'autres indications sur les tentatives de résolution de la question générale; par exemple, 1879, p. 311-315, et une Note de M. R. Blazeievski, 1894, p. 28-40, et 1895, p. 49-55. Enfin le même problème a été traité par M. F.-J. Van den Berg (*Niew Archiv der Wiskunde*, t. XVI, 1889, p. 179-199) et par M. Barbarin (*S. M.*, 1894, p. 76-80).

H. Brocard.

315. (A. Boutin). — Je ne suis pas à même de dire si la fonction

$$y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}x^3 + .$$

a fait l'objet d'une étude particulière; mais on peut en donner une expression explicite, savoir :

$$y = \frac{1}{(m+3)\,2^{m+2}}\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{\cos\left[(m+3)\arc\cos\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{x}}\right]}{\cos^{m+3}\left(\arc\cos\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{x}}\right)}\right\}.$$

E. Malo.

352. (E.-N. Barisien). — De très nombreuses réponses sont parvenues à la Rédaction. Dans l'impossibilité où nous sommes de les reproduire, sans commettre des répétitions dénuées d'intérêt, nous nous bornons à résumer les procédés employés et à signaler les résultats.

Par la substitution $z = \operatorname{tang} x$, l'intégrale devient rationnelle, et il n'y a plus qu'à la décomposer en éléments simples.

W.-A. Poort (Groningue). *Ixème.* J. Wodetzky (Szegedin). P. Tannery. J. d'Arcais (Padoue). E. Fauquembergue.

On peut poser $\sqrt{\frac{b}{a}} = c$, $x = \operatorname{arc\,tang}\left(ct^{\frac{1}{2n}}\right)$, et développer le numérateur $\left(1 + c^2 t^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$.

I. Ivanoff (Saint-Pétersbourg). D. Besso (Modène).

La substitution $z = \operatorname{tang} x$ conduit à une intégrale qui se calcule en multipliant par $2\pi i$ la somme des résidus de la fonction $\frac{(1+z^2)^2}{a^2 z^6 + b^2}$ relatifs aux pôles situés au-dessus de l'axe des quantités réelles. J.-C. Kluyver (Leyde). E. Fabry. B. Berloty.

Un *Anonyme* fait la transformation $z = e^{iu}$ et applique ensuite la méthode des résidus.

Le résultat donné par tous est $\frac{\pi}{3a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}}\left(a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)$.

Bibliographie. — Hermite, *Cours d'Analyse*, p. 112; J.-A. Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, 3e édition, t. II, p. 122.

359. (E. Friocourt). — Les côtés a, b, c, d restant constants, les angles A et C varient simultanément dans le même sens que la diagonale m, et les angles B et D varient simulta-

nément dans le même sens que la diagonale n. Or, lorsque A et C vont, par exemple, en croissant, B et D vont en décroissant; alors m augmente et n diminue, et le rapport $\frac{m}{n}$ augmente. On a donc $\frac{m}{n} \gtreqless \frac{ab+cd}{cb+ad}$, suivant que l'on a $A+C \gtreqless 2$ dr. ou $B+D \lesseqgtr 2$ dr., et réciproquement. A. GOULARD.

M. DELAHAYE nous signale à ce sujet les *Questions d'Algèbre élémentaire*, de A. Desboves, 2ᵉ édit., p. 230-232.

361. (ARTEMAS MARTIN). — Soient A, B, C, D, E, F les arêtes et diagonales des faces F_1, F_2, F_3; G la diagonale du polyèdre; a, b, ..., g les chiffres terminaux des nombres entiers qui expriment ces diverses longueurs. Il s'agit de voir s'il est possible de résoudre en nombres entiers les équations

$$A^2+B^2=D^2,\quad B^2+C^2=E^2,\quad C^2+A^2=F^2,\quad A^2+B^2+C^2=G^2.$$

Tout d'abord, il faut éliminer le cube et le prisme à base carrée, vu l'impossibilité manifeste de l'équation $2A^2=D^2$. Le parallélépipède doit donc avoir ses trois arêtes différentes. Cela posé, en se servant des données numériques de 131 triangles rectangles en nombres entiers, publiées par MM. H. Lieber et V. Lühmann à la fin de leur livre *Trigonometrische Aufgaben* (Berlin, 1889), on obtient très rapidement le Tableau suivant :

$a=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b=1$	0	5	4	3	2	3	4	5	0
ou			ou	ou	ou	ou	ou		
9			6	7	8	7	6		
$d=1$	1	3	5	5	3	5	5	3	1
ou	ou	ou			ou			ou	ou
9	9	7			7			7	9

Ce Tableau fait voir qu'à un côté A pour lequel $a=2$ ou 8, par exemple, il n'est pas possible d'associer un côté B ($B>A$) pour lequel b soit $\neq 5$. Mais, d'autre part, il fait reconnaître aussi qu'à un même côté A (commun à deux faces du parallélépipède) on ne peut associer un côté B (ou C) pour lequel on ait b (ou c) $= a$. On en conclut l'impossibilité des valeurs de A pour lesquelles $a = 1, 2, 8, 9$. Supposons $a = 0$; sur une face F_1, b pourra avoir deux valeurs, soient $b = 1$ et $d = 1$. Sur la face F_2 contenant l'arête A, on devra prendre pour C un nombre non terminé par 0. Il ne peut l'être que par 1 ou 9. Mais $b = 1$, par hypothèse. Donc $B^2 + C^2$ sera terminé par 2, ce qui ne peut donner un carré. Donc il faut rejeter l'hypothèse $a = 0$; $b = 1$; $c = 0, 1, 9$. Il en est de même de $a = 0$; $b = 9$; $c = 0, 1, 9$. Ainsi l'hypothèse $a = 0$ doit être écartée. Il ne reste plus que les hypothèses $a = 3, 4, 5, 6, 7$. Soit $a = 3$. Quel que soit b (ou c), on aura d (ou f) $= 5$. Mais alors, dans le triangle rectangle (A, F, G), on aura $a = 3$, $f = 5$, $g = 4$, ce qui est impossible d'après le Tableau. On doit donc écarter $a = 3$, et pour la même raison $a = 7$. Soit $a = 4$. A un côté A pour lequel $a = 4$, on ne peut associer que des valeurs de B terminées par 3 ou par 7. Soit d'abord $b = 3$. On aura $d = 5$. Soit $c = 3$ ou 7. On aura encore $e = 5$ et $f = 5$. Mais $A^2 + B^2 + C^2 = G^2$ et

$$2(A^2 + B^2 + C^2) = D^2 + E^2 + F^2 = M.100 + 75,$$

ce qui est impossible; donc il faut encore écarter l'hypothèse $a = 4$, et, pour la même raison, $a = 6$. Reste donc l'hypothèse $a = 5$. On aura alors $b = 2$ ou 8 et, par suite, $d = 3$ ou 7, et toujours $c = 5$, d'où F^2 terminé par 50, ce qui entraîne une impossibilité. Ainsi aucun système de 7 nombres entiers ne saurait représenter les arêtes, la diagonale et les diagonales des faces d'un parallélépipède rectangle. H. Brocard.

366. (G. de Rocquigny). — D'après la correspondance de Fermat (*Œuvres*, t. II, p. 198 et 209), il est certain qu'il est parvenu à son théorème (lettre à Frénicle, du 18 oct. 1640), en généralisant l'énoncé que $2^{p-1} - 1$ est divisible par p, si p est premier (lettre à Mersenne de juin 1640), et qu'il a trouvé cette dernière proposition en examinant, pour la recherche des nombres parfaits, les cas où $2^n - 1$ est composé. Quant aux démonstrations de Fermat pour le cas particulier et pour le théorème général, on ne les possède pas et l'on n'a aucun élément pour les reconstituer avec certitude. Paul Tannery.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Ch. Bioche. — *Éléments de Géométrie à l'usage des classes de lettres;* in-12; Paris, Belin frères, 1895.

C. Burali-Forti. — *Sul limite delle classi variabili* (Extrait des *Actes de l'Ac. royale des Sciences de Turin*); Turin, in-8°, 1895.

F. Dumont. — *Essai d'une théorie élémentaire des surfaces du troisième ordre;* 2 fasc. in-8°; Annecy, 1894.

Ch. Henry. — *Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques, à l'usage des candidats à la licence ès Sciences mathématiques;* 1 vol. in-8°, 126 p.; Paris, Nony, 1895.

Mathesis. — *Recueil mathématique à l'usage des Écoles spéciales,* publié par MM. Mansion et J. Neuberg; 2e série, t. IV, 1894; Gand et Paris, gr. in-8°; abonnement annuel 9fr.

Albert Quiquet. — *Aperçu historique sur les formules d'interpolation des tables de survie et de mortalité;* 1 brochure in-8° raisin; prix 3fr; L. Warnier et Cie, éditeurs, 30, rue Le Peletier, Paris.

Albert Quiquet. — *Représentation algébrique des tables de survie et de mortalité. — Généralisation des lois de Gompertz et de Makeham;* 1 vol. in-8° raisin; prix 4fr; L. Warnier et Cie, éditeurs, 30, rue Le Peletier, Paris.

Vaschy. — *Sur la loi de transmission de l'énergie entre la source et le conducteur, dans le cas d'un courant permanent. — Sur la capacité électrostatique d'une ligne parcourue par un courant. — Sur le mode de transformation du travail en énergie électrique. — Calcul des forces auxquelles sont soumis les corps placés dans un champ électromagnétique. — Calcul des forces électromagnétiques suivant la théorie de Maxwell.* (Extraits des *C. R.*).

H. Ceretti. — *Sur une proposition attribuée à Jamblichus;* question posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* par M. Gino-Loria. Rieti, in-8°; 1894.

Formulaire de Mathématiques, publié par la *Rivista di Matematica,* t. I, gr. in-8°, VII-144 pages; Turin, 1895.

Lorenzo Allievi. — *Cinematica della biella piana;* Studio differenziale di cinematica del piano con applicazioni alla costruzione razionale delle guide del movimento circolare e rettilineo. Pet. in-4°; 1 vol., texte 151 p.; 1 vol. planches; Naples, 1895.

Desaint. — *Sur les fonctions entières.* (Extrait des *C. R.*, 11 mars 1895.)

Ed. Maillet. — *Sur les isomorphes holoédriques et transitifs des groupes symétriques ou alternés.* (Extrait du *J. de Math. pures et appliquées,* 1895.)

E. Lemoine. — *Le rapport anharmonique étudié au point de vue de la Géométrographie. Application de la Géométrographie à la Géométrie descriptive;* prix 1fr,25; Paris, 1895. Gauthier-Villars.

CORRESPONDANCE.

Paris, 5 mai 1895.

Mon cher Laisant,

La Préface du premier Volume de l'*Intermédiaire* définit ainsi le but de cette très utile publication :

« Notre but essentiel est de fournir aux personnes qui cultivent habituellement les Mathématiques ou qui s'y intéressent, des renseignements sur des sujets se rapportant à leurs études, des solutions à des questions posées, ou des indications bibliographiques. »

On pourrait ajouter : *l'Intermédiaire insérera les indications de sujets d'étude*. On répondrait ainsi d'avance aux personnes qui disent : Je désire travailler, mais je ne sais quelle recherche entreprendre!

Le développement des réponses aux sujets indiqués ne trouverait pas place dans l'*Intermédiaire*, mais, malgré cela, il y aurait service rendu.

Les questions 89, 103, 235, 253, déjà proposées par MM. Haton de la Goupillière, J. Hirsch, M. Weill, rentrent dans la catégorie des sujets d'étude.

Ces sujets peuvent être de nature très différente. Ainsi, parmi eux on peut ranger la question relative au *Concours général des Lycées*, mentionnée sur la couverture du numéro d'avril dernier.

En voici un nouveau [1]. Si vous approuvez mon idée, vous pourriez insérer cette lettre.

Votre bien dévoué, Mannheim.

Nous ne saurions assez remercier notre éminent Correspondant pour l'excellente idée qu'il veut bien nous communiquer, et que nous approuvons absolument. Les questions précédées du titre Sujet d'étude, et dont nous inaugurons aujourd'hui la publication par l'énoncé de M. Mannheim et par quelques autres, figureront comme les questions ordinaires dans la première Partie de notre Recueil, sans numérotage particulier, afin d'éviter des complications matérielles. Mais il est bien entendu à l'avance qu'aucune réponse correspondante, à proprement parler, ne paraîtra dans l'*Intermédiaire*. Nous nous bornerons à de rapides indications bibliographiques pour signaler, s'il y a lieu, les travaux qui pourront être publiés ailleurs sur les sujets indiqués.

Les *Sujets d'étude* ne porteront pas les indications du répertoire bibliographique, leur classification pouvant varier dans bien des cas, suivant la manière de traiter la question indiquée. Les Rédacteurs.

[1] On le trouvera d'autre part (question 571).

QUESTIONS.

571. — Sujet d'étude. — Étude des singularités des courbes enveloppées par les droites d'un plan glissant sur lui-même et qui est entraîné par une de ses droites, laquelle roule sur une courbe donnée possédant elle-même des singularités. Mannheim.

572. — Sujet d'étude. — Quand on descend un peu rapidement dans un puits de mines, on éprouve une surdité croissante et très gênante, que l'on combat efficacement en exécutant périodiquement le mouvement de déglutition de la salive, de manière à faire jouer les cavités internes de l'oreille pour y rétablir le régime momentanément troublé des pressions.

On pourrait peut-être essayer de soumettre au calcul cette influence très complexe, en faisant appel aux physiologistes pour la position très précise de la question, et tenant compte des lois connues de l'accroissement de densité de l'air suivant le niveau et de la variation de la température du globe aux grandes profondeurs, plus ou moins atténuée, parfois même effacée par la ventilation artificielle. Haton de la Goupillière.

573. — Sujet d'étude. — La couverture de l'*Intermédiaire* d'avril 1895 contient la mention suivante : « Un correspondant anonyme nous adresse une question demandant ce qu'ont produit les prix d'honneur du *Concours général des Lycées,* en Mathématiques spéciales. Il peut y avoir là une étude intéressante à faire; mais ..... » Selon moi, cette étude rentre directement dans le programme de l'*Intermédiaire,* car elle ne peut aboutir que par le concours de plusieurs personnes ayant des sources d'information différentes. Je tiens à faire savoir que, ayant entrepris la refonte et la mise à jour du *Répertoire de l'École Polytechnique* pour les 16000 élèves reçus de 1794 à 1894 [1], je suis en mesure de répondre *complètement* à la

[1] La première Partie du *Répertoire*, publiée dans l'*Annuaire de l'École Polytechnique* pour 1895, a paru à la Librairie militaire Charles Lavauzelle, 11, place Saint-André-des-Arts.

question posée pour tous les prix d'honneur de Mathématiques spéciales entrés à l'École Polytechnique.

Je demande qu'on fasse la même recherche (beaucoup moins longue) pour tous ceux qui sont entrés à l'École Normale, section des Sciences, et il est probable que la question posée sera entièrement résolue. Je la reprends donc à mon compte.

H. Tarry.

574. **[19c]** Dans la Table que j'ai publiée au Congrès de Caen (*A. F.*, 1894), pour vérifier le théorème de Goldbach : que tout nombre pair 2N est de plusieurs façons la somme de deux nombres premiers, Table que j'ai poussée jusqu'à $2N = 1000$, je remarque empiriquement que, si j'appelle n_{2N} le nombre de décompositions en une somme de deux nombres premiers dont 2N est susceptible, on a pour toute valeur de p, à partir de $p=4$ et y compris $p=4$,

$$n_{6p} > n_{6p-2} \qquad \text{et} \qquad n_{6p} > n_{6p-4},$$

c'est-à-dire que des maxima relatifs de n ont lieu de 3 en 3 pour les multiples de 6 dans toute l'étendue de la Table.

Il serait extrêmement intéressant de savoir si cette propriété est générale et aussi, à défaut de démonstration, de continuer la Table jusqu'à $2N = 2000$ pour confirmer ou infirmer la loi.

George Cantor (Halle a. Saale).

575. **[A3e]** Étant donnés dans un plan m points P_1, P_2, P_3, ..., P_m considérés comme les m racines de l'équation

$$= z^m - \frac{m}{1} a_1 z^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 z^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a_3 z^{m-3} + \ldots,$$

en général, l'un des deux points définis comme $\sqrt{a_2}$, l'un des trois points définis comme $\sqrt[3]{a_3}$, etc., se trouvera plus près du point $Q_1 = a_1$ que les autres points du même groupe; soient Q_2, Q_3, ..., Q_m, respectivement, ces points, et

$$= z^m - \frac{m}{1} b_1 z^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} b_2 z^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} b_3 z^{m-3} + \ldots$$

l'équation qu'ils vérifient : sera-t-il alors toujours possible de déduire du système $(Q) = Q_1 Q_2 Q_3 \ldots Q_m$ un nouveau système (R) de la même manière que le système (Q) a été déduit du système (P), et ainsi de suite? Pourrait-on prouver aussi que l'équation de rang de plus en plus éloigné

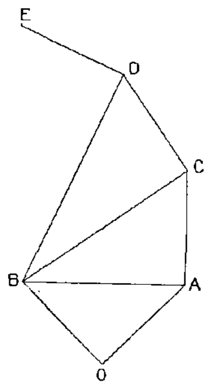
$$o = z^m - \frac{m}{1} g_1 z^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} g_2 z^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} g_3 z^{m-3} + ..$$

tend à devenir de la forme

$$o = z^m - \frac{m}{1} t z^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} t^2 z^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} t^3 z^{m-3} + \ldots = (z-t)^m$$

et, en admettant que les points P_1, P_2, P_3, .., P_m soient des déterminations expérimentales d'un point P, le point limite T peut-il être considéré comme *la meilleure* détermination de P? On remarquera que si, les axes coordonnés demeurant les mêmes, le système (P) se déplace parallèlement à lui-même, le point T varie relativement à (P); mais cela justement concorde avec la manière de voir signalée, car à ce développement parallèle correspond évidemment une variation dans la *valeur expérimentale* du système (P) qui doit avoir sa répercussion sur la détermination du point final. Enfin, tout ce qui précède étant admis, la *grandeur dirigée* $\overline{Q_1 T}$ peut-elle servir de mesure à ce qu'on vient de nommer la *valeur expérimentale* du système (P)? E. Malo.

576. **[K9]** Étant donné un triangle isoscèle AOB, rectangle en O, on élève en A sur AB, dans le sens ABO, une perpendi-



culaire AC = OA, puis en C dans le sens BAC, on élève à BC une perpendiculaire CD = OA, puis en D on élève à BD une perpendiculaire DE = OA, et ainsi de suite, indéfiniment.

Je demande si l'on peut indiquer l'équation d'une courbe sur laquelle se trouveraient les différents points A, C, D, E, ... Je désire aussi avoir la solution de la même question, en portant les perpendiculaires AC, CD, DE, ... dans le sens opposé à celui des triangles ABO, BAC, BCD, ... E.-N. Barisien.

577. **[K11]** J'ai trouvé que, parmi les propriétés d'un système de cercles ou d'un cercle seul, beaucoup peuvent être démontrées stéréométriquement (définition et propriétés de l'axe radical, pôle et polaire, etc.) sans le secours de propositions dépendant de l'axiome XI d'Euclide. Quelque géomètre s'est-il occupé aussi de ces études? Dr Ventura Reyes Prosper (Cuença).

578. **[V1a]** Il n'est probablement pas de mathématicien qui, surtout arrivé à un certain âge, ne sente l'utilité qu'il y aurait à ce que les imprimeurs adoptassent, pour les exposants, les indices et les coefficients fractionnaires de petit œil, des types de caractères prêtant moins à confusion que ceux que l'on emploie trop souvent aujourd'hui. Ce serait peut-être là une des questions *pratiques* les plus importantes que pourrait régler le futur Congrès des mathématiciens; mais il conviendrait sans doute de l'étudier d'avance. Quelque savant autorisé serait-il disposé à s'en occuper? Paul Tannery.

579. **[V7]** Dans des lettres inédites, écrites en 1676 par Ozanam à Jacques de Billy, j'ai trouvé d'une part le symbole $\backsim$ comme signe d'égalité, et d'un autre côté les exposants écrits sur la ligne, après la lettre affectée : ainsi $8x\,2y\,2$ signifie $8x^2y^2$. Quelque correspondant a-t-il rencontré, dans des ouvrages imprimés du xviie siècle, l'une ou l'autre de ces notations?

Paul Tannery.

580. **[O2p]** A-t-on étudié les courbes engendrées par le roulement d'une spirale logarithmique sur une courbe de même nature? Paul Tannery.

581. **[K13a]**. Je demande à un lecteur si les formules (4) et (5) de la réponse à la question 405 (voir pages 198 et 199 ci-après) sont nouvelles, ou bien si elles ont été déjà données quelque part. G. Kœnigs.

582. **[D2]**. Étant donnée une série équiconvergente dans une région déterminée, fonction d'une ou de plusieurs variables,

est-il toujours possible de l'exprimer sous forme d'intégrale définie? Dans l'affirmative, existe-t-il une méthode générale pour le faire, ou des principes sur lesquels on puisse s'appuyer? Dans la négative, quelles sont les conditions auxquelles elle doit être astreinte? C. COUTURIER (Louvain).

583. **[O5a].** Pour mieux faire comprendre le volume dont je demande l'expression, j'emprunterai une image à l'Astronomie. On sait que le Soleil se meut avec tout son système de planètes suivant une certaine ligne qu'on croit être droite. La Terre tourne autour du Soleil, et la Lune autour de la Terre. Par la droite suivant laquelle le Soleil se meut, et par le centre de la Terre, je fais passer un plan. Par la même droite et le centre de la Lune, je fais passer un plan. Ces deux plans coupent respectivement la sphère terrestre et la sphère lunaire suivant deux cercles. Quelle est l'expression du volume décrit par chacune de ces sections circulaires dans l'espace, pendant un temps déterminé? C. COUTURIER (Louvain).

584. **[L^{1}17e].** $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0$ représentant les équations de trois coniques, par quelle condition est-il exprimé qu'il y a une conique doublement tangente à chacune d'elles?

E. LEMOINE.

585. **[V7].** Les dates relatives à la naissance et à la mort de Jean de Céva semblent avoir échappé aux recherches les plus minutieuses. Voici ce que déclare à ce sujet l'un des auteurs les plus complets et les plus autorisés (ARGELATI, *Biblioteca Scriptor. Mediolanensium*, 1745, t. I, pars II, p. 418) :

« Sui ingenii plura monumenta dedit, quae omnia ad nos forsan adhuc non pervenerunt, quod dolentes dicere cogimur non de scriptis tantùm, *sed etiam de illius actis, annoque postremo;* quæ omnia tametsi *anxie* quæsiverim ab amicis *Mantuæ degentibus,* attamen usque adhuc incassum cessit desiderium meum. »

Après cette déclaration, Argelati renvoie aux *Addenda* et aux Appendices, où il consignera les renseignements ultérieurs qui pourraient lui parvenir. Les Appendices sont absolument muets touchant Jean de Céva. Il serait intéressant de combler cette lacune historique. *H. Braid.*

RÉPONSES.

299. (*Alauda*). — *Réponse partielle.* — Dans son Mémoire *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit an Berichtung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte* (*Crelle*, t. 37, p. 161-192), Steiner a considéré les polygones de périmètre maximum inscrits et les polygones de périmètre minimum circonscrits à une ellipse. Dans les *Wiskundige Opgaven*, publiés par la Société Math. d'Amsterdam, t. III, p. 252, j'ai démontré que le périmètre d'un polygone de n côtés circonscrit à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-k^2)} = 1$$

a pour valeur minimum $-2na\left[\frac{d \log \vartheta_2(u)}{du}\right]_{u=\frac{\pi}{n}}$ (mod k), où

$\vartheta_2(u) = \Sigma 2 q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} \cos(2n+1)u.$ J.-C. Kluyver (Leyde).

337. (*Gallois*). — L'intégrale $\int \frac{\log(1+x)}{x}dx$ est une des transcendantes logarithmiques

$$L^n(1 \pm x) = \pm \frac{x}{1^n} - \frac{x^2}{2^n} \pm \frac{x^3}{3^n} - \ldots,$$

dans laquelle $n = 2$.

Dans un essai publié en 1809, William Spence (1777-1815) discute longuement ces fonctions et dispose en forme de Tables les valeurs de $L^2(1+x)$ et de $L^3(1+x)$ de $x = 0$ jusqu'à $x = 100$.

Il discute aussi la fonction

$$C^n(x) = \frac{x}{1^n} - \frac{x^3}{3^n} + \frac{x^5}{5^n} - \ldots,$$

et dispose en forme de Tables les valeurs de $C^1(x)$ de $x = 0$ jusqu'à $x = 100$.

Les essais réunis de Spence furent réimprimés en 1820 (rédigés par Sir John Herschel) par Oliver and Boyd, Edinburgh, chez qui on peut les obtenir. De Morgan les mentionna dans son *Diff. and Int. Calculus*, p. 658, et donna des formules additionnelles; Gregory y fit allusion dans ses *Exemples of the Calculus*, p. 518.
A.-S. Ramsey (Édimbourg).

342. (J. Duran-Loriga). — 1° Pour 9 points, il y a 632 solutions symétriques deux à deux par rapport à la diagonale 1-5-9, savoir :

196 commençant par 1-2 ou 1-4,
140 » » la petite diagonale 1-5,
296 » » une grande diagonale 1-6 ou 1-8.

Au point de vue du chemin parcouru, il y a à considérer, pour les distances des points, trois grandeurs différentes :

c, distance horizontale ou verticale de deux points voisins 1-2, 1-4, 5-8... $= c$
d, petite diagonale 1-5, 2-6, 5-7... $= c\sqrt{2}$
D, grande diagonale 1-6, 1-8, 3-4... $= c\sqrt{5}$

Cela posé, le Tableau suivant donne la répartition des 632 solutions d'après la nature du chemin parcouru; les divers chemins y sont rangés par ordre de grandeur en commençant par le plus court.

Rang par ordre de longueur.	Lignes dont le chemin se compose c.	d.	D.	Nombre de solutions.	Rang par ordre de longueur.	Lignes dont le chemin se compose c.	d.	D.	Nombre de solutions.
1	4	4	»	4	8	3	2	3	164
2	5	2	1	40	9	4	»	4	24
3	6	»	»	8	10	1	4	3	32
4	3	4	1	32	11	2	»	4	108
5	4	2	2	124	12	3	»	5	12
6	5	»	3	20	13	»	4	4	8
7	2	4	2	44	14	1	2	5	12

Les chemins les plus courts sont ceux qui sont composés de $4c + 4d$; il y en a 4; les plus longs sont ceux qui se composent de $1c + 2d + 5$D; il y en a 12.

2° Les chemins formés uniquement de diagonales se composent de $4d + 4$D et ont tous la même longueur; il y en a 8.

3° L'extension de ces résultats au cas général de n^2 points paraît difficile.
C. Moreau.

350. (J. Perott). — Une méthode pratique, basée sur les propriétés des fractions numériques, se trouve indiquée dans le *Cours de Mécanique et Machines de l'École des Ponts et Chaussées*, par M. Bresse (1882-1883, p. 123-129). L'auteur y expose la solution pratique des problèmes de l'horloge lunaire, par les engrenages ordinaires ou par des trains épicycloïdaux.

Voir aussi le *Traité d'horlogerie moderne*, de M. Claudius Saunier (Paris, 1875). La même question paraît y être étudiée (p. 592-599); cependant elle n'est pas examinée en tous détails. L'auteur dit (p. 599) : « Il n'entre pas dans notre cadre de nous occuper du calcul des rouages compliqués, tels, par exemple, que ceux des systèmes planétaires. Les horlogers désireux d'aborder ce genre de construction devront avoir recours aux ouvrages de A. Janvier et se procurer l'excellent volume publié par M. Achille Brocot, sous le titre : *Calcul des rouages par approximation*. » Et en note, il ajoute : « Antide Janvier, né à Saint-Claude-du-Jura en 1751, mort en 1853, s'est rendu célèbre par ses succès dans la représentation des mouvements célestes à l'aide du mécanisme des rouages. Il joignait à une rare intelligence une instruction mathématique supérieure. » Nous retrouvons donc ici l'ouvrage déjà mentionné de M. Brocot (t. I, 1894, p. 67 et 125). M. Saunier termine son Traité, p. 802-804, par la description (avec planche) du calendrier perpétuel de M. Brocot, et il donne l'indication des rouages nécessaires à la représentation des divers mouvements, phases de la Lune, équation du temps, quantièmes, etc.

Enfin, une bibliographie déjà ancienne de la question est donnée dans le *Manuel de l'horloger* de L.-S. Le Normand (*Encyclopédie Roret*, 1830, p. 225-226) après un exposé élémentaire de quelques problèmes parmi les plus simples (p. 210-223).
H. Brocard.

351. (H. Laurent). — La réponse que j'ai faite à la question 244 (B. Niewenglowski), et qui, se trouvant un peu longue pour l'*Intermédiaire*, a été insérée dans le J. S. (janvier 1895), prouve la réalité des racines de l'équation indiquée. Quant à leur grandeur, il est clair qu'entre les nombres $-m^p$

et $-m^{p-1}$ il y a au moins une racine, puisque $-m^p$ est la somme des racines et $-m^{p-1}$ leur valeur *moyenne*, si l'on peut ainsi dire. Du reste, au moyen des principes exposés par M. Carvallo dans sa thèse, on a, pour les valeurs des racines en question, prises positivement

$$\left(\frac{m}{1}\right)^p, \quad \left(\frac{m-1}{2}\right)^p, \quad \left(\frac{m-2}{3}\right)^p, \quad \ldots, \quad \left(\frac{2}{m-1}\right)^p, \quad \left(\frac{1}{m}\right)^p,$$

avec une approximation relative d'autant plus grande que m et p sont eux-mêmes plus grands. E. Malo.

On peut démontrer la proposition plus générale suivante :

L'équation

$$(\mathrm{A}) \quad x^m + \frac{m^p}{1^q} a x^{m-1} + \frac{[m(m-1)]^p}{(1.2)^q} a^2 x^{m-2} + \ldots + \frac{(m!)^q}{(m!)^q} a^m = 0$$

a toutes ses racines réelles. Dans ma réponse à la question **244**, t. II, p. 70, j'ai montré que les deux équations

$$(1) \quad x^m + \Sigma a m x^{m-1} + \Sigma ab\, m(m-1) x^{m-2} + \ldots + abc\ldots kl m! = 0,$$

$$(2) \quad x^m + \frac{\Sigma a}{1} x^{m-1} + \frac{\Sigma ab}{1.2} x^{m-2} + \ldots + \frac{abc\ldots kl}{m!} = 0$$

ont l'une et l'autre toutes leurs racines réelles, $a, b, c, \ldots, k, l$ étant des quantités arbitraires, mais réelles.

On pourra adopter dans (1) et dans (2) pour $\Sigma a, \Sigma ab, \ldots$ les coefficients d'une équation quelconque de degré m, si l'on sait qu'elle a toutes ses racines réelles.

Portons dans (1), par exemple, les coefficients du développement de $(x+a)^m$; l'équation résultante sera

$$x^m + \frac{m^2}{1} a x^{m-1} + \frac{[m(m-1)]^2}{1.2} a^2 x^{m-2} + \ldots + \frac{(m!)^2}{m!} a^m = 0,$$

et elle aura toutes ses racines réelles.

Nous pouvons alors adopter pour $\Sigma a, \Sigma ab, \ldots$ les coefficients de cette dernière et les porter dans (2) qui deviendra

$$x^m + \frac{m^2}{1^2} a x^{m-1} + \frac{[m(m-1)]^2}{(1.2)^2} a^2 x^{m-2} + \ldots + \frac{(m!)^2}{(m!)^2} a^m = 0,$$

et aura toutes ses racines réelles.

Ces coefficients, substitués à Σa, Σab, ... dans (1) ou dans (2), donneront lieu à la formation d'équations nouvelles ayant toujours toutes leurs racines réelles. On peut indéfiniment continuer ces substitutions. On remarquera que par la substitution dans (1) aux Σa, Σab, ... des coefficients de la dernière équation formée, on augmente d'une unité le degré de la puissance des numérateurs des coefficients dans l'équation nouvelle, et que, par la même opération effectuée dans (2), on augmente d'une unité le degré de la puissance des dénominateurs. On peut opérer de la sorte p fois dans (1) et q fois dans (2) et, quelle que soit la marche adoptée, le résultat sera (A). Faisant ensuite $\alpha = 1$, $q = p$, on voit que l'équation

$$(3)\quad x^m + \left(\frac{m}{1}\right)^p x^{m-1} + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^p x^{m-2} + \ldots + \left(\frac{m}{1}\right)^p x + 1 = 0$$

aura toutes ses racines réelles. Les dérivées de tout ordre de (3) auront aussi toutes leurs racines réelles et comprises entre les mêmes limites que celles des racines de cette fonction. Or la dérivée d'ordre $m-1$ a pour racine unique $-m^{p-1}$, nombre entier qui peut prendre une infinité de valeurs. AUDIBERT.

Le cas de $p = 2$ a été proposé par M. H. Laurent dans les *Nouvelles Annales* (1870, p. 420). Dans les *Wiskundige Opgaven*, 1893, n° 117, j'ai énoncé le théorème un peu plus général :

L'équation

$$(1)\quad 1 + C_{m,1}C_{n,1}z + C_{m,2}C_{n,2}z^2 + \ldots + C_{m,m}C_{n,m}z^m = 0 \quad (n \geqq m)$$

a toutes ses racines réelles.

Voici ma démonstration, qui établit un lien entre les polynomes de M. Laurent pour $p = 2$ et les polynomes de Legendre.

Considérons l'équation $y = (z-a)^m(z-b)^n = 0$. D'après le théorème de Rolle, l'équation $y' = 0$ a $(m-1)$ racines a, $(n-1)$ racines b et une racine c comprise entre a et b ; l'équation $y'' = 0$ a $(m-2)$ racines a, $(n-2)$ racines b, une racine entre a et c, et une racine entre c et b. En continuant ainsi, on voit que l'équation $y^{(m)} = 0$ a $(n-m)$ racines b et m racines comprises entre a et b. Or, si l'on pose $u = (z-a)^m$, $v = (z-b)^n$, le binome de Leibniz donne

$$\frac{d^m(uv)}{dx^m} = v\frac{d^m u}{dz^m} + \frac{m}{1}\frac{dv}{dz}\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + \ldots.$$

Le terme général de ce développement est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\frac{d^p v}{dz^p}\frac{d^{m-p}u}{dx^{m-p}}$$
$$=\frac{P_m}{P_p P_{m-p}}\times p(n-1)\ldots(n-p+1)(z-b)^{n-p}$$
$$\times m(m-1)\ldots(p+1)(z-a)^p$$
$$=P_m C_{n,p} C_{m,m-p}(z-b)^{n-p}(z-a)^p.$$

Par suite $$\frac{y^{(m)}}{P_m(z-b)^n}=\sum_{p=0}^{p=m} C_{n,p} C_{m,m-p}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^p,$$

pourvu que $C_{n,0}=C_{m,0}=1$. L'équation $y^{(m)}=0$ ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$(2)\quad \Sigma C_{n,p} C_{m,p}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^p=0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma C_{n,p} C_{m,p} z^p=0,$$

si l'on fait $$\frac{z-a}{z-b}=z.$$

Les racines de l'équation $y^{(m)}=0$ étant comprises entre a et b, les valeurs de z sont comprises entre 0 et $-\infty$.

M. Mantel, pour démontrer notre théorème, considère l'expression $Y=1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}z^2+\ldots$, qui se réduit au polynome (1) pour $\alpha=-m$, $\beta=-n$, $\gamma=1$, et montre qu'on peut appliquer le théorème de Sturm à la suite $Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(m)}$, si l'on fait varier z entre 0 et $-\infty$.

J. Neuberg (Liège).

358. (Gino Loria). — La formule

$$Q=\frac{a_1+a_2}{2}\frac{b_1+b_2}{2}$$

représente la demi-somme des aires des triangles rectangles construits sur deux côtés consécutifs du quadrilatère, comme côtés de l'angle droit. Or, cette demi-somme, qui est égale à l'aire du quadrilatère, dans le cas du rectangle, lui est évidemment supérieure dans tous les autres cas.

Le quadrilatère d'aire maxima parmi ceux qui ont les mêmes côtés étant inscriptible, le rapport $\frac{Q}{A}$ (A étant l'aire d'un quadrilatère ayant les côtés donnés) est $\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$, α et β désignant deux angles non opposés du quadrilatère inscriptible.

WELSCH.

Un quadrilatère dont les côtés sont donnés a sa surface maxima quand il est inscriptible : cette surface maxima peut, d'autre part, se mettre sous la forme $S=\sqrt{(s^2-d_1^2)(s_1^2-d^2)}$; puisque les facteurs sous le radical sont nécessairement positifs, on peut poser $\frac{d_1}{s}=\cos\alpha$, $\frac{d}{s_1}=\cos\alpha_1$, $S=ss_1\sin\alpha\sin\alpha_1$.

La surface d'un quadrilatère est donc toujours inférieure au produit ss_1, à moins qu'il ne soit inscriptible et que l'on n'ait simultanément $d=0$, $d_1=0$, ce qui le définit comme rectangle.

PAUL TANNERY.

On démontre aisément que le rectangle est le seul quadrilatère dont l'aire est exprimée par cette formule, en partant du théorème que de tous les triangles, dont deux côtés sont constants, le triangle rectangle a l'aire la plus grande.

Soient ABCD le quadrilatère et $AB=a_1$, $DC=a_2$, $AD=b_1$, $BC=b_2$. On a : aire $ABD\leq\frac{1}{2}a_1b_1$, aire $BDC\leq\frac{1}{2}a_2b_2$, aire $ABC\leq\frac{1}{2}a_1b_2$, aire $ADC\leq\frac{1}{2}a_2b_1$ et

$$\text{aire } ABCD\leq\tfrac{1}{2}a_1b_1+\tfrac{1}{2}a_2b_2+\tfrac{1}{2}a_1b_2+\tfrac{1}{2}a_2b_1,$$

ou

$$\text{aire } ABCD\leq\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}.$$

Seulement, quand les angles A, B, C, D sont 90°, c'est-à-dire quand le quadrilatère est un rectangle, on a

$$\text{aire } ABCD=\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}$$

et dans tous les autres cas : aire $ABCD<\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}$.

Quant au cas d'un triangle, on n'a jamais aire $ABC=\frac{a}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}$, parce que, en prenant le côté a pour base, on doit avoir, pour que cette relation existe, $\frac{b_1+b_2}{2}=h_a$; mais on a $b_1\geq h_a$, $b_2\geq h_a$ et jamais $b_1=b_2=h_a$; donc on n'aura jamais $\frac{b_1+b_2}{2}=h_a$, mais toujours $\frac{h_1+h_2}{2} > h_a$ et, par conséquent,

$$\text{aire ABC} < \frac{a}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}.$$

W.-A. POORT (Groningue).

Le plus grand quadrilatère que l'on puisse former avec les longueurs a_1, a_2, b_1, b_2 est le quadrilatère inscriptible, dont la surface est donnée par la formule

$$S = \sqrt{(p-a_1)(p-a_2)(p-b_1)(p-b_2)},$$

p désignant le demi-périmètre, formule que l'on peut écrire ainsi : $S = \frac{1}{4}\sqrt{[(a_1+a_2)^2-(b_1-b_2)^2][(b_1+b_2)^2-(a_1-a_2)^2]}$.

Or, le produit $\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}$ est supérieur à S ; car il est visible que l'on a

$$(a_1+a_2)^2(b_1+b_2)^2 \\ > [(a_1+a_2)^2-(b_1-b_2)^2][(b_1+b_2)^2-(a_1-a_2)^2].$$

Cette inégalité ne se change en égalité que dans le cas où $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. Donc le rectangle est le seul quadrilatère dont la surface puisse être exprimée par le produit $\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}$.

E. FAUQUEMBERGUE.

Permutons les côtés a_1 et b_1 sans changer la diagonale qui les sous-tend : les côtés a_1 et a_2, b_1 et b_2 deviennent adjacents, et la surface du quadrilatère ne change pas. Si alors nous faisons varier les côtés de façon que les sommes a_1+a_2 et b_1+b_2 restent constantes sans changer la diagonale qui sépare les côtés a_1 et a_2 des côtés b_1 et b_2, le quadrilatère sera maximum, quand on aura $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. Permutons maintenant de nouveau les côtés a_1 et b_1 sans changer la diagonale qui les sous-tend : le quadrilatère devient un parallélogramme de même surface, dont les côtés sont égaux à $\frac{a_1+a_2}{2}$ et $\frac{b_1+b_2}{2}$. Si alors on fait varier les diagonales sans changer les côtés, le parallélogramme sera maximum quand il sera rectangle, et sa surface sera égale à $\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}$. Donc, pour tous les quadrilatères autres que le rectangle, la surface est inférieure à $\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2}$.

Note. — Dans l'*Aperçu historique* (p. 428 et suivantes), Chasles parle de la formule en question. A. GOULARD.

MM. FAUQUEMBERGUE et GOULARD ont, en outre, adressé des réponses, parvenues depuis les précédentes, et que nous ne pouvons reproduire après celles-ci.

365. (HATON DE LA GOUPILLIÈRE). — Nous sommes entièrement de l'avis de M. Haton de la Goupillière et nous nous joignons à lui pour souhaiter que les mots *sécante* et *cosécante* disparaissent de l'enseignement.

BRUNEL, RAYET, HADAMARD, J. MORISOT, LUC PICART,
Membres de la Faculté des Sciences de Bordeaux.
JUNG (Milan).

Le professeur Davide Besso, dans ses excellents *Éléments de Trigonométrie plane,* publiés à Rome en 1880, ne fait aucune mention des deux fonctions *sécante* et *cosécante.* Le vœu exprimé par M. Haton de la Goupillière est donc, en partie du moins, un fait accompli. G. RUSSO (Catanzaro).

Au sujet de la question proposée par M. Haton de la Goupillière, qu'il me soit permis de signaler que mon *Introduccion a la Astronomia fisica,* édité à Barcelone en 1889, et où j'expose un abrégé de la Trigonométrie, ne contient plus les notions de sécante et cosécante, qui semblent à tout jamais bannies des calculs pratiques. Quant à celle de sinus verse, je me permets de faire remarquer au savant mathématicien qu'elle est réellement utile, ainsi que le prouve l'application qu'en fait M. Serres dans ses *Tables condensées* pour le calcul de la hauteur, de la latitude, de l'azimut et de l'angle horaire, éléments qui intéressent également la navigation et l'astronomie sphérique. J.-J. LANDERER (Valence, Espagne).

Le désir exprimé par M. Haton de la Goupillière a déjà été réalisé officiellement dans le programme du cours de Trigonométrie pour la classe de seconde moderne. D'ailleurs les deux excellents Traités de Trigonométrie dus à M. Combette et à M. Vacquant, et destinés à cette classe, passent sous silence les deux fonctions sécante et cosécante, si justement déclarées inutiles par le savant auteur de la question 365. ED. LAURENS.

Je n'hésite pas à joindre mon humble avis à celui de M. Haton de la Goupillière. Dans mon cours de Mathématiques élémentaires, au lycée de Marseille, je ne parle de la sécante et de la cosécante que pour mémoire, en me bornant à les définir et à démontrer qu'elles sont respectivement égales aux inverses du cosinus et du sinus : cela est nécessaire pour que les élèves puissent comprendre ces expressions quand ils les rencontrent dans les Ouvrages ou les Recueils qu'ils peuvent consulter, et cela est suffisant pour les besoins des examens. Quant à la suppression radicale de la sécante et de la cosécante, j'avoue que je la regretterais pour la commodité de la notation dans certaines équations ou certaines formules. A. GOULARD.

La condamnation prononcée contre les sécantes et cosécantes semble excessive. La simplicité de leurs relations avec les sinus et cosinus les rend, en effet, peu utiles pour les géomètres, mais aussi peu encombrantes pour la mémoire. Les calculateurs et, en particulier, les astronomes, en font assez grand usage, comme on peut en voir de nombreux exemples dans le *Traité de la détermination des orbites* d'Oppolzer. Elles permettent d'éviter les dénominateurs dans certaines formules, ce qui est commode au point de vue typographique et dispense le calculateur de prendre un complément, économie de temps qui devient appréciable à la longue. C'est par ce motif que Hoüel les a rétablies dans ses Tables de logarithmes à cinq décimales.

Quant aux sinus verses, ils sont encore moins inutiles. On peut voir, par exemple, dans Faye (*Astronomie nautique,* p. 341) le grand service qu'ils rendent dans le calcul des distances lunaires. Plus généralement, lorsqu'un triangle sphérique est donné par deux côtés et l'angle compris et qu'on a besoin seulement du troisième côté, cas très fréquent, les Tables de sinus verses naturels et de leurs logarithmes donnent le moyen le plus rapide de faire le calcul. L. VICAIRE.

De nombreuses réponses, la plupart favorables à la Thèse de M. Haton de la Goupillière, nous ont été données, soit par écrit, soit verbalement, en dehors des précédentes. Nous nous permettrons de citer seulement les noms de MM. MANNHEIM et PICQUET. Au fond, il nous semble que les divergences sont moins profondes qu'on ne pourrait le croire entre les diverses opinions exposées. Il n'est pas douteux que des Tables de sécantes, de cosécantes, de sinus verses, et peut-être d'autres fonctions, peuvent être utiles pour certains calculs. Mais est-il nécessaire d'introduire ces fonctions *dans l'enseignement* ordinaire de la Trigonométrie? Nous croyons avec l'auteur de la question que c'est une surcharge complètement inutile, et l'exemple des sinus verses vient précisément à l'appui de cette opinion. Cette fonction peut être très utile, on a raison d'en former des Tables, mais on n'en prononce pas même le nom, du moins en France, dans l'enseignement actuel de la Trigonométrie.

La Rédaction.

370. (G. Russo). — On sait que la formule de Stirling ne peut donner la valeur de $n!$, pour une valeur déterminée de n, avec telle approximation qu'on veut, parce que θ n'est connu que sous la forme d'une série semi-convergente. Plusieurs géomètres ont tâché de déterminer le maximum d'approximation. Je me borne à citer (de mémoire) Félix Chio, qui a traité la question dans les *Actes de l'Académie des Sciences* de Turin.

Rosace.

373. (H. Brocard). — Le Bulletin *Oud-Holland* [3e année, 1885, Appendice (Bylage)] a publié le journal de Constantyn Huygens, secrétaire particulier des princes d'Orange, père du célèbre Christian Huygens. On lit, à la date du 9 décembre 1632, cette mention : « Obit heu! Albus Girardus, vir incomparabilis. »

En 1632, Constantyn Huygens résidait à La Haye, et Girard probablement à Leyde. Voici, en effet, une autre indication.

Le 19 décembre 1629, le même Constantyn Huygens écrivait à Golius, qui venait de remplacer Snellius dans la chaire de Mathématiques à Leyde. Il l'exhortait à s'occuper surtout de la dioptrique et il ajoutait : « Aliquid mecum nuper circa theoriam istam communicavit vir stupendus Albertus Girardus, qui cum utinam collatis consiliis, una aliquando ut scriberes adduci possis! Terræ globum movere, si detur ubi stetis, ambo valetis. Quædam ille perfunctoriè et quodammodo mechanice observare cæperat, quibus, ni fallor, amplioris saltem indaginis ansam peridoneam dedit. At nudis refractionum incrementis ac horum proportionibus incubuerat. Ego vere etiam aliquid hic physici requiro, et de causarum causis ab origine mihi satisfieri velim. »

La lettre manuscrite se trouve dans les Archives de l'Académie des Sciences à Amsterdam. Il s'agit bien d'une application de la loi de réfraction, découverte indépendamment par Descartes et Snellius, à la dioptrique. Autant que je sache, on ignorait que Girard se fût occupé de cette Science. Sur Constantyn Huygens comme amateur des Sciences exactes et sur ses relations avec les physiciens de son époque, on peut consulter une étude que j'ai publiée dans le tome XXII des *Archives néerlandaises*. KORTEWEG (Amsterdam).

383. (LUCIEN LÉVY). — Il n'y a pas 3^8, mais seulement 92 coniques rencontrant huit droites. On peut consulter sur la question Lüroth (*Cr.*, t. LXVIII) et Hierholzer (*M. A.*, t. II). Ces auteurs donnent aussi des propositions sur les coniques rencontrant six ou sept droites. Voir aussi SCHUBERT, *Kalcul der abzählenden Geometrie*, p. 95). J. KLUYVER (Leyde). G. HUMBERT.

402. (A. BOUTIN). — Le *Go-bang* qui se vend, depuis cinq ou six ans, à Paris, comporte 40 jetons de chaque couleur et un nombre de cases pratiquement illimité. Les cases sont carrées et l'on peut admettre des files de jetons parallèles soit aux côtés et aux diagonales (c'est la règle ordinaire), soit seulement aux côtés des carrés. Pour varier ce jeu, à l'usage de mes enfants, j'ai construit, en outre, un damier à cases hexagonales, qui peut être employé aussi de deux manières, selon qu'on admet des files de jetons parallèles aux côtés et aux diagonales des hexagones (6 directions) ou seulement aux côtés (3 directions). Cela fait en tout quatre manières de jouer le *Go-bang* et je n'en vois pas d'autre, au moins en se bornant à des damiers à deux dimensions. Le nombre de jetons à mettre en file n'est pas nécessairement cinq; il peut être quelconque. CH. RABUT.

L'*Intermédiaire des Mathématiciens* m'ayant révélé l'existence du *Go-bang*, jeu de combinaisons récemment importé du Japon et à peu près inconnu en France, je me suis mis à sa recherche. On peut se le procurer, à Paris, à la *Neal's library*, rue de Rivoli, 246, avec une Notice anglaise. Il est aussi édité, comme tous les autres jeux de combinaisons, par Watilliaux, rue Vieille-du-Temple, 110, et mis en vente dans les grands bazars parisiens (Hôtel de Ville, etc.), accompagné de la règle du jeu, en français. Il se joue avec un nombre *quelconque* de jetons, sur un carton divisé en un nombre *quelconque* de cases.

La Notice anglaise, fort mal rédigée d'ailleurs, dit que le jeu de Gobang (en un ou deux mots) peut être joué « by two or more persons on a board divided into 200 squares ». En réalité, les cartons qui accompagnent le jeu, à la librairie anglaise, contiennent soit $16^2 = 256$ cases, soit $18^2 = 324$, soit $20^2 = 400$.

La règle, très courte, qui accompagne les jeux fabriqués à Paris, dit plus clairement : « Le plateau est divisé en *un certain nombre de carrés*. Les joueurs, adoptant chacun une couleur, prennent *une quantité égale de jetons*. Chacun alors, alternativement, place un jeton sur un carré du plateau, et la partie est gagnée par le joueur qui en place *cinq* consécutifs de sa couleur sur une ligne droite parallèle aux bords ou aux diagonales du plateau. »

Les jeux français contiennent, dans une boîte, un échiquier en carton, plié en 4, de 400 cases, et 4 séries, de couleurs différentes, de 50 jetons chacune (parfois un de plus ou de moins).

Dans la pratique, lorsqu'on joue le Go-bang à deux, il est rare, à moins qu'on n'ait fait une étude très attentive de ce jeu, qu'on arrive à placer chacun plus de 25 jetons avant la fin de la partie, et qu'on atteigne les bords de l'échiquier, car il y a évidemment avantage à se placer au centre; c'est pourquoi le nombre des cases de l'échiquier et des jetons de chaque joueur n'a aucune importance, et pourquoi l'essai qu'on peut faire de ce jeu, avec un damier de 100 cases trop restreint, ne donne qu'une idée incomplète de la variété de ces combinaisons ([1]).

Il est facile de voir que celui qui joue le premier peut toujours placer 3 jetons consécutifs en ligne droite au troisième coup, et qu'il ne faut qu'un très petit nombre de coups joués correctement pour en placer 4 à la file sur une ligne droite parallèle au bord de l'échiquier ou à ses diagonales. Pour 5 pions consécutifs, si l'adversaire joue correctement, il en faut beaucoup plus, peut-être 30 ou 40, ou même davantage.

Bien que ce jeu soit d'une simplicité enfantine, et que le gain de la partie semble dû au hasard pour les commençants, il est très curieux, parce qu'il exige une extrême attention lorsque le nombre de pions placé est considérable; il est alors encore plus

---

([1]) Nous conseillerons plutôt de faire un jeu de Go-bang avec du papier quadrillé et des pains à cacheter.

difficile qu'au jeu des échecs, de jouer sans faute le coup correct. Aussi, tout en étant beaucoup moins sérieux que le jeu des échecs, il est bien plus animé que le jeu de dames, et a d'ailleurs sur eux l'avantage qu'il peut s'apprendre en quelques minutes et que les parties sont très courtes. Il n'est pas rare, en effet, lorsqu'on joue avec un adversaire inexpérimenté, de gagner au septième ou au huitième coup. Le Go-bang mérite donc toute l'attention des amateurs de la géométrie de l'échiquier, et, pour provoquer son étude, nous avons posé une question (434) aux lecteurs de l'*Intermédiaire* (t. II, p. 11).

H. TARRY.

Note. — Si l'on joue le Go-bang sur le damier ordinaire de 100 cases avec chacun 20 dames, dès qu'on aura un peu l'habitude du jeu, les 40 pions seront posés sur le damier sans qu'aucun des adversaires ait réussi à placer 5 de ses pions en file ininterrompue. Le jeu se continue alors, chaque joueur devant, à partir de ce moment, placer son pion sur toute case vide immédiatement voisine, par un côté ou par un angle, jusqu'à ce que l'un des adversaires ait réussi à mettre 5 de ses pions en file ininterrompue. Cette phase de la partie est fort intéressante et se prête à de très multiples combinaisons. E. LEMOINE.

405. (E. LEMOINE). — Soient X, Y, Z, L, M, N les projections et les moments par rapport aux axes de coordonnées d'un segment S porté par une droite Δ; les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de cette droite vérifient, comme on sait, les équations

$$(1)\quad L - Zy + Yz = 0, \quad M - Xz + Zx = 0, \quad N - Yx + Xy = 0,$$

lesquelles sont compatibles et même indéterminées en vertu de l'équation

$$(2)\qquad LX + MY + NZ = 0,$$

qui doit avoir lieu entre les projections et les moments du segment. Donnons-nous de même un second segment S' porté par la droite Δ', et affectons de l'indice *prime* toutes les quantités se rapportant à ce segment. L'équation

$$(3)\quad X'(L - Zy + Yz) + Y'(M - Xz + Zx) + Z'(N - Yx + Xy) = 0,$$

est l'équation du plan mené par Δ parallèlement à Δ'.

Soit un troisième segment S'' porté par une droite Δ'' et cherchons les coordonnées du point P'' de rencontre de Δ'' avec le plan précédent. Les coordonnées x'', y'', z'' de ce point doivent vérifier, outre l'équation (3), les équations de la droite Δ'' qui se déduisent des équations (1) en changeant X, Y, ..., en X'', Y'', ... En posant

$$D = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix},$$

$$\Pi(\Delta, \Delta') = LX' + MY' + NZ', \quad \Pi(\Delta', \Delta) = L'X + M'Y + N'Z \ldots,$$

on trouve

$$\begin{aligned} Dx'' &= -X.\Pi(\Delta'', \Delta') + X'.\Pi(\Delta'', \Delta) + X''.\Pi(\Delta, \Delta'), \\ Dy'' &= -Y.\Pi(\Delta'', \Delta') + Y'.\Pi(\Delta'', \Delta) + Y''.\Pi(\Delta, \Delta'), \\ Dz'' &= -Z.\Pi(\Delta'', \Delta') + Z'.\Pi(\Delta'', \Delta) + Z''.\Pi(\Delta, \Delta'). \end{aligned}$$

De même, les coordonnées x''_1, y''_1, z''_1 du point Q'' de rencontre de Δ'' avec le plan mené par Δ' parallèlement à Δ seront

$$\begin{aligned} D.x''_1 &= -X.\Pi(\Delta'', \Delta') + X'.\Pi(\Delta'', \Delta) - X''.\Pi(\Delta', \Delta), \\ D.y''_1 &= -Y.\Pi(\Delta'', \Delta') + Y'.\Pi(\Delta'', \Delta) - Y''.\Pi(\Delta', \Delta), \\ D.z''_1 &= -Z.\Pi(\Delta'', \Delta') + Z'.\Pi(\Delta'', \Delta) - Z''.\Pi(\Delta', \Delta). \end{aligned}$$

Les projections $x'' - x''_1$, $y'' - y''_1$, $z'' - z''_1$ du segment $Q''P''$, que j'appelle aussi Σ'', seront donc

$$x'' - x''_1 = \frac{X''}{D}\mathfrak{M}(\Delta, \Delta'), \quad y'' - y''_1 = \frac{Y''}{D}\mathfrak{M}(\Delta, \Delta'), \quad z'' - z''_1 = \frac{Z''}{D}\mathfrak{M}(\Delta, \Delta'),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\Delta, \Delta') = \mathfrak{M}(\Delta', \Delta) &= \Pi(\Delta, \Delta') + \Pi(\Delta', \Delta) \\ &= LX' + MY' + NZ' + L'X + M'Y + N'Z, \end{aligned}$$

en sorte que (voir mes *Leçons de Cinématique*, p. 17) $\mathfrak{M}(\Delta, \Delta')$ est le moment des segments S, S'. Les coordonnées (projections et moments) du segment Σ'' se déduiront donc de celles du segment S'' en multipliant ces dernières par la quantité

$$\lambda'' = \frac{\mathfrak{M}(\Delta, \Delta')}{D}.$$

De même, les plans menés par Δ'' parallèlement à Δ' et par Δ' parallèlement à Δ'' découpent sur Δ un segment Σ, dont les coordonnées se déduiront de celles du segment S en multipliant les coordonnées de S par le nombre

$$\lambda = \frac{\mathfrak{M}(\Delta', \Delta'')}{D}.$$

Observons maintenant que le volume du parallélépipède construit sur les droites Δ, Δ', Δ'' n'est autre que le moment des segments Σ, Σ''; il a donc pour expression $\lambda\lambda''\mathfrak{M}(\Delta, \Delta'')$, c'est-à-dire, en remplaçant λ, λ'' par leurs expressions,

$$(4) \qquad V = \frac{\mathfrak{M}(\Delta, \Delta')\,\mathfrak{M}(\Delta', \Delta'')\,\mathfrak{M}(\Delta, \Delta'')}{D^2}.$$

Telle est l'expression du volume du parallélépipède construit sur trois droites Δ, Δ', Δ'' définies par les coordonnées de trois segments S, S', S'' dont elles sont les lignes d'action.

Supposons actuellement, comme le désire M. Lemoine, que la droite Δ, par exemple, soit donnée comme intersection des plans $ax + by + cz + d = 0$, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$. On formera X, Y, Z, L, M, N au moyen de ces expressions; il suffira pour cela de chercher les projections de la droite sur les trois plans de coordonnées; on trouve ainsi, comme il est connu,

$$X = bc_1 - cb_1, \qquad Y = ca_1 - ac_1, \qquad Z = ab_1 - ba_1,$$
$$L = da_1 - ad_1, \qquad M = db_1 - bd_1, \qquad N = dc_1 - cd_1,$$

et de même pour les deux autres droites Δ', Δ''. Si l'on calcule la quantité $\mathfrak{M}(\Delta, \Delta')$, on trouve le déterminant

$$\mathfrak{M}(\Delta, \Delta') = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a' & b' & c' & d' \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \end{vmatrix}$$

et de même pour $\mathfrak{M}(\Delta, \Delta'')$, $\mathfrak{M}(\Delta', \Delta'')$.

Le numérateur de V est ainsi le produit de trois déterminants; quant à D, il devient évidemment

$$D = \begin{vmatrix} bc_1 - cb_1 & ca_1 - ac_1 & ab_1 - ba_1 \\ b'c'_1 - c'b'_1 & c'a'_1 - a'c'_1 & a'b'_1 - b'a'_1 \\ b''c''_1 - c''b''_1 & c''a''_1 - a''c''_1 & a''b''_1 - b''a''_1 \end{vmatrix}.$$

De la sorte, on a finalement

$$(5)\quad V = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a' & b' & c' & d' \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 \\ a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} bc_1 - cb_1 & ca_1 - ac_1 & ab_1 - ba_1 \\ b'c'_1 - c'b'_1 & c'a'_1 - a'c'_1 & a'b'_1 - b'a'_1 \\ b''c''_1 - c''b''_1 & c''a''_1 - a''c''_1 & a''b''_1 - b'a''_1 \end{vmatrix}}.$$

Cette formule résout complètement la question posée par M. Lemoine.

G. Kœnigs.

On trouvera la solution de ce problème dans un travail intitulé : *Sur le système de quatre droites dans l'espace*, qui paraîtra bientôt dans la *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*.

J. Franel (Zurich).

Par l'$i^{\text{ième}}$ $(i = 1, 2, 3)$ des droites données menons un plan parallèle à la $k^{\text{ième}} (k \gtrless i)$; on aura en tout six plans (les six faces du parallélépipède cherché) dont les équations sont

$$\begin{vmatrix} A'_i & B'_i & C'_i \\ A_k & B_k & C_k \\ A'_k & B'_k & C'_k \end{vmatrix} (A_i x + B_i y + C_i z + D_i) - \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_k & B_k & C_k \\ A'_k & B'_k & C'_k \end{vmatrix} (A'_i x + B'_i y + C'_i z + D'_i) = 0.$$

La question est alors réduite à calculer le volume du parallélépipède déterminé par trois couples de plans parallèles. Soient, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} (r)' \qquad & a_r x + b_r y + c_r z + d'_r = 0 \\ (r)'' \qquad & a_r x + b_r y + c_r z + d''_r = 0 \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, 3)$$

les équations de ces trois couples de plans. Le volume cherché est alors six fois le volume du tétraèdre dont les sommets sont les points

$$(1)'(2)'(3)'; \quad (1)''(2)'(3)'; \quad (1)'(2)''(3)'; \quad (1)'(2)'(3)'',$$

dont les coordonnées se calculent très facilement. A l'aide de ces valeurs et par quelques transformations de déterminants, on arrive à l'expression cherchée, qui est la valeur absolue du quotient

$$\frac{(d''_1 - d'_1)(d''_2 - d'_2)(d''_3 - d'_3)}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

GINO LORIA. (Gênes.)

Une réponse, que nous mentionnons seulement, pour abréger, nous a été adressée par M. F. BUCCA (Palerme).

470. (C$^{\text{te}}$ ANTONINO DI PRAMPERO). — *Note.* — Ce problème a été résolu (*M.*, 1886, p. 124) dans le cas particulier où toutes les sphères sont égales. J'ai démontré que 12 est le nombre maximum de sphères tangentes à une sphère donnée, égales à celle-ci et qui ne se pénètrent pas. E. FAUQUEMBERGUE.

521. (*Nauticus*). — Une information de M. Curjel (Chester College) m'apprend que le théorème suivant — qui, sans être celui dont il s'agit, est de la même famille — s'est présenté incidemment à M. Segar, au cours d'autres recherches : *Le produit des différences de n nombres entiers inégaux est divisible par n* — 1!!, c'est-à-dire par 2! 3! ... $n - 1$!

La proposition n'est qu'énoncée, en passant, dans le t. XXII du *Messenger of Mathematics* (année 1892, p. 57), mais M. H.-W. Segar en a donné la démonstration à la page 31 du t. XXIII du même Recueil (1893).

Je me fais un devoir de porter ce renseignement à la connaissance des correspondants de l'*Intermédiaire*. *Nauticus.*

Voir, à ce sujet, une Communication de M. l'amiral DE JONQUIÈRES, faite à l'Académie des Sciences (*C. R.*, séances des 25 février et 11 mars 1895).

LA RÉDACTION.

QUESTIONS.

586. **[U2]** Pour le calcul définitif de la valeur de l'excentricité de l'orbite de la comète de 1771, il serait utile de pouvoir consulter les registres originaux contenant les observations de Messier et qui sont égarés depuis longtemps. Nous recevrons avec reconnaissance, soit par la voie du journal, soit directement à l'Observatoire, toutes les indications qui pourraient nous être données au sujet de ces registres.

G. Bigourdan.

587. (S) **[K9aα]** Deux figures polygonales A et B, de même surface mais de formes quelconques différentes, étant données, connaît-on un moyen *général* de diviser A en figures polygonales qui, groupées autrement, formeraient B?

E. Guitel.

588. **[E5]** Par un procédé détourné, que je tiens d'ailleurs à la disposition du correspondant qui voudrait le connaître, j'ai trouvé qu'en posant

$$X = \frac{at^4(t^2+3)}{t^2(t^2+3)^2+4}, \qquad Y = \frac{2at^3}{t^2(t^2+3)^2+4},$$

on a

$$\int_{t=0}^{t=\infty} Y\,dX = \frac{\pi a^2}{48}.$$

Un correspondant peut-il calculer directement cette intégrale définie?

Onponale.

589. **[E1a]**. Entre les deux valeurs $-n$ et $-(n+1)$ de x, il y en a une x_n pour laquelle $\operatorname{mod}\Gamma(x)$ est minimum. A-t-on étudié quelque part la suite des quantités x_n et celle des minima correspondants?

J.-C. Kluyver (Leyde).

590. **[D2c]** Il y a dans l'Algèbre de M. H. Laurent, 3e édition, IIe Partie, une question ainsi posée : « x étant moindre

que 1 en valeur absolue, trouver la valeur du produit :

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\ldots(1-x^{2^n})\ldots \text{»}$$

Je désirerais savoir si cette limite est susceptible d'une expression en termes finis. Je n'ai obtenu à cet égard que des résultats négatifs.

Son développement est lié à l'arithmétique binaire. Si l'on représente par s_n la somme des chiffres significatifs du nombre n écrit dans le système binaire, on a le développement

$$P = \sum_0^\infty (-1)^{s_n} x^n$$

Mais cela ne semble pas avancer la question; je crois avoir démontré autrefois que la limite n'est pas une fonction rationnelle de x. Le logarithme de P ne semble pas plus aisément être obtenu sous forme finie, etc., de sorte que je ne vois pas quelle peut être la nature du résultat. J. SADIER.

591. **[X4]** Un correspondant peut-il me dire s'il existe quelques publications françaises ou italiennes sur le Calcul graphique des probabilités et des erreurs?

G. LUZÓN (Tolède).

592. **[K5c]** Un correspondant pourrait-il démontrer géométriquement que, si deux triangles homologiques ABC et $A_1B_1C_1$ ont leurs côtés perpendiculaires, l'axe d'homologie passe à égale distance des orthocentres et les sépare?

Dans le cas où $A_1B_1C_1$ se réduirait à un point O du cercle ABC, le théorème devient la propriété connue de la droite de Wallace. P. SONDAT.

593. **[V6]** Une *Histoire des Mathématiques*, manuscrite, de BERNARDINO BALDI (1553-1617) était, d'après Max. Marie, entre les mains du prince Boncompagni en 1883. Qu'est-elle devenue?

Setnof.

594. **[X5]** Édouard Lucas a annoncé dans diverses publications que M. Genaille devait lui fabriquer une machine, qui permettrait de vérifier très rapidement les assertions du P. Mersenne, concernant les nombres de la forme 2^n-1 pour tous les nombres premiers qui n'ont pas plus de 150 chiffres. Cette ma-

chine a-t-elle été construite? Si oui, quels résultats a-t-elle donnés pour la nature de ces nombres? E. FAUQUEMBERGUE.

595. **[I19a]**. Résoudre complètement, en nombres entiers, le système d'équations $8x+1=y^2$, $8x^2+1=z^2$. (Édouard Lucas a remarqué que toutes les équations de ce genre qu'il avait résolues, avaient un nombre limité de solutions.) *Pierref.*

596. **[Q1a]** Comment peut-on établir le plus simplement la correspondance point par point et d'une façon univoque :

1° Entre un plan de l'espace euclidien et un plan d'un espace non euclidien déterminé?

2° En général, entre l'espace euclidien et un espace non euclidien déterminé? PAUL TANNERY.

597. **[L¹5e]** On construit, en coordonnées rectangulaires, une série de courbes telles que

$$dy_n^2 = dy_{n-1}^2 + dx^2, \qquad \ldots, \qquad f(x, y_0) = 0.$$

Si la courbe y_0 est une conique rapportée à ses axes (ou à des parallèles à ces axes), il en est de même des courbes $y_1, \ldots, y_n$. Ya-t-il d'autres formes (non linéaires) de l'équation $f(x, y_0) = 0$ qui jouissent d'une propriété analogue? PAUL TANNERY.

598. **[I2d]** Quelles sont les Tables d'intérêts composés, d'annuités, etc., publiées en France et à l'étranger, autres que celles de Péreire et de Violeine? En particulier, en existe-t-il pour tous les taux compris entre 3 et 4 pour 100, et progressant de 0,01 en 0,01 : 3,01 pour 100; 3,02 pour 100; 3,03 pour 100, etc.? Sinon, quelles sont les Tables qui présentent le plus petit intervalle entre deux taux consécutifs? A. QUIQUET.

599. **[R2bα]** Si l'on suppose qu'en chaque point d'une courbe la densité est inversement proportionnelle à la longueur du rayon de courbure, toute courbe fermée admet le même centre de gravité que sa développée.

Connaît-on ce théorème, dont je voudrais une démonstration directe? ERNEST DUPORCQ.

600. **[K20e]** Un correspondant pourrait-il donner une solution de la question suivante : Connaissant une hauteur, une médiane et une bissectrice, partant chacune d'un sommet différent d'un triangle, résoudre le triangle? A. REBIÈRE.

601. **[J2c]**. *Réussite.* — On abat quatre cartes d'un jeu de piquet. Si elles sont de quatre couleurs différentes, la réussite est manquée. Si elles sont toutes quatre de même couleur, on place dessus quatre cartes tirées du jeu. Si deux ou trois de ces cartes sont de même couleur, on met sur deux d'entre elles deux autres cartes tirées du jeu, et ainsi de suite.

On demande la probabilité de faire la réussite, c'est-à-dire que, jusqu'à l'épuisement des cartes, il n'y aura à aucun moment, sur les paquets, quatre cartes de couleurs différentes.

H. Delannoy.

602. **[J2c]**. *Réussite.* — On répartit les cartes d'un jeu de piquet par paquets de trois (le dernier n'a que deux cartes).

S'il y a deux cœurs dans un même paquet, on retire celui qui a la valeur la plus élevée (l'as est la carte la plus forte). On recommence jusqu'à ce que l'on ait retiré cinq cœurs.

On demande la probabilité que ces cinq cartes formeront une quinte majeure. H. Delannoy.

603. **[J2c]**. *Réussite.* — On abat six cartes d'un jeu de piquet. S'il y en a deux ou plusieurs de même valeur, on les superpose sur l'une d'elles et l'on met, sur les places vides, d'autres cartes tirées du jeu.

Si l'un des paquets se compose de quatre cartes de même valeur, on le retire et, sa place étant devenue vacante, on y met une carte tirée du jeu.

Quand les six cases sont occupées par des cartes de valeur différente, si l'on tire une carte dont la valeur diffère de celles des paquets, la réussite est manquée. On demande la probabilité de faire la réussite. H. Delannoy.

604. **[V7]**. Dans l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla (2^e édition, vol. II, p. 107), en parlant du géomètre espagnol Hugues Omerique, auteur de l'*Analysis geometrica, seu vera methodus resolvendi tam problemata geometrica quam arithmeticas quæstiones*, *Pars I*, *De Planis*, imprimé à Cadix en 1698, on dit qu'il mérita les éloges de Newton. Y aura-t-il quelque lecteur de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* qui ait l'obligeance de nous dire dans quel ouvrage du grand mathématicien anglais, et à quel endroit, se trouvent ces éloges?

A. Berenguer (Tolède).

605. [Q4b]. *Problème des reines.* — Le problème qui consiste à placer n reines sur l'échiquier, sans qu'aucune d'elles soit en prise par les autres, a donné lieu à de nombreux travaux qu'il y aurait lieu de poursuivre (¹) :

1° Dans le cas d'un échiquier *carré* de n^2 cases, le problème n'a encore été résolu que jusqu'à $n = 11$. Dans ce dernier cas, le nombre des solutions est 2680.

Pour $n = 12$, j'ai trouvé qu'il y a 248 solutions commençant par 1, c'est-à-dire en plaçant la première reine sur une des cases de la première colonne verticale. On demande combien il y a de solutions commençant par 2, par 3, ..., par 12?

Dans le cas d'un échiquier *rectangulaire* de m sur n cases, le nombre des solutions est donné, en fonction de n, par des formules spéciales à chaque valeur de m. Ces formules sont trouvées jusqu'à $m = 4$ (²). On demande la formule pour $m = 5$, c'est-à-dire le nombre de dispositions de n reines sur un échiquier ayant 5 colonnes de n cases. H. Tarry.

606. [Q4b]. Dans une partie d'échecs, le *coup du berger*, par lequel les blancs font mat le roi noir au 7ᵉ coup (4ᵉ des blancs), en portant indistinctement la dame ou le fou blanc à la 2ᵉ case du pion du fou du roi noir, est réputé le mat le plus prompt. C'est une erreur.

L'examen de tous les coups qui peuvent se produire au commencement d'une partie (voir question 304) montre qu'il y a 4 parties différentes qui peuvent se terminer au 4ᵉ coup (2ᵉ des noirs), par le mat du roi blanc au moyen de la dame noire seule portée à la 5ᵉ case de la tour noire.

On demande : 1° Combien il y a-t-il de parties d'échecs différentes qui peuvent être terminées au 5ᵉ, au 6ᵉ et au 7ᵉ coup? 2° Combien il y a de diagrammes ou dispositions distinctes des pièces et pions sur l'échiquier après le 5ᵉ, le 6ᵉ et le 7ᵉ coup, qui représentent ces différents mats?

Un même diagramme peut correspondre à un nombre diffé-

(¹) *Voir* notamment le Mémoire du général Parmentier au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences. Reims, 1880, et Lucas, *Récréations mathématiques*, 1891, 1ᵉʳ volume.

(²) Lucas, *Ibid.*, page 231.

rent de coups, ou à un même nombre de coups différents, ou enfin aux mêmes coups dont l'ordre seul est interverti.

La théorie mathématique du jeu d'échecs consisterait à résoudre cette question pour le cas de n coups, lorsque n atteint une valeur qui, pour les bons joueurs, dépasse rarement 80 (40 de chaque couleur). H. TARRY.

607. [I] Quels sont les Ouvrages définitifs de Legendre sur l'Arithmétique, c'est-à-dire ceux que doit mettre aujourd'hui dans sa bibliothèque un amateur qui veut étudier la théorie des nombres, sans faire de la bibliographie? A. GOULARD.

608. [V9] Chasles, dans l'Avertissement qui figure en tête de la deuxième édition de son *Aperçu historique*, etc., parle d'un *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, entrepris sous le ministère et sur la demande de M. Duruy.

(L'Avertissement porte la date du 20 mai 1875.)

Ce Rapport a-t-il été publié? Où? Quand? Sous quel titre?

Milo.

609. [V9] Quelqu'un pourrait-il donner des indications précises, bien que sommaires, sur la vie et les travaux d'Évariste Galois? *Muller.*

610. [D1dδ] Étant donnée une fonction algébrique z de deux variables indépendantes x et y, et s'annulant pour $x=0$, $y=0$, existe-t-il une méthode analogue à celle de Newton pour développer z par rapport aux puissances croissantes de x et de y, le développement étant valable dans les environs du système $x=0$, $y=0$? PAPELIER.

611. [L¹16b] Les correspondants qui connaîtraient, sur les cercles concentriques à l'ellipse et ayant pour rayons $(a+b)$ et $(a-b)$ des propriétés autres que celles qui sont insérées dans l'article publié récemment sur ce sujet, dans *Mathesis* (p. 129, année 1895), sont priés de les adresser à la Rédaction de l'*Intermédiaire*, ou à l'auteur soussigné, 6, rue Chomel, à Paris.

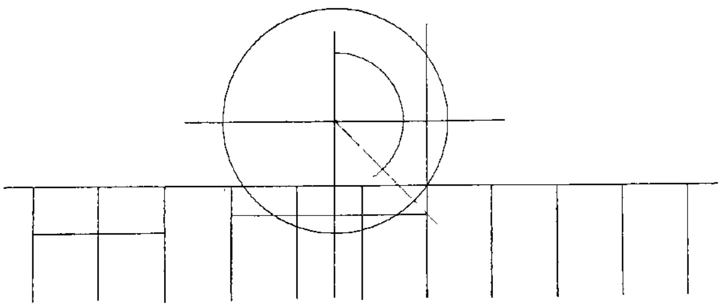
Ces propriétés, résumées dans un second article, permettront de compléter la monographie de ces cercles intéressants.

E.-N. BARISIEN.

RÉPONSES.

35. (Javary). — *Troisième réponse.* — Le temple de Débot, en Nubie, a été fondé par le roi éthiopien *Adjakhramen,* qui avait élevé dans cette localité une simple chapelle consistant en une chambre unique. Plus tard, sous le règne de Ptolémée Philométor, cette chapelle fut agrandie, le mur qui fermait le sanctuaire fut percé et deux salles furent construites en prolongement de la chambre primitive. En même temps le monument fut élargi et flanqué de chambres et de couloirs; une salle s'éleva en avant de la construction primitive, salle munie de colonnes dont les chapiteaux jonchent encore le sol, enfin trois pylônes successifs furent érigés; le second de ces pylônes porte encore les débris de l'inscription dédicatoire tracée par Ptolémée Philométor. On ne peut donc douter que la construction de l'ensemble de l'édifice remonte à l'époque de ce prince.

Or, dans le couloir ménagé au sud de la chapelle d'Adjakhramen, on peut voir, sur la paroi nord, l'épure ci-jointe se rappor-



tant vraisemblablement à quelque partie de la construction. Peut-être s'agit-il de rabattements de colonnes. Cette hypothèse m'a porté à prendre les mesures de quelques chapiteaux fort endommagés qui se trouvent encore épars en avant du sécos.

Diamètres des chapiteaux au collet :

N° 1 : $0^m,78$; N° 2 : $0^m,80$; N° 3 : $0^m,63$.

Ce troisième chapiteau est en assez bon état pour nous donner les dimensions du dé dont le côté est de $0^m,63$ et la diagonale de $0^m,89$.

Peut-être avec ces données pourra-t-on déterminer dans quel but l'épure avait été tracée. En tous cas, c'est un document prouvant qu'en Égypte, à l'époque grecque, certains problèmes de construction étaient géométriquement résolus [1].

BOURIAUT.

36. (A. CORNU). — *Deuxième réponse.* — C'est à partir de 1820 que l'étude des caustiques s'est généralisée, grâce aux belles recherches de Sturm et de Quételet. Voici quelques indications bibliographiques :

Sturm. — Annales de Gerg. t. XIV, p. 205, « Recherches sur les caustiques » ; p. 238, « Recherches d'Analyse sur les caustiques planes ». — Journal de Liouville t. III, p. 357 ; « Mémoire sur l'Optique » (caustiques).

Quételet a publié de nombreux articles sur les caustiques dans sa « Correspondance mathématique » (1825-1839); ses travaux les plus importants sur la matière sont résumés dans le Mémoire « Sur une nouvelle manière de considérer les caustiques » (Mém. de l'Acad. de Brux., t. III, 1826).

Paul Serret. — « Des méthodes en Géométrie »; deuxième Partie, Ch. II.

Genocchi. — « Annali di Matematica . . . di B. Tortolini, t. IV, p. 97 : « Mémoire sur les caustiques secondaires ».

H. Braid.

56. (C. JUEL). — *Deuxième réponse.* — Par hypothèse, le rayon b du cercle mobile BDM n'a pas de commune mesure avec le rayon a du cercle fixe OAB sur lequel il roule (exté-

---

[1] Une autre figure géométrique de même nature est tracée sur la terrasse du temple d'Edfou, en Égypte; je n'ai pu la recueillir cette année, mais, pour peu qu'elle intéresse les lecteurs de l'*Intermédiaire*, il me sera facile de la publier dans un prochain numéro.

rieurement, par exemple). On en déduit que les arcs de l'épicycloïde couvrent la totalité de la couronne circulaire ($2b$).

Prenons pour pôle le centre O du cercle fixe ([1]), pour axe polaire une droite menée au point fixe donné F. Soit $OF = l$.

La normale en M à l'épicycloïde passe par le point $B(a\cos\theta, a\sin\theta)$ et la tangente en M par le point D, diamétralement opposé à B sur la circonférence BMD. Mais, par hypothèse, la tangente DM doit passer par le point F. Le lieu des points M sera donc le lieu des projections, sur les rayons vecteurs FD, du point B d'intersection de OD avec la circonférence OBA. Si l'on considère le triangle isoscèle DOD′ formé par les deux rayons OD, OD′ et la sécante DD′F, on voit que sur chacune des cordes DD′ passant par F, il existe deux points M, M′ isotomiques. D'autre part, deux points N, N′, projections du point O sur les normales MB, M′B′, appartiennent à la podaire de l'enveloppe de ces droites. Ces points N, N′, étant symétriques par rapport à O, on en déduit que l'enveloppe des droites MB a pour centre O et pour axe de symétrie OX. La question est donc ramenée à chercher la podaire (N, N′).

En posant $ON = \rho$, $DFO = \omega$, $OD'D = \theta$, on a $\rho = a\cos\theta$. Mais $l\sin\omega = (a+2b)\sin\theta$; donc $\rho^2 = a^2 - \dfrac{a^2 l^2}{(a+2b)^2}\sin^2\omega$, ou $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2+y^2) - \dfrac{a^2 l^2 y^2}{(a+2b)^2}$, équation de la forme $(x^2+y^2)^2 = A^2x^2 - B^2y^2$, qui représente la podaire centrale de l'hyperbole ayant pour équation $\dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{y^2}{B^2} = 1$. On a donc

$$A^2 = a^2, \qquad B^2 = \frac{a^2 l^2}{(a+2b)^2}.$$

H. Brocard.

77. (G. Oltramare). — *Troisième réponse.* — En supposant connues deux décompositions en sommes de deux carrés, la question est facile. On trouve la solution d'un problème plus général dans la *Théorie des nombres* de Legendre (3e édition, t. I, p. 310). Mais la solution la plus simple du problème proposé est encore celle du *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. Vuibert (10e année, p. 42). A. Goulard.

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

82. (M. Cantor). — *Deuxième réponse.* — Note. — Une Note sur le théorème dit « de Rolle » a été publiée dans la R. M. S., t. II, p. 276 (1894) et dans les Questions d'Algèbre de G. Maupin, p. 191 (1895). La Rédaction.

91. (Haton de la Goupillière). — *Troisième réponse.* — La question a été abordée dès 1707 par Carré, et reprise en 1778 par l'abbé Bossut (Mémoires de l'ancienne Académie des Sciences). Le travail que j'ai annoncé dans le numéro de juillet 1894 a paru dans les *Acta mathematica* (t. XIX, 1895, p. 201-249). L. Lecornu.

98. (*Macedo*). — *Deuxième réponse.* — Les méthodes que MM. Cailler, C. Moreau, Jan de Vries, Émile Borel, E. Cahen et moi avons données pour résoudre cette question peuvent servir à intégrer l'équation fonctionnelle plus générale

$$\varphi\left(\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}\right)=\frac{a\varphi(x)+b}{a'\varphi(x)+b'}.$$

Ce dernier problème a une signification géométrique importante, car il revient à celui-ci : *Déterminer les lignes invariantes de la transformation*

$$x_1=\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'},\qquad y_1=\frac{a x+b}{a' x+b'}.$$

Or, cette transformation est, dans le plan, la seule crémonienne du premier ordre qui ne soit pas une homographie.

Comme, d'autre part, j'ai déterminé (janvier 1895, p. 32) les lignes invariantes de toute homographie, il s'ensuit que le même problème est résolu pour toutes les crémoniennes du premier ordre. Ch. Rabut.

107. (*Oural*). — *Deuxième réponse.* — Outre les travaux cités (*Intermédiaire,* t. I, p. 250-251) je dois indiquer :

Nasimow, Sur l'intégration de quelques classes d'équations aux dérivées partielles de plusieurs fonctions (avec deux variables indépendantes et du 1er ordre); Moscou, 1881 (en langue russe). Dans le texte, l'auteur indique sur la même question plusieurs travaux de Jacobi, Cauchy, Du Bois-Reymond, Preobragensky, Turquan, Méray et Sonine. Saltykof (Charkow).

Les deux équations proposées peuvent être réduites à une seule équation, du second ordre, *à une inconnue et linéaire.* Il suffit de poser $u = A\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $p^{n+1} = -B\frac{\partial\varphi}{\partial l}$.

En déterminant convenablement les constantes A et B, la première équation est identiquement vérifiée. La seconde devient

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)^{\frac{-n}{n+1}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial l^2} = 0$, et, par la transformation de Legendre, elle prend la forme $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - xy^{\frac{1}{n+1}}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

Le changement de variables

$$u = 2\sqrt{x} + \frac{2n+2}{2n+3}\,y^{\frac{2n+3}{2n+2}}, \qquad v = 2\sqrt{x} - \frac{2n+2}{2n+3}\,y^{\frac{2n+3}{2n+2}}$$

la transforme en la suivante

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{1}{2n+3}\,\frac{1}{u-v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0,$$

à laquelle s'appliquent immédiatement les méthodes connues (*voir* notamment Darboux, *Théorie générale des surfaces*).

Lorrain.

108. (*Rosace*). — *Deuxième réponse.* — Sous le titre de : « Quelques applications de la Physique et des Mathématiques à la Géologie », M. C. Chree, *M. A.*, a publié dans le *Smithsonian Report* de 1891 une étude qui sera très utilement consultée et qui renferme diverses indications bibliographiques (127-153).

A signaler, au *Report* de 1889, une étude de M. Blytt, sur les mouvements de la croûte terrestre (325-375). On y trouve des formules et des évaluations numériques d'un grand intérêt, ainsi que de très utiles références bibliographiques.

Voir aussi, au moins pour mémoire, le *Smiths. Rep.* de 1888 (583-585), *Chronologie de la période humaine,* par M. J.-W. Davis, et dans le *Smiths. Rep.* de 1892, 111-131 un important discours de M. A. Geikie avec mention d'autorités diverses qui ont traité de la durée des époques géologiques.

Je noterai enfin, mais sans pouvoir en préciser le titre, un récent travail de M. C. Walcott, géologue américain : « Sur l'évaluation de l'âge de la Terre ».

H. Brocard.

120. (J. Neuberg). — *Deuxième réponse*. — Note. — *Voir aussi Journal de Mathématiques* de Vuibert, 10e année (1885-1886), p. 96 et p. 114.
G. Delahaye.

128. (Dellac). — *Cinquième réponse*. — La question **128** a déjà reçu plusieurs solutions qui l'élucident à divers points de vue et en montrent l'intérêt; je crois donc que les explications suivantes, en complétant l'indication donnée, t. I, page 172, ne seront pas inutiles.

On a $\dfrac{y(y+y'')}{y^2+y'^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\text{arc tang}\dfrac{y'}{y}+x\right)\cdot$ D'où

$$(1) \qquad \int_a^{a+\pi} \frac{y(y+y'')}{y^2+y'^2}\,dx = \left(\text{arc tang}\frac{y'}{y}\right)_a^{a+\pi} + \pi.$$

Le terme $\left(\text{arc tang}\dfrac{y'}{y}\right)_a^{a+\pi}$ est certainement, en valeur absolue, inférieur à π, si, dans l'intervalle considéré, la fonction $\dfrac{y'}{y}$ ne devient pas infinie, et *même si elle ne prend pas toutes les valeurs réelles, y compris* $+\infty$ *et* $-\infty$. Mais alors l'intégrale de l'équation (1) a une valeur positive, ce qui démontre que l'élément ne peut être constamment négatif. Or, cet élément a le signe de $y(y+y'')$.

Il est maintenant facile de conclure et de compléter la solution. Le calcul précédent est en relation étroite avec le raisonnement géométrique, qui a conduit à la proposition énoncée. Soient, dans une courbe, ω l'angle polaire, u l'inverse du rayon vecteur. Supposons la courbe parcourue dans le sens ω *croissant*. L'angle que forme la direction positive de la tangente avec l'axe polaire a pour valeur : $\alpha = \text{arc tang}\left(-\dfrac{u}{u'}\right)+\omega$.

On a donc $\dfrac{d\alpha}{d\omega} = 1 + \dfrac{uu''-u'^2}{u^2+u'^2} = \dfrac{u(u+u'')}{u^2+u'^2}$.

Suivant que α est une fonction croissante ou décroissante de ω, la courbe est concave ou convexe vers le pôle. Je signale cette proposition, presque évidente géométriquement et qui est peut-être peu remarquée. On voit par ce qui précède que l'intégrale $\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{u(u+u'')}{u^2+u'^2}\,d\omega$ représente l'angle des tangentes aux extrémités de l'arc de courbe compris entre les angles polaires ω_0 et ω_1.

J. LE ROUX.

133. (G. DE LONGCHAMPS). — *Deuxième réponse.*

1re *solution.* — Je trace une droite arbitraire m, qui rencontre les côtés opposés à A, B, C, aux points P, Q, R.

Par le *théorème de Steiner*, sur les quatre circonférences circonscrites aux triangles contenus dans un même quadrilatère, on voit que les circonférences (QRA), (RPB), (PQC) passent par un même point M de la circonférence demandée (ABC). Il s'agit donc de trouver *avec la règle et l'équerre*, les centres O, O' de deux de ces circonférences, par exemple de (PQC) et de (PRB); et de déterminer ensuite le point symétrique de P par rapport à la droite OO' : ce sera le point M cherché. A chaque position de m (les directions de AB, BC, CA exclues) correspond un point M de (ABC), que l'on construira de la même manière.

Pour avoir O, je trace CP' ‖ QP, QP' ‖ CP, et la droite PP' qui coupe CQ à son point milieu D; par D, je mène la parallèle à CP qui coupe PQ à son point milieu E; je trace par D et E les perpendiculaires à QC et à QP : elles se coupent au centre O de la circonférence (PQC). De même, je trouve les points milieux de BR et de PR, et le centre O' de la circonférence (PRB). Enfin, pour avoir le point M, symétrique de P, je trace par P la perpendiculaire à OO', qui rencontre cette droite en F; la parallèle à EF, menée par Q, rencontre PF au point M. En répétant la construction pour obtenir d'autres points M de la circonférence (ABC), on a des simplifications évidentes.

2e *solution.* — Je construis un triangle $\alpha\beta\gamma$ homothétique au triangle donné ABC; la circonférence demandée (ABC) est homothétique, par rapport au même centre de similitude, à la circonférence $(\alpha\beta\gamma)$. Il s'agit de construire $(\alpha\beta\gamma)$ *sans faire usage du compas.* Comme auparavant, par la règle et l'équerre seulement, je place le centre O de cette circonférence. Je place ensuite le sommet δ du parallélogramme $\alpha O\gamma\delta$, en menant par α la parallèle à $O\gamma$, et par γ la parallèle à $O\alpha$, et je trace par γ la parallèle à $O\delta$, qui coupe αO au point α'; on a alors $O\alpha = \gamma\delta = O\alpha'$; $\alpha\alpha'$ est donc un diamètre de $(\alpha\beta\gamma)$. Avec la règle et l'équerre, traçant par α et α' des couples de droites perpendiculaires, j'obtiens, sans compas, par leurs intersections, les points μ de $(\alpha\beta\gamma)$. La transformation homothétique des points μ me donne ensuite les points M de la circonférence cherchée (ABC), et chaque point autre que le premier s'obtient donc par des constructions extrêmement simples. Cette deuxième solution est évidemment de beaucoup plus simple que la première.

G. Jung (Milan).

Pour le cas où elle serait désirée en même temps que l'indication bibliographique demandée, ou à son défaut, voici une solution remplissant les conditions imposées.

Au point A j'élève sur les droites AB, AC respectivement, des perpendiculaires que je coupe en β, γ par une droite mobile restant perpendiculaire à la droite BC. Les triangles ABC, $A\beta\gamma$ ayant leurs côtés deux à deux perpendiculaires, on a sans cesse $A\beta : AB = A\gamma : AC$; d'où l'égalité constante des angles βBA, γCA. L'intersection m des droites mobiles $B\beta$, $C\gamma$ décrit donc la circonférence voulue.

Ch. Méray.

147. (E. Picard). — *Troisième réponse.* — Le seul Ouvrage sur les chiffres qui puisse être comparé à celui de M. Philippe Berger sur l'écriture est : Pihan, *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes* (Paris, 1860). Mais ce n'est guère qu'une suite de tableaux.

L'auteur de la *deuxième réponse* (t. I, p. 219) paraît avoir plutôt eu en vue la question spéciale, encore controversée, de l'ogine de nos chiffres. Quant au desideratum de la production de *fac-simile* de manuscrits de Boèce antérieurs à l'invention de l'imprimerie, je ferai remarquer que de tels *fac-simile* existent depuis longtemps et on les trouvera, pour les cinq manuscrits de Boèce les plus anciens, dans la petite édition Teubner, procurée par Friedlein (1867), lequel ne croyait pas au reste à l'authenticité de la *Geometria* attribuée à Boèce. Il s'agit en fait, pour les partisans de l'origine occidentale de nos chiffres, de prouver l'existence de cette *Geometria* avant Gerbert ou, autrement, d'en produire un manuscrit antérieur à la fin du x^e siècle.

Paul Tannery.

150. (E. Vicaire). — *Deuxième réponse.* — Les Notes ci-après, publiées aux *C. R.*, m'ont paru devoir être signalées comme ayant un certain rapport avec la question 150. Je les

fais donc connaître, dans la pensée que cette indication bibliographique pourra avoir quelque utilité.

B. de Saint-Venant, Méthode pour la résolution par approximations successives, des problèmes à deux inconnues, posés ou non posés en équation, t. LIV, 1862, p. 845-848. *J.-B. Biot*, Mémoire posthume sur l'interpolation des observations physiques, t. LVIII, 1864, p. 766. *C. Dufour*, Sur un théorème d'Algèbre, applicable à la détermination de la température de l'air au moyen d'un thermomètre non équilibré, t. LIX, 1864, p. 1007-1009. *Gavarni*, Des fonctions curvitales, t. LX, 1865, p. 1079-1083. *P. Volpicelli*, Formules pour déterminer la température d'un milieu ambiant sans l'observer, t. LX, 1865, p. 416-419. *H. Léauté*, Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle, t. XC, 1880, p. 1404-1406.

Ce sujet se rapporte à la représentation d'une fonction prenant des valeurs données ainsi que ses dérivées. Une question analogue a été traitée par M. Hermite, comme l'indique la Note suivante :

E. Schering, La formule d'interpolation de M. Hermite exprimée algébriquement, t. XCII, 1881, p. 510-513.

H. Brocard.

155. (Gino Loria). — *Deuxième réponse.* — Je crois utile de revenir sur cette question, à propos d'une erreur qui s'est glissée dans l'énoncé des propositions de M. L. Meurice (Liège) (1895, p. 104). La première suppose : $a - b + 1 > 0$; la deuxième : $\frac{b(b+1)}{2} < ab + 1$, sans que rien implique ces deux conditions.

Je vois dans une de mes Notes de juin 1894, non envoyée à M. Lemoine, qui m'écrivait avoir déjà reçu un nombre considérable de solutions, la démonstration simple des propositions très générales suivantes :

I. *Si l'on considère un système de base a, un nombre* $S = (a-1)n + A$, A *étant positif et inférieur à* $a-1$, *la somme* S_1 *des chiffres de* S *est de la forme* $(a-1)n_1 + A$.

D'où, sous une autre forme, la proposition de M. J. Hurwitz (Halle a. S.).

Comme application, soit $a = 1 + P.Q$.

a. Si l'on considère P nombres consécutifs dont le *plus grand* est divisible par Q, que l'on en fasse la somme, etc., on arrivera à un nombre d'un seul chiffre qui sera

$$P\left(\alpha Q - \frac{P-1}{2}\right) \qquad \text{avec} \qquad \alpha = E\left[1 + \frac{P-1}{2Q}\right].$$

b. Si l'on considère P nombres consécutifs dont le *plus petit* est divisible par Q, on arrivera à un nombre d'un seul chiffre qui sera

$$P\left(\frac{P-1}{2} - \alpha Q\right) \qquad \text{avec} \qquad \alpha = E\left[\frac{P-2}{2Q}\right].$$

Ces propositions me semblent résoudre complètement la question. P.-F. TEILHET.

Signalons encore qu'une réponse à cette question a été publiée par M. H. CERETTI en une intéressante brochure de 11 pages, intitulée : *Sur une proposition attribuée à Jamblichus;* Rieti, in-8°, 1894. LA RÉDACTION.

168. (J. DE VRIES). — *Deuxième réponse.* — Dans le *Z.* (1872, p. 64), on trouve la démonstration suivante du théorème de Wilson, due à M. J. Petersen.

Soit la circonférence d'un cercle partagée en p parties égales (p premier). En joignant les points de division, on forme $\frac{[p]}{2p} = \frac{[p-1]}{2}$ polygones différents dont $\frac{p-1}{2}$ seront réguliers. Les autres seront congruents p à p, si p est facteur de $\frac{[p-1]}{2} - \frac{p-1}{2}$ ou de $[p-2]-1$.

C. JUEL (Copenhague).

171. (O. STOLZ). — Dans ce qui suit, par tous les signes de fonction f, φ, ..., que nous introduisons, seront désignées des fonctions entières à coefficients rationnels. La résultante en x des équations

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

$$(2) \qquad y - \varphi(x) = 0,$$

dont la première est supposée irréductible, est de la forme

$$(3) \qquad [\psi(y)]^k, \qquad k > 1;$$

les racines de l'équation (1) étant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, les fonctions $f(x)$, $\varphi(\xi_1) - \varphi(x)$, ont un diviseur commun, dont le degré en x surpasse l'unité (*voir* par exemple *M. A.*, t. XLI, p. 344). On sait toujours former ce diviseur au moyen d'une suite finie d'opérations rationnelles, si l'expression $\varphi(x)$ est donnée.

Du reste, la résultante des équations (1) et (2) ne peut pas avoir la forme (3) si le groupe de l'équation (1) est primitif (*voir* JORDAN, *Traité des substitutions*, n° 48). Admettons donc qu'on puisse répartir les racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ en systèmes contenant le même nombre de quantités et tels que, dans toutes les substitutions du groupe de l'équation (1), les nombres de chaque système soient remplacés par ceux d'un autre ou permutés entre eux; un de ces systèmes étant composé des racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Soit de plus η une fonction symétrique et rationnelle de ces racines à coefficients rationnels et telle qu'aucune de ses conjuguées ne lui soit égale; alors on aura $\eta = g(\xi_1)$ puisque chaque substitution du groupe de l'équation (1) laissant à sa place la racine ξ_1 ne permute qu'entre elles les quantités $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k$. Les expressions $g(x)$, formées de cette manière en partant de toutes les répartitions possibles des racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ en systèmes tels que ceux décrits tout à l'heure, sont les fonctions les plus générales qui, substituées à $\varphi(x)$ dans l'équation (2), font que la résultante de celle-ci et de l'équation (1) soit de la forme (3).

J'ai traité une question un peu plus générale en 1887 (*M. A.*, t. XXX, p. 182). KNESER (Dorpat).

173. (CARVALLO). — *Deuxième réponse.* — Une réponse de M. Picard est insérée au *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXII, n° 6, p. 103; 20 juin 1894. E. CARVALLO.

176. (G. DE ROCQUIGNY). — *Deuxième réponse.* — REMARQUE. — En parcourant la *N. C.* je trouve (II, 96) le nombre $2^{127} - 1$ cité comme premier par Ed. Lucas. Or c'est Ed. Lucas lui-même qui, onze ans plus tard (*M.*, 1887), cite $2^{61} - 1$ comme le plus grand nombre premier connu. Il y a donc une erreur dans la *N. C.*; il peut être utile de la signaler. *H. Braid.*

190. (H. LEZ). — *Deuxième réponse.* — En cherchant, dans le système (1°) les valeurs de x et y en φ et r, il vient, après transformations de produits en sommes

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{y}{2} = r(\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi), \qquad \frac{x}{2} = r(\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi);$$

en y changeant $\cos\varphi$ en $-\cos\varphi$, on obtient le système

$$\frac{y}{2} = r(\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi), \qquad -\frac{x}{2} = r(\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi),$$

ce qui fait voir que les résultants des systèmes (1°) et (2°) sont de même forme, et que le résultant de (1°) s'obtiendra en remplaçant dans celui de (2°) y par $\frac{y}{2}$ et x par $\frac{x}{2}$.

Le système (2°) équivaut à

$$(\alpha)\qquad \frac{y^2}{r^2} = (1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)^3,$$

$$(\beta)\qquad \left(\frac{x}{r} + \frac{1}{2}\right) = \cos\varphi(1+\cos\varphi);$$

divisant membre à membre les deux équations, il vient

$$(\gamma)\qquad \frac{2y^2}{r(2x+r)} = \frac{(1-\cos\varphi)^2}{\cos\varphi},$$

que l'on joindra à (β); on aura, de la sorte, le système

$$(\beta)\qquad \cos^2\varphi + \cos\varphi - \left(\frac{x}{r} + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$(\gamma)\qquad \cos^3\varphi - 3\cos^2\varphi + \cos\varphi\left[3 + \frac{2y^2}{r(2x+r)}\right] - 1 = 0,$$

dont le résultant est

$$16y^4 + 8y^2(4x^2 + 24rx + 9z^2) + (2x-3r)^3(2x+r) = 0.$$

Celui du système (1°) est donc, d'après ce que nous venons d'exposer,

$$y^4 + 2y^2(x^2 - 12rx + 9r^2) + (x-r)(x+3r)^3 = 0.$$

Remarque. — L'élimination de $\frac{\varphi}{2}$ dans le système (1°) peut se faire directement suivant la méthode assez simple que voici. Posons, pour simplification : $\frac{y}{r} = y_1$, $\frac{x}{r} = x_1$. Par des substitutions évidentes, on a

$$y_1 \cos\frac{\varphi}{2} = (9 - x_1)\sin\frac{\varphi}{2} - 12\sin^3\frac{\varphi}{2},$$

$$-y_1 \sin\frac{\varphi}{2} = 4\cos^3\frac{\varphi}{2} - (3 + x_1)\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Multiplions, puis divisons membre à membre ces deux équations; il vient

$$-y_1^2 = \left[(9 - x_1) - 12\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]\left[4\cos^2\frac{\varphi}{2} - (3 + x_1)\right],$$

$$-1 = \frac{(9 - x_1)\sin^2\frac{\varphi}{2} - 12\sin^4\frac{\varphi}{2}}{4\cos^4\frac{\varphi}{2} - (3 + x_1)\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

système que l'on ramènera aisément à celui-ci :

$$48\sin^4\frac{\varphi}{2} - 16\sin^2\frac{\varphi}{2}(3 - x_1) + (y_1^2 + x_1^2 - 10x_1 + 9) = 0,$$

$$8\sin^4\frac{\varphi}{2} - 4\sin^2\frac{\varphi}{2} + (x_1 - 1) = 0,$$

qui conduit au résultant

$$y_1^4 + 2y_1^2(x_1^2 - 12x_1 + 9) + (x_1 - 1)(x_1 + 3)^3 = 0.$$

E. Fay.

191. (Lemaire, Thorin, *Saurelles*). — *Deuxième réponse.* — L'erreur signalée par M. Malvy dans l'*Intermédiaire* (t. II, p. 41), n'est pas attribuable à Lucas.

Après avoir dit : « Pour modifier la conjecture de Fermat, on a énoncé la proposition suivante : Tous les nombres et les seuls nombres premiers qui surpassent de l'unité les puissances de deux sont ceux de la suite $2 + 1$, $2^2 + 1$, $2^{2^2} + 1$, $2^{2^{2^2}} + 1 \ldots$ ». Il ajoute : « D'autre part, Eisenstein a énoncé ce théorème dont il possédait peut-être la démonstration : *Il y a une infinité de nombres premiers de la forme* $2^{2^n} + 1$. » Lucas n'affirme nullement l'exactitude de ces deux théorèmes. Il se contente de dire : « On ne connaît actuellement aucune démonstration de ces deux propositions encore inaccessibles. »

Or, il est facile de voir qu'elles sont contradictoires. En effet, si la seconde est vraie, comme c'est le cas pour $2^{2^3} + 1$, la première ne donne pas les *seuls* nombres premiers qui surpassent de l'unité les puissances de 2. Et inversement, si la première eût été exacte, la seconde n'aurait pu l'être. H. DELANNOY.

NOTE. — A propos de la remarque faite par M. Malvy (p. 41), au sujet de la série

$$2^1+1, \quad 2^2+1, \quad 2^4+1, \quad 2^{16}+1, \quad 2^{256}+1,$$

je ferai observer que cette proposition a encore été reproduite, exactement cette fois, dans la *Théorie des nombres* de Lucas, page 354. Elle n'est évidemment qu'une simple conjecture, soumise autrefois par moi à M. Catalan, qui l'a publiée dans la N. C. M., t. IV, 1878, p. 160, sous le titre peu correct, me semble-t-il, car elle n'est justifiée que pour les quatre premiers termes de la série, de *théorème empirique*. E. GELIN (Huy).

192. (A. LEMAIRE). — *Deuxième réponse.* — Les Tables des nombres inverses, ou réciproques, sont très utiles pour la simplification des calculs; la table la plus étendue, celle de Oakes, publiée à Londres en 1865, donne les premières décimales des inverses des nombres entiers jusqu'à 100000; au moyen de Tables proportionnelles, on peut obtenir facilement les sept premières décimales des inverses de tous les entiers jusqu'à 10000000. (Ed. Lucas, *Théorie des nombres,* p. 149.) H. DELANNOY.

200. (A. THORIN). — *Deuxième réponse.* — Au sujet de la *formule générale des nombres premiers,* proposée par E. Dormoy, voir *C. R.,* 1866, t. LXIII, p. 178-181 et 846; et un résumé que j'ai donné *N. C.*, 1880, t. VI, p. 538-539, dans mon dernier Article bibliographique sur la fréquence et la totalité des nombres premiers (*N. C.*, 1879 et 1880). La définition et la formation des objectifs sont indiquées sommairement dans l'Article cité des *C. R.* H. BROCARD.

220. (S. DICKSTEIN). — *Deuxième réponse.* — Dans le *Manuel de Mécanique,* de l'Encyclopédie Roret, 1851, 3e édition, p. 295, O. Terquem dit, à propos de la recherche des pressions d'un corps sur plus de trois appuis : « Cette manière de considérer les pressions, due à M. Carnot, a été développée avec beaucoup de succès par M. Servois, dans un Mémoire encore inédit, communiqué à l'Institut en 1810, et que l'on devrait

publier dans l'intérêt de la Science. Le célèbre auteur est mort au Mont-de-Laval (Doubs) le 17 avril 1847. » — Terquem, qui avait connu Servois et qui le tenait en grande estime, avait promis (*N. A.*, 1853, p. 302) de lui consacrer une Notice bibliographique. Ailleurs (*N. A.*, 1855, deuxième Partie, p. 84, 93, 110, 185) il a fait allusion à d'importants travaux de ce géomètre. H. Brocard.

230. (*Alauda*). — *Deuxième réponse.* — Note. — Cette question a été proposée dans les *Nouvelles Annales* sous le n° **1283**. L'équation de l'enveloppe, donnée par M. Moret-Blanc (1881, p. 518), est inexacte. E. Fauquembergue.

232. (H.-A. Resal). — *Deuxième réponse.* — Il suffira de considérer l'équation du cône asymptote; nous ne distinguerons pas les hyperboloïdes de l'ellipsoïde.

L'équation d'un cône, en axes rectangulaires, peut se mettre d'une seule manière ([1]) sous la forme

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)+\varphi(x, y, z)=0,$$

$\varphi(x, y, z)=0$ étant l'équation d'un cône *équilatère* (capable d'un trièdre trirectangle inscrit). Un changement quelconque d'axes rectangulaires conservant la forme de cette équation, on en conclut aisément que les systèmes d'axes, que M. Resal propose d'étudier, sont ceux qui sont formés d'un trièdre trirectangle inscrit dans le cône; l'équation devient alors

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)+2ayz+2bzx+2cxy=0.$$

Le cône *équilatère* $\varphi(x, y, z)=0$, qui sert à définir les systèmes de coordonnées considérés, est complètement déterminé par la condition d'avoir les mêmes plans cycliques (et, par suite, les mêmes axes) que la quadrique donnée. *Nemo.*

235. (Haton de la Goupillière). — On peut signaler comme répondant, au moins partiellement, au desideratum formulé dans la question 235, l'excellent Ouvrage de G. Boole : *A trea-*

([1]) Le seul cas d'exception (dans lequel λ serait nul) est celui où le cône donné est équilatère.

tise on the calculus of finite differences (London, 1880), dont tout un chapitre est consacré à l'étude des équations aux différences mêlées (mixed and partial difference-equations. Chap. XIV).

F. Robellaz.

244. (Niewenglowski). — *Deuxième réponse.* — La méthode donnée par M. Audibert (1895, p. 70) peut conduire à un énoncé qui, à un double point de vue, est plus général. J'ai, en effet, prouvé (*J. S.*, 1888, p. 149) que *l'équation*

$$(1) \qquad f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots = 0$$

a, au plus, autant de racines, soit positives, soit négatives; et, par suite, au moins autant de racines imaginaires que

$$(2) \; f_1(x) = A_0 x^m + \frac{m}{1} A_1 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} A_2 x^{m-2} + \ldots = 0,$$

et comme, en vertu d'un corollaire du théorème de Rolle, cette équation (2), rendue homogène à l'aide de y, a elle-même autant de racines imaginaires qu'une quelconque de ses $p+1$ dérivées d'ordre p (prises par rapport à x ou y), telle que

$$(3) \; \varphi(x) = A_q x^p + \frac{p}{1} A_{q-1} x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} A_{q-2} x^{p-2} + \ldots = 0,$$

il s'ensuit que $f(x) = 0$ jouit, à plus forte raison, de cette propriété.

Toutefois, mon énoncé renfermait la restriction que $f(x) = 0$ n'a pas de racines égales. Cette restriction inutile peut être évitée en retouchant mon ancienne démonstration.

Pour cela, établissons d'abord ce *Lemme : si les coefficients d'une équation renferment en dénominateurs les facteurs* 1, p, $p(p-1)$, ... (*avec* $p \geqq m$), *le nombre* P *des racines positives ne diminue pas si p augmente d'un nombre quelconque d'unités. Il en est de même du nombre des racines négatives.*

En effet, soit l'équation

$$(4) \qquad a_0 x^p + \frac{a_1}{p} x^{m-1} + \frac{a_2}{p(p-1)} x^{m-2} + \ldots = 0.$$

Augmentons p d'une unité, ce qui donne

$$(5) \qquad a_0 x^m + \frac{a_1}{p+1} x^{m-1} + \frac{a_2}{(p+1)p} x^{m-2} + \ldots = 0.$$

En forçant de $p - m$ l'exposant m, nous ne changeons pas le nombre P′ des racines positives. L'équation devient

$$(6) \qquad a_0 x^p + \frac{a_1}{p+1} x^{p-1} + \ldots = 0,$$

qui est la dérivée de

$$(7) \quad \frac{a_0}{p+1} x^{p+1} + \frac{a_1}{(p+1)p} x^p + \frac{a_2}{(p+1)p(p-1)} p^{-1} + \ldots = 0.$$

Celle-ci devient (4) par la suppression du facteur $\dfrac{x^{p+1-m}}{p+1}$.

Donc P′ est au moins égal à P — 1, et dès lors au moins égal à P, puisque P et P′ sont de même parité.

La transformée en $-x$ établit ce lemme pour les racines négatives.

Cela posé, multiplions les coefficients de (1) par 1, $\dfrac{p}{1}$, $\dfrac{p(p-1)}{1.2}$, ... On sait que le nombre P des racines positives, en devenant ainsi P′, ne diminue pas (J. S. 1888, p. 146). De plus, multiplions haut et bas les coefficients par 1, m, $m(m-1)$, ...; on a finalement

$$(8) \quad A_0 x^m + \frac{p}{m} \frac{m}{1} A_1 x^{m-1} + \frac{p(p+1)}{m(m-1)} \frac{m(m-1)}{1.2} A_2 x^{m-2} + \ldots = 0.$$

D'après le lemme, le nombre P′ des racines positives ne diminue pas si, dans les facteurs du dénominateur, nous remplaçons m par p. Ensuite, faisons tendre p vers l'infini. L'équation (8) devient (2). Or, dans cette opération finale du passage à la limite, elle n'a pu perdre de racines réelles; au contraire, car les valeurs limites des racines positives ne peuvent être que réelles et positives (aucune ne devient nulle), tandis que celles des imaginaires peuvent être réelles et positives. A. Poulain.

Note. — Voir *J. S.*, 1895, p. 7-10, un article de M. E. Malo qui contient une réponse à la question et la présente même d'une façon plus générale :

Si une équation

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

a toutes ses racines réelles, on en pourra déduire une autre équation dont les racines sont toutes réelles aussi, en multipliant chaque coefficient A par des coefficients B tous positifs et tels que l'équation

$$g(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m = 0,$$

ait toutes ses racines réelles. LA RÉDACTION.

272. (J. HADAMARD). *Deuxième réponse.* — Le théorème en question est dû à Laguerre (*C. R.*, t. LX, p. 70); une extension avec démonstration *développée* est donnée par M. Elling Holst (*S. M.*, t. VII, 1880, p. 52). C. JUEL (Copenhague).

277. (E. GENTY). — *Deuxième réponse.* — Si l'on applique la transformation indiquée à un cercle ou à une sphère, on voit facilement, par la Géométrie élémentaire, que la transformée sera de la même nature; *cela résulte d'ailleurs aussi de la remarque de M. E. Genty sur les lignes de courbure.* Mais il n'y a pas de transformations jouissant de la propriété indiquée, autres que la transformation de similitude et celle d'inversion; dans le cas actuel, ce sera une inversion. Il n'y a donc pas lieu d'étudier cette transformation en elle-même, mais il est certainement intéressant de se proposer des questions s'y rattachant; par exemple : comment placer deux figures inverses et qui soient dans la position indiquée par M. E. Genty?

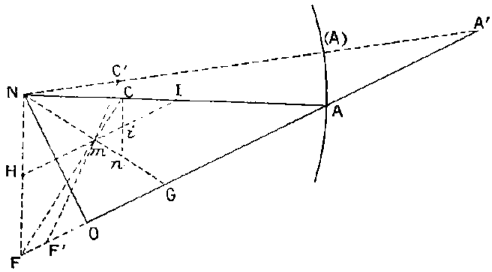
C. JUEL (Copenhague).

295. (HUSQUIN DE RHÉVILLE).— *Deuxième réponse.*— Soient O un point fixe et AA′ un segment de droite qui passe par ce point. Lorsque A décrit une courbe (A), le point A′, qui reste à une distance constante de A, engendre une conchoïde. Cette courbe est donc la trajectoire d'un point A′ d'une figure mobile AA′ de grandeur invariable et l'*on sait alors construire de différentes façons le centre de courbure de cette courbe.* Parmi les procédés que l'on peut employer, il y a celui qui consiste à faire usage de la normale à la courbe lieu des centres instantanés de rotation relatifs au déplacement de AA′. Opérons ainsi.

La normale en A à (A) et la perpendiculaire élevée de O à OA se coupent en N, qui est le centre instantané de rotation relatif au déplacement infiniment petit de AA′ : *la normale en* A′ *à la conchoïde est alors la droite* A′N.

Appelons C le centre de courbure de (A) pour le point A.

Lorsque A décrit (A), le triangle rectangle AON se déforme, l'hypoténuse AN reste tangente à la développée de (A) et N reste sur une courbe dont voici une construction de la normale. Le milieu I de AN, qui est à égales distances de (A) et de O, appartient à une courbe dont la normale en I est la parallèle IH



à AO. Cette droite rencontre en i la perpendiculaire élevée de C à AN. Comme les segments AI, IN sont égaux, il suffit, d'après une propriété connue, de prolonger Ci de sa propre longueur jusqu'en n pour avoir la normale demandée NnG.

Élevons du point N la perpendiculaire NF à AN; elle est coupée par IiH au point H milieu de NF. Puisque les segments Cn, NF sont parallèles, et que la droite iH joint leurs milieux, les droites nN et CF se coupent en m sur iH : ce point m est alors aussi le milieu de NG. Ainsi :

Le milieu m de la normale NG *est le point de rencontre de* FC *et de la parallèle* Im *à* AO.

Faisons remarquer que si OA tourne d'un angle $d\omega$, on a la sous-normale ON qui est égale à $\frac{\alpha . \mathrm{OA}}{d\omega}$; mais la sous-normale OG est égale à $-\frac{\alpha . \mathrm{ON}}{d\omega}$, donc $\mathrm{OG} = -\frac{\alpha^2 . \mathrm{OA}}{d\omega^2}$; expression qui a servi de point de départ à M. Husquin de Rhéville. D'après ce qui précède, *pour déterminer le centre de courbure* C' *de la conchoïde pour le point* A', *on élève* NF' *perpendiculairement à* NA' *et l'on prend le point de rencontre* C' *de* F'm *et de* A'N, construction très simple due à M. Husquin de Rhéville, qui, le premier, je crois, a fait usage du point m. MANNHEIM.

297. (P. Sondat). — *Deuxième réponse.* — Les triangles

$$(BC_1, B_1C)(AC_1, A_1C)(AB_1, A_1B),$$
$$(bc_1, b_1c)(ac_1, a_1c)(ab_1, a_1b)$$

sont évidemment *polaires* (relatifs) dans le système polaire plan caractérisé par la condition que les deux triangles homologiques ABC, $A_1B_1C_1$ donnés soient polaires; on en déduit qu'ils sont homologiques (*voir*, par exemple, Staudt, *Geom. der Lage*, nos 241 et 242).

C. Juel (Copenhague). V. Martinetti (Messine).

Pour qu'on puisse trouver une conique telle que les sommets d'un triangle aient pour polaires, par rapport à cette conique, les côtés d'un autre triangle, il faut et il suffit, comme on sait, que ces triangles soient homologiques. Les droites B_1C_1, C_1A_1 et A_1B_1 sont donc, relativement à une conique Γ, les polaires des sommets A, B et C par rapport à cette conique; les trois droites considérées dans l'énoncé sont évidemment les polaires des trois points correspondants; par suite, les triangles en question sont homologiques. Ernest Duporcq.

303. (Goursat). — La solution est beaucoup plus générale que celle qui figure dans l'énoncé, et l'on peut voir que les quantités a, b y entrent d'une façon absolument quelconque. Les trois conditions données

$$(1) \qquad \left(V, \frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0, \qquad \left(V, \frac{\partial V}{\partial b}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right) = 0$$

se réduisent à deux, car la troisième peut s'obtenir en différentiant la première par rapport à b, la seconde par rapport à a et retranchant. Si nous désignons les dérivées de V par rapport aux variables x, y, z, p, q par les lettres X, Y, Z, P, Q (qu'il ne faut pas confondre, bien entendu, avec les X, Y, etc. de l'énoncé), nos équations s'écrivent

$$(2) \qquad \begin{cases} P^2 \dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{X + pZ}{P}\right) + Q^2 \dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{Y + qZ}{Q}\right) = 0, \\[2ex] P^2 \dfrac{\partial}{\partial b}\left(\dfrac{X + pZ}{P}\right) + Q^2 \dfrac{\partial}{\partial b}\left(\dfrac{Y + qZ}{Q}\right) = 0. \end{cases}$$

Elles nous montrent qu'il existe entre $\dfrac{X + pZ}{P}$ et $\dfrac{Y + qZ}{Q}$ une relation indépendante de a et de b. Puis, remplaçant $\frac{Y+qZ}{Q}$ par sa valeur tirée de cette relation, on obtient pour V une seconde équation aux dérivées partielles ne contenant pas a et b. On voit aisément que ces équations peuvent s'écrire

$$(3) \qquad X+pZ=\frac{\partial G}{\partial P}, \qquad Y+qZ=\frac{\partial G}{\partial Q},$$

G étant une fonction des variables P, Q, x, y, z, p, q, homogène et du second degré par rapport aux deux premières. Toute solution d'un système du type (3) renfermant deux constantes arbitraires répondra à la question proposée.

I. Si le système (3) n'est pas complet, il est aisé de reconnaître qu'il faudra au moins deux équations pour le compléter. Cette hypothèse conduit à la solution évidente $V=F(V_0, a, b)$ où V_0 ne contient pas a, b.

II. Le système (3) est complet si l'on a l'équation

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 G}{\partial P\,\partial y}+q\,\frac{\partial^2 G}{\partial P\,\partial z}-\frac{\partial^2 G}{\partial Q\,\partial x}-p\,\frac{\partial^2 G}{\partial Q\,\partial z}+\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial Q\,\partial p}\\ &\qquad+\frac{\partial^2 G}{\partial P\,\partial Q}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial Q\,\partial q}-\frac{\partial^2 G}{\partial P\,\partial p}\right)-\frac{\partial^2 G}{\partial Q^2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial P\,\partial q}=0,\end{aligned}\right.$$

laquelle, moyennant l'homogénéité de G, peut être considérée comme une équation du second ordre aux six variables indépendantes x, y, z, p, q, $\frac{Q}{P}$, et dont l'intégrale générale doit par suite contenir deux fonctions arbitraires de cinq variables. La fonction G étant ainsi choisie, l'intégrale générale du système (3) contiendra une fonction arbitraire de trois variables, et c'est dans cette fonction que l'on introduira, d'une façon quelconque d'ailleurs, les paramètres a, b. La fonction V indiquée par M. Goursat satisfait à un système (3), lequel admet l'intégrale complète

$$(5) \qquad V=\gamma[Z+\alpha X+\beta Y+\varphi(P+\alpha,\, Q+\beta)]+\delta,$$

où les lettres X, Y, Z, P, Q, φ ont, cette fois, la même signification que dans la question posée. Passant à l'intégrale générale, on voit que l'élimination des quantités α, β, γ entre les équations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &V = \gamma[Z + \alpha X + \beta Y + \varphi(P + \alpha,\ Q + \beta)] \\ &\qquad + F(a, b, \alpha, \beta, \gamma)\ \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0, \end{aligned}\right.$$

fournit une solution du problème proposé. Mais cette solution n'est pas encore la plus générale, puisque la fonction G correspondante ne contient qu'une fonction arbitraire de cinq variables, avec des fonctions arbitraires d'un nombre de variables inférieur à cinq.

J. Hadamard.

308. (M. d'Ocagne). — *Deuxième réponse.* — L'équilibre est *instable,* que les forces, réciproques à la distance, émanées des points représentatifs des n racines de l'équation $f(z) = 0$, soient attractives ou répulsives. En effet, la résultante des forces appliquées en un point z pouvant être représentée en grandeur et en direction par l'imaginaire *conjuguée* à

$$\pm \frac{f'(z)}{f(z)} = \pm \mathrm{D}.\log(P + iQ),$$

la *fonction des forces* est $\frac{1}{2}\log(P^2 + Q^2)$ et, par suite, le système des courbes de niveau coïncide avec celui des courbes liées à la fonction $f(z)$ et qu'on peut appeler *équimodulaires,* le module de $f(z)$ restant effectivement constant lorsque z se déplace suivant l'une d'elles. De même les lignes de force, trajectoires orthogonales des courbes de niveau, sont identiques avec les lignes qu'on peut appeler *isoclines* relativement à $f(z)$, l'argument, l'inclinaison de $f(z)$ ne changeant pas tant que z reste sur l'une d'elles. Or, dans le système des courbes équimodulaires ou isoclines, il y a d'une façon générale $n - 1$ courbes nodales, le nœud de chacune d'elles étant le point représentatif d'une racine de $f'(z)$. De là résulte qu'à partir de chacun de ces points il y a deux directions d'écart seulement, rectangulaires entre elles, pour lesquelles la force corrélativement mise en jeu est alignée sur la position d'équilibre : encore pour l'une d'elles cette force est-elle répulsive.

La chose devient plus saisissante si l'on examine pour ainsi dire au microscope le domaine infiniment petit d'un des points en question. Les courbes de niveau apparaissent alors comme des hyperboles équilatères concentriques et homothétiques : les lignes de force comme les trajectoires orthogonales de celles-ci, c'est-à-dire comme d'autres hyperboles équilatères concentriques et homothétiques dont les axes coïncident avec les asymptotes des premières. Ces courbes évitent, *fuient,* pourrait-on même dire, le centre commun, à l'exception de celle qui se réduit à ses asymptotes. L'instabilité de l'équilibre est rendue ainsi comme évidente. E. MALO.

La stabilité de l'équilibre est impossible, tout au moins pour les points-racines de l'équation dérivée, qui sont distincts de ceux de l'équation donnée. C'est ce qui résulte du fait que les forces considérées admettent un potentiel vérifiant l'équation $\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0$, c'est-à-dire un potentiel harmonique.

On sait, en effet, qu'une fonction harmonique continue ne peut avoir ni maximum ni minimum. Il n'y a pas lieu d'examiner le cas de coïncidence d'un point-racine de la dérivée avec un point-racine de la proposée, puisque alors l'une des forces deviendrait infinie. L. LECORNU.

A l'indication bibliographique fournie par M. de Vries (t. II, p. 86), je me permets d'ajouter celle-ci : *Remarques sur les fonctions holomorphes,* par M. E. Cesàro (*J. de Battaglini,* 1883). CESÀRO (Naples).

309. (TH. CARONNET). — *Troisième réponse.* — La réponse de M. *Canon,* t. II, p. 87, n'est pas entièrement satisfaisante, parce qu'elle s'arrête à une équation différentielle, tandis que l'auteur de la question a demandé à connaître x et y en fonction explicite de θ. La propriété signalée par M. *Canon* est contenue dans notre réponse, t. II, p. 87-88. *Rosace.*

330. (E. LEMOINE). — *Deuxième réponse.* — Soit $y_{n,\mu}$ le numéro cherché. La première boule enlevée en faisant l'opération porte le numéro marqué par le nombre $R\left(\frac{\mu}{n}\right)$ [la notation $R\left(\frac{k}{h}\right)$ représente le reste de la division de k par h en supposant qu'on n'admette pas de reste nul]; le nombre des boules est alors réduit à $n-1$ et la boule qui restera définitivement après l'opération complète est celle qui occupe

le rang $y_{n-1,\mu}$ à partir de la boule marquée $R\left(\frac{\mu}{n}\right)$; on aura

donc $y_{n,\mu} = R\left[\frac{R\left(\frac{\mu}{n}\right) + y_{n-1,\mu}}{n}\right]$, ou, ce qui revient au

même, $y_{n,\mu} = R\left(\frac{\mu + y_{n-1,\mu}}{n}\right)$.

Comme on a évidemment $y_{1,\mu} = 1$, cette équation permet de calculer de proche en proche toutes les valeurs de $y_{n,\mu}$; mais il paraît bien difficile d'en extraire sous forme explicite l'expression de cette quantité en fonction de n et de μ.

Cas particuliers. — $y_{2,\mu}$ est égal à 1 si p est pair, à 2 si p est impair.

$y_{3,\mu}$ est égal à 1 si $\mu = 6k + 5$ ou $6k + 6$, à 2 si $\mu = 6k + 3$ ou $6k + 4$, à 3 si $\mu = 6k + 1$ ou $6k + 2$.

$y_{4,\mu}$ est égal à 1 si $\mu = 12k + 2$, $12k + 3$ ou $12k + 12$, à 2 si $\mu = 12k + 4$, $12k + 5$ ou $12k + 7$, à 3 si $\mu = 12k + 6$, $12k + 8$ ou $12k + 9$, à 4 si $\mu = 12k + 1$, $12k + 10$ ou $12k + 11$.

$y_{5,\mu}$ est égal à 1 si $\mu = 60k + 4, 8, 15, 18, 19, 22, 29, 33, 37, 47, 50, 60$; à 2 si $\mu = 60k + 5, 9, 13, 23, 26, 36, 40, 44, 51, 54, 55, 58$; à 3 si $\mu = 60k + 2, 12, 16, 20, 27, 30, 31, 34, 41, 45, 49, 59$; à 4 si $\mu = 60k + 3, 6, 7, 10, 17, 21, 25, 35, 38, 48, 52, 56$; à 5 si $\mu = 60k + 1, 11, 14, 24, 28, 32, 39, 42, 43, 46, 53, 57$.

$y_{6,\mu}$ est égal à 1 si $\mu = 60k + 3, 5, 14, 16, 18, 21, 23, 32, 34, 60$; à 2 si $\mu = 60k + 10, 19, 36, 37, 39, 41, 52, 54, 57, 59$; à 3 si $\mu = 60k + 8, 12, 13, 17, 28, 30, 35, 46, 50, 55$; à 4 si $\mu = 60k + 6, 11, 15, 26, 31, 33, 44, 48, 49, 53$; à 5 si $\mu = 60k + 2, 4, 7, 9, 20, 22, 24, 25, 42, 51$; à 6 si $\mu = 60k + 1, 27, 29, 38, 40, 43, 45, 47, 56, 58$.

Le cas de $\mu = 2$ peut être résolu complètement si m est l'exposant de la plus haute puissance de 2 contenue dans n et, si alors $n = 2^m + a$, on a $y_{n,2} = 2a + 1$.

En général, si M est le plus petit commun multiple des nombres $n, n-1, n-2, \ldots, 2$ et si $\mu + q = k\mathrm{M} + 1$, on a $y_{n,\mu} + y_{n,q} = n + 1$.

C. Moreau.

333. (H. Lez). — *Deuxième réponse.* — *Voir* un Mémoire de M. Stoll (*Z.*, t. XXXVIII, 1893, p. 282-309, *Einige Meth. der Bestim. der Brennp. Coord. und Achsenglei. eines Kegelschnitts in trimetrischen Coordinaten.*

H. Brocard.

Charles Smith (*Conic Sections.* London; Macmillan et Co), Chap. XIII (Trilinear Coordinates) donne la détermination des axes, des foyers et des asymptotes des coniques.

A.-S. Ramsey.

343. (*Ramsiu*). — *Deuxième réponse.* — Si l'on construit la polaire réciproque des deux courbes données par rapport à un cercle, dont le centre soit le foyer commun, on obtient deux cercles. Le problème est donc réduit à la recherche de l'enveloppe d'une droite MM′, qui passe par un point M de l'un de ces cercles et par un point M′ de l'autre, l'angle entre les tangentes en M et M′ étant donné. Mais, dans ce cas, on peut supposer les cercles semblables, tellement que M et M′ se correspondent; soit O le point qui, dans les deux systèmes semblables, correspond à lui-même (*voir* M. J. Petersen, *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de construction,* traduit par M. O. Chemin). Le triangle OMP, où $OP = MP$, a donc une forme invariable et, parce que M décrit un cercle, le cas sera le même pour P. L'enveloppe cherchée est donc une conique dont le foyer est en O. C. Juel (Copenhague).

347. (Cyp. Stephanos). — Dans ses *Éléments de Géométrie* (Garnier frères, 1873), M. Ricart démontre l'existence du plan (1er vol., *Géométrie plane,* p. 17). H. Dellac, A. Goulard.

Voir *N. A.*, 1895, p. 56-58, une Note de M. E. Ballue, intitulée : *Une nouvelle définition du plan.* H. Brocard.

Cette Note nous avait auparavant été envoyée comme réponse à la question, par M. Ballue. La Rédaction.

352. (E.-N. Barisien). — *Deuxième réponse.* — Aux très nombreuses solutions déjà signalées (1895, p. 173) il y a lieu d'ajouter les suivantes, parvenues depuis. M. E.-M. Lémeray fait la substitution $z = \tang \frac{x}{2}$ et ramène l'intégration à celle d'une fraction rationnelle. *Un anonyme* emploie aussi un changement de variable $\left(z = a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} \tang x\right)$. Enfin, M. J. Sadier donne deux méthodes : l'une par les fractions rationnelles et la seconde par l'emploi du calcul des résidus. Les auteurs nous permettront de nous borner à ces simples mentions, après tous les développements antérieurement publiés. La Rédaction.

360. (E. Goursat). — Cette question est une application du théorème de Tait. La solution se trouve dans les *Récréations mathématiques* de Lucas (t. IV, p. 189-194).

Projetons le polyèdre sur le plan de l'une des faces et déformons, au besoin, cette projection de manière que les projections de deux sommets ne coïncident pas et que les projections de deux arêtes aboutissant à des sommets différents ne se coupent pas. Le dessin ainsi formé peut être considéré comme un réseau géographique, sur lequel les lignes de séparation des districts se rencontrent par trois. Kempe a démontré que, pour colorier une carte quelconque, il suffit de quatre couleurs. Colorions donc notre dessin, entouré d'un circuit extérieur, au moyen des quatre couleurs A, B, C, D. Marquons par

O	toute ligne entre	A et B	ou entre	C et D,
I	»	A et C	»	B et D,
II	»	A et D	»	B et C,

et ce problème est résolu, en remplaçant O, I, II par trois couleurs différentes. Ce qui serait très intéressant, ce serait de trouver, pour le théorème de Tait, une démonstration *directe*, qui jusqu'ici n'a pu être obtenue. H. Delannoy.

Pour faciliter l'étude de ce problème, il est nécessaire d'avoir une représentation du polyèdre sur le plan. Or, il est toujours loisible de supposer une déformation du polyèdre, par agrandissement d'une de ses faces, de manière qu'on puisse dessiner, à l'intérieur de celle-ci, la perspective de toutes les arêtes. On obtiendra ainsi, pour un polyèdre donné, une représentation plane, analogue à celle de la figure du dodécaèdre dans le *Jeu Icosien* d'Hamilton (voir *Récr. math.* d'Ed. Lucas, t. II, p. 199-227). Les polyèdres dont il s'agit ayant tous leurs angles trièdres, on a les relations $S=2(F-2)$, $A=3(F-2)$. Celle-ci revient à dire que les trois indices a, b, c entrent en même nombre chacun. Ce nombre est $(F-2)$. Cela posé, voici comment on résoudra la question pour certains polyèdres :

1° Pyramide triangulaire. Ce polyèdre est représenté par un triangle équilatéral ABC et par trois droites joignant les sommets au barycentre D. On a alors $F=4$, $F-2=2$. Il y aura deux lettres a, b et c.

2° Pyramide tronquée à base triangulaire. Ce polyèdre est représenté par deux triangles équilatéraux homothétiques et concentriques, et par les droites joignant les sommets homologues. On a alors $F = 5$, $F - 2 = 3$, ce qui donne trois lettres a, b et c (AB, A′B′, CC′ seront marqués c).

Note. — Ce réseau dérive du précédent par troncature près du point D. Une face de plus, obtenue par une nouvelle troncature, sera aussi aisée à marquer. On aura ainsi des polyèdres ayant un nombre quelconque de faces, triangulaires ou polygonales indifféremment. Le marquage est donc possible pour tout polyèdre dérivé du type n° 2 par un nombre indéfini de troncatures.

3° Soit maintenant un prisme à faces quadrangulaires. Ici l'on a deux carrés homothétiques et concentriques, reliés par des droites unissant les points homologues. Si donc ces quatre dernières sont affectées du même indice, b, par exemple, il suffira que les côtés opposés des faces quadrangulaires soient deux à deux affectés des indices a ou c. La troncature ne changera rien à ce marquage.

4° Polyèdres à faces pentagonales. Le plus simple de ces polyèdres a douze faces pentagonales, et sa figure n'est autre que celle du Jeu Icosien, donnée ici d'après l'ouvrage cité (p. 211).

En écrivant

$$\mathrm{R}c\mathrm{S}b\mathrm{T}a\mathrm{V}c\mathrm{W}a\mathrm{R}, \qquad \mathrm{H}a\mathrm{J}c\mathrm{K}a\mathrm{L}b\mathrm{M}c\mathrm{N}b\mathrm{P}a\mathrm{Q}c\mathrm{Z}a\mathrm{X}c\mathrm{H},$$
$$\mathrm{B}a\mathrm{C}b\mathrm{D}c\mathrm{F}a\mathrm{G}c\mathrm{B},$$

les autres lignes s'en déduisent, et l'on a le marquage demandé.

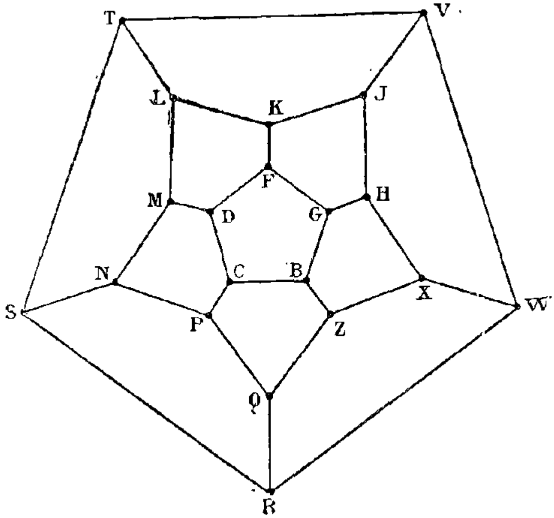
Les deux pentagones extrêmes sont marqués de la même façon, à l'ordre près (*abcac*, *cacba*).

5° De la figure du Jeu Icosien, on déduira, en partant du pentagone central, la figure d'un polyèdre à 24 faces pentagonales. On pourra continuer le marquage absolument de la même manière.

6° Le dodécaèdre se transformera en d'autres polyèdres par troncatures; mais ces dernières, ne portant que sur des angles trièdres, ne modifieront pas le marquage des arêtes primitives.

7° Polyèdre quelconque à angles trièdres. De tout ce qui précède, on paraît fondé à conclure que le problème est toujours possible.

Au surplus, un passage du livre cité donne à cette question un intérêt particulier et permettrait vraisemblablement d'en tirer le sujet d'une nouvelle Récréation mathématique, analogue au Jeu Icosien et ayant même une certaine affinité avec d'autres jeux mathématiques, tels que les jeux de marelles, le pro-



blème du coloriage, etc. « On peut, dit Ed. Lucas (p. 222-223), remplacer le dodécaèdre par d'autres polyèdres réguliers; mais si l'on conserve les règles de l'Icosien, il faut, pour appliquer la théorie, que le nombre des arêtes, qui aboutissent aux sommets, soit égal à trois. Cette condition est remplie dans le tétraèdre et dans le cube, mais alors le jeu devient très simple, soit qu'on l'exécute sur des solides en carton, soit sur leurs perspectives. Cependant, on peut projeter le cube de telle sorte que le problème présente une certaine difficulté. » Ed. Lucas ne paraît pas avoir envisagé autrement ces transformations de l'Icosien, mais ces dernières semblent tout indiquées. En effet, étant donné un contour polygonal convexe, et des points quelconques à son intérieur, représentant les sommets d'un polyèdre, il se pourra qu'en certains sommets P, Q, R, . . . , le nombre des arêtes soit de plus de trois. Dans ce cas, il faudra effacer les parties voisines de ces points, et entourer ceux-ci d'un contour polygonal représentant une troncature. Dès lors, il n'y aura plus, aux sommets de cette nouvelle face, que trois arêtes. Tous les angles du polyèdre étant ainsi transformés en trièdres, on aura une représentation plane, sur laquelle on pourra faire le marquage proposé. En résumé, si l'on désire instituer ou improviser un nouveau jeu mathématique, que je proposerais d'appeler le *Jeu des Touaregs*, il suffira de tracer un polygone quelconque et d'achever un réseau de trois droites partant des sommets et de différents points et déterminant ainsi $(N+1)$ polygones intérieurs. Cela fait, il sera toujours possible de placer sur les côtés de ce réseau N jetons a (rouges), N b (blancs) et N c (bleus), de manière que deux lignes, ainsi marquées, ne se joignent pas à une autre ligne de même couleur. On pourra étudier aussi d'autres questions; par exemple : combien de sommets correspondant à une lecture a, b, c ou c, b, a? combien de solutions distinctes pour un réseau donné? etc. H. Brocard.

371. (A.-H. Van Dorsten). — Soient $\varphi_{0,p}(n)$ et $\varphi_{p+1}(n)$ les nombres de décompositions dont on demande de démontrer l'égalité.

1° Si le théorème est vrai pour $p=0, 1, 2, \ldots, P$, $n=0, 1, 2, \ldots, N$, il est vrai pour $p=P+1$, $n=N+1$. En effet, si dans le polygone de $N+4$ côtés $A_1A_2\ldots A_{n+4}$, je mène une diagonale A_1A_{r+3} par le sommet A_1, je le décompose en deux polygones convexes, l'un de $r+3$ côtés, l'autre de $N+3-r$ côtés. Je considère les décompositions du premier au moyen de r diagonales dont aucune ne passe par A_1, et celles du second au moyen de $N-r$ diagonales dont $P+1$ soient issues de A_1.

J'obtiens ainsi un nombre de décompositions égal à

$$\varphi_0(r)\varphi_{P+1}(N-r)=\varphi_0(r)\varphi_{0,P}(N, 2).$$

Mais il est clair que l'on a

$$\varphi_{P+2}(N)=\sum_{r=0}^{r=N-P-1}\varphi_0(r)\varphi_{P+1}(N-r)$$

et

$$\varphi_{0,P+1}(N)=\sum_{r=0}^{r=N-P-1}\varphi_0(r)\varphi_{0,P}(N-r).$$

Donc

$$\varphi_{P+2}(N)=\varphi_{0,P+1}(N).$$

2° Il reste à démontrer que $\varphi_0(n)=\varphi_1(n)$, quel que soit n.

Pour cela, j'observe que $\varphi_0(n)$ est égal au nombre total des décompositions d'un polygone de $n+2$ côtés, nombre que je désignerai par $\varphi(n-1)$, de sorte que $\varphi_0(n)=\varphi(n-1)$. D'autre part, $\varphi_1(n)$ comprend les décompositions dans lesquelles A_1A_{n+2} est la seule diagonale issue de A_1 et dont le nombre est $\varphi_0(n-1)$, plus les décompositions au moyen de diagonales dont une seule passe par A_1, sans être A_1A_{n+2}.

On a donc

$$\varphi_1(n)=\varphi_0(n-1)+\varphi_{0,1}(n)=\varphi_0(n-1)+\varphi_2(n).$$

De même,

$$\varphi_2(n)=\varphi_1(n-1)+\varphi_{0,2}(n)=\varphi_1(n-1)+\varphi_3(n),$$

et, d'une manière générale, $\varphi_p(n)=\varphi_{p-1}(n-1)+\varphi_{p+1}(n)$. Par conséquent,

$$\varphi_1(n)=\varphi_0(n-1)+\varphi_1(n-1)+\ldots+\varphi_p(n-1)+\ldots+\varphi_{n-1}(n-1),$$

le second membre de cette égalité étant le nombre total des décompositions d'un polygone de $n+2$ côtés,

$$\varphi_1(n)=\varphi_0(n).$$

La relation générale

$$\varphi_p(n)=\varphi_{p-1}(n-1)+\varphi_{p+1}(n)$$

permet de représenter les décompositions des divers polygones par le triangle arithmétique suivant :

Nombre $(n+3)$ des côtés.	Nombre de décompositions dans les cas de n, $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, 0 diagonales issues du sommet A_1.							
3.......	1							
4.......	1	1						
5.......	1	2	2					
6.......	1	3	5	5				
7.......	1	4	9	14	14			
8.......	1	5	14	28	42	42		
9.......	1	6	20	48	90	132	132	
10.......	1	7	27	75	165	297	429	429	
11.......	1	8	35	110	275	572	1001	1430	1430

Un nombre quelconque appartenant à ce triangle arithmétique est la somme de celui qui est à sa gauche et de celui qui se trouve au-dessus de lui.

L'étude des diagonales qui vont de bas en haut et de gauche à droite montre que

$$\varphi_p(n) = \binom{2n-p-1}{n-p} - \binom{2n-p-1}{n-p-2},$$

en employant la notation de Gauss.

En dehors des propriétés déjà rencontrées des nombres $\varphi_p(n)$, nous signalerons la relation

$$\varphi_0(n) = \varphi_1(n) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \varphi_0(r)\varphi_0(n-r-1),$$

qui, à cause de $\varphi_0(n) = \varphi(n-1)$, lie entre eux les nombres totaux de décompositions des polygones successifs.

WELSCH.

372. (D. GRAVÉ). — Les formules que j'ai données dans mes *Remarques sur l'osculation* (*N. A.*, 1890) permettent de répondre à la question posée par M. Gravé et à une foule de questions analogues. Soient ρ le rayon de courbure d'une ligne quelconque, et ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... les rayons de courbure aux points correspondants de ses développées successives. Les axes de la conique osculatrice sont donnés par les formules

$$ab = \frac{27\rho^5}{P^{\frac{3}{2}}}, \qquad a^2 + b^2 = \frac{9H\rho^4}{P^2},$$

où $\quad P = 9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2, \qquad H = 18\rho^2 + 5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2.$

Je remarque maintenant que le premier membre de l'équation

$$40\rho_1^3 + 36\rho^2\rho_1 + 9\rho^2\rho_3 - 45\rho\rho_1\rho_2 = 0,$$

qui caractérise les coniques, peut être mis sous les formes suivantes :

$$-3\rho^{\frac{16}{3}} \frac{d}{ds} \frac{P}{\rho^{\frac{10}{3}}}, \quad -3\rho^{\frac{14}{3}} \frac{d}{ds} \frac{H}{\rho^{\frac{8}{3}}}.$$

Il y a donc deux fonctions de a et b, qui ne peuvent rester constantes sans que la courbe se réduise à une conique, savoir ab et le quotient de $a^2 + b^2$ par $(ab)^{\frac{4}{3}}$. Y en a-t-il d'autres?...

CESÀRO (Naples).

Le problème de la détermination des courbes définies par une propriété de leur courbe osculatrice d'espèce donnée paraît un des plus délicats de la Géométrie infinitésimale : l'équation différentielle exprimant les conditions à remplir est facile à poser; mais son intégrale générale représente seulement les courbes de même espèce que l'osculatrice considérée, solution évidente *a priori* et, à proprement parler, étrangère à la question. Les seules solutions intéressantes sont donc fournies par les intégrales singulières; or, la théorie de ces intégrales ne paraît pas avoir été faite pour les équations d'ordre supérieur au premier.

Ainsi, dans le cas proposé, en égalant à une constante l'aire de la conique osculatrice, on établit une équation du quatrième ordre entre les coordonnées de la courbe cherchée, équation dont l'intégrale générale contiendra, par conséquent, cinq paramètres arbitraires; ce sera donc l'équation générale des coniques du plan, qui doit satisfaire algébriquement au problème et possède aussi cinq arbitraires. Mais rien ne prouve qu'il n'y ait pas de solutions singulières; car si ce n'est plus le produit des axes de la conique, mais leur rapport qui doit être constant, l'intégrale générale ne fournit toujours que des coniques, alors qu'évidemment toute spirale logarithmique, ayant ses coniques osculatrices semblables entre elles, satisfait pleinement à l'énoncé. Je trouve, dans l'emploi des groupes de transformations, le moyen de lever cette difficulté pour tous les problèmes du même genre, et voici comment. Dans l'espèce, par exemple, l'intégrale générale ne possédant que cinq paramètres indépendants, les solutions singulières ne sauraient en contenir davantage. Opérons, sur l'une quelconque des courbes cherchées, la transformation linéaire générale, qui comporte six arbitraires : comme cette transformation change toute conique en une conique, conserve le rapport des aires, et évidemment aussi l'ordre des contacts, la courbe transformée c' satisfera aussi à la question; elle sera, en général, distincte de c; mais, en disposant de cinq, au plus, des paramètres de la transformation, ce qui en laisse au moins un arbitraire, on peut faire en sorte que c' coïncide avec c. Il s'ensuit que c admet un groupe continu de transformations linéaires.

La seule courbe plane jouissant de cette propriété est ([1]) la parabole générale $y = \alpha x^m$, qui admet le groupe $X = kx$,

$Y = ak^m y$; une transformation de ce groupe multiplie les aires par k^{m+1}; égalant ce coefficient à l'unité, on trouve l'unique solution $m = -1$, qui ne fournit quē des coniques. C. Q. F. D.

En remplaçant la projection équiaire par une similitude, on établit de même que, les coniques mises à part, la seule courbe ayant ses coniques osculatrices semblables entre elles est la spirale logarithmique. Plus généralement, ma méthode ramène la détermination *complète* des courbes définies par une propriété de leur osculatrice d'espèce donnée à la recherche :

1° D'un groupe continu possédant des invariants donnés;

2° Des courbes admettant un groupe donné.

Dans beaucoup de cas, la solution découle intuitivement, comme ci-dessus, des considérations géométriques les plus simples, bien qu'elle dépende algébriquement d'équations différentielles d'un ordre élevé. CH. RABUT.

Soient ρ le rayon de la courbe, ρ' et ρ'' ses dérivées première et seconde par rapport à l'arc, et φ l'angle que fait avec la normale, au point considéré, la tangente à la courbe diamétrale qui passe en ce point; on a d'abord

$$(1) \qquad \rho' = 3 \tan\varphi,$$

puis, pour l'équation de la conique osculatrice rapportée à la tangente à la courbe prise pour axe des y, et à la tangente à la courbe diamétrale pour axe des x,

$$(2) \qquad y^2 = 2\rho\cos\varphi\, x - \left(1 - \frac{\rho\rho''\cos^2\varphi}{3}\right)x^2.$$

Les carrés des diamètres conjugués parallèles aux axes sont, par suite,

$$a'^2 = \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{\rho\rho''\cos^2\varphi}{3}\right)^2}, \qquad b'^2 = \pm\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{1 - \frac{\rho\rho''\cos^2\varphi}{3}},$$

et comme les axes font entre eux un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$, l'équa-

---

(1) Je supprime, pour abréger, la démonstration de ce théorème, pour laquelle on peut se reporter à la réponse que j'ai faite à la question n° 166, 1895, p. 32.

tion du problème sera, k désignant une constante,

$$= a'^2 b'^2 \cos^2\varphi = \frac{\rho^4 \cos^6\varphi}{\left(1 - \frac{\rho\rho'' \cos^2\varphi}{3}\right)^3} = k,$$

ou en tenant compte de (1)

$$\rho^4 = k\left(1 + \frac{\rho'^2}{9} - \frac{\rho\rho''}{3}\right)^3. \tag{3}$$

Cette équation, si l'on y remplace ρ, ρ' et ρ'' par leurs valeurs en fonctions des coordonnées, sera une équation différentielle du quatrième ordre, et, comme elle contient déjà une constante arbitraire k, son intégrale générale contiendra cinq constantes arbitraires. Mais l'équation générale des coniques est une intégrale de l'équation (3), puisqu'une conique quelconque satisfait évidemment à la condition énoncée, et comme cette équation contient cinq constantes arbitraires, elle en est l'intégrale générale.

Comte DE SPARRE.

Les coniques osculatrices à une courbe, en deux points infiniment voisins, ont un contact du troisième ordre; elles ont donc même tangente, même rayon de courbure et même diamètre.

Si donc on prend, pour axes de coordonnées, la tangente et le diamètre, les équations des deux coniques sont de la forme $ax^2 + by^2 + 2cy = 0$, $ax^2 + b'y^2 + 2cy = 0$.

Il est facile de voir que les aires sont entre elles en raison inverse des cubes de b et b'. On doit, par suite, avoir $b^3 = b'^3$ ou $b = b'$. Les deux coniques sont donc confondues. La conique osculatrice, en un point quelconque, étant osculatrice au point infiniment voisin, la même conique est osculatrice en chaque point de la courbe qui, par suite, se confond avec elle. Autrement : Les paramètres de l'équation de la conique osculatrice, en un point d'une courbe, sont donnés par l'équation générale des coniques et ses quatre premières dérivées, où l'on remplace les coordonnées et leurs différentielles par celles de la courbe au point considéré. Lorsque la conique osculatrice est la même en deux points infiniment voisins, les paramètres de son équation doivent satisfaire, en outre, à la cinquième équation dérivée. Si l'on écrit cette condition, on trouve une équation différentielle du cinquième ordre, dont l'intégrale générale doit contenir cinq constantes arbitraires et, par conséquent, n'est autre que l'équation générale des coniques. WELSCH.

Soit $ax^2+by^2+c=0$ $(c\neq 0)$ l'équation de la conique osculatrice au point (x_0, y_0) de la courbe. Au point suivant $(x_0+\Delta x_0, y+\Delta y_0)$, elle sera représentée par

$$ax^2+by^2+c+\delta(axx_0+byy_0+c)^2=0,$$

où δ est infiniment petit avec Δx_0, mais différent de zéro, tant que la courbe elle-même ne coïncide pas avec la conique $ax^2+by^2+c=0$. Le carré du produit des demi-axes, pour la première conique, égal à $\frac{c^2}{ab}$, se trouve être pour la seconde $\frac{c^2}{ab}(1+3c\delta)$.

Afin que les deux produits soient égaux, il faut que δ soit rigoureusement nul. On en conclut que le point (x_0, y_0), arbitrairement pris sur la courbe, est sextactique, autrement dit que cette courbe est une conique. Le même résultat s'obtient aussi par le calcul direct. En désignant les dérivées successives de l'ordonnée y de la courbe par y', y'', ..., le carré du produit P des demi-axes de la conique osculatrice est exprimé par

$$P=\frac{729y''^8}{(3y''y^{IV}-5y'''^2)^3},$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{dx}=\frac{729y''^7}{(3y''y'''-5y'''^2)^4}(45y''y'''y^{IV}-40y'''^3-9y''y^{V}).$$

Quand P est constant, l'invariant connu

$$45y''y'''y^{IV}-40y'''^3-9y''y^{V}$$

s'évanouit, et alors la courbe est une conique.

J.-C. KLUYVER (Leyde).

373. (H. BROCARD). — *Deuxième réponse.* — D'une lettre adressée, le 21 juillet 1629, à Peiresc par Gassendi, qui faisait à cette époque un voyage en Hollande, il résulte qu'Albert Girard était ingénieur au service des Provinces-Unies, et se trouvait alors en cette qualité au camp devant Bois-le-Duc (*Lettres de Peiresc,* IV, p. 201). D'autre part, j'ai déjà fait connaître dans le *B. D.*, 1883, pages 358-360, le résultat des re-

cherches faites à ma prière dans les Archives de Saint-Mihiel par M. Lallement, vice-président du Tribunal civil.

PAUL TANNERY.

374. (G.-H. NIEWENGLOWSKI). — Le *Bulletin des Sciences mathématiques* de *de Férussac*, t. XV (1831), p. 10, rend compte sommairement d'études faites par le capitaine Theremin, d'Irkoutsk, sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air, dans un liquide de densité constante. Le Mémoire original se trouverait dans le *J. de Crelle*, t. 5 (1829-1830), 1er Cahier.

G. MAUPIN.

375. (F. PRADET). — Deux figures symétriques étant placées d'une façon quelconque dans l'espace, il existe toujours un plan qui les coupe suivant des figures directement égales. Ce plan est celui qui passe par les milieux des droites joignant les points de la première figure aux points correspondants de la seconde. On peut, par une rotation autour d'une certaine perpendiculaire à ce plan, amener les deux figures à être symétriques par rapport à lui. Dans le cas particulier où cette perpendiculaire est rejetée à l'infini, la rotation devient une translation. Par suite, pour qu'une figure puisse coïncider avec sa symétrique, il faut et il suffit qu'on puisse l'amener à coïncider avec sa symétrique par rapport à un plan, soit par une translation parallèle à ce plan, soit par une rotation autour d'un axe perpendiculaire. On réalisera ces deux cas de la manière suivante : *Premier cas :* Soient F une figure quelconque, F' sa symétrique par rapport à un plan quelconque P; donnons à F' un déplacement a parallèle à une droite D du plan P, ce qui amène F' en F'_1, puis donnons au système formé par F et F'_1 des déplacements successifs parallèles à D, tous égaux à $2a$ et en nombre infini : l'ensemble de toutes ces figures satisfera à la question. *Deuxième cas :* F et F' ayant la même signification que ci-dessus, donnons à F' un déplacement angulaire α autour d'un axe A perpendiculaire au plan P, de manière à l'amener en F'_1; puis faisons tourner le système des figures F et F'_1 autour de A d'angles égaux à 2α, 4α, ..., $2n\alpha$, ..., jusqu'à ce qu'il retombe sur sa position primitive : l'ensemble de toutes les figures ainsi obtenues constitue une solution du problème. Il est clair qu'il n'y a rien de semblable dans le plan, et qu'une

figure plane ne peut être amenée, *par un glissement*, à coïncider avec une figure symétrique que si elle a un axe ou un centre de symétrie.

Remarque additionnelle. — Il résulte de ce que nous avons dit des figures qui peuvent coïncider avec leur symétrique que ces figures appartiennent à deux genres, dont l'un n'est qu'un cas particulier de l'autre. La propriété caractéristique des figures du premier genre est que, x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque d'une telle figure par rapport à un certain système d'axes rectangulaires, le point dont les coordonnées sont $x+a$, y, $-z$ appartient également à la figure. Pour les figures du deuxième genre, la condition est que, à un point x, y, z corresponde un point $x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $x\sin\alpha + y\cos\alpha$, $-z$.

WELSCH.

Dans une conférence faite, il y a déjà quelques années, à notre Société Mathématique, j'ai, en passant, traité la question 375. Je compte publier d'ici peu mes recherches à ce sujet, et j'aurai l'honneur d'adresser à M. Pradet le numéro du *Tidskrifft f. Math.* où elles paraîtront. Le résultat, sous forme sommaire, est le suivant : Un système (qui ne s'étend pas à l'infini) et qui est égal à son symétrique, peut se superposer avec lui-même par les deux transformations suivantes : une transformation symétrique par rapport à un plan Π, et une certaine rotation autour d'un axe perpendiculaire à Π.

C. JUEL (Copenhague).

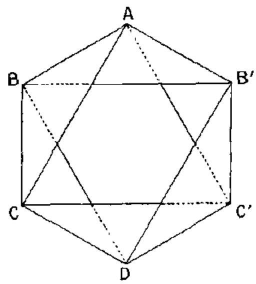
376. (C. STEPHANOS). — Voici comment on peut construire un octaèdre susceptible de déformation, ses faces restant invariables.

Soient ABC, DBC deux triangles égaux ($AB = CD$, $AC = BD$) articulés suivant le côté BC. Imaginons que l'on fasse tourner le système de ces deux triangles autour de la droite AD, de manière à l'amener à la position AB'C'D. Le système sera encore déformable, si l'on impose à l'angle BAB' la condition d'être invariable.

Mais les deux trièdres isoscèles ABB'D, DBB'A sont égaux, ayant mêmes faces égales, et le dièdre compris égal, comme on le voit sans peine. On a donc

$$\text{angle } CDC' = \text{angle } BAB' = \text{const.}$$

La figure présente alors 8 triangles invariables, groupés 4 par 4 autour des 6 sommets A, B, C, D, B′, C′, et dont l'ensemble



peut être déformé. Ces 8 triangles constituent les faces d'un octaèdre *concave* répondant à la question.

Dans la construction d'un pareil octaèdre (au moyen par exemple de cartes de visite convenablement découpées et réunies par des charnières de papier gommé) il faut avoir soin de laisser vides les faces ACC′, DBB′, qui ne sont plus réalisées que par leur périmètre. RAOUL BRICARD.

Il me semble que Cauchy a traité complètement ce problème dans le *J. E. P.* (Cahier 16, 1813) et qu'il résout la question posée, par la négative. C. JUEL (Copenhague).

377. (D. GRAVÉ). — On peut concevoir aisément une analyse élémentaire qui reproduise les relations connues et puisse en fournir de nouvelles. Je ne serais pas surpris que cette analyse eût été déjà employée par les mathématiciens que cette question a intéressés.

Supposons $m = 1$, $n = 1$; nous aurons

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{p} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{q},$$

ou, en prenant les tangentes,

$$1 = \frac{p+q}{pq-1}, \qquad q = \frac{p+1}{p-1},$$

ce qui ne peut donner d'autres valeurs entières que $p = 2$, $q = 3$, solution indiquée t. I, 1894, p. 228.

Soient ensuite $m=2$, $n=1$,

$$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{p}+\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{q}.$$

On aura

$$q=\frac{p^2-1+2p}{p^2-1-2p},$$

ce qui ne peut donner d'autres valeurs entières que

$p=1$, $q=-1$, solution évidente;
$p=2$, $q=-7$;
$p=3$, $q=7$, formule d'Euler.

L'hypothèse $m=3$, $n=1$,

$$\frac{\pi}{4}=3\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{p}+\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{q}$$

donnerait

$$q=\frac{p^3-3p+3p^2-1}{p^3-3p-3p^2+1},$$

formule qui ne donne pas de valeurs entières. L'hypothèse $m=3$, $n=1$ est donc à rejeter.

Posons $m=4$, $n=1$,

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{p}+\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{q};$$

on aura

$$q=\frac{p^4-6p^2+1+4p(p^2-1)}{p^4-6p^2+1-4p(p^2-1)}.$$

Ici, à part les valeurs $p=\pm 1$, $q=1$ à rejeter, je ne vois qu'un système de valeurs entières :

$p=5$, $q=-239$, formule de Machin.

On pourrait continuer ces recherches, et rien ne prouve qu'elles n'aboutiraient pas à de nouvelles relations; mais la complication des essais deviendrait plus grande.

Il y aurait bien aussi une autre méthode fondée sur l'analyse indéterminée du premier degré. Elle consisterait à opérer sur les évaluations numériques des arcs tangentes $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ...

C'est ainsi que l'on a

$$
\begin{aligned}
\text{arc tang}\,\tfrac{1}{1} &= 162000'',0 \text{ ou } 161999'',9\\
\text{arc tang}\,\tfrac{1}{2} &= 95634,1\\
\text{arc tang}\,\tfrac{1}{3} &= 66365,8\\
\text{arc tang}\,\tfrac{1}{4} &= 50530,4\\
\text{arc tang}\,\tfrac{1}{5} &= 40715,7\\
\text{arc tang}\,\tfrac{1}{6} &= 34064,3\\
\text{arc tang}\,\tfrac{1}{7} &= 29268,3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\text{arc tang}\,\tfrac{1}{239} &= 863,2
\end{aligned}
$$

et alors, en combinant ces valeurs a, b, c, d, ..., on aurait à résoudre, par rapport à m, n, des équations telles que

$$m(a, b, \ldots) + n(c, d, \ldots) = 161999,9.$$

Les vérifications se font d'une manière satisfaisante, mais le moyen d'invention ne paraît pas offrir autant de ressources que le précédent. Il n'y a cependant pas à désespérer qu'un heureux hasard ne mette sur la voie d'une nouvelle relation.

H. BROCARD.

Sans parvenir à la solution complète du problème, j'ai fait la remarque suivante : De l'équation

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{x} + \text{arc tang}\,\frac{1}{y} = \text{arc tang}\,\frac{1}{a},$$

x, y et a étant des nombres entiers, on peut déduire aisément

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{y} = \text{arc tang}\,\frac{1}{a + \dfrac{a^2+1}{x-a}},$$

d'où

$$y - a = \frac{a^2+1}{x-a}.$$

Pour que y soit entier, il faudra que $\dfrac{a^2+1}{x-1}$ le soit. En décomposant a^2+1, de toutes les manières possibles, en deux facteurs $a^2+1 = \pm p_k p_i$, on aura le système complet des solutions, donné par

$$x - a = \pm p_k, \qquad y - a = \pm p_i.$$

Si l'on a $a^2+1 = \alpha^m \beta^m \gamma^m \ldots$, α, β, γ étant premiers, on obtient $(m+1)(n+1)(q+1)\ldots$ solutions différentes.

En appliquant cette méthode, par exemple, à arc tang $\frac{1}{239}$, on trouve les dix solutions

x	240	238	241	237	252
x	226	265	213	408	70
y	57361	−56883	28800	−28322	5633
y	− 4155	2436	− 1958	577	− 99

La dernière est la plus intéressante; en remarquant que

$$\text{arc tang}\,\tfrac{1}{99} - \text{arc tang}\,\tfrac{1}{101} = \text{arc tang}\,\tfrac{2}{10000},$$
$$\text{arc tang}\,\tfrac{1}{100} - \text{arc tang}\,\tfrac{1}{101} = \text{arc tang}\,\tfrac{1}{10101},$$

on trouve

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{arc tg}\,\tfrac{1}{5} - \text{arc tg}\,\tfrac{1}{10} + \text{arc tg}\,\tfrac{1}{100} + \text{arc tg}\,\tfrac{2}{10000} - \text{arc tg}\,\tfrac{1}{10101}.$$

Carl Störmer (Christiania).

Je ne sais si M. Gravé donne toutes les solutions connues. Je trouve en outre la suivante : $m=2$, $p=2$, $n=1$, $q=-7$. Elle me semble bien simple, pour n'avoir pas été remarquée.

A. Boutin.

378. — Dans le XVII^e Volume des *Annales de Gergonne*, je lis à la page 83 ce qui suit :

« *Problème de Géométrie descriptive.* — Construire rigoureusement la droite qui coupe à la fois quatre droites données dans l'espace, non comprises deux à deux dans un même plan. »

Dans le XVIII^e Volume (livraison de décembre 1827), je lis à la page 182 (je copie textuellement)

« Solution du problème de Géométrie descriptive énoncé à la page 83 du précédent Volume; par M. Bobillier, professeur à l'École des Arts et Métiers de Châlons-sur-Marne, et M. Garbinski, professeur à Varsovie.

» *Solution de M. Bobillier.* — Soient A, B, C, D les quatre droites données. Les trois dernières déterminent un paraboloïde hyperbolique qui généralement coupe la première en deux points. La génératrice du paraboloïde doit donc, dans deux de ses positions, passer par ces deux points de A, et comme elle pose constamment sur trois directrices B, C, D, il s'ensuit que, dans ces deux positions, elle satisfait aux positions du problème. Mais il peut fort bien se faire que le paraboloïde ne fasse que toucher la droite A, ou même ne la rencontre pas; d'où il suit que si, généralement parlant, le problème admet deux solutions, il peut fort bien, dans des cas particuliers, n'en admettre qu'une seule, ou même devenir impossible. Il pourrait même se faire que la droite A se trouvât située tout entière dans le paraboloïde, auquel cas toute droite qui poserait à la fois sur B, C, D poserait aussi sur A, et satisferait conséquemment aux conditions du problème. Le problème serait donc alors indéterminé. Supposons qu'aucun de ces cas particuliers n'ait lieu. Par B, soit conduit arbitrairement un plan; en joignant par une droite les points où il coupe C et D, cette droite sera une quatrième arête E du paraboloïde, et, en variant la situation de ce plan, on en obtiendrait une cinquième F.

» Soit ensuite conduit par A un plan arbitraire coupant B, C, D, E, F en b, c, d, e, f respectivement, ces points seront ceux d'une section plane du paraboloïde, c'est-à-dire d'une conique dont les intersections avec la droite A seront les points où cette droite doit être coupée par les deux droites qui résolvent le problème. Ce problème se trouve donc ramené à construire, sur un plan, les intersections d'une droite avec une conique donnée seulement par cinq des points de son périmètre. Pour cela, par b, c je mène des parallèles à A et je détermine, par le théorème de Pascal, les points g et h où ces parallèles sont de nouveau coupées par la courbe. Je joins les milieux des cordes bg et ch parallèles à A par une droite, et le point O où cette droite coupe A est le milieu de l'intervalle entre les deux points cherchés. Je décris un cercle passant par b, g, d, et je détermine le 4ᵉ point k où ce cercle coupe la courbe. Tous les cercles ayant la corde dk commune avec cette conique la couperont suivant d'autres parallèles à A, d'où il suit que d, k et les deux points cherchés sont situés sur une même circonférence. Si donc on élève une perpendiculaire sur le milieu de dk, et une perpendiculaire sur A au point O, et que du point où elles se coupent, pris pour centre et avec ld ou lk pour rayon, on décrive un cercle, ce cercle coupera la droite A aux deux points cherchés.

» *Solution de M. Garbinski.* — Si une droite mobile glisse sur trois quelconques des quatre droites données, par exemple sur A, B, C, elle engendrera, comme l'on sait, une surface gauche du second ordre qui, en général, coupera la quatrième D en deux points d et d' que l'on déterminera rigoureusement par la méthode de M. Brianchon ou par celle de Petit. (*Correspondance de l'École Polytechnique*, t. I, p. 434-440.)

» Cela posé, concevons, par le point d et par l'une quelconque B des trois directrices de la surface gauche, un plan et désignons par c son intersection avec la directrice C. Une droite que l'on fera passer par c et d sera, comme l'on sait, l'une des génératrices de la surface ou, ce qui est la même chose, elle coupera à la fois les trois directrices A, B, C; et comme elle passe aussi par le point d qui appartient à D, elle résoudra complètement le problème, puisqu'elle coupera à la fois les quatre droites données. Ce que nous venons de dire du point d pourra ensuite être appliqué au point d', de manière que, généralement parlant, il existe toujours deux droites qui en coupent à la fois quatre autres données, non situées deux à deux dans un même plan. » C. Couturier (Louvain).

Je n'ai pas très bien compris la portée de la question 378; je ne connais pas la belle solution de Steiner, qu'elle signale, mais le problème me semble en lui-même d'une simplicité presque intuitive. Soient A, B, C, D les quatre droites données; trois d'entre elles B, C, D, par exemple, déterminent, en général, un hyperboloïde gauche (ou si elles sont parallèles à un même plan un poraboloïde hyperbolique) qui coupe A en a et en a'. Je passe une discussion très facile. Par a et a' je mène dans l'hyperboloïde B, C, D, les deux génératrices du second système, elles répondent à la question. C'est du reste, en deux mots, la solution de M. Garbinski.

Quant à la solution de Bobillier, il y a évidemment un lapsus car B, C, D ne déterminent pas en général un paraboloïde hyperbolique, mais un hyperboloïde gauche. E. Lemoine.

379. (E. Lemoine). — Soient

$$A = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_i x^{n-i} + \ldots + a_n$$

un nombre de n chiffres ($a_1 \neq 0$), et

$$a = a_n x^{n-1} + \ldots + a_1,$$

le nombre renversé. Si l'on fait

$$N = A + a = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n,$$

on aura le système suivant d'équations qui renferme toute la théorie des nombres N

$$\begin{array}{ll}
c_n = \mathrm{R}(a_n + a_1), & q_1 = \left[\dfrac{a_n + a_1}{x}\right], \\
c_{n-1} = \mathrm{R}(a_{n-1} + a_2 + q_1), & q_2 = \left[\dfrac{a_{n-1} + a_2 + q_1}{x}\right], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
c_{n-i} = \mathrm{R}(a_{n-i} + a_{i+1} + q_i), & q_{i+1} = \left[\dfrac{a_{n-i} + a_{i+1} + q_i}{x}\right], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
c_1 = \mathrm{R}(a_1 + a_n + q_{n-1}), & q_n = \left[\dfrac{a_1 + a_n + q_{n-1}}{x}\right], \\
c_0 = q_n. &
\end{array}$$

[A] désigne le plus grand entier contenu dans la quantité A et $0 \leq \mathrm{R}(a) < x$ est le résidu, suivant le module x, du nombre a. $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont donc égaux à 0 ou à 1. On peut mettre aussi ces équations sous la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\begin{array}{l}
q_n = c_0, \\
a_1 + a_n + q_{n-1} = q_n x + c_1, \\
a_2 + a_{n-1} + q_{n-2} = q_{n-1} x + c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{n-i} + a_{i+1} + q_i = q_{i+1} x + c_{n-i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_n + a_1 = q_1 x + c_n,
\end{array}\right.$$

et l'on en tire immédiatement le théorème démontré par M. Lemoine dans sa communication (*A. F.*, congrès de Blois, 1884). Ces formules permettent aussi de résoudre la question qui y est posée : A quels caractères reconnaît-on, dans la base x, qu'un nombre donné est de la forme N, et, s'il est de la forme N, trouver la valeur A?

Si A a n chiffres, on aura, tout d'abord, $c_0 = 0$ ou $c_0 = 1$. Ensuite, les nombres c_1 et c_n devront satisfaire à la condition $c_1 = c_n \equiv q_{n-1} (x)$ où q_{n-1} est égal à 0 ou à 1. Si cette condition est remplie, on aura $a_1 + a_n = c_0 x + c_1 - q_{n-1}$, puis $q_1 = \left[\dfrac{a_n + a_1}{x}\right]$. Les deux nombres c_2 et c_{n-2} devront satisfaire alors à la condition $c_2 - c_{n-1} \equiv q_{n-2} - q_1 (x)$, q_{n-2} étant toujours égal à o ou à 1. Si cette condition est remplie, on aura

$$a_2 + a_{n-1} = q_{n-1}x + c_2 - q_{n-2}, \quad \text{puis} \quad q_2 = \left[\frac{a_2 + a_{n-1} + q_1}{x}\right].$$

Puis vient la nouvelle condition $c_3 - c_{n-2} \equiv q_{n-3} - q_2(x)$, q_{n-3} étant l'un des deux nombres o ou 1, etc.

En continuant de la sorte, on s'assurera non seulement que le nombre donné est oui ou non de la forme N, mais, s'il est de cette forme, on déterminera, en même temps, le nombre **A**. Si n est impair $= 2m + 1$, la dernière condition sera celle-ci : $c_{m+1} + q_{m+1}x - q_m$ doit être pair $= 2a_{m+1}$. Les conditions précédentes sont d'une nature très compliquée; c'est pourquoi la théorie des nombres N présentera toujours, me semble-t-il, les plus grandes difficultés. Si maintenant $N = B + b$, où

$$B = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + 0$$

a $n + 1$ chiffres, on aura un second système d'équations analogue au système (I)

$$(\text{II}) \quad \left\{ \begin{array}{c} c_0 = 1, \\ b_1 + b_{n-1} + p_{n-2} = c_1, \\ b_2 + b_{n-2} + p_{n-3} = p_{n-2}x + c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{n-i} + b_i + p_{i-1} = p_i x + c_{n-i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{n-1} + b_1 = c_{n-1}, \\ c_n = 1, \end{array} \right.$$

où les nombres $p_2, \ldots, p_{n-2}$ sont égaux à o ou à 1. Dans ce cas, q_1 est évidemment égal à 1. La question posée revient maintenant, qu'on le veuille ou non, à celle-ci : déterminer le nombre des solutions différentes des équations (I) et (II), les p et les q étant égaux à o ou à 1, les a, les b et les c étant $\geqq 0$ et $< x$. Pour bien se rendre compte de la difficulté de ce problème, il suffit de le résoudre dans un cas particulier, ce qui est alors très simple et n'exige que de la patience, mais ce qui a l'avantage de bien montrer la quasi-impossibilité de trouver la solution dans le cas général. Prenons, comme exemple, le cas de $n = 6$, c'est-à-dire proposons-nous de déterminer le nombre des nombres doublement de la forme N, compris entre

x^6 et x^7. On a, dans ce cas, à satisfaire aux équations suivantes :

$$c_0 = c_6 = 1.$$

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_6 + q_5 = x + c_1, && b_1 + b_5 = c_5,\\
&a_2 + a_5 + q_4 = q_5 x + c_2, && b_2 + b_4 = p_2 x + c_4,\\
&a_3 + a_4 + q_3 = q_4 x + c_3, && 2b_3 + p_2 = p_3 x + c_3,\\
&a_4 + a_3 + q_2 = q_3 x + c_4, && b_2 + b_4 + p_3 = p_4 x + c_2,\\
&a_5 + a_2 + 1 \ = q_2 x + c_5, && b_1 + b_5 + p_4 = c_1.\\
&a_6 + a_1 \qquad = x + 1.
\end{aligned}$$

1° Si l'on choisit $q_5 = 0$ et $p_4 = 1$, on trouve $c_1 = 1$, $c_5 = 0$, $c_2 = x - 1$, $c_4 = x - 2$, $c_3 = x - 3$, d'où le nombre

$$N = 1,\ 1,\ x-1,\ x-3,\ x-2,\ 0,\ 1,$$

qui est égal à $A + a$,

$$A = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6,$$

$$a_1 + a_6 = x + 1, \qquad a_2 + a_5 = x - 1, \qquad a_3 + a_4 = x - 3,$$

et à $B + b$,

$$B = 1,\ 0,\ x-1,\ x-2,\ x-1,\ 0,\ 0.$$

2° Si l'on choisit $q_5 = 0$, $p_4 = 0$ et $q_3 = 0$, on obtient

$$N = 1100011,$$

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_6 = x + 1, && B = 1100000,\\
&a_2 + a_5 = 0 && (a_2 = a_5 = 0),\\
&a_3 + a_4 = 0 && (a_3 = a_4 = 0).
\end{aligned}$$

En faisant ainsi successivement toutes les hypothèses compatibles avec les équations précédentes, on trouve, sans peine, tous les nombres doublement de la forme N, compris entre x^6 et x^7 :

$$N = 1,\ 1,\ x-1,\ x-3,\ x-2,\ 0,\ 1,$$

$$N = 1,\ 1,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 1,\ 1,$$

$$\begin{matrix} N = 1112111 \\ (B = 1111000) \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &a_1 + a_6 = x + 1,\\ &a_2 + a_5 = 0,\\ &a_3 + a_4 = x + 1; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{matrix} N = 1210121 \\ (B = 1110010) \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &a_1 + a_6 = x + 1,\\ &a_2 + a_5 = x + 1,\\ &a_3 + a_4 = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{array}{l} N = 1222221 \\ (B = 1111110) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_6 = x + 1, \\ a_2 + a_5 = x + 1, \\ a_3 + a_4 = x + 1; \end{array} \right.$$

$$N = 120,\ x-2,\ x-1,\ 11 \left\{ \begin{array}{ll} a_1 + a_6 = x + 1, & b_1 + b_5 = 1, \\ a_2 + a_5 = x, & b_2 + b_4 = x - 1, \\ a_3 + a_4 = x - 2; & b_3 = x - 1; \end{array} \right.$$

$$N = 1211111 \left\{ \begin{array}{ll} a_1 + a_6 = x + 1, & b_1 + b_5 = 1, \\ a_2 + a_5 = x, & b_2 + b_4 = x + 1, \\ a_3 + a_4 = x; & b_3 = 0. \end{array} \right.$$

A ces nombres, il faut ajouter, lorsque x est impair, les nombres suivants :

$$N = 1111011 \left\{ \begin{array}{ll} a_1 + a_6 = x + 1, & b_1 + b_5 = 1, \\ a_2 + a_5 = 0, & b_2 + b_4 = 0, \\ a_3 + a_4 = x, & b_3 = \dfrac{x+1}{2}, \end{array} \right.$$

$$N = 1221121 \left\{ \begin{array}{ll} a_1 + a_6 = x + 1, & b_1 + b_5 = x, \\ a_2 + a_5 = x + 1, & b_2 + b_4 = 1, \\ a_3 + a_4 = x, & b_3 = \dfrac{x+1}{2}, \end{array} \right.$$

$$N = 1210011 \left\{ \begin{array}{ll} a_1 + a_6 = x + 1, & b_1 + b_5 = 1, \\ a_2 + a_5 = x, & b_2 + b_4 = x, \\ a_3 + a_4 = x - 1, & b_3 = \dfrac{x-1}{2}. \end{array} \right.$$

Cet exemple montre qu'il y a effectivement d'autres nombres doublement de la forme N que ceux qui sont mentionnés dans l'énoncé. J. Franel (Zurich).

Note sur la question 379. — *Combien la somme* $A + a$ *prend-elle de valeurs différentes quand* A *varie de* 1 *à* θ^n (1)? Posons $A + a = N_p$, p indiquant le nombre des chiffres de A. En faisant varier p de 1 à n dans les formules qui donnent le nombre des valeurs différentes que peut prendre $A + a$, A ayant p chiffres, et en ajoutant tous les résultats obtenus, on

(1) θ représente la base du système de numération désigné par x dans l'énoncé de la question.

aurait le nombre total des valeurs que peut prendre $A + a$, quand A varie de 1 à θ^n, s'il n'y avait pas de valeurs répétées. Mais de ce nombre il faudra retrancher le nombre des valeurs communes à N_p et N_{p+1}, p variant de 1 à $n - 1$ (ou plutôt de 2 à $n - 1$, car on reconnaît *a priori* que N_1 et N_2 n'ont pas de valeur commune). La plus grande valeur de N_p étant $2\theta^p - 2$, si $N_p = N_{p+1}$, le premier chiffre de N_{p+1} ne pourra être que l'unité; par suite, dans le nombre B, tel que $B + b = N_{p+1}$, le premier chiffre est toujours 1 et le dernier zéro.

Cela posé, nous distinguerons deux cas, suivant que p est pair ou impair :

1° $p = 2m$. Soient $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$ les sommes des chiffres équidistants des extrêmes dans A; la valeur de N_p sera

$$\begin{aligned} &X_1\theta^{2m-1} + X_2\theta^{2m-2} + X_3\theta^{2m-3} + \ldots \\ &\quad + X_m\theta^m + X_m\theta^{m-1} + \ldots + X_3\theta^2 + X_2\theta + X_1. \end{aligned}$$

De même, d'après la remarque précédente, la valeur de N_{p+1} sera de la forme

$$\theta^{2m} + Y_1\theta^{2m-1} + Y_2\theta^{2m-2} + \ldots + 2Y_m\theta^m + \ldots + Y_2\theta^2 + Y_1\theta + 1.$$

Pour résoudre l'équation $N_p = N_{p+1}$, mettons-la sous la forme

$$\begin{aligned} &(X_1 - Y_1)\theta^{2m-1} + (X_2 - Y_2)\theta^{2m-2} + (X_3 - Y_3)\theta^{2m-3} + \ldots \\ &\quad + (X_m - 2Y_m)\theta^m + \ldots + (X_3 - Y_2)\theta^2 + (X_2 - Y_1)\theta + (X_1 - 1) = \theta^{2m}. \end{aligned}$$

On voit que $X_1 - 1$ doit être divisible par θ. Les valeurs des X et des Y ne pouvant être supérieures à $2(\theta - 1)$ et X_1 étant nécessairement plus grand que 1, il faut que l'on ait $X_1 - 1 = \theta$.

Après avoir divisé les deux membres de l'équation par θ, on voit que $X_2 - Y_1 + 1$ doit aussi être divisible par θ. Soit $X_2 - Y_1 + 1 = \theta\alpha_1$. Ayant divisé par θ, on verra que $X_3 - Y_2 + \alpha_1$ doit encore être un multiple θ; et ainsi de suite. On a donc le système d'équations

$$\begin{gathered} X_1 - 1 = \theta, \qquad X_2 - Y_1 + 1 = \theta\alpha_1, \qquad X_3 - Y_2 + \alpha_1 = \theta\alpha_2, \qquad \ldots \\ X_m - 2Y_m + \alpha_{m-1} = \theta\alpha_m, \qquad \ldots, \qquad X_3 - Y_3 + \alpha_{2m-4} = \theta\alpha_{m-3}, \\ X_2 - Y_2 + \alpha_{2m-3} = \theta\alpha_{2m-2}, \qquad X_1 - Y_1 + \alpha_{2m-2} = \theta. \end{gathered}$$

Les α ne peuvent prendre que les valeurs : -1, 0, $+1$.

De ces équations, on tire

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \theta + 1, && Y_1 = 1 + \alpha_{2m-2},\\
&X_2 = Y_1 - 1 + \theta\alpha_1, && Y_2 = X_2 + \alpha_{2m-3} - \theta\alpha_{2m-2},\\
&X_3 = Y_2 - \alpha_1 + \theta\alpha_2, && Y_3 = X_3 + \alpha_{2m-4} - \theta\alpha_{2m-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&X_{m-1} = Y_{m-2} - \alpha_{m-3} + \theta\alpha_{m-2}, && Y_{m-1} = X_{m-1} + \alpha_m - \theta\alpha_{m+1},\\
&X_m = Y_{m-1} - \alpha_{m-2} + \theta\alpha_{m-1}. && 2Y_m = X_m + \alpha_{m-1} - \theta\alpha_m,
\end{aligned}
$$

ou encore :

$$
\text{(I)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&X_1 = \theta + 1,\\
&X_2 = \theta\alpha_1 + \alpha_{2m-2},\\
&X_3 = (\theta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{2m-2}) + \alpha_2 + \alpha_{2m-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&X_m = (\theta - 1)[(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{m-1})\\
&\qquad - (\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \ldots + \alpha_{2m-2})] + \alpha_{m-1} + \alpha_m.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
[\text{I}(\textit{bis})]\quad \left\{
\begin{aligned}
&Y_1 = 1 + \alpha_{2m-2},\\
&Y_2 = (\theta - 1)(\alpha_1 - \alpha_{2m-2}) + \alpha_1 + \alpha_{2m-3},\\
&Y_3 = (\theta - 1)[(\alpha_1 + a_2) - (\alpha_{2m-3} + \alpha_{2m-2})] + \alpha_2 + \alpha_{2m-4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2Y_m = (\theta - 1)[(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1}) - (\alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_{2m-2})] + 2\alpha_{m-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

2° $p = 2m - 1$. Dans ce cas l'équation $N_p = N_{p+1}$ peut se mettre sous la forme

$$
\begin{aligned}
&(X_1 - Y_1)\theta^{2m-2} + (X_2 - Y_2)\theta^{2m-3} + \ldots\\
&\quad + (2X_m - Y_{m-1})\theta^{m-1} + \ldots + (X_2 - Y_1)\theta + (X_1 - 1) = \theta^{2m-1}.
\end{aligned}
$$

On en déduit, comme dans le premier cas :

$$
\begin{gathered}
X_1 - 1 = \theta, \qquad X_2 - Y_1 + 1 = \theta\alpha_1, \qquad X_3 - Y_2 + \alpha_1 = \theta\alpha_2, \qquad \ldots,\\
2X_m - Y_{m-1} + \alpha_{m-2} = \theta\alpha_{m-1}, \qquad \ldots, \qquad X_3 - Y_3 + \alpha_{2m-5} = \theta\alpha_{m-4},\\
X_2 - Y_2 + \alpha_{2m-4} = \theta\alpha_{2m-3}, \qquad X_1 - Y_1 + \alpha_{2m-3} = \theta.
\end{gathered}
$$

D'où

$$
\text{(II)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&X_1 = \theta + 1,\\
&X_2 = \theta\alpha_1 + \alpha_{2m-3},\\
&X_3 = (\theta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{2m-3}) + \alpha_2 + \alpha_{2m-4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&X_{m-1} = (\theta - 1)[(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-2})\\
&\qquad - (\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \ldots + \alpha_{2m-3})] + \alpha_{m-2} + \alpha_m,\\
&2X_m = (\theta - 1)[(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}) - (\alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_{2m-3})] + 2\alpha_{m-1},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
[\text{II}(bis)]\left\{\begin{aligned}
Y_1 &= 1 + \alpha_{2m-3},\\
Y_2 &= (\theta - 1)(\alpha_1 - \alpha_{2m-3}) + \alpha_1 + \alpha_{2m-4},\\
Y_3 &= (\theta - 1)[(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_{2m-4} + \alpha_{2m-3})] + \alpha_2 + \alpha_{2m-5},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y_{m-1} &= (\theta - 1)[(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-2})\\
&\qquad - (\alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_{2m-3})] + \alpha_{m-2} + \alpha_{m-1}.
\end{aligned}\right.
$$

Remarque. — Ces formules donnent toutes les solutions de l'équation $N_p = N_{p+1}$, quel que soit le système de numération. Pour en faire l'application, on donnera successivement aux α les valeurs $-1, 0, +1$ en les combinant de toutes les manières possibles, et l'on ne conservera pour les X et les Y que les valeurs positives et ne dépassant pas $2(\theta - 1)$. Quant aux valeurs de Y_m dans le premier cas et de X_m dans le second, elles sont inférieures à θ; à cause du coefficient 2, il y aura lieu de distinguer deux cas, suivant que θ est pair ou impair. Dans chaque cas particulier, on apercevra immédiatement certaines valeurs des α qui donneraient pour les X et les Y des valeurs inacceptables; ce qui abrégera la résolution de l'équation $N_p = N_{p+1}$.

Valeurs communes a N_p et N_{p+1}. — Des formules (I) et (II), on déduit les valeurs communes à N_p et N_{p+1}

$$
(\text{III})\left\{\begin{aligned}
N_2 = N_3 &= (\theta + 1)(\theta + 1),\\
N_3 = N_4 &= (\theta + 1)(\theta^2 + \alpha_1\theta + 1),\\
N_4 = N_5 &= (\theta + 1)(\theta^3 + \alpha_1\theta^2 + \alpha_2\theta + 1),\\
N_5 = N_6 &= (\theta + 1)(\theta^4 + \alpha_1\theta^3 + \alpha^2\theta^2 + \alpha_3\theta + 1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
N_p = N_{p+1} &= (\theta + 1)(\theta^{p-1} + \alpha_1\theta^{p-2} + \alpha_2\theta^{p-3} + \ldots + \alpha_{p-2}\theta + 1).
\end{aligned}\right.
$$

Rappelons que les valeurs des α $(-1, 0, +1)$ doivent être telles que les valeurs des X et des Y soient positives et plus petites que $2(\theta - 1)$.

Applications des formules (I) et (II).

Résolution de l'équation $N_2 = N_3$. Les formules (I) donnent immédiatement la solution unique : $X_1 = \theta + 1$, $Y_1 = 1$.

La seule valeur commune à N_2 et N_3 est $(\theta + 1)^2$.

Résolution de l'équation $N_3 = N_4$. — Les formules (II) sont dans ce cas :

$$X_1 = \theta + 1, \qquad Y_1 = 1 + \alpha_1, \qquad 2X_2 = (\theta + 1)\alpha_1.$$

Il en résulte que pour $\alpha_1 = 0$, seule valeur possible si θ est pair, $Y_1 = 1$, $X_2 = 0$, $N = (\theta + 1)(\theta^2 + 1)$.

Si θ est impair, on a, en outre, pour $\alpha_1 = 1$, $Y_1 = 2$, $X_2 = \frac{\theta + 1}{2}$, $N = (\theta + 1)(\theta^2 + \theta + 1)$.

Résolution de l'équation $N_4 = N_5$.

$$X_1 = \theta + 1, \quad X_2 = \theta\alpha_1 + \alpha_2, \quad Y_1 = 1 + \alpha_2, \quad 2Y_2 = (\theta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_1.$$

On voit que α_1 ne peut être égal à -1, et que, quand $\alpha_1 = 0$, α_2 ne peut être que ± 1.

α_1.	α_2.	X_1.	X_3.	Y_1.	Y_2.		Valeurs de N.	
0	0	$\theta+1$	0	1	0		$(\theta+1)(\theta^3+1)$.	Si θ est pair : 2 valeurs de N
1	0	$\theta+1$	θ	1	$\frac{\theta+1}{2}$	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^3+\theta^2+1)$.	impair : 3 »
1	1	$\theta+1$	$\theta+1$	2	1		$(\theta+1)(\theta^3+\theta^2+\theta+1)$.	

Résolution de l'équation $N_5 = N_6$.

$$X_1 = \theta + 1, \qquad Y_1 = 1 + \alpha_3,$$
$$X_2 = \theta\alpha_1 + \alpha_3, \qquad Y_2 = (\theta - 1)(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_1 + \alpha_2,$$
$$2X_3 = (\theta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + 2\alpha_2.$$

α_1.	α_2.	α_3.	X_1.	X_2.	X_3.	Y_1	Y_2.		N.	
0	0	0	$\theta+1$	0	0	1	0		$(\theta+1)(\theta^4+1)$.	θ pair.
0	1	0	$\theta+1$	0	$\frac{\theta+1}{2}$	1	1	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^4+\theta^2+1)$.	2 valeurs de N.
1	-1	-1	$\theta+1$	$\theta-1$	$\frac{\theta+3}{2}$	0	$2(\theta-1)$	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^4+\theta^3-\theta^2-\theta+1)$.	»
1	0	0	$\theta+1$	θ	$\frac{\theta-1}{2}$	1	θ	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^4+\theta^3+1)$.	θ impair.
1	0	1	$\theta+1$	$\theta+1$	0	2	1		$(\theta+1)(\theta^4+\theta^3+\theta+1)$.	6 valeurs de N.
1	1	1	$\theta+1$	$\theta+1$	$\frac{\theta+1}{2}$	2	2	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^4+\theta^3+\theta^2+\theta+1)$.	»

Résolution de l'équation $N_6 = N_7$.

$$X_1 = \theta + 1 \qquad Y_1 = 1 + \alpha_4,$$
$$X_2 = \theta\alpha_1 + \alpha_4, \qquad Y_2 = (\theta - 1)(\alpha_1 - \alpha_4) + \alpha_1 + \alpha_3,$$
$$X_3 = (\theta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4) + \alpha_2 + \alpha_3, \qquad 2Y_3 = (\theta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) + 2\alpha_2.$$

α_1.	α_2.	α_3.	α_4.	X_1.	X_2.	Y_1.	Y_2.	Y_3.		N.	
0	0	0	0	0	0	0	0	0		$(\theta+1)(\theta^5+1)$.	θ pair.
0	1	0	0	0	θ	0	0	$\frac{\theta+1}{2}$	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^5+\theta^3+1)$.	7 valeurs de N.
0	1	1	0	0	$\theta+1$	0	1	1		$(\theta+1)(\theta^5+\theta^3+\theta^2+1)$.	»
1	-1	-1	-1	$\theta-1$	$\theta-3$	0	$2(\theta-1)$	$\theta-2$		$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4-\theta^3-\theta^2-\theta+1)$.	θ impair.
1	-1	-1	0	θ	0	1	$\theta-1$	$\frac{\theta-3}{2}$	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4-\theta^3-\theta^2+1)$.	13 valeurs de N.
1	0	1	0	θ	$\theta-2$	1	$\theta-1$	$\theta-1$		$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4-\theta^2+1)$.	»
1	0	0	0	θ	$\theta-1$	1	θ	$\frac{\theta-1}{2}$	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4+1)$.	»
1	0	1	0	θ	θ	1	$\theta+1$	0		$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4+\theta^3+1)$.	»
1	1	1	0	θ	$2(\theta-1)$	1	$\theta+1$	$\frac{\theta+1}{2}$	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4+\theta^3+\theta^2+1)$.	»
1	0	1	1	$\theta+1$	0	0	0	$\frac{\theta-1}{2}$	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4-\theta^2+\theta+1)$.	»
1	0	0	1	$\theta+1$	0	2	1	0		$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4+\theta+1)$.	»
1	1	0	1	$\theta+1$	$\theta-1$	2	1	$\frac{\theta+1}{2}$	θ impair.	$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4+\theta^3+\theta+1)$.	»
1	1	1	1	$\theta+1$	$\theta+1$	2	2	1		$(\theta+1)(\theta^5+\theta^4+\theta^3+\theta^2+\theta+1)$.	»

Exemples. Combien la somme $A+a$ prend-elle de valeurs différentes quand A ne dépasse pas 7 chiffres?

Pour les nombres de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 chiffres, les nombres des valeurs différentes que peut prendre $A+a$ sont respectivement $9, 2.9, 2.9.10, 2.9.19, 2.9.10.19, 2.9.19^2, 2.9.10.19^2$. Le total est

$$9+2.9.(1+10)(1+19+19^2)=9+11(19^3-1)=11.19^3-2=75447,$$

dont il faut retrancher le nombre des valeurs répétées, savoir $1+1+2+2+7=13$; ce qui donne 75434.

Liste des nombres A du système décimal et qui sont de la forme N lorsque A varie de 1 a 10^7 (exclusivement).

$$121 = 29 + 92 = 38 + 83 = 110 + 011, \quad \ldots,$$
$$1111 = 209 + 902 = 303 + 803 = 1100 + 0011, \quad \ldots,$$

$$11011 = 2009 + 9002 = 11000 + 00011,$$
$$12221 = 2299 + 9922 = 11110 + 01111,$$
$$110011 = 20009 + 90002 = 100010 + 010001,$$
$$121121 = 22099 + 99022 = 100120 + 021001,$$
$$1100011 = 200009 + 900002 = 1100000 + 11,$$
$$1112111 = 202909 + 909202 = 1111000 + 0001111,$$
$$1197801 = 222579 + 975222 = 1098900 + 0098901,$$

$$1208911 = 231779 + 977132 = 1129700 + 0079211,$$
$$1210121 = 220099 + 990022 = 1110010 + 0100111,$$
$$1211111 = 221989 + 989122 = 1120900 + 0090211,$$
$$1222221 = 222999 + 999222 = 1111110 + 0111111.$$

E. FAUQUEMBERGUE.

380. (E. LEMOINE). — En modifiant légèrement les formules relatives à la question 379, on peut les appliquer au système binaire et, par suite, en déduire une solution de la question 380. Il suffit de faire $\theta = 2$ et de remplacer la valeur $\theta + 1$ de X_1 par 1, puisque dans ce cas les valeurs des X et des Y ne peuvent pas être supérieures à 2, et même la valeur maximum de Y_m dans les formules (I) et de X_m dans les formules (II) est 1. On a alors, pour résoudre l'équation $N_{2m} = N_{2m+1}$, les formules suivantes, dans lesquelles les α ne sont susceptibles de prendre que trois valeurs : -1, 0, $+1$.

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} X_1 = 1, \\ X_2 = 2\alpha_1 + \alpha_{2m-2} - 1, \\ X_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_{2m-3} - \alpha_{2m-2} - 1, \\ X_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_{2m-4} - \alpha_{2m-2} - \alpha_{2m-3} - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{m-1} + \alpha_m - \alpha_{m+1} - \ldots - \alpha_{2m-2} - 1. \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{I}\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} Y_1 = \alpha_{2m-2} - 1, \\ Y_2 = 2\alpha_1 + \alpha_{2m-3} - \alpha_{2m-2} - 1, \\ Y_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_{2m-4} - \alpha_{2m-3} - \alpha_{2m-2} - 1, \\ Y_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_{2m-5} - \alpha_{2m-4} - \alpha_{2m-3} - \alpha_{2m-2} - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 2Y_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{m-1} + \alpha_{m-1} - \alpha_m - \alpha_{m+1} - \ldots - \alpha_{2m-2} - 1, \end{array}\right.$$

A l'inspection des formules qui donnent Y_1, X_2 et Y_2, on reconnaît immédiatement qu'il faut prendre $\alpha_{2m-2} = \alpha_1 = 1$; ce qui donne $Y_1 = 0$ et $X_2 = 2$. De sorte que, si $A + a = B + b$, le second chiffre à droite de A, de même que le second chiffre à gauche est toujours 1, et dans B ces mêmes chiffres sont des 0.

De même, l'équation $N_{2m-1} = N_{2m}$ sera résolue complètement par les formules

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{array}{l} X_1 = 1, \\ X_2 = 2\alpha_1 + \alpha_{2m-3} - 1, \\ X_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_{2m-4} - \alpha_{2m-3} - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 2X_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{m-1} + \alpha_{m-1} - \alpha_m - \alpha_{m+1} - \ldots - \alpha_{2m-3} - 1. \end{array}\right.$$

$$
(\text{II } bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
&Y_1 = \alpha_{2m-3} - 1,\\
&Y_2 = 2\alpha_1 + \alpha_{2m-4} - \alpha_{2m-3} - 1,\\
&Y_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_{2m-5} - \alpha_{2m-4} - \alpha_{2m-3} - 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&Y_{m-1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{m-2} + \alpha_{m-1} - \alpha_m - \alpha_{m+1} - \ldots - \alpha_{2m-3} - 1.
\end{aligned}
\right.
$$

On reconnaît encore qu'il faut prendre $\alpha_{2m-3} = \alpha_1 = 1$; d'où $Y_1 = 0$ et $Y_2 = 2$. En profitant de ces remarques on résout très rapidement les équations suivantes :

$N_1 = N_2$, impossible; $N_2 = N_3$, impossible; $N_3 = N_4$, 1 solution; $N_4 = N_5$, impossible; $N_5 = N_6$, 1 solution; $N_6 = N_7$, 1 solution; $N_7 = N_8$, 2 solutions; $N_8 = N_9$, 2 solutions.

Voici la liste des nombres ne dépassant pas 9 chiffres et qui, dans le système binaire, sont doublement de la forme N :

1001 =	110 +	011 =	1000 +	0001,
101101 =	11110 +	01111 =	101000 +	000101,
1010001 =	111010 +	010111 =	1001000 +	0001001,
10011001 =	1110010 +	0100111 =	10010000 +	00001001,
10111101 =	1111110 +	0111111 =	10110000 +	00001101,
100101001 =	11100010 +	01000111 =	100100000 +	000001001,
101100101 =	11110110 +	01101111 =	101010000 +	000010101.

On remarquera que ces nombres ne sont pas tous symétriques; ce qui augmente la difficulté de découvrir la loi de formation des nombres qui sont doublement de la forme N, aussi bien dans le système binaire que dans tout autre système de numération.

FAUQUEMBERGUE.

Les questions 379, 380 étaient parmi celles que contenaient les placards de propagande qui ont précédé le Journal et nous avons, depuis cette époque, les solutions intéressantes que nous venons de publier. Ignorant alors la nécessité de n'imprimer que des réponses très brèves, nécessité que l'expérience nous impose, nous les avions acceptées, mais nous n'avions pu les faire paraître jusqu'ici parce qu'elles dépassaient le cadre de notre publication.

LA RÉDACTION.

389. (L. AUTONNE). — J'ai présenté au Congrès de Marseille, en 1891, une Note intitulée : *Les sommets dans les courbes planes* (*A. F.*, 1891, p. 23-38). J'ai cité, au début de cette Note,

les recherches d'Halphen, signalées par M. Autonne, d'après un renseignement que m'avait communiqué M. Darboux, mais que je n'avais pu contrôler. Au Congrès de Besançon, en 1893, sous le titre : *L'espace infinitésimal autour d'un point d'inflexion*, j'ai poursuivi l'étude précédente (*A. F.*, 1893, p. 277-287).

J'espère, au prochain Congrès, celui qui se tiendra à Bordeaux au mois d'août 1895, présenter une nouvelle Note sur ce sujet, Note dans laquelle j'étudierai les propriétés des infiniment petits géométriques que l'on rencontre dans l'espace infinitésimal qui entoure un point double. Les propriétés varient avec la nature du point double. Le sujet est vaste et non sans intérêt.

G. DE LONGCHAMPS.

On peut citer : E. COSSERAT, *Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage de l'un de ses points* (16 p.) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, 1890); P. DEL PEZZO, *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche* (*Rend. r. Accad. delle Scienze di Napoli*, 1893).

Une liste très complète des travaux sur les singularités des courbes, figure dans le livre de MM. NÖTHER et BRILL (*Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit*), publié en 1894 par l'Union des Mathématiciens allemands.

H. BROCARD, G. HUMBERT, F. AMODEO (Naples).

397. (E.-M. LÉMERAY). — Menons les droites AA', BB'. Nous formons ainsi deux contours fermés qui se coupent en un nombre pair de points réels. Le problème se trouve ramené au cas d'un segment de droite AA' et d'un arc de courbe fini et continu joignant deux points B et B'. Or, ainsi, la parité du nombre des intersections réelles ne change pas si l'on déforme l'arc BB' sans lui faire franchir les points A et A'. On peut donc le réduire à des circonférences de rayon infiniment petit décrites autour de A et A', à un segment de droite allant d'une circonférence à l'autre, et à deux segments de droite reliant l'une des circonférences aux points B et B', les circonférences et la droite qui les relie pouvant être parcourues un certain nombre de fois, dans un sens ou dans l'autre, et le mouvement étant toujours continu.

Pendant qu'un mobile M suivra le parcours ainsi défini pour se rendre de B en B$'$, le rayon vecteur AM décrira un angle égal à $\pm$BAB$'+2n\pi$, n étant positif ou négatif (je mets le double signe devant l'angle BAB$'$ pour montrer qu'on peut compter les angles indifféremment dans un sens ou dans l'autre). De même, le rayon vecteur A$'$M décrira un angle égal à $\pm$ BA$'$B$'+2n'\pi$.

Il est aisé de voir que le nombre cherché sera pair si, les segments de droite AA$'$, BB$'$ ne se rencontrant pas, n et n' sont de même parité, ou si, ces segments se rencontrant, n et n' sont de parité différente, et qu'il sera impair dans les autres cas. Par suite, n_1 et n'_1 ayant des significations analogues à celles de n et n', pour les points B et B$'$ par rapport à un arc allant de A en A$'$, le nombre des intersections des arcs AA$'$, BB$'$ sera de même parité que la somme $n+n'+n_1+n'_1$, si les segments de droite AA$'$, BB$'$ ne se coupent pas, et de parité inverse, s'ils se coupent.

WELSCH.

400. (C. A. LAISANT). — Des réponses, fort nombreuses, nous sont parvenues de MM. A. AKAR, A. BOUTIN, H.-W. CURJEL (Chester), F. DELASTELLE, L. ESPINAT, J. FRANEL, A. HÉBRAILH, J. M. DE LAS ALAS, E. MAILLET, E. MALO, L. MEURICE, M. DE MONTCHEUIL, C. MOREAU, *Nauticus*, A. PALMSTRÖM, WELSCH. Presque toutes s'appuient sur ce que le produit du nombre considéré par n (par 9 dans le système décimal) s'écrit sous la forme $111\ldots.101$; et on en déduit ensuite que le produit par un nombre premier avec n ne saurait présenter deux fois le même chiffre. L'étude signée *Nauticus* généralise beaucoup la question et présente un réel intérêt. Nous regrettons vivement de n'avoir pu l'insérer, en raison de son étendue; mais nous remercions nos confrères MM. Mansion et Neuberg qui ont bien voulu la publier dans *Mathesis* (1895, février, p. 37). Nous donnons ici les réponses de M. Welsch et de M. Akar, deux des plus brèves parmi celles que nous avons reçues, et nous y ajoutons quelques remarques particulières contenues dans certaines autres réponses.

LA RÉDACTION.

Le nombre $123\ldots n = \text{N}$, écrit dans le système de numération de base $n+1$, est le quotient de la division par n du nombre $111\ldots..101 = \text{D}$, écrit dans le même système et composé de $n+1$ chiffres égaux à 1, à l'exception de l'avant-dernier, qui est 0. Le produit de N par un nombre p, que je supposerai inférieur à n et premier avec n, n'est autre que le quotient de la division par n du produit Dp, lequel peut s'écrire $ppp\ldots\ldots pop$. Dans cette division, les restes successifs sont respectivement congrus suivant le module n à ceux de la division de D par n, multipliés par p. Ils sont donc, comme ceux-ci, tous différents, à l'exception des deux derniers qui sont toujours égaux entre eux.

Les dividendes partiels successifs, sauf l'avant-dernier, se terminant par le même chiffre p, deux quelconques d'entre eux diffèrent d'un multiple de $n+1$, moindre que $p(n+1)$, et ne peuvent par suite donner le même chiffre au quotient. Enfin, le dernier dividende partiel, étant un multiple de n, a $n-p$ unités du 2e ordre. Il en est de même de l'avant-dernier, qui de plus n'a pas d'unités du 1er ordre. On en conclut facilement que cet avant-dernier fournit au quotient un chiffre différent de ceux que donnent tous les autres dividendes partiels. WELSCH.

Soit A le nombre écrit $123\ldots n$ dans le système de base $(n+1)$. On a $n.A=(n+1).B-n$, B s'écrivant $11\ldots1$ (n fois le chiffre 1), dans le système de base $(n+1)$ et $pnA=(n+1)c-pn$; avec $c=pB$ $(p<n)$, c s'écrira $pp\ldots p$ (n fois le chiffre p) dans le système de base $(n+1)$, et l'on aura $pA=n+1\dfrac{c}{n}-p$.

Si p est premier avec n, le quotient de c par n sera constitué par $(n-1)$ chiffres différents. Effectuons, en effet, la division et supposons que l'on trouve, pour la première fois, un chiffre du quotient déjà écrit. Les dividendes partiels correspondants (ils sont tous NOMBRES DE 2 CHIFFRES), ayant même chiffre d'unités seraient égaux; il en résulterait que les restes des dividendes partiels précédents et, par suite, que ces dividendes eux-mêmes seraient égaux, ce qui est contraire à nos hypothèses (ils auraient déjà donné mêmes chiffres au quotient).

Le nombre $\dfrac{(n+1)c}{n}$ est donc terminé par un o, et constitué par n autres chiffres différents. Si nous retranchons p, nous ne modifions que les deux derniers chiffres de $\dfrac{(n+1)c}{n}$. Or, les derniers chiffres significatifs de $(n+1)\dfrac{c}{n}$ et de $(n+1)\dfrac{c}{n}-p$ sont les mêmes, puisque la différence entre $(n+1)\dfrac{c}{n}-p$ et $\dfrac{c}{n}$

ou $c-p$, terminée par un o, est divisible par $(n+1)$. Le nombre $(n+1)\frac{c}{n}-p$ ou pA est donc formé de n chiffres dont $(n-1)$ au moins seront différents. Les n chiffres seront différents, parce que leur somme doit être divisible par n, A étant divisible par n, ce qui serait impossible s'il n'y avait que deux chiffres semblables.
ADR. AKAR.

Une propriété semblable a lieu pour le nombre $n(n-1)\ldots 21$, et aussi pour tous ceux qu'on en déduit par permutations circulaires.
ED. MAILLET.

Le nombre $M = 12345679$ multiplié par 9, 18, 27, ..., 81 donne, comme on le sait, un produit composé de chiffres identiques. J'ai démontré, par le procédé employé dans la démonstration du théorème de M. Laisant, que ce nombre, multiplié par un nombre inférieur à 9 et premier avec 9, donne un produit qui s'écrit au moyen des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pris chacun une seule fois, à l'exception de la différence entre 9 et le multiplicateur, laquelle n'entre pas dans le produit. Ainsi, en multipliant M par 2, le produit ne renfermera pas le chiffre 7 et s'écrira au moyen de tous les autres chiffres significatifs, pris chacun une fois. Cette propriété s'étend au nombre qui s'écrit $123\ldots(n-2)n$ dans le système de numération de base $n+1$ (¹).
L. MEURICE (Liége).

Si l'on effectue tous les produits possibles dans les conditions de l'énoncé, et si on les écrit par ordre de grandeur, y compris le produit par l'unité, les uns sous les autres, de manière que les unités de même ordre soient dans une même colonne verticale; alors, dans chaque colonne, la somme des chiffres extrêmes, ou à égale distance des extrêmes, est constante et égale à la base x; sauf pour l'avant-dernière colonne, où la constante est $x-1$ et pour la dernière où elle est $x+1$.
A. BOUTIN.

404. (A. GOULARD). — L'expression proposée peut s'écrire

$$\frac{[(ab+cd)e-(ad+bc)f]^2}{(ab+cd-ef)};$$

(¹) Voir *Mathesis*, mars 1895, p. 64; L. MEURICE, *Sur un theorème d'Arithmétique*.

voir les *Questions d'Algèbre* de Desboves (Exercices sur le quadrilatère); or le dénominateur est toujours positif, car, le quadrilatère étant convexe, $ab + cd > ef$; donc l'expression proposée est toujours positive. P. Puig.

407. (J. Voyer). — Cette *réussite* de cartes est déjà ancienne. D'après une étude et une bibliographie publiées dans les *N. A.* (1844, p. 404-410) elle a été : 1° traitée par Montmort (*Essai d'analyse sur les jeux de hasard,* 1708, p. 54); 2° proposée dans la *Correspondance mathématique de Quételet* (t. III, p. 315); 3° traitée par Bertrand de Genève (*Développement sur la partie élémentaire des Mathématiques,* t. I, p. 410); 4° indiquée dans les *Annales de Gergonne* (t. XII, p. 120); 5° proposée dans les *N. A.* (*loc. cit.*, p. 256, question 85); 6° résolue (*Ibid.*, p. 404-410); 7° traitée par différents géomètres, Euler, Laplace, Catalan. H. Brocard.

La solution générale de ce problème *des rencontres* se trouve, p. 96 et suiv., dans : *Théorie des jeux de hasard,* par H. Laurent (*Encyclopédie des Aide-Mémoire;* Gauthier-Villars et G. Masson). L. Laugel. H. Delannoy.

Il s'y trouve (p. 96, énoncé du problème) une faute d'impression : *au lieu de r, lire s*; et encore p. 97, ligne 19, *au lieu de* 5, *lire s.* L'analyse et les formules sont trop longues pour être reproduites ici. La question est traitée par une méthode différente dans Laplace; voir aussi *Traité des probabilités* de J. Bertrand. L. Laugel.

411. (*A.-P. Ericsson*). — La réponse à la question est négative, on l'obtient en comparant deux théorèmes dus à Gauss et à Lejeune-Dirichlet : 1° *Le potentiel d'un système attractif* (*ou répulsif*) *ne peut être maximum ou minimum en dehors des masses agissantes;* 2° *Pour une position d'équilibre stable, l'énergie potentielle est un minimum.*

L'impossibilité d'une position d'équilibre stable, pour un point soumis à l'attraction de masses électriques et éventuellement à la pesanteur, a été démontrée par Earnshaw (*Cambridge Phil. Trans.,* 1839). C. Cailler (Genève).

412. (G. Oltramare). — Depuis que la question a été envoyée au Journal, j'ai trouvé la solution suivante. En prenant les logarithmes des deux membres, on transforme l'équation proposée en une équation linéaire

$$(1)\quad \begin{cases} \log\varphi(x)+\log\varphi(x+a) \\ \quad +\log\varphi(x+2a)\ldots\log\varphi[x+(n-1)a]=\log F(x), \end{cases}$$

qu'il est facile d'intégrer à l'aide du calcul de généralisation.

Pour déterminer une intégrale particulière de cette équation avec son second membre, posons

$$(2)\qquad \log\varphi(x)=Ge^{xu'},\qquad \log F(x)=Ge^{xu};$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (1), nous aurons l'équation symbolique

$$Ge^{xu'}(1+e^{au'}+e^{2au'}+\ldots+e^{(n-1)au'})=Ge^{xu},$$

dont on déduit l'intégrale

$$\log\varphi(x)=Ge^{xu'}=G\,\frac{e^{xu}}{1+e^{au}+e^{2au}+\ldots+e^{(n-1)au}}=G\,\frac{e^{xu}(1-e^{au})}{1-e^{nau}};$$

effectuant la généralisation [*Essai sur le calcul de généralisation*, formule (3) du § 26] nous aurons

$$\log\varphi(x)=G\,\frac{e^{xu}}{1-e^{anu}}-G\,\frac{e^{(x+a)u}}{1-e^{anu}}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\log F(x+anm)$$
$$-\log F(x+a+anm),$$

et, par conséquent,

$$(3)\qquad \varphi(x)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{F(x+anm)}{F(x+a+anm)}.$$

Pour obtenir l'intégrale générale, nous devons intégrer l'équation (1) en supposant son second membre nul; soit l'équation

$$(4)\quad \log\varphi(x)+\log\varphi(x+a)+\log(x+2a)+\ldots+\log(x+n-1)a=0,$$

qui, lorsqu'on y remplace $\log\varphi(x)$ par la valeur donnée par l'équation (2), nous donne

$$Ge^{xu'}(1+e^{au'}+e^{2au'}+\ldots+e^{(n-1)au'})=0.$$

On satisfait à cette équation en déterminant la valeur de $e^{u'}$ à l'aide de l'équation $1+e^{au'}+e^{2au'}+\ldots+e^{(n-1)au'}=0$, qui, résolue, donne $e^{u'}=e^{\frac{2\pi}{a}\left(\frac{k}{n}+h\right)\sqrt{-1}}$, formule dans laquelle k et h représentent des nombres entiers, k s'étendant de 1 à $n-1$ et h

de o à $a-1$. En substituant cette valeur dans l'identité (2) et en effectuant la généralisation, nous obtiendrons

$$(5)\qquad \log\varphi(x)=\sum C_k^h e^{\frac{2\pi}{a}\left(\frac{k}{n}+h\right)\sqrt{-1}},$$

comme intégrale générale de l'équation (4).

A l'aide de ces intégrales (3) et (5) nous aurons pour la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation proposée

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{F(x+anm)}{F(x+a+anm)}\times\sum C_k^h e^{e^{\frac{2\pi}{a}\left(\frac{k}{n}+h\right)\sqrt{-1}}},$$

valeur qui renferme $(n-1)a$ constantes arbitraires.

G. Oltramare (Genève).

Posons : $\log\varphi(x)=\psi(x)$, $\log F(x)=G(x)$; l'équation devient

$$\sum_{p=0}^{p=m-1}\psi(x+pa)=G(x).$$

Développons $\psi(x+pa)$ en série suivant les puissances croissantes de pa, et, posant $\psi(x)=y$, il viendra

$$\sum_{p=0}^{p=m-1}\left[y+\sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{(pa)^q y^{(q)}}{q!}\right]=G(x),$$

équation différentielle linéaire d'ordre infini, à coefficients constants, avec second membre. Son équation en r est

$$\sum_{p=0}^{p=m-1}\left[1+\sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{(par)^q}{q!}\right]=0,$$

qui s'écrit sous forme finie :

$$\sum_{p=0}^{p=m-1}e^{par}=0.$$

Les racines sont toutes inégales; elles ont pour valeurs

$$2\left(j\pm\frac{i}{m}\right)\frac{\pi}{a}\sqrt{-1},$$

j étant un entier quelconque, et i prenant les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$ si m est pair, et $1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$ si m est impair.

L'intégration pourra donc s'effectuer par des quadratures de la forme

$$\int G(x)\cos tx\,dx \quad \text{et} \quad \int G(x)\sin tx\,dx.$$

E.-M. Lémeray.

La question revient, en prenant les logarithmes, à trouver une fonction φ telle que

$$\varphi(x)+\varphi(x+a)\ldots+\varphi(x+\overline{n-1}\,a)=f(x).$$

Je pose $\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\mu)e^{z(\mu-x)\sqrt{-1}}\frac{d\mu\,dz}{2\pi}$, et comme on a

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\mu)e^{z(\mu-x)\sqrt{-1}}\frac{d\mu\,dz}{2\pi},$$

on doit avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\,d\mu\left\{\psi(\mu)\left[e^{z(\mu-x)\sqrt{-1}}+\ldots+e^{z(\mu-x-na+a)\sqrt{-1}}\right]\right.$$
$$\left.-e^{z(\mu-x)\sqrt{-1}}f(\mu)\right\}=0$$

ou $$\int\int dz\,d\mu\,\psi(\mu)\left[\frac{e^{-zna\sqrt{-1}}-1}{e^{-za\sqrt{-1}}-1}-f(\mu)\right]e^{z(\mu-x)\sqrt{-1}}=0;$$

on y satisfera en prenant

$$\psi(\mu)=f(\mu)\,\frac{e^{-za\sqrt{-1}}-1}{e^{-nza\sqrt{-1}}-1},$$

et l'on aura

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\mu)\,\frac{e^{-za\sqrt{-1}}-1}{e^{-zna\sqrt{-1}}-1}\,e^{z(\mu-x)\sqrt{-1}}\frac{dz\,d\mu}{2\pi};$$

c'est une solution; on peut en trouver une infinité d'autres en y ajoutant une expression de la forme

$$A_1e^{s_1x}+A_2e^{s_2x}+\ldots+A_{n-1}e^{s_{n-1}x},$$

s_i désignant une racine de

$$1+e^{sa}+\ldots+e^{(n-1)sa}=0,$$

et $A_1, A_2, \ldots$ désignant des constantes arbitraires.

La solution donnée ne convient que si $f(x)$ reste fini entre $+\infty$ et $-\infty$, mais elle ne suppose pas $f(x)$ continue.

Quemquæris.

413. (G. DE ROCQUIGNY). — De la relation

$$3n = \frac{3x(3x \pm 1)}{2} + \frac{3y(3y \pm 1)}{2} + \frac{3z(3z \pm 1)}{2},$$

on tire $6n = 9\Sigma x^2 \pm 3\Sigma x, \qquad 24n = 36\Sigma x^2 \pm 12\Sigma x,$

et $\quad 3(8n+1) = (6x \pm 1)^2 + (6y \pm 1)^2 + (6z \pm 1)^2.$

Or, un nombre de la forme $24n+3$ est une somme de trois carrés de la forme $6m \pm 1$. On en conclut l'exactitude de la proposition énoncée.

Voir, à ce sujet, divers articles de Catalan : *N. A.*, 1874; *A. F.*, Marseille, 1891; *B. A. B.*, t. XL, 1873; et un Mémoire de Jacobi (*J. M.*, t. VII). H. BROCARD.

Après un début analogue, M. Fauquembergue conclut comme il suit :

D'après Legendre, tout nombre de l'une des formes $4n+1$, $4n+2$ et $8n+3$ est décomposable, d'une ou de plusieurs manières, en trois carrés, non divisibles par un même facteur. Dans la décomposition de $24n+3$ en trois carrés, on reconnaît aisément que ces trois carrés sont impairs et, par suite, que leurs racines carrées sont l'une des formes $6m \pm 1$ ou toutes les trois de la forme $6m+3$. Mais en excluant cette dernière forme, qui donnerait trois carrés divisibles par le même facteur 9, on aura trois nombres de l'une des formes $6m \pm 1$, c'est-à-dire que l'équation ci-dessus est toujours possible. Donc la proposition de M. de Rocquigny est exacte.

E. FAUQUEMBERGUE.

La proposition : que tout nombre N est égal à la somme de trois nombres triangulaires au plus, a été énoncée par Fermat, sans démonstration. Je ne sais si elle a été démontrée depuis lors. Non seulement elle se vérifie pour un grand nombre d'exemples, mais en la supposant exacte on en tire des théorèmes démontrés par ailleurs. (*Voir* LEGENDRE, *Théorie des nombres*, 2e Partie, § 4.) DUJARDIN.

415. (G. DE ROCQUIGNY). — Il résulte d'une fort intéressante communication faite en 1891 par M. Matrot, Ingénieur en chef

des Mines, au Congrès de Marseille (*A. F.*), que le théorème en question est dû à Bachet. M. Matrot a d'ailleurs démontré, d'une façon élémentaire, cette belle proposition, dans une petite brochure éditée chez Nony, libraire, rue des Écoles.

FITZ-PATRICK.

Voir *Œuvres de Fermat*, I, p. 305, note. La proposition est supposée par Diophante (IV, 31, 32; V, 17) et l'on pourrait tout aussi bien la mettre sous son nom que sous celui de Bachet, qui ne l'a affirmée qu'à titre empirique; Fermat l'a comprise (dès 1636) sous un énoncé beaucoup plus général dont il a déclaré avoir la démonstration, sans toutefois la donner.

PAUL TANNERY.

Bachet de Méziriac est le premier qui ait affirmé que tout nombre entier doit être ou carré ou somme de 2, 3 ou 4 carrés entiers; il paraît qu'il a été conduit à ce théorème par la question 31e du Livre IV de Diophante. Il avoue qu'il n'a pu en trouver la démonstration générale, mais il s'en réfère à l'induction; il donne le Tableau de la décomposition de tous les nombres de 1 à 120 et ajoute qu'il a poussé l'expérience jusqu'à 325.

Ce théorème est compris dans une proposition générale énoncée par Fermat et démontrée pour la première fois, en 1813, par Cauchy : « Tout nombre est égal à la somme de p nombres de la forme $n + \frac{n(n-1)}{1.2}(p-2)$ ou de p nombres polygonaux de p côtés. » (CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, t. I, p. 265-296).

E. FAUQUEMBERGUE.

425. (H. DELANNOY). — La question 425, au fond, est identique à la question 360.

E. BOREL.

Cette identité entre les questions 360 et 425, que nous avons remarquée, n'a pas échappé non plus, croyons-nous, à M. Delannoy. Mais, la forme de l'énoncé a ici un intérêt incontestable, d'abord parce qu'elle établit un rapprochement entre des propositions d'apparences différentes, et puis, surtout, parce qu'il s'agissait d'obtenir une démonstration *directe* du théorème de Tait, qui est encore à trouver.

LA RÉDACTION.

427. (E. FRIOCOURT). — Le nombre des fractions irréductibles,

qui ont pour dénominateur le nombre N, est égal au nombre des entiers de la suite 1, 2, ..., N qui sont premiers avec N, c'est-à-dire à $\varphi(N)$ donné par la formule d'Euler qui consiste en ceci :

Si $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$, $a, b, c, \ldots, l$ étant les facteurs premiers de N, on a

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots l^{\lambda-1}(a-1)(b-1)\ldots(l-1).$$

Dès lors le nombre demandé est égal à $\sum_{N=2}^{N=10^n-1} \varphi(N)$. Il ne semble guère possible de mettre cette somme sous une forme plus simple.

M. D'OCAGNE.

Le nombre des fractions irréductibles, comprises entre 0 et 1 dont les dénominateurs sont tous les entiers qui ne surpassent pas N, est, en tenant compte des fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$,

$$1 + \sum_1^N \varphi(N).$$

On sait, d'autre part, que M. Perott a donné la formule suivante (*voir* la démonstration de M. J. Hammond dans la Note VI qui suit la *Théorie des nombres* de E. Lucas) :

Si l'on désigne par $p, q, r, \ldots$ tous les nombres premiers qui ne surpassent pas N, on a

$$2\sum_1^N \varphi(N) = N^2 + 1 - \sum\left(E\frac{N}{p}\right)^2 + \sum\left(E\frac{N}{pq}\right)^2 - \sum\left(E\frac{N}{pqr}\right)^2 + \ldots$$

C. MOREAU. ADR. AKAR.

Voir, dans la *Théorie des Nombres* d'Édouard Lucas, les *Suites de Farey*, p. 474-475.

E. FAUQUEMBERGUE.

430. (G. OLTRAMARE). — La décomposition peut se faire par le théorème suivant de V.-A. Le Besgue (*Exercices d'Analyse numérique*, p. 14). « Prenez un cube entier ou fractionnaire m^3, entre $\frac{n}{6}$ et $\frac{n}{12}$, n étant un nombre positif entier ou fractionnaire, faites

$$a = 1 + \frac{6m^3}{n}, \qquad b = 2 - \frac{3}{a^3+1}, \qquad c = 2 - \frac{3}{b^3+1},$$

vous aurez

$$n = \left(\frac{n}{6m^2}\right)^3 [(2-a)^3 + a^3(b-1)^3 + b^3(c-1)^3 + c^3]. \text{ »}$$

A. Béligne.

On trouvera plusieurs démonstrations, tant analytiques que synthétiques, de ce théorème, ainsi que la méthode propre à opérer la décomposition d'un nombre en quatre cubes, dans les *Exercices d'Analyse numérique* de Le Besgue, 1859, p. 147-151; en vente chez MM. Gauthier-Villars, qui ont acquis l'Ouvrage publié autrefois chez Leiber et Faraguet. L'auteur renvoie, en outre, à un *Mémoire sur la Théorie des Nombres*, qui commence le 5e Volume des *Mém. des savants étrangers.*

E. Fauquembergue, L. Laugel, *Setnof.*

432. (E.-N. Barisien). — Le cercle, qui passe par deux points A, B d'une courbe quelconque Γ et par le point de rencontre T des tangentes en ces points à cette courbe, contient le point de rencontre des normales à Γ issues de A et B.

Lorsque ces deux points se réunissent en M, le point de rencontre de ces normales devient le centre de courbure ω de Γ relatif à M. Le cercle est alors le cercle décrit sur $M\omega$ comme diamètre; *son rayon est donc moitié du rayon du cercle osculateur de* Γ *en* M.

Prenons trois tangentes à Γ et une parabole tangente à ces trois droites. Le cercle circonscrit au triangle formé par ces tangentes contient le foyer de cette parabole. Lorsque les tangentes sont confondues avec la tangente en M à Γ, la parabole a un contact du second ordre avec Γ en M. Le cercle qui passe toujours par le foyer de cette courbe est tangent en M à Γ. En vertu d'une propriété connue, le diamètre de ce cercle est la moitié du rayon de courbure $M\omega$, autrement dit : *le rayon de ce cercle est le quart du rayon du cercle osculateur de* Γ *en* M.

La propriété relative à la deuxième partie de la question résulte aussi de ce théorème : *Lorsque deux coniques, tangentes en leur point m, sont l'une circonscrite à un triangle donné et l'autre tangente aux côtés de ce triangle, les rayons de courbure de ces courbes en m sont dans le rapport de un à quatre.*

Mannheim.

J'ignore si les remarques faites par M. Barisien sont nouvelles; elles peuvent, en tout cas, très aisément s'établir, par la Géométrie, ainsi qu'il suit :

I. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABT est donné, en appelant ε l'angle de AT et de BT, par $\dfrac{AB}{2\sin\varepsilon}$, ou *aux infiniment petits du troisième ordre près*, par $\dfrac{AB}{2\varepsilon}$. Le rayon R_1 du cercle limite est donc donné par $R_1 = \lim \dfrac{AB}{2\varepsilon} = \dfrac{R}{2}$, en appelant R le rayon de courbure en M de la courbe Γ.

II. Supposons le point C entre les points A et B, et soient U et V les points où la tangente en C rencontre AT et BT. Le rayon du cercle circonscrit au triangle TUV a pour expression $\dfrac{UV}{2\varepsilon}$. On a donc, pour le rayon R_2 du cercle limite, $R_2 = \lim \dfrac{UV}{2\varepsilon}$.

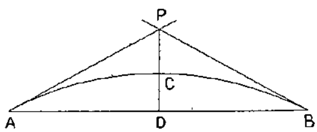
Or, $UV = UC + CV$, et l'on sait qu'*aux infiniment petits du deuxième ordre près* $UC = \dfrac{AC}{2}$, $CV = \dfrac{CB}{2}$, $AB = AC + CB$.

Donc, au même degré d'approximation, $UV = \dfrac{AB}{2}$, et il vient

$R_2 = \lim \dfrac{AB}{4\varepsilon} = \dfrac{R}{4}$.

M. d'Ocagne.

On peut supposer que Γ est un cercle, et C le milieu de l'arc AB. Et si l'on observe que, pour un arc infiniment petit,



la flèche CD est égale à la distance focale CP et à $\dfrac{R^2}{8\,AB}$, R étant le rayon de courbure, les deux théorèmes énoncés deviennent évidents.

Ch. Rabut.

Les propositions dont il s'agit sont connues. Je me rappelle en avoir remarqué l'énoncé dans un des derniers Tomes de *Mathesis*. Elles sont d'ailleurs faciles à établir. En effet, la circonférence circonscrite au premier triangle considéré par M. Barisien est la moitié de la circonférence qui touche deux côtés du triangle aux extrémités du troisième côté AB, et l'on sait, d'autre part, que c'est cette dernière circonférence qui tend à devenir osculatrice à la courbe, en M. Quant à l'autre triangle, *comme il est indifférent de faire tendre* A, B, C *vers* M *d'une manière ou de l'autre* (ce qu'on démontre avec rigueur par l'emploi des fonctions interpolaires), on peut supposer que la tangente en C reste parallèle à la corde AB. Le second triangle est alors la moitié du premier, et, par suite, la circonférence circonscrite tend vers le quart de la circonférence osculatrice.

Rosace.

MM. E.-M. Lémeray et Ch. Ruchonnet (Lausanne) nous adressent des réponses ne différant pas des deux précédentes d'une façon fondamentale. M. P. Tannery remarque que la première partie de la proposition résulte de la définition du centre de courbure donnée par Duhamel dans ses *Éléments de Calcul infinitésimal.* Enfin, M. H.-W. Curjel (Chester) signale *Ed. T.* (févr. 1892, p. 80) et *Ed. T. Reprint* (vol. 57, p. 58) comme contenant une démonstration géométrique de la proposition à la question 11337 de l'*Ed. T.* La Rédaction.

456. (A. Cléry). — Le théorème d'Yvon Villarceau est relaté dans les *C. R.* (28 août 1848, t. XXVII, p. 246). L'auteur termine ainsi : « C'est en exprimant l'équation de la courbe d'intersection en coordonnées polaires, que j'ai reconnu la possibilité de décomposer cette équation en deux facteurs, dont chacun égalé à zéro est l'équation polaire d'un cercle. »

Voir aussi dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (6e édition, t. II, p. 505) une démonstration géométrique du théorème. M. Vicaire en a donné une très simple à la Soc. math de France (*S. M.*, t. XIX, 1891, p. 46).

G. Maupin. Ch. Bioche. Fitz-Patrick.
J. Luzón. *A.-E. Ericsson.* E. Vicaire.

Voir *N. A.*, 1848, p. 345-347, O. Terquem : Théorème sur le tore, de M. Villarceau (Yvon). A la fin de cet article, Terquem dit ceci : « M. Villarceau a énoncé son théorème sur le tore circulaire à la Société philomathique au mois de juillet dernier, et depuis M. Théod. Olivier a énoncé, à la même Société, le théorème généralisé (III). »

Comme bibliographie et articles se rapportant à ce sujet, on peut citer : Breton de Champ, *Sur les sections circulaires du tore et des surfaces de révolution algébriques d'ordre quel-*

conque (*N. A.*, 1856, p. 40-46). — G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, 1873. — E. Laquière, *Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore* (*N. A.*, 1882, p. 561-565). — S. Mangeot, *Sur l'intersection d'un tore et d'une quadrique* (*N. A.*, 1892, p. 519-526).

Parmi les nombreuses démonstrations de ce théorème célèbre, une des plus simples est basée sur la transformation, par rayons vecteurs réciproques, du tore circulaire envisagé comme enveloppe de sphères tangentes, soit à trois sphères inégales, ayant leurs centres en ligne droite, soit à trois sphères égales, données de position. Gino-Loria (Gênes), H. Brocard.

En dehors des sources précédentes, on peut citer encore . *Nouv. Ann.*, 1865, p. 159 et 348; Mosnat, *Problèmes de Géométrie analytique*, t. III, p. 56; Trost, *Solid Geometry*, p. 218 (Londres, Macmillan et C^ie^, 1886); de La Gournerie, *Traité de Géométrie descriptive*, 3^e^ partie, p. 56; Caron, *Cours de Géométrie descriptive*, p. 181; *J. S.*, 1886, p. 55. A. Cornu, *N. A.*, 1861, p. 106.

Italo Ghersi (Gênes), E. Mosnat, A.-S. Ramsey (Édimbourg).

Yvon Villarceau fit connaître l'énoncé de son théorème dans une lettre à Babinet (*C. R.*, 1848, 2^e^ semestre, p. 246). La démonstration en fut proposée au Concours d'agrégation en 1856. M. Moutard (*N. A.*, 1859, p. 444) l'a étendu au tore engendré par une conique tournant autour d'une droite de son plan. Enfin, M. de la Gournerie l'a généralisé (*J. É. P.*, XL^e^ Cahier) pour la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite quelconque de l'espace.

La propriété bien connue de la sphère bitangente au tore s'appelle quelquefois second théorème d'Yvon Villarceau : c'est à tort, car elle est due à M. Mannheim (*N. A.*, 1860, p. 75). M. de la Gournerie (*loc. cit.*) l'a étendue au tore général, et son Mémoire contient, à la fin, d'intéressantes notes bibliographiques. A. Goulard.

474. (Louis Rossel). — La question est assurément intéressante, car elle a attiré l'attention de nombreux correspondants, qui sont loin d'y répondre d'une manière uniforme, ainsi qu'on va pouvoir en juger par les extraits suivants.

La Rédaction.

Il n'y a pas lieu de chercher des fonctions jouissant de la propriété $f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$. On peut choisir $f(x)$ d'une manière *arbitraire* de $x = -1$ à $x = +1$. Le choix étant fait en dehors de cet intervalle, c'est-à-dire pour $x^2 > 1$, $f(x)$ sera déterminé précisément par la relation précédente. VASCHY.

Les fonctions qui satisfont à l'équation $f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ peuvent être évidemment choisies arbitrairement entre $x = -1$ et $x = +1$, et déterminées en dehors de ces limites par l'équation même; il est clair que le sens précis de la question est : *Trouver une expression analytique aussi générale que possible, vérifiant l'équation.* Or, en prenant les logarithmes et posant $x = e^y$, $\frac{1}{x} = e^{-y}$, on trouve que l'équation sera vérifiée en prenant pour $\log f(x)$ une fonction *impaire* quelconque de y. On aura donc $f(x) = \pm e^{\varphi(\log x) - \varphi\left(\log \frac{1}{x}\right)}$, ou encore

$$f(x) = \pm e^{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)},$$

φ désignant une fonction arbitraire.

C. CAILLER (Genève), J. SADIER.

La transformation $x = e^{x_1}$, $f(x) = e^{f_1(x_1)}$ donne de suite la solution générale $f(x) = e^{f_1(\mathrm{L}x)}$, où f_1 est une fonction impaire arbitraire. CH. RABUT.

En posant $x = e^y$ et $f(e^y) = \mathrm{F}(y)$, on est ramené à chercher une fonction F telle que $\mathrm{F}(y).\mathrm{F}(-y) = 1$. Cette équation peut être considérée comme obtenue en faisant $z = 0$ dans l'équation $\mathrm{F}(y)\,\mathrm{F}(z-y) = 1$, d'où $\mathrm{F}(0)\;\mathrm{F}(z) = 1$, et par conséquent

$$\mathrm{F}(y)\,\mathrm{F}(z-y) = \mathrm{F}(0)\,\mathrm{F}(z). \tag{1}$$

En dérivant par rapport à y, on a

$$\mathrm{F}'(y)\,\mathrm{F}(z-y) - \mathrm{F}(y)\,\mathrm{F}'(z-y) = 0 \tag{2}$$

et par rapport à z,

$$\mathrm{F}(y)\,\mathrm{F}'(z-y) - \mathrm{F}(0)\,\mathrm{F}'(z) = 0. \tag{3}$$

En éliminant $\mathrm{F}(z-y)$ et $\mathrm{F}'(z-y)$ entre (1), (2) et (3), on a

$$\frac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)} = \frac{\mathrm{F}'(y)}{\mathrm{F}(y)} = a,$$

a étant une constante arbitraire, d'où $F(y) = be^{ay}$, c'est-à-dire $f(x) = bx^a$, d'où $bx^a . bx^{-a} = 1$; donc $b = \pm 1$, et la seule solution est $f(x) = \pm x^a$, a étant un exposant quelconque.

P. Hendlé.

Même résultat donné par M. A. Boutin, avec un calcul du même genre.

Si l'on pose $x = e^z$, on a

$$\log f(e^z) + \log f(e^{-z}) = \log 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2n\pi i;$$

on doit supposer la fonction développable en série pour des valeurs voisines de $x = 1$, $z = 0$, autrement le problème serait indéterminé; on a alors

$$\log f(e^z) = n\pi i + a_1 z + a_2 z^3 + a_3 z^5 + \ldots$$

et

$$f(x) = \pm e^{a_1 \log x + a_2 \overline{\log x}^3 + a_3 \overline{\log x}^5 + \ldots},$$

$\log x$ représentant celle de ces valeurs qui s'annule pour $x = 1$.

E. Fabry.

Soit $\rho(x)$ une fonction impaire de x. On voit aisément que la solution de l'équation fonctionnelle proposée est

$$f(x) = e^{k\rho(\log x)},$$

où k est une constante arbitraire. En effet,

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{e^{k\rho\left(\log\frac{1}{x}\right)}} = \frac{1}{e^{k\rho(-\log x)}} = \frac{1}{e^{-k\rho(\log x)}} = e^{k\rho(\log x)} = f(x).$$

Dans les cas où la fonction $\rho(x)$ peut être développée en une série convergente procédant d'après des puissances entières de x, cette série ne présente que des termes à exposants impairs. La solution la plus simple est $\rho(x) = x$, d'où $f(x) = e^{k \log x} + x^k$. Si l'on prend, par exemple, $\rho(x) = e^x - e^{-x}$, on aura $f(x) = e^{k(e^{\log x} - e^{-\log x})} = e^{k\left(x - \frac{1}{x}\right)}$.

G. Eneström (Stockholm).

On en tire $\log f(x) + \log f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$; posons

$\log f(x) = \theta(x) = \theta_1(e^z) = \pi(z)$; on a $\pi(z) + \pi(-z) = 0$; $\pi(z)$ est une fonction impaire quelconque. *Quemquæris.*

Voir une solution de M. L. Lecornu, *S. M.*, 1895, p. 103.

486. (*Nester*). — *Chasles*, dans une note au bas de la page 125 de son *Aperçu historique*, donne la réponse à cette question. D'après cet illustre géomètre, c'est La Hire qui a fait connaître, en 1704, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, que tous les angles égaux, droits, aigus ou obtus, circonscrits à une cycloïde, ont leurs sommets sur une seconde cycloïde raccourcie ou allongée. Chasles ajoute qu'il a trouvé que : *Si à une épicycloïde, engendrée par un point d'une circonférence de cercle qui roule sur un autre cercle fixe, on circonscrit des angles tous égaux entre eux, leurs sommets seront situés sur une épicycloïde allongée ou raccourcie.* MANNHEIM.

La recherche du lieu géométrique du sommet d'un angle *constant* circonscrit à une cycloïde se trouve page 61, dans le *Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal*, par M. F. Tisserand (Paris, Gauthier-Villars, 1877).

E. FAUQUEMBERGUE. C. CAILLER (Genève).

MM. H. BROCARD et P. HENDLÉ nous ont envoyé des solutions assez simples, donnant les résultats mentionnés plus haut, mais qu'ils nous permettront de ne pas reproduire, la question étant déjà connue.

491. (L. CERTO). — J'ai fait beaucoup de recherches, afin de trouver quelques renseignements sur le révérend M. Thomas Bayes, et cela sans résultat. Tout ce que je sais, c'est que M. Richard Price a trouvé le Mémoire parmi les papiers laissés par Bayes. M. Price, dans sa lettre à John Canton, dit que le Mémoire, à son avis, a beaucoup de mérite, et qu'il est bien digne d'être conservé. Price dit aussi que Bayes avait l'honneur d'être Membre de la *Société royale de Londres* (comme l'indiquent les lettres F.R.S.), et qu'il était estimé comme un très habile mathématicien. De Morgan, dans la préface à son *Essay on Probabilities*, dit que Bayes « quoique maintenant presque oublié, mérite une très honorable mention de ceux qui traitent de l'histoire de cette Science ». Bayes a été cité par Condorcet et Laplace; Todhunter lui consacre le Chapitre XIV de son *History of the Theory of Probability*.

J.-S. MACKAY (Édimbourg).

498. (*Nester*). — 1° La recherche du triangle équilatéral maximum ou minimum circonscrit à une conique fait l'objet de la question 541 des *N. A.* (1860). La solution que j'en ai

donnée, en juillet 1872, a été publiée récemment (*loc. cit.*, 1894, 45*-49*).

2° La recherche du lieu des centres de gravité des triangles équilatéraux circonscrits à une conique n'est pas entreprise dans la solution susmentionnée, mais j'ai fait connaître l'équation du lieu du centre d'une ellipse de grandeur constante (axes $2a$ et $2b$) inscrite dans un angle de 60°. Cette courbe paraît avoir une corrélation très directe avec celle qui est ici demandée, et il me semble qu'on parviendra aisément à celle-ci au moyen des formules de l'article cité et par une transformation de coordonnées.
H. Brocard.

Deux solutions du premier problème ont été données dans *Mathesis,* année 1890, l'une par M. H. Brocard, p. 144, et l'autre par M. A. Thiré, p. 146.

Le second problème se trouve résolu dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (Niewenglowski), 1re année, 1890-91, q. 43, p. 101.
E. Fauquembergue.

525. (C. Juel). — Le théorème dont il s'agit est un corollaire immédiat de la proposition 4 du Livre II des *Lieux plans d'Apollonius* (*Œuvres de Fermat,* t. I, p. 35). L'énoncé de cette proposition a été connu des modernes par l'analyse que donne Pappus des Ouvrages perdus d'Apollonius.

Paul Tannery.

531. (A. Goulard). — *Voir* Cournot, *Traité élémentaire de la Théorie des fonctions,* Hachette, 1857, p. 1 et 2. Quelques-unes de ses assertions appellent cependant une vérification à faire.
Paul Tannery.

545. (*Trinitario*). — Si le nombre entier est subjectivement conçu comme composé par l'addition répétée (ou multiplication) de l'unité, la démonstration demandée s'ensuit immédiatement. Si au contraire le nombre entier est conçu comme une collection d'unités, donnée objectivement, la démonstration est impossible, c'est-à-dire qu'on peut tout au plus remplacer le *postulat* par un autre. Il faut en effet exclure la possibilité du nombre transfini, au sens de Georg Cantor.

Paul Tannery.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

F. DELASTELLE. — *Cryptographie nouvelle;* Paris, P. Dubreuil, 1893; prix 3fr.

J. FRANEL. — *Sur le système de quatre droites dans l'espace.* — *Note sur les complexes linéaires.* Zurich, 1895.

R. GUIMARAËS. — *Inversion cyclique des fonctions monogènes et holomorphes* (Extrait de la *Riv. di Matem.*, 1895).

A. GULDBERG. — *Om bestemmelsen of de geodætiske linjer pas visse specielle flader.* Copenhague, 1895.

J. L. W. V. JENSEN. — *Sur une expression simple du reste dans la formule d'interpolation de Newton.* Copenhague, 1894.

F. KLEIN. — *Riemann und seine Bedeutung für die Entwickelung der modernen Mathematik.* Leipzig, 1894.

J.-C. KLUYVER. — *Invarianten-Theorie.* 1894.

L. LECORNU. — *Mémoire sur le pendule de longueur variable* (*Acta Mathematica,* t. XIX, 1895, p. 201-249) (1).

T. LEVI CIVITTA. — *Sui gruppi di operazioni funzionali; I. Gruppi di operazioni funzionali e inversione degli integrali definiti* (Extrait des *Rendic. del R. Ist. Lomb.*, XXVIII, 1895). — *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo;* Roma, 1895.

J.-S. MACKAY. — *Properties connected with the angular bissectors of a triangle* (Extrait des *Proc. of the Edinburgh math. Soc.*, Vol. XIII, 1894-95).

A. PALMSTRÖM. — *Sur l'équation de Lamé* $\frac{d^2y}{dx^2} - [n(n+1)pu + \mathrm{B}]y = 0$; Christiania, 1895.

G. PEANO. — *Sulla definizione di integrale* (Extrait des *Ann. di Matem. pura ed appl.*, 1895). — *Sopra lo spostamento del polo sulla terra;* Torino, 1895.

S. PINCHERLE. — *L'algebra delle forme lineari alle differenze;* Bologna, 1895. — *Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti* (Extrait du *Giorn. di Matem. di Battaglini;* t. XXXII).

V. RETALI. — *Sur les cubiques cuspidales* (Extrait de *Mathesis,* 1895).

RIEMANN. — *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée;* traduit par M. L. LAUGEL; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895.

R. DE SAUSSURE. — *Sur la génération des courbes par roulement;* Genève, 1895.

J. THIRION, S. J. — *L'Annuaire du Bureau des Longitudes;* Paris, Louvain, 1895.

G. VIVANTI. — *Sopra una questione elementare del ginoco del bigliardo* (Extrait de la *Riv. di Matem.*, avril 1895) (2).

J. DE VRIES. — *Ueber Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten;* Wien, 1895.

B. PORTIER. — *Le carré diabolique de* 9 *et son dérivé le carré satanique de* 9; Alger, Adolphe Jourdan, 1895.

(1) Réponse à la question 91 de l'*Intermédiaire*.

(2) Réponse à la question 519 de l'*Intermédiaire*.

QUESTIONS.

612. **[I19b]** Si l'équation de Fermat $a^p + b^p = c^p$ peut être résolue en nombres entiers, en dehors du cas où p est égal à 2, elle doit l'être pour au moins un nombre premier impair p. Quand p est premier et impair, les quantités a, b, c ont nécessairement la composition ci-après :

$$c = x + y + z, \qquad b = x + z, \qquad a = x + y.$$

Les quantités x, y, z sont elles-mêmes de la forme

$$x = \mathrm{M}\frac{p^{p(v+1)-1} + q^{p(u+1)}}{2} p^{v+1} q^{u+1}, \quad y = p^{p(v+1)-1},$$
$$z = q^{p(u+1)}.$$

Enfin, M, p, q doivent satisfaire aux relations

$$\mathrm{M} p^{v+1} q^{u+1} = 2^{\mu\theta} a^{\theta} - 1, \qquad 2^{\mu\alpha} a^{\alpha} = p^{p(v+1)-1} + q^{p(u+1)}.$$

Dans ces relations, p et q sont premiers entre eux et impairs; q est plus grand que 1; u, v, θ, μ, α sont entiers et positifs ou nuls. Cette proposition, dont j'ai la démonstration, est un acheminement vers la démonstration de la proposition de Fermat; est-elle connue? P. Worms de Romilly.

613. **[I3aα]** m étant un nombre premier, on ne peut satisfaire à la fois aux deux congruences

$$(\alpha + 1)^{m-1} \equiv 1, \qquad \alpha^{m-1} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ m^2)$$

que lorsque $m - 1$ est divisible par 6.

En désignant par γ une racine primitive de

$$x^{m(m-1)} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ m^2),$$

et par η δ, ν des nombres entiers dont le dernier est le quotient

$\frac{m-1}{6}$, les solutions seront données par

$$\gamma^{\nu} \equiv \eta + 1 + \delta m, \qquad \gamma^{4\nu} \equiv m - \eta - 1 + (m - \delta - 1)m,$$
$$\gamma^{2\nu} \equiv \eta + \delta m, \qquad \gamma^{5\nu} \equiv m - \eta + (m - \delta - 1)m;$$

on en conclut que lorsque m est un nombre premier, les seules valeurs entières de u supposé non multiple de m qui satisfont à la congruence $(u^m + 1)^m - u^{m^2} \equiv 1 \pmod{m^2}$ sont de la forme $u = am - 1$.

Ces propositions sont-elles connues? P. Worms de Romilly.

614. [O4b] On lit, dans l'avant-propos du *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie : « M. Maydieu, ancien élève de l'École Polytechnique, m'a signalé l'utilité de déterminer les points d'inflexion des transformées par développement des sections planes des cônes. » Je voudrais savoir en quoi consiste cette utilité. A. Goulard.

615. [V7] En lisant les Œuvres des mathématiciens antérieurs à Newton, il semble que plusieurs d'entre eux connaissaient la loi du développement du binome lorsque l'exposant est entier et positif. Ainsi quand Pascal, pour ne citer que lui, donne, dans son *Traité du triangle arithmétique,* l'usage de ce triangle pour trouver les puissances des binomes et des apotomes, il dit : « S'il est proposé de trouver une puissance *quelconque,* comme la quatrième du degré d'un binome. . . ». Pascal développe ensuite sa règle, puis termine par ces mots : « Je ne donne pas la démonstration de tout cela, parce que d'autres en ont déjà traité, comme Hérigone, outre que la chose est évidente par elle-même. » Est-il admissible que Pascal ait affirmé que son triangle pouvait servir à développer une puissance *quelconque* d'un binome, s'il ne connaissait pas la loi de ce développement? Newton lui-même, d'ailleurs, ne parle pas de l'exposant entier et positif dans sa célèbre lettre du 24 octobre 1676 à Oldenbourg; il n'y traite que le développement en série convergente par la formule du binome. Malgré mes recherches, je ne trouve cependant aucun auteur antérieur à Newton qui donne *explicitement* la formule du binome, pour le cas *général* d'un exposant entier et positif. Quelle est la part qui revient à Newton dans la découverte de cette formule célèbre? Quelle est celle qu'il faut attribuer à ses devanciers? *H. Braid.*

616. **[B1b]** On démontre aisément que le produit des $\frac{n(n-1)}{2}$ déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix}$$

est

$$\pm \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} b_1 & \ldots & a_1 b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} b_1 & \ldots & a_2 b_2^{n-2} & b_2^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} b_n & \ldots & a_n b_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Je désirerais savoir s'il est possible de mettre sous une forme analogue le produit de $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ facteurs

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ a_n & b_n & c_n \end{vmatrix}.$$

Ce renseignement me serait très utile; je suis arrêté par le besoin que j'en ai dans une série de recherches. L. Ripert.

617. **[M¹5a]** Soient $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_8, a_9$; $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_8, b_9$; $c_1, c_2, \ldots, c_9$ trois groupes de neuf points sur une cubique, tels que, par chacun de ces groupes, on puisse faire passer une infinité de cubiques. Si les deux groupes de neuf points $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$; $a_4, a_5, a_6, b_4, b_5, b_6, c_4, c_5, c_6$ jouissent de la même propriété que les trois précédents, il en sera de même du troisième groupe $a_7, a_8, a_9, b_7, b_8, b_9, c_7$ c_8, c_9.

Cette propriété, assez facile à démontrer et qui présente des particularités intéressantes, est-elle susceptible de généralisations applicables à des courbes de degré supérieur au troisième?

Ernest Duporcq.

618. **[V7]** E. Catalan a appelé l'attention sur le fait que Rolle a employé, en 1690, la lettre grecque *thêta* (θ) pour marquer le *rien* (voir l'*Intermédiaire*, t. I, p. 178; t. II, p. 117). M. P. Tannery voit, dans cet emploi, seulement un essai *particulier* pour éviter la confusion avec la lettre o. Mais il convient de faire observer que le mot *thêta* a été employé dans le sens

de *rien* déjà dans un écrit intitulé *Opusculum de praxi numerorum* (Paris, 1503), qui semble être identique avec l'*Algorismus* de Sacrobosco (B. M., 1887, p. 120; 1894, p. 73-78). Est-il probable que Rolle ait eu connaissance de cet écrit?

G. Eneström (Stockholm).

619. **[V]** Je désirerais avoir la *description complète* (titre en entier, nombre de pages, différences que présentent entre elles les diverses éditions, etc.) des Ouvrages parus en France pendant les XVI^e, XVII^e et XVIII^e siècles sous le titre : *Récréations mathématiques* ou autres analogues. L'index bibliographique, placé par E. Lucas à la fin du tome I de ses *Récréations mathématiques,* pourrait servir de point de départ. Jacques Boyer.

620. (S) **[I19c]** Il est possible de trouver une infinité de triangles dont les trois côtés et les trois bissectrices extérieures soient mesurés par des nombres rationnels; mais il n'existe aucun triangle dont les trois côtés et les trois bissectrices intérieures soient mesurés par des nombres rationnels.

E. Fauquembergue.

621. **[S1b]** Quel était l'appareil imaginé par Leonardo da Vinci pour mesurer la vitesse du navire?

Est-il décrit dans le *Codex Atlanticus?*

Joseph Perott (Worcester U. S. A.).

622. **[H11c]** Résoudre l'équation suivante :

$$1+\frac{3}{4}\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)+m\frac{\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)\right]^4}{x_1^2}}=2x_1^2\frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{x}{f(x)}\int_{x_1}^{x}\frac{dx}{x f(x)}\right]dx}{\left[\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{x\,dx}{f(x)}\right]^2}$$

par rapport à $f(x)$ (sous forme implicite ou explicite, peu importe, mais en termes finis). *Trébig.*

623. **[E1a]** Démontrer *directement* la formule

$$\lim_{n=\infty}\frac{x^n+\dfrac{(x+1)^n}{x}+\dfrac{(x+2)^n}{x(x+1)}+\dfrac{(x+3)^n}{x(x+1)(x+2)}+\ldots}{y^n+\dfrac{(y+1)^n}{y}+\dfrac{(y+2)^n}{y(y+1)}+\dfrac{(y+3)^n}{y(y+1)(y+2)}+\ldots}=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)},$$

x et y étant quelconques.

J.-L.-W.-V. Jensen (Copenhague).

624. [I1a] Étant donné l'énoncé de la question n° 330, il serait fort intéressant, notamment au point de vue de la décimation cryptographique ([1]), de pouvoir calculer l'ordre probable de sortie des boules, principalement pour $n = 25$ et $n = 27$. Ce calcul est-il possible? F. DELASTELLE.

625. [V3] Je ne crois pas qu'il existe d'édition récente des Œuvres d'Hipparque qui nous sont parvenues, et que ces Œuvres aient été traduites en français. Je désirerais être renseigné sur ce point.

De même, les Œuvres de Ptolémée ont-elles été récemment éditées? Existe-t-il une traduction française de sa *Composition mathématique,* plus digne de confiance que celle de l'abbé Halma?

Est-ce qu'il n'y aurait pas quelque intérêt à publier une édition *savante* des Œuvres de ces auteurs, qui, accompagnée d'un commentaire bien fait, montrerait les Sciences mathématiques chez les Anciens et les progrès effectués depuis par ces mêmes Sciences? G. LE MARCHAND.

626. [S4a] Quelle est la formule de Thermodynamique dont parle M. Faye dans son Ouvrage : *Origine du monde,* 2e édition, p. 224, qui donne la chaleur développée par la condensation d'une masse donnée, primitivement répandue dans une sphère de rayon très grand, lorsqu'elle se contracte jusqu'à occuper une sphère de rayon donné? FERBER.

627. [V] Quelqu'un pourrait-il me dire où et quand la remarque suivante a été formulée : « La *projection verticale* d'un cylindre droit, éclairé uniquement par le Soleil théorique, n'a pas de raie blanche, c'est-à-dire, en d'autres termes, est *invisible* »? BOUDIN.

628. [B10c] Déterminer six formes binaires linéaires a_i ($i = 1, \ldots, 6$) et six formes quadratiques b_i de telle façon que les cinq formes cubiques $(a_i - a_k)\, b_i$ (k fixe), appartiennent au même faisceau linéaire pour chaque valeur de k.

E. WAELSCH (Prague).

([1]) Voir *Cryptographie nouvelle,* p. 37 et suiv.; chez M. Dubreuil, 18 *bis,* rue des Martyrs, Paris.

629. **[N¹1g]** Une surface quadratique étant donnée par l'équation $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1$, comment peut-on construire les droites du complexe quadratique, donné par l'équation

$$\alpha(\beta-\gamma)^2 p_{14}^2+\beta(\gamma-\alpha)^2 p_{24}^2+\gamma(\alpha-\beta)^2 p_{34}^2 \\ -\beta\gamma p_{23}^2-\gamma\alpha p_{31}^2-\alpha\beta p_{12}^2=0,$$

où p_{ik} sont les coordonnées rectilignes? Ce complexe contient les tangentes des douze coniques cuspidales de la développée de la surface donnée. E. WAELSCH (Prague).

630. **[T2aδ]** Les formules de Lamé font connaître les efforts élastiques supportés par une enveloppe d'*épaisseur constante*, soumise à des pressions déterminées. Le cas des enveloppes d'*épaisseur variable* est-il traité quelque part? A cette question se rattache celle de la résistance, aux efforts centrifuges, d'un disque animé, autour de son axe, d'une rotation rapide : a-t-on calculé la forme d'égale résistance pour un pareil disque?
EDM. FRANCKEN (Liége).

631. **[V]** Quelque correspondant pourrait-il fournir des renseignements sur un Mémoire d'un Allemand, qui a considéré la *Section en moyenne et extrême raison* au point de vue de ses applications aux Arts? [Zeising(?), peut-être, est le nom de cet auteur, et le Mémoire fut publié, je crois, pour la première fois en Hanovre]. *Humilis.*

632. **[L²4]** Étant donné un moulage d'une surface du second degré, en déterminer les sommets. CH. RABUT.

633. **[B12a]** Le produit $i(i-1)(i-2)(i-3)$ a pour valeur -10. Sait-on si le produit $i(i-1)(i-2)\ldots(i-p)$ peut devenir, pour une valeur entière de p différente de 3, soit purement réel, soit purement imaginaire? Les recherches, d'ailleurs superficielles, que j'ai faites à ce sujet, ne m'ont pas permis de formuler une conclusion. C.-A. LAISANT.

634. **[A3]** Quelle est la forme précise de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation binome $x^n-1=0$? A-t-on une expression de la somme des coefficients de cette équation et cette expression peut-elle être décomposée en facteurs numériques? CARL STÖRMER (Christiania).

RÉPONSES.

371. (H. Van Dorsten). — *Deuxième réponse.* — Cette proposition se trouve énoncée et démontrée à la page 91 de la *Théorie des nombres*, t. I, d'Ed. Lucas. A. Akar.

372. (D. Gravé). — *Deuxième réponse.* — La propriété des coniques osculatrices, énoncée par M. Gravé, se trouve démontrée, page 271, dans le *Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal*, par F. Tisserand (Paris, Gauthier-Villars, 1877). E. Fauquembergue.

382. (A. S. Ramsey). — *Deuxième réponse.* — Soient D′ le symétrique du point D par rapport au milieu I de AB, O le centre du cercle donné, et O′ un point tel que le triangle O′CD′ soit directement semblable au triangle OCD. Le cercle de centre O′ et de rayon O′C coupe la corde AB en deux points c et c', tels que les droites Cc, Cc' rencontrent la circonférence donnée en des points E et E′ qui fournissent les solutions de la question. Welsch.

Soit ω le milieu de AB; si O est un point du cercle, le faisceau O(DCAB) a un rapport anharmonique constant λ.

Soit E le point du cercle qui est sur ωC. Soit G le point d'intersection de AB et de DE; on aura $\frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{GB}} = \lambda$.

Si K est le point cherché sur le cercle, M le point où DK coupe AB, on verra facilement que l'on a $\frac{\overline{\mathrm{MA}}^2}{\overline{\mathrm{MB}}^2} = \lambda$.

Construisons donc G et cherchons le point M, tel que

$$\frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{GB}} = \frac{\overline{\mathrm{MA}}^2}{\overline{\mathrm{MB}}^2}.$$

Il suffit pour cela d'élever en G une perpendiculaire à AB qui coupe en g le cercle décrit sur AB comme diamètre, et de mener la bissectrice gI du triangle AgB; si M est le point où cette bissectrice coupe AB et que l'on joigne DM, cette ligne coupera le cercle donné au point cherché K;

En effet, on a $\frac{GA}{GB} = \frac{\overline{Ag}^2}{\overline{Bg}^2} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}$; on aurait un autre point K′ en menant la bissectrice de l'angle extérieur de AgB.

Nota. — Si l'on pose $AB = l$, $AM = x$, le rapport anharmonique $\frac{AM}{AM'} : \frac{BM}{BM'}$, M étant l'intersection de AB et de KC, est égal à $\frac{x^2}{(l-x)^2}$; la solution géométrique qui précède est donc une solution de l'équation $\frac{x^2}{(l-x)^2} = \lambda$. E. Lemoine.

Cette question est résolue dans l'ouvrage *Solutions raisonnées des problèmes de la Géométrie de Legendre et Blanchet,* par M. A. Blanchet. (Paris, Firmin-Didot, 1885, p. 69.) — Le problème a été généralisé par M. Beyens (*J. E.*, question 252). Je trouve ce dernier renseignement dans le *Recueil de problèmes* de M. Laisant (T. II, Géométrie, 1893, p. 11).

L. Meurice (Liége).

Voir *Journal de Mathématiques élémentaires* de Vuibert, 11e année, 1886-1887, p. 13. G. Delahaye.

Nous avons reçu d'autres solutions fort simples de MM. F. Amodeo, J.-C. Kluyver, Tafelmacher, E.-M. Lémeray et A. de Reffye; le problème ayant déjà dans le Journal diverses solutions, nous nous contenterons de les mentionner.

385. (d'Ocagne). — La proposition énoncée n'est pas exacte, d'une façon générale.

En effet, les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ forment une série récurrente, dont la loi est donnée par la relation

$$y_{m+1} = y_m + \left(\frac{y_m + 1}{2}\right)^2.$$

(Voir E. Lemoine, *C. R.*, 1888, p. 720, séance du 23 octobre).

Or, il est aisé de voir qu'à partir de y_4 tous les termes de cette série sont de la forme $16m+7$ et que la différence de deux termes consécutifs est un carré de la forme $16(2m+1)^2$. Par suite, $y_{m+2}-y_m$ est de la forme $32(4p+1)$ et ne peut se terminer par plus de 5 zéros. WELSCH.

Le théorème énoncé revient à dire que la différence $y_{m+2}-y_m$ se termine par $\left(\frac{m-1}{2}\right)$ zéros : ce n'est pas exact en général; cela n'est vrai que jusqu'à $m=12$ (on suppose ici que m est au moins égal à 3); car, si la différence $y_{m+2}-y_m$ contient, en effet, $\left(\frac{m-1}{2}\right)$ fois le facteur 5, elle ne peut contenir plus de cinq fois le facteur 2. On peut s'en rendre compte de la manière suivante : on trouve facilement l'équation de récurrence

$$y_{m+1}-y_m=\left(\frac{y_m+1}{2}\right)^2,$$

et l'on en déduit :

1° Que, à partir de $m=4$, y_m est toujours de la forme $16K+7$ et la différence $y_{m+2}-y_m$ de la forme $32(2K+1)$;

2° Que le rapport $\frac{y_{m+4}-y_{m+2}}{y_{m+2}-y_m}$ est entier et divisible par 5; ce qui démontre les propriétés énoncées plus haut.

C. MOREAU, A. PALMSTRÖM (Bergen).

386. (E. LEMOINE). — La solution de la question dépend de la connaissance de la valeur du plus grand entier contenu dans $\left(1+\frac{1}{n}\right)^s$. En effet, un nombre décomposé en ses puissances $s^{\text{ièmes}}$ maxima n'aura jamais dans sa forme terminale plus de 2^s-1 fois le nombre 1, jamais plus de $E[(1+\frac{1}{2})^s]$ fois 2 et, dans ce cas, jamais plus de $3^s-2^sE[(1+\frac{1}{2})^s]-1$ fois 1; jamais plus de $E[(1+\frac{1}{3})^s]$ fois 3^s et, dans ce cas, jamais plus de

$$4^s-3^sE[(1+\tfrac{1}{3})^s]-1 \text{ fois } 1,$$

ou jamais plus de $E\left\{\frac{4^s-3^sE[(1+\frac{1}{3})^s-1]}{2^s}\right\}$ fois 2^s.

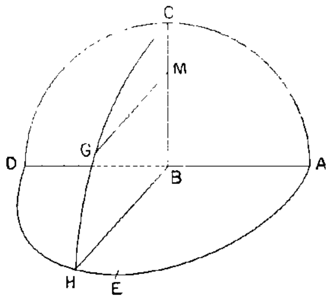
La plus petite puissance $s^{\text{ième}}$, qui ne peut se présenter qu'une seule fois, est celle du plus petit nombre p tel que

$$(p+1)^s<2p^s \qquad \text{ou} \qquad \left[\left(1+\frac{1}{p}\right)p\right]<2.$$

La quantité entre [ ] est comprise entre 2 et e, et se rapproche assez vite de sa limite e. Il en résulte que p ne peut dépasser $\dfrac{s}{\log \text{nép } 2}$.

WELSCH.

387. (G. MAUPIN). — Les courbes étudiées par le P. Grandi sont des rosaces, planes ou non, à un nombre arbitraire (pas même nécessairement fini) de feuilles. Les *rhodonées* sont planes, se construisent à l'aide d'un cercle donné et peuvent être représentées, en coordonnées polaires, par une équation de la forme $\rho = R \sin \frac{b}{a} \varphi$, R étant le rayon du cercle, $\frac{a}{b}$ un rapport donné; le nombre des feuilles de la courbe est fini $\left(\frac{2b}{a}\right)$, si a et b sont commensurables; dans le cas contraire, il est infini. Les *clélies*, au contraire, sont des courbes tracées sur une sphère ou plus généralement sur un sphéroïde (surface du second ordre de révolution).



Elles sont de deux espèces. Celles de la seconde espèce appartiennent à un sphéroïde; leurs projections sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface sont des rhodonées construites à l'aide de la section de la surface par ce plan. Moins simple est la définition d'un autre genre de clélies : imaginons un segment déterminé dans un sphéroïde par un plan AED perpendiculaire à l'axe BC de la surface. Par cet axe menons un plan quelconque CBH et sur le même axe prenons un point M, tel que $CM = \frac{CB}{BD} \sin\left(\frac{b}{a} \text{arc EH}\right)$, H étant un point fixe sur le cercle DHE, et $\frac{b}{a}$ un rapport donné. La parallèle menée par M à la droite

BH coupe la surface en un point G, dont le lieu est précisément une clélie de seconde espèce. Pour ne pas excéder les limites fixées à cet article, je passe sous silence les nombreuses et intéressantes propriétés, que le P. Grandi a découvertes dans ces courbes et je me borne à renvoyer le lecteur à l'Ouvrage original et à l'article *Florum geometricorum manipulus,* qu'il a publié dans les *Philosophical Transactions,* 1723. La demande, à laquelle je viens d'essayer de répondre, paraît se rattacher au sujet d'étude que M. Haton de la Goupillière a proposé dans l'*Intermédiaire,* sous le n° 89. C'est pour cette raison que je saisis l'occasion de signaler deux autres courbes qui, peut-être, échapperaient au géomètre qui voudrait s'occuper dudit sujet. Ces deux courbes se rapportent au problème de la duplication du cube et sont définies dans le petit Traité *Quinto libro di Euclide, overo Scienze universale delle proporzioni spiegate colle dottrine del Galileo de Vincenzo Viviani* (Firenze, 1647). La première a été découverte par Viviani lui-même et construite à l'aide d'un cercle : si R en est le rayon, la courbe peut se représenter par l'équation $xy^2 = (2R)^3$; c'est donc une courbe du troisième ordre ayant à l'infini un point double; j'ajoute qu'en suivant la voie tracée par Viviani, on arrive à construire les courbes (rationnelles) qu'on peut définir par une équation de la forme $xy^{2k} = (2R)^{2k+1}$ (k entier, positif). La découverte de l'autre courbe est attribuée par Viviani à un certain « erudissimo P. Villapando »; on peut la représenter en coordonnées polaires par l'équation $\rho = 2R\cos^3\varphi$, R étant le rayon du cercle qu'on emploie à construire la courbe; on peut remarquer que la même construction, poussée plus loin dans une certaine direction, mène aux courbes (algébriques d'ordre $2\overline{k+1}$) $\rho = 2R\cos^{2k+1}\varphi$. GINO LORIA (Gênes).

Les *rhodonées* et *clélies* sont appelées *rosaces* dans le langage moderne habituel. Le livre de Guido Grandi, *Flores geometrici...*, a paru, comme l'indique M. G. Maupin, à Florence, en 1728; non à Venise, comme l'a dit Marie dans son *Histoire des Sciences mathématiques.* La rosace à quatre feuilles est celle qui a servi de base au *Trisecteur* que nous avons présenté au Congrès de Besançon. On trouvera des renseignements sur ces courbes : 1° dans notre *Géométrie analytique* (p. 597); 2° dans le *J. S.* (1893, p. 173); 3° dans l'*Annuaire de l'Association française* (1893, p. 192). G. DE LONGCHAMPS.

Pour la *rhodonée*, voir *Leibnizens math. Schriften*, herausgegeben von Gerhardt (t. IV, p. 222 et suiv.). L'équation polaire de cette courbe est, comme on le trouve aisément, $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$, où a est une constante. La courbe a la propriété d'être uniformément éclairée par un point lumineux situé à l'origine.

Les *clélies* sont, à ce qu'en dit Chasles (*Aperçu hist.*, 2e édit., p. 141), deux courbes à double courbure, dont l'une est l'intersection d'une sphère avec un hélicoïde dont l'axe passe par le centre de la sphère.

La définition des rhodonées qu'on lit dans les *Flores geometrici* est tout à fait différente de celle qui précède. Elle conduit à l'équation $\rho = \sin\frac{k}{2}\theta$, où k est une constante. La rhodonée a la forme d'une fleur, inscrite dans un cercle. Si k est un nombre entier, elle se compose de k *pétales;* si k est égal à la fraction irréductible, elle est formé de p pétales qui font q tours $\frac{p}{q}$, autour du centre; enfin, si k est irrationnel, elle a une infinité de pétales qui font une infinité de tours. Les pétales sont tous égaux.

Les *clélies* sont deux courbes sphériques (on peut aussi, suivant l'auteur, les concevoir décrites sur un conoïde rond quelconque), dont la forme est semblable à celle des rhodonées. Leurs équations sont $\sin\lambda = 1 - h\sin kl$, $\cos\lambda = h\sin kl$, où λ désigne la latitude, l la longitude et h la hauteur de la calotte sphérique (1 étant le rayon de la sphère) dans laquelle elles sont inscrites. La seconde clélie (*clœlia secundæ descriptionis*) a pour projection sur le plan tangent à la sphère au centre de la calotte, une rhodonée. G. VIVANTI (Pavie).

390. (*Sitiens*). — L'intégration de ces deux types d'équations différentielles est classique (par exemple, Duhamel, t. II, 1861, 153 et 165; J.-A. Serret, t. II, 1868, p. 414 et 417). En supposant $n = 0$, on a l'équation dite *linéaire* du premier ordre, dont l'intégrale générale est

$$y = e^{-\int f_1 dx}\left(C - \int f_2\, e^{\int f_1 dx}\, dx\right).$$

En supposant $n = m + 1$, la substitution $v = y^{-m}$ transforme l'équation proposée en une équation linéaire qui a pour intégrale générale $\frac{1}{y^m} = - m e^{m\int f_1 dx}\left(\int f_2 e^{-m\int f_1 dx}\, dx + C\right)$. On pourrait employer aussi (comme pour l'équation linéaire), la transformation $y = uz$, u et z désignant deux fonctions de x.

L'intérêt de cette question serait de connaître différents types d'équations différentielles qui peuvent se ramener à l'équation de Jacques Bernoulli. De ce nombre est l'équation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = f(y)\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2},$$

citée par Sturm. Il en est de même de l'équation d'Euler

$$y' + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x) = 0,$$

citée par Duhamel. Toutes deux correspondent à $n = 2$.

H. Brocard.

En posant $f_1(x) = \frac{v'}{v}$, d'où $v = e^{\int f_1(x)dx}$, nous aurons l'équation $(vy)' + \frac{f_2(x)}{v^{n-1}}(vy)^n = 0$. L'intégrale de cette dernière est

$$vy = \frac{1}{\left[C + (n-1)\int \frac{f_2(x)\,dx}{v^{n-1}}\right]^{\frac{1}{n-1}}},$$

c'est-à-dire

$$y = \frac{e^{-\int f_1(x)dx}}{\left[C + (n-1)\int f_2(x)\, e^{(1-n)\int f_1(x)dx}\, dx\right]^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Saltykof (Charkow).

Un correspondant anonyme nous a adressé en outre trois solutions du cas $n = 0$, et une, relative à l'équation générale. Nous nous bornons ci-dessous à reproduire cette dernière.

En écrivant l'équation sous la forme

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + f_1(x)y^{1-n} + f_2(x) = 0,$$

on voit qu'elle deviendra linéaire, c'est-à-dire se ramènera à l'équation traitée précédemment, si l'on pose $y^{1-n} = z$, ce qui donne $\frac{dz}{dx} + (1-n)f_1(x)z - (1-n)f_2(x) = 0$; d'où

$$\frac{1}{y^{n-1}} = -(n-1)\, e^{(n-1)\int f_1(x)dx}\left[C - \int e^{-(n-1)\int f_1(x)dx} f_2(x)\, dx\right].$$

On arriverait encore à cette même intégrale en faisant, dans la proposée, $y = uz$, et partageant l'équation obtenue dans les deux suivantes : $dz + f_1(x)\,z\,dx = 0$, $du = -f_2(x)\,u^n z^{n-1}\,dx$; d'où $z = e^{-\int f_1(x)dx}$ ...

M. A.-S. Ramsey (Édimbourg) nous a envoyé une solution analogue.

392. (J. Franel). — La question se réduit immédiatement à *constater la convergence de la série dont le terme général est*

$$u_n = \tfrac{1}{2}[F(n-1) + F(n)] - \int_{n-1}^{n} F(t)\,dt.$$

Il n'est pas nécessaire que la dérivée $F'(t)$ soit *continue;* il suffit de supposer qu'elle est *unique* pour qu'il soit permis d'écrire

$$F(n-1) = F(n-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}F'(a), \quad F(n) = F(n-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}F'(b),$$

en désignant par a et b deux nombres compris dans les intervalles $(n-1, n-\frac{1}{2})$ et $(n-\frac{1}{2}, n)$ respectivement. Si α et β sont deux autres nombres analogues, on a de même

$$\int_{n-1}^{n-\frac{1}{2}} F(t)\,dt = \tfrac{1}{2}F(n-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{8}F'(\alpha), \quad \int_{n-\frac{1}{2}}^{n} F(t)\,dt = \tfrac{1}{2}F(n-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{8}F'(\beta);$$

puis $u_n = \frac{1}{8}[F'(\alpha) - F'(\beta)] - \frac{1}{4}[F'(a) - F'(b)]$.

La série considérée se présente ainsi comme la différence de deux séries, *qui sont convergentes;* car, en vertu des autres hypothèses de M. Franel, les termes de chaque série finissent par avoir les signes alternés et par décroître constamment et indéfiniment en valeur absolue.

La question précédente, telle qu'elle a été posée par M. Franel, nous semble ouvrir une voie nouvelle, extrêmement simple et tout à fait rigoureuse, pour l'étude de la formule sommatoire d'Euler. Ainsi, en supposant que $F''(t)$ soit continue, on obtiendra d'abord, par un procédé tout semblable à celui que nous venons de suivre, $u_n = \frac{1}{16}[F''(a) + F''(b)] - \frac{1}{48}[F''(\alpha) + F''(\beta)]$, puis, en désignant par ν un nombre compris entre $n-1$ et n,

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{F'(n) - F'(n-1)} = \lim_{n=\infty} \frac{u_n}{F''(\nu)} = \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{24}.$$

Enfin $$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots}{F'(n)} = \tfrac{1}{12},$$

de sorte qu'on peut écrire, avec une certaine approximation,

$$\sum_{r=1}^{t=n} \mathrm{F}(r) = \int_1^n \mathrm{F}(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\mathrm{F}(n) - \tfrac{1}{12}\mathrm{F}'(n) + \ldots + \text{const.}$$

Cesàro (Naples).

La fonction $\varphi(t) = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(r) - (t-r)[\mathrm{F}(r+1) - \mathrm{F}(r)]$ a pour dérivée $\varphi'(t) = \mathrm{F}'(t) - \mathrm{F}(r+1) + \mathrm{F}(r)$.

Cette dérivée est constamment décroissante; elle ne peut donc s'annuler qu'une seule fois dans l'intervalle $(r, r+1)$ et la fonction $\varphi(t)$ est toujours positive dans cet intervalle. On a donc

$$0 < \int_r^{r+1} \varphi(t)\,dt = \int_r^{r+1} \mathrm{F}(t)\,dt - \mathrm{F}(r) - \tfrac{1}{2}[\mathrm{F}(r+1) - \mathrm{F}(r)].$$

Faisons r successivement égal à $1, 2, \ldots (n-1)$ et ajoutons les résultats obtenus; en posant

$$\mathrm{X}_n = \int_1^n \mathrm{F}(t)\,dt - \sum_1^{n-1} \mathrm{F}(r) - \tfrac{1}{2}\mathrm{F}(n),$$

on trouve que l'expression $\mathrm{X}_n + \frac{1}{2}\mathrm{F}(1)$ est positive et croît avec n. Nous allons montrer qu'elle reste inférieure à un certain nombre.

Nous avons $\displaystyle\int_r^{r+1} \varphi(t)\,dt = \varphi(r) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x_r)$, x_r étant compris entre r et $r+1$.

Ce résultat peut s'écrire ainsi :

$$\int_r^{r+1} \varphi(t)\,dt = \tfrac{1}{2}[\mathrm{F}'(x_r) - \mathrm{F}(r+1) + \mathrm{F}(r)].$$

D'autre part, les hypothèses faites sur $\mathrm{F}(t)$ entraînent les inégalités suivantes :

$$\mathrm{F}'(x_r) < \mathrm{F}'(r), \qquad \mathrm{F}(r+1) - \mathrm{F}(r) > \mathrm{F}'(r+1);$$

d'où

$$\int_r^{r+1} \varphi(t)\,dt < \tfrac{1}{2}[\mathrm{F}'(r) - \mathrm{F}'(r+1)].$$

En ajoutant membre à membre les inégalités de cette forme, où l'on a fait successivement $r = 1, 2, \ldots, n-1$, on trouve

$$\mathrm{X}_n + \tfrac{1}{2}\mathrm{F}(1) < \tfrac{1}{2}[\mathrm{F}'(1) - \mathrm{F}'(n)] < \tfrac{1}{2}\mathrm{F}'(1).$$

Donc X_n tend vers une limite déterminée X, quand n croît indéfiniment, et l'on a $-\frac{1}{2}F(1) < X < \frac{1}{2}[F'(1) - F(1)]$.

La proposition de M. Franel est donc démontrée. Il n'est pas difficile d'appliquer à l'exemple qu'il a choisi les principes généraux dont nous avons fait usage. J. Le Roux.

Nous supposons $F(t)$ ainsi que la dérivée $F'(t)$ continues dans l'intervalle $a \leqq t \leqq b$. Posons $\frac{a+b}{2} = c$; et considérons l'intégrale

$$(1) \qquad u = \int_a^b (c-t)\,F'(t)\,dt.$$

En intégrant par parties, nous trouvons

$$(2) \qquad u = \int_a^b F(t)\,dt - \frac{b-a}{2}[F(a) + F(b)].$$

Décomposons maintenant l'intégrale (1) en deux autres, l'une depuis a jusqu'à c, l'autre depuis c jusqu'à b. Le facteur $c - t$ est positif dans la première, négatif dans la seconde intégrale. En supposant que $F'(t)$ est positive et va en décroissant quand t varie de a à b, on voit que la première intégrale est renfermée entre $F'(c)\int_a^c (c-t)\,dt$ et $F'(a)\int_a^c (c-t)\,dt$, c'est-à-dire entre $\frac{(b-a)^2}{8}F'(c)$ et $\frac{(b-a)^2}{8}F'(a)$. De même la seconde intégrale est renfermée entre $-\frac{(b-a)^2}{8}F'(c)$ et $-\frac{(b-a)^2}{8}F'(b)$. Par conséquent la valeur de u est renfermée entre o et $\frac{(b-a)^2}{8}[F'(a) - F'(b)]$. Ainsi u est positif et plus petit que $\frac{(b-a)^2}{8}[F'(a) - F'(b)]$.

Soit $a = n$, $b = n + 1$, n désignant un nombre entier positif; il suit du théorème démontré que la série dont le terme général est

$$u_n = \int_n^{n+1} F(t)\,dt - \tfrac{1}{2}[F(n) + F(n+1)]$$

est convergente, si $F'(t)$ est positive, et va en décroissant quand t

varie d'une certaine valeur t_0 jusqu'à l'infini. En effet, dès que n surpasse la valeur t_0 le terme u_n est positif et plus petit que $v_n = \frac{1}{8}[F'(n) - F'(n+1)]$. Mais la série Σv_n est évidemment convergente. La somme des $n-1$ premiers termes de la série Σu_n étant

$$\int_1^n F(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} F(k) + \tfrac{1}{2}F(n) + \tfrac{1}{2}F(1),$$

le théorème de M. Franel est démontré. Le même théorème subsiste, si l'on suppose que la fonction $F(t)$ est positive et va en décroissant pour les valeurs de t qui surpassent une certaine valeur t_0 [sans faire aucune supposition sur la dérivée $F'(t)$]. Car, dès que l'entier n surpasse t_0, la valeur de

$$u_n = \int_n^{n+1} F(t)\,dt - F(n+1)$$

est renfermée entre $F(n+1) - F(n+1)$ et $F(n) - F(n+1)$, c'est-à-dire u_n est positif et plus petit que $v_n = F(n) - F(n+1)$. Mais la somme Σv_n est convergente, parce que $F(t)$ a une limite finie et déterminée pour $t = \infty$.

Par conséquent, la somme Σu_n converge aussi et

$$\tfrac{1}{2}F(n) + \sum_{k=1}^{n} u_k = \int_1^n F(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} F(k) + \tfrac{1}{2}F(n)$$

a donc une limite finie et déterminée pour $n = \infty$. Remarquons enfin que l'on peut généraliser ces théorèmes en s'appuyant sur la formule sommatoire de Maclaurin. Mais cela exige des développements plus étendus. A. Hurwitz (Zurich).

399. Dans la lettre en question (*Œuvres de Fermat,* t. II, p. 1894), Fermat dit que le carré magique 49, qu'il a vu sur un talisman en argent, était rangé suivant la méthode de Bachet. Or cette méthode est connue (*voir* le carré 49 dans les *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet, Gauthier-Villars, 1884, p. 98). On peut arriver autrement à la même conclusion ; car il n'est pas douteux que le talisman n'ait donné le carré *planétaire* de Mars suivant la forme reproduite par Agrippa de Nettesheim (*De occulta philosophia,* p. 149) et Paracelse (*Opera,* t. II,

p. 715). Or cette forme est celle que fournit le premier procédé de Moschopoulos, qui revient à la méthode de Bachet.

PAUL TANNERY.

Il pourrait bien y avoir, dans ce que rapporte Fermat, une erreur sur le nombre des éléments ou sur la substance.

Les talismans de ce genre étaient nombreux au XVI^e siècle. Sur une médaille du métal correspondant à la planète (1) qu'on voulait se rendre favorable, on gravait un carré magique dont la base était le nombre affecté à cet astre, on enveloppait l'amulette dans un sachet d'étoffe idoine et on la portait sur sa personne. MOLLWEIDE (2) a vu un carré de 9 de côté (la Lune) construit d'après Moschopoulos et gravé sur une médaille d'argent. D'autre part, on peut voir encore aujourd'hui à Toulouse, dans le cabinet de M. Ferdinand Pelegry, un sigillum de cuivre sur lequel on a gravé, d'un côté l'image de Vénus surmontée d'une étoile à 5 pointes, de l'autre un carré de côté 7. Ce pourrait bien être là l'amulette dont parle Fermat, car graver un carré de 7 sur argent eût été une sorte d'erreur ou d'incorrection astrologique. Mollweide a vu aussi une pièce d'or portant un carré de 6 (le Soleil), construit d'après Stifel (3).

Le talisman toulousain reproduit ci-dessous est décrit, à titre de spécimen, dans un travail très condensé de M. Massip (4) sur *les carrés magiques*, envisagés principalement au point de vue ésotérique.

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

(1) Le mot *planète*, pris ici avec son acception astrologique, s'applique aux astres suivants. Saturne (3), Jupiter (4), Mars (5), le Soleil (Apollon) (6), Vénus (7), Mercure (8), la Lune (9).

(2) *De quadratis magicis;* in-4°. Leipzig; 1816.

(3) *Arithmetica integra;* in-4°. Nüremberg; 1544.

(4) *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, 9^e série, t. IV. Année 1894; p. 440.

On consultera utilement au sujet des carrés magiques considérés comme amulettes :

1° Agrippa de Nettesheim. *Opera*. Lugdun. Bering. fratr.; 1531; in-12°. Lib. II, *De occulta philosophia*, p. 178 à 182. 2° Paracelse (Bombast de Hohenheim). *Opera*. Francfort; 1605; in-12. T. XI, *Archidoxis magica*, p. 154 à 160. 3° Athanase Kircher. *Arithmologia*. Romæ, typ. Varesii; 1665; in-4°. 4° Bartolocci. *Bibl. magna Rabbinica* (texte hébr. et lat.) Romæ; 1674; 4 vol. in-f°. Au tome II sont expliqués et représentés les carrés planétaires. *Setnof*.

406. (E. Thorin). — 1° Il semble que la première partie de la question peut être complètement résolue. On remarquera d'abord que la solution donnée par l'auteur de la question n'exige pas que a, b, c soient premiers entre eux. De l'équation proposée on déduit $c = \dfrac{ab}{a+b}$. Cherchons à quelle condition cette fraction est égale à un nombre entier. Soient Δ le plus grand commun diviseur de a et b et

$$a' = \frac{a}{\Delta}, \qquad b' = \frac{b}{\Delta}, \qquad \frac{ab}{a+b} = \frac{a'b'\Delta}{a'+b'}.$$

Or $a'+b'$ est premier avec $a'b'$. Donc la condition nécessaire et suffisante pour que cette fraction soit un nombre entier est que Δ soit un multiple de $a' - b'$; on aura $\Delta = \lambda(a'+b')$, λ entier quelconque. On aura, par suite, $a = \lambda a'(a'+b')$, $b = \lambda b'(a'+b')$, a' et b' étant deux nombres premiers entre eux, mais quelconques. D'où $c = \lambda a'b'$. Cette solution renferme comme cas particulier celle qui est donnée par l'auteur de la question. Cette dernière correspond au cas de $a' = 1$. On peut donner à cette solution une forme un peu différente. Soient u et v deux entiers quelconques et $\Delta(u, v)$ le plus grand commun diviseur de u et v;

$$a = \lambda \frac{u(u+v)}{[\Delta(u, v)]^2}, \qquad b = \lambda \frac{v(u+v)}{[\Delta(u, v)]^2}, \qquad \lambda \text{ entier quelconque.}$$

2° Voici un procédé qui donne une infinité de solutions, mais pas toutes probablement.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des entiers quelconques; soit p leur produit et s la somme des entiers $\frac{p}{\alpha_1}, \frac{p}{\alpha_2}, \frac{p}{\alpha_3}, \ldots, \frac{p}{\alpha_n}$. On a identiquement

$$\frac{s}{p} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n},$$

d'où

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha_1 s} + \frac{1}{\alpha_2 s} + \frac{1}{\alpha_3 s} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n s};$$

d'où les solutions

$$a_1 = \lambda s \alpha_1, \qquad a_2 = \lambda s \alpha_2, \qquad \ldots,$$
$$a_n = \lambda s \alpha_n, \qquad \text{et} \qquad a = \lambda \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n,$$
$$s = \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n + \alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_n + \ldots.$$

Remarque. — Il est assez remarquable que ce procédé indirect, très simple, donne toutes les solutions de l'équation proposée lorsque le second membre n'a que deux termes.

On voit aisément, en effet, que les formules données dans la première partie

$$\left| \begin{array}{l} a_1 = \lambda a'(a'+b') \\ a_2 = \lambda b'(a'+b') \end{array} \right| \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{array}{l} a_1 = \lambda \alpha(\alpha+\beta) \\ a_2 = \lambda \alpha(\alpha+\beta) \end{array} \right|$$

donnent les mêmes solutions et que les formules qui viennent d'être obtenues les donnent sous une forme plus simple, puisqu'on n'a pas à choisir deux nombres premiers entre eux. On ne peut évidemment pas en conclure qu'elles donnent toutes les solutions dans le cas général. J. Sadier.

Laissons de côté le cas où a, a_1, a_2 ont un diviseur commun. En écrivant l'équation ainsi

$$(a_1 - a)(a_2 - a) = a^2,$$

on voit que $a_1 - a$ et $a_2 - a$ n'ont pas de diviseur commun; ils sont donc deux carrés. Il suffit par conséquent de poser d'une façon quelconque $a = pq$, pourvu seulement que p et q soient premiers entre eux, pour que l'on ait

$$a_1 = p(p+q), \qquad a_2 = q(p+q).$$

G. Vivanti (Pavie).

Nous avons reçu de MM. Dujardin, P.-F. Teilhet, A. Palmström

(Bergen), PAUL TANNERY, E. FAUQUEMBERGUE, H. BROCARD, C. MOREAU, des solutions de ce problème, analogues aux précédentes, qu'il est inutile de reproduire : nous noterons seulement ce qu'elles contiennent de particulier. Nous donnerons ultérieurement la solution de M. Dujardin.

La RÉDACTION.

A propos de la deuxième partie nous remarquerons que l'on peut se donner a à volonté; il y aura pour $\frac{1}{a}$ autant de décompositions en fractions simples qu'il y aura de manières de décomposer a en un produit de facteurs premiers entre eux, le nombre de ces fractions simples étant d'ailleurs le même que celui des facteurs.

E. FAUQUEMBERGUE.

1° Toutes les solutions en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

sont comprises dans les formules

$$a = mnt, \qquad a_1 = mt(m+n), \qquad a_2 = nt(m+n).$$

Lorsque l'équation proposée a un plus grand nombre de termes, les formules analogues

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3},\\
&a = mnpt,\\
&a_1 = mt(mn+np+pm),\\
&a_2 = nt(mn+np+pm),\\
&a_3 = pt(mn+np+pm),\\
&\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4},\\
&a = mnpqt,\\
&a_1 = mt(mnp+npq+pqm+qmn),\\
&a_2 = nt(mnp+npq+pqm+qmn),\\
&a_3 = pt(mnp+npq+pqm+qmn),\\
&a_4 = qt(mnp+npq+pqm+qmn),
\end{aligned}$$

et ainsi de suite, donnent encore des solutions, mais elles ne les donnent pas toutes. Ainsi, par exemple, les expressions

$$\begin{aligned} a &= mn - 1 \\ a_1 &= m(n+1) \\ a_2 &= mn(n+1) \\ a_3 &= mn(mn-1) \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} a &= mn - 1, \\ a_1 &= mn + m - 1, \\ a_2 &= n(mn + m - 1), \\ a_3 &= n(mn + m - 1)(mn - 1) \end{aligned}$$

satisfont à l'équation $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$ et elles ne rentrent pas dans les formules données plus haut.

A. Palmström (Bergen), C. Moreau.

414. (G. de Rocquigny). — En posant : $2x = X - 1$, $2y = Y - 1$, l'équation donnée devient $(2Y)^2 - X^2 = 3$.

Elle n'a que la solution $Y = X = 1$ ou $x = y = 0$. Il n'y a donc pas de triangulaires quadruples d'un triangulaire.

J'ai démontré, proposition non encore publiée, que si T et T′ sont deux triangulaires et p un entier quelconque, l'équation indéterminée $T = pT'$ a une infinité de solutions, quel que soit p, sauf p carré. Si $p = m^2$, le problème, quand il est possible, n'a qu'un nombre limité de solutions; on constate directement que, pour $m = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17$, il n'y a pas de solution. Quand $m = 2 + 4k$, l'identité

$$(8k^2 + 8k + 1)^2 - 1 = (2 + 4k)^2(4k^2 + 4k)$$

montre que l'on a toujours la solution $T' = \frac{k(k+1)}{2}$.

Donc : Un triangulaire quelconque étant donné, on peut toujours trouver un carré, tel que son produit par ce triangulaire soit un triangulaire; inversement, un carré de la forme $(2 + 4k)^2$ étant donné (sauf 2^2), on peut toujours trouver un triangulaire, tel que le produit de ces deux nombres soit un triangulaire.

A. Boutin.

L'équation proposée, développée et résolue par rapport à x, donne $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4(2y+1)^2 - 3}}{2}$.

Pour que la quantité sous le radical soit un carré parfait, il faut que 3 soit la différence de deux carrés, ce qui n'existe que pour $4^2 - 1^2$. Alors $2y + 1 = 1$, $y = 0$. Donc, l'équation proposée n'est pas possible en nombres entiers.

C. Couturier (Louvain), A. Palmström (Bergen), A. Béligne.

L'équation proposée est impossible, puisque l'on en tirerait

$$x^2 + x + 1 = (2y + 1)^2,$$

et que le premier membre, intermédiaire entre deux carrés consécutifs, x^2 et $(x + 1)^2$, ne peut être un carré.

C. Moreau, Paul Tannery.

De l'équation $x^2 + x - 4y^2 - 4y = 0$, on tire

$$2y + 1 = \pm\sqrt{x^2 + x + 1}$$

Or, $x^2 + x + 1$ est successivement terminé par 1.3.7.3.1.1.3.7.... Donc $x^2 + x + 1$ ne peut être un carré que pour des valeurs de x de la forme $5m + 1$ ou $5m + 3$.

Soit $x = 5m + 1$. On aura $25m^2 + 15m + 2 = t^2$, d'où

$$50m + 15 = \pm\sqrt{100t^2 + 25} = \pm\sqrt{u^2 + 25}.$$

$u^2 + 25$ ne peut plus être carré à partir de la valeur de u pour laquelle $(u + 1)^2 - u^2 > 25$ ou à partir de $u = 12$.

Supposons maintenant $x = 5m + 3$. Alors on a

$$25m^2 + 35m + 13 = t^2,$$

d'où $$50m + 35 = \pm\sqrt{100t^2 - 75} = \pm\sqrt{v^2 - 75}.$$

Mais l'équation $v^2 - 75 = z^2$ revient à $z^2 + 75 = v^2$, impossible pour $z > 37$.

H. Brocard.

L'équation proposée peut s'écrire

$$(4y + 2x + 3)(4y - 2x + 1) = 3.$$

Sous cette forme, on reconnaît qu'elle n'est possible, en nombres entiers, que pour $x = 0$, $y = 0$.

Dujardin, Carl Störmer (Christiania), E. Fauquembergue.

Cette équation peut s'écrire : $x(x + 1) = 4y^2 + 4y$. Or on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier N soit le produit de deux entiers consécutifs est que la racine carrée à une unité près par défaut donne un reste égal à la racine; mais la racine carrée de $4y^2 + 4y$ est $2y$ et le reste $4y$; la racine et le reste étant différents, on conclut que l'équation est impossible en nombres entiers.

J. Sadier.

Tout nombre triangulaire multiple de 4 est nécessairement de l'une des deux formes $4\frac{2q(8q+1)}{2}$, $4\frac{2q(8q-1)}{2}$; il suffit donc de prouver que $\frac{2q(8q\pm 1)}{2}$ ne peut être un triangulaire. Or on a identiquement

$$(1) \qquad \frac{2q(8q+1)}{2} = \frac{4q(4q+1)}{2} - \frac{2q}{2} = T_{4q} - q,$$

et

$$(2) \qquad \frac{2q(8q-1)}{2} = \frac{4q(4q+1)}{2} - \frac{6q}{2} = T_{4q} - 3q.$$

La différence entre T_{4q} et le triangulaire immédiatement précédent étant $4q$, on voit que ni (1) ni (2) ne peuvent représenter un triangulaire. *A.-P. Ericsson.*

Solution géométrique. — La courbe $x(x+1) = 4y(y+1)$ est une hyperbole passant par les quatre points (0, 0), (—1, 0), (0, —1), (— 1, — 1). Hors du carré formé par eux on a toujours : ou $\frac{x}{2} > y > \frac{x-1}{2}$, ou $-\frac{x+1}{2} > y > -\frac{x+2}{2}$, ce qu'on trouve immédiatement en dessinant la courbe et les quatre droites $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{x-1}{2}$, ... Ainsi l'équation n'admet que les solutions entières données. Elling Holst (Christiania).

445. (E. Lemoine). — La question revient à la résolution de l'équation indéterminée $y^3 - y = Kx^3$, K étant un nombre premier. Une solution immédiate (celle de l'énoncé) est donnée par l'hypothèse $y = K$, d'où $y^2 - 1 = x^3$, équation vérifiée par le système $x = 2$, $y = 3$ (et aussi par $x = 0, y = 1$). On n'a pas, à ma connaissance, donné de démonstration décisive de ce théorème empirique, mais il est regardé comme exact. (Voir *Cr.*, t. XXVII, 1844, p. 192, E. Catalan. — *N. A.*, questions 48 et 884; et *ibid.*, 1870, 469-471, et 1871, 204-206, Gerono.) Il resterait maintenant à faire d'autres hypothèses sur les relations entre les nombres K, x, y, mais leur discussion serait trop longue à exposer ici, et d'ailleurs elle paraît amener à cette conclusion, que l'équation donnée n'admet pas d'autres solutions numériques. H. Brocard.

450. (E. Lemoine). — *Note.* — La Société scientifique d'Amsterdam vient de proposer, pour un prix en 1895, la question suivante : « On propose d'étendre la théorie des triangles orthologiques aux tétraèdres. Pour les triangles orthologiques, voyez, etc. » — C'est le sujet proposé dans le Journal, t. II, 1895, p. 16, par la question **450**.

Pour le programme des prix, s'adresser à M. D. Bierens de Haan, à Leyde (Hollande). La Rédaction.

451. (E. Lemoine). — Appelons x la probabilité cherchée. La probabilité de voir sortir la boule n est $\frac{1}{n}$. Le nombre d'épreuves à tenter pour que la probabilité de voir sortir la boule n soit égale à x est $\dfrac{l(1-x)}{l\left(1-\frac{1}{n}\right)}$.

Pour les boules $(n-1)$, $(n-2)$, ... ce nombre sera

$$\frac{l(1-x)}{l\left(1-\dfrac{1}{n-1}\right)}, \quad \frac{l(1-x)}{l\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)}, \quad \ldots;$$

on doit avoir

$$l(1-x)\left[\frac{1}{l\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}+\frac{1}{l\left(1-\dfrac{1}{n-1}\right)}+\ldots+\frac{1}{l\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}\right]=k,$$

d'où
$$l(1-x)=\frac{k}{\displaystyle\sum_{h=n}^{h=2} l\left(1-\frac{1}{h}\right)},$$

équation qui permet de calculer $1-x$ et, par suite, x.

H. Delannoy.

455. (*Alauda*). — En désignant par a, b, c, ..., h, k des quantités inégales quelconques, et par $f(x)$ le produit

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-h)(x-k),$$

on a, comme on sait,

$$f'(a)=(a-b)(a-c)\ldots(a-h)(a-k).$$

On a aussi identiquement

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\ldots+\frac{1}{x-h}+\frac{1}{x-k},$$

d'où

$$\frac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)f(x)}=\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\ldots+\frac{1}{x-h}+\frac{1}{x-k};$$

en faisant tendre x vers a on trouve, par la règle de L'Hôpital, que le premier membre a pour limite $\frac{f''(a)}{2f'(a)}$; on a donc

$$\frac{f''(a)}{2f'(a)}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\ldots+\frac{1}{a-h}+\frac{1}{a-k}.$$

De la sorte, la somme qu'il faut démontrer être nulle s'écrit

$$\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'^3(a)}+\frac{1}{2}\frac{f''(b)}{f'^3(b)}+\ldots+\frac{1}{2}\frac{f''(k)}{f'^3(k)}=\frac{1}{2}\sum\frac{f''(a)}{f'^3(a)}.$$

Considérons la fraction rationnelle $\frac{\theta(x)}{f^2(x)}$, où $\theta(x)$ sera un polynome de degré $2m-2$ au plus, m désignant le degré de $f(x)$. En décomposant en fractions simples, on aura, sans partie entière,

$$(1)\qquad \frac{\theta(x)}{[f(x)]^2}=\sum\frac{A}{x-a}+\sum\frac{A'}{(x-a)^2}.$$

Le calcul de A, A′ se fait sans difficulté; on trouve

$$(2)\qquad A=\frac{\theta'(a)f'(a)-\theta(a)f''(a)}{f'^3(a)},\qquad A'=\frac{\theta(a)}{f'^2(a)}.$$

Multiplions par $[f(x)]^2$ les deux membres de (1); il viendra

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\sum[A(x-a)+A']\left[\frac{f(x)}{x-a}\right]\\&=[A(x-a)+A'](x-b)^2(x-c)^2\ldots(x-k)^2+\ldots.\end{aligned}$$

Le second membre s'offre sous la forme d'un polynome en x de degré $2m-1$, en sorte que

$$(3)\quad \theta(x)=\Sigma A.x^{2m-1}+(\Sigma A'+\Sigma aA-2p\Sigma A)x^{2m-2}+\ldots,$$

où $p=a+b+c+\ldots+h+k$.

Mais si $\theta(x)$ est au plus de degré $2m-2$, le coefficient de x^{2m-1} doit être nul; on a donc

$$(4)\qquad \sum A=\sum\frac{\theta'(a)f'(a)-\theta(a)f''(a)}{f'^3(a)}=0.$$

En prenant en particulier $\theta = 1$, on trouve $\sum \frac{f''(a)}{f'^3(a)} = 0$, ce qui nous donne la démonstration cherchée par Catalan.

Observons que si dans l'identité (3) $\theta(x)$ est de degré inférieur à $2m - 2$, outre l'équation (4) nous obtiendrons encore une suite d'équations analogues. Mais ces équations rentrent dans l'équation (4). Si en effet $\theta_1(x)$ est un polynome du degré $2m - 1 - n$, les polynomes θ_1, $x\theta_1$, ..., $x^{n-1}\theta_1$ ont tous un degré inférieur à $2m - 1$; on peut leur appliquer l'équation (4).

Les n équations ainsi obtenues équivalent à celles que l'on écrirait en annulant les n premiers termes du second membre de (3) où $\theta = \theta_1$. Faisons encore une remarque. Supposons qu'on cherche un polynome $\varphi(x)$ qui, pour chaque racine a de $f(x) = 0$ prenne une valeur donnée Va. Si φ_0 est une première solution, le polynome $\varphi = \varphi_0 - \lambda f$ en est une autre, λ étant un polynome arbitraire. Choisissons λ de façon à réduire le plus possible le degré de φ. Nous prendrons pour λ le quotient de la division de φ_0 par f; alors φ sera le reste de cette division. Son degré sera au plus égal à $m - 1$. Ainsi il y a normalement un polynome $\varphi(x)$ du degré $(m - 1)$ qui satisfait à l'énoncé. Mais dans certains cas ce degré peut s'abaisser encore. Pour chercher ces cas, décomposons $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ en fractions simples; nous aurons ainsi

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum \frac{\varphi(a)}{f'(a)} \cdot \frac{1}{x-a} = \sum \frac{Va}{f'(a)} \frac{1}{x-a}$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum \frac{Va}{f'(a)} \frac{f(x)}{x-a} = \sum \frac{Va}{f'(a)} (x-b)(x-c)\ldots(x-k)\\ &= L_0 x^{m-1} + L_1 x^{m-2} + \ldots,\end{aligned}$$

en posant $L_0 = \sum \frac{Va}{f'(a)}$, $L_1 = \sum a \cdot \frac{Va}{f'(a)} - p \sum \frac{Va}{f'(a)}$, ..., avec $p = a + b + c + \ldots + h + k$.

Puisque le degré de $\varphi(x)$ s'abaisse, il faudra que L_0 d'abord soit nul et puis, s'il y a lieu, L_1 et d'autres coefficients. Par exemple, soit $\theta(x)$ un polynome du degré $2m - 2$ au plus et cherchons un polynome $\varphi(x)$ qui prenne pour $x = a, b, \ldots$, les mêmes valeurs que les fonctions $\frac{d}{dx}\left[\frac{\theta(x)}{f'(x)}\right]$; nous aurons ici $V_a = \frac{\theta'(x)f'(x) - \theta(x)f''(x)}{f'^2(x)}$. Comme le coefficient L_0 est ici nul en vertu de l'équation (4), il y a un polynome $\varphi(n)$ du degré $m - 2$ qui satisfait à la question. L'expression

$$(5) \qquad \varphi(x)f'^2(x) - \theta'(x)f'(x) + \theta(x)f''(x)$$

s'annulant pour toutes les racines de $f(x) = 0$, cette expression est divisible par $f(x)$. De là ce théorème : θ *étant un polynome du degré* $2m - 2$ *au plus, il y a un polynome* φ *du degré* $m - 2$ qui rend l'expression (5) divisible par $f(x)$.

J. Franel (Zurich), G. Kœnigs.

La fonction de $a, b, \ldots, k$ indiquée par Catalan est $-\frac{1}{2}\frac{\partial^n S}{\partial a\,\partial b\,\partial c\ldots\partial k}$, dans laquelle

$$S = \frac{1}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)\ldots(b-k)} + \ldots + \frac{1}{(k-a)(k-b)\ldots(k-h)}.$$

Puisque $S = 0$, la relation de Catalan est prouvée.

Lüroth (Fribourg-en-Brisgau).

Nous avons reçu de très nombreuses solutions de cette question, comme elle n'offre, en somme, pas grande difficulté, que les réponses reçues à peu près toutes la résolvent par des voies différentes, nous ne pouvons nous empêcher de faire remarquer que cela constitue une démonstration de l'utilité pratique de l'*Intermédiaire*, puisqu'une question aussi simple avait, de son aveu, longtemps arrêté un homme de la valeur de Catalan.

Les autres réponses reçues de nos Correspondants et qu'il est dommage que le manque de place nous empêche de reproduire, car la variété des méthodes employées présente de l'intérêt, sont signées de MM. H. Brocard, F. Bucca (Palerme), Cesàro (Naples), E. Fauquembergue, I. Ivanoff (Saint-Pétersbourg), W. Kapteyn (Utrecht), J.-C. Kluyver (Leyde), *Quemquæris*, de Saint-Germain. La Rédaction.

461. (*Muller*). — L'équation proposée peut s'écrire

$$x^2 - y^2 = z^3 \qquad \text{ou} \qquad (x+y)(x-y) = z^3.$$

Or, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit de deux facteurs forme un cube parfait est que les groupes de facteurs partiels qui composent ceux-ci y entrent respectivement avec des exposants dont la somme fasse 3 sans excepter l'exposant o; on devra donc avoir

$$x+y=st^2u^3, \quad x-y=s^2tv^3; \quad \text{on en déduit:}$$

$$x=\frac{st(tu^3+sv^3)}{2}, \quad y=\frac{st(tu^3-sv^3)}{2}, \quad z=stuv.$$

Ces formules ne donnent pas de valeurs entières pour x et y, lorsque s et t étant impairs, l'un des deux nombres u et v est pair et l'autre impair. On leur rend toute l'élasticité désirable par l'introduction d'une nouvelle indéterminée r, à laquelle on n'a qu'à donner l'une des valeurs 1 ou 2. Il suffit donc de faire $r=\frac{3\pm 1}{2}$ et les formules deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} x=\dfrac{\left(\frac{3\pm 1}{2}\right)^3 st(tu^3+sv^3)}{2}, \quad y=\dfrac{\left(\frac{3\pm 1}{2}\right)^3 st(tu^3-uv^3)}{2}, \\ \qquad z=\dfrac{(3\pm 1)^2}{2} stuv. \end{cases}$$

Telles sont les formules qui doivent donner toutes les solutions entières de $x^2=y^2+z^3$. Les formules de M. *Muller* n'en sont qu'un cas particulier. On en connaissait un autre dès le XVI^e^ siècle, savoir :

$$(2)\qquad x=\frac{u^3+v^3}{2}, \quad y=\frac{u^3-v^3}{2}, \quad z=uv.$$

On connaissait également, à la même époque, les solutions suivantes du cas de $y=z$:

$$(3)\qquad x=\alpha(\alpha^2-1), \quad y=z=\alpha^2-1.$$

Les formules (3) rentrent dans les formules (1), en faisant $u=v=1, \quad t=\alpha+1, \quad s=\alpha-1$ *Setnof.*

Les solutions entières de l'équation $x^2=y^2+z^3$ sont données par les positions

$$x=\frac{m^3uv^2+n^3u^2v}{2}, \quad y=\frac{m^3uv^2-n^3u^2v}{2}, \quad z=mnuv;$$

où l'on doit prendre m et n de même parité, à moins que l'un des deux facteurs u, v ne soit pair. PAUL TANNERY.

On a

$$(x-y)^3(x+y)^3$$
$$=[(x^3+3xy^2)-(y^3+3yx^2)][(x^3+3xy^2)+(y^3+3yx^2)];$$

d'où

$$[x(x^2+3y^2)]^2-[y(y^2+3x^2)]^2=(x^2-y^2)^3,$$

formule qui donne une infinité de solutions différentes de celles qui sont indiquées dans la question.

CARL STÖRMER (Christiania).

Les formules indiquées dans l'énoncé ne donnent pas toutes les solutions; en effet, si l'on se donne z, l'équation est de la forme $x^2-y^2=A$. Pour la résoudre, on décompose A, de toutes les manières possibles, en deux facteurs m et n de même parité et l'on pose $x+y=m$, $x-y=n$, d'où $x=\frac{m+n}{2}$, $y=\frac{m-n}{2}$.

Soit $A=2^\mu h_1^\alpha h_2^\beta\ldots h_k^\tau$, $\mu, \alpha, \beta, \ldots \tau$ représentant des entiers et $h_1, h_2, \ldots h_k$ des nombres premiers; si H désigne le produit $(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\tau+1)$, les nombres ω_1, ω_2 des solutions entières de l'équation $x^2-y^2=A$ sont donnés par les formules

$$\omega_1=\frac{(-1)^{2^\mu}(\mu-1)H}{2}, \qquad \omega_2=\frac{(-1)^{2^\mu}(\mu-1)H-1}{2}.$$

La première de ces formules se rapporte au cas dans lequel au moins un des exposants $\mu, \alpha, \ldots, \tau$ est impair et la seconde n'est applicable que quand les mêmes exposants sont tous pairs. Pour le cas où l'un des nombres x et y est donné, voir le Mémoire du P. Pépin : *Sur le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné*, in-8, 1882. E. FAUQUEMBERGUE.

Autres réponses analogues de MM. BÉLIGNE, BOUTIN, BROCARD, SADIER.

462, 463, 464. (*Muller.*) — Ces trois questions sont intimement liées les unes aux autres. Les solutions reçues sont nombreuses. Elles émanent de MM. A. BÉLIGNE, E. BOREL, A. BOUTIN, H. BROCARD, H.-W. CURJEL (Chester), DUJARDIN, E. DUPORCQ, FABRY, FAUQUEMBERGUE, A. GOULARD, P. HENDLÉ, ELLING HOLST (Christiania), H. LEZ, A. PALMSTRÖM (Bergen), RABUT, SADIER, P. TANNERY, P.-F. TEILHET, G. VIVANTI (Pavie). Tous trouvent que c'est le barycentre du triangle qui répond à la question 462. La solution de ces trois questions repose essentiellement sur la remarque suivante, faite par la plupart des auteurs des solutions : Dans le cas où le triangle est équilatéral, on prouve aisément que les ellipses cherchées sont les cercles inscrits et circonscrits. La solution du cas général est dès lors fournie par cette simple remarque, que tout triangle peut être projeté orthogonalement suivant un triangle équilatéral, et alors les ellipses qui répondent aux questions sont les ellipses inscrite et circonscrite de Steiner qui ont pour centre le centre de gravité.

Bibliographie. — Euler paraît être le premier qui se soit occupé de ces questions. Voir : *Annales de Gergonne*, t. IV, solutions données par Bérard; Frenet, *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal*; 4e édition, 1882, nos 227, 228, p. 145-147; Koehler, *Exercices de Géométrie analytique*, t. I, 1886, p. 26-28 et 216. Signalons aussi une étude des mêmes questions par MM. Barisien, J. Deprez et Tzitzéica (*M.*, 1895, 42-43, 81-83).

La Rédaction.

541. (G. de Longchamps). — Je trouve dans les *C. R.* les éléments suivants d'une réponse qui me paraît concluante.

1° La Note de Cauchy est intitulée : *Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques;* XI, 1840, p. 789-798, et en cours d'impression; l'auteur l'a complétée par quelques lignes intitulées : *Addition au Mémoire sur les calculs numériques* (*voir* p. 789) (*Ibid.* p. 826. Séance du 16 novembre 1840).

2° Dans la séance suivante du 23 novembre 1840, Cauchy présente une Note formant suite à ce Mémoire et intitulée : *Sur les moyens de vérifier ou de simplifier diverses opérations de l'Arithmétique décimale;* XI, 1840, p. 847-858.

3° Le 10 juillet 1843, « M. Deromanet demande à soumettre au jugement de l'Académie un Mémoire sur une manière d'écrire en chiffres qu'il a imaginée, et pour laquelle il fait usage de quatre caractères seulement. Une Commission ne pourra être nommée pour l'examen de ce système que lorsque M. Deromanet en aura adressé une exposition plus complète (XVII; 1843, p. 90).

En l'absence d'autre document, il est à supposer que ce système est analogue à celui que Cauchy avait indiqué.

4° Le 3 février 1845, Cauchy présente un Mémoire intitulé : *Mémoire sur l'emploi des variables complémentaires dans le développement des fonctions en séries* (XX; 1845, p. 280-293). Ce Mémoire débute ainsi :

« On appelle en Arithmétique *nombres complémentaires* deux nombres dont la somme est une unité d'un certain ordre, et l'on dit de même, en Géométrie, que deux angles sont *complémentaires* l'un de l'autre, lorsque leur somme équivaut à un angle droit. En transportant cette locution dans l'Analyse algébrique, nous appellerons *variables complémentaires* deux variables dont la somme sera l'unité. »

En note, l'auteur ajoute :

« En étendant cette définition, l'on a dit encore que deux nombres étaient *compléments* l'un de l'autre, quand ils offraient pour somme un nombre donné. L'usage des compléments dans les opérations de l'Arithmétique est l'objet spécial d'un Ouvrage publié en 1823 par M. Berthevin. En parcourant dernièrement cet Ouvrage, j'y ai trouvé, pour le calcul abrégé du produit de deux nombres, quelques règles dont chacune coïncide au fond avec celle que j'ai rapportée dans le *Compte rendu* de la séance du 16 novembre 1840 (p. 795) et qui s'y trouve exprimée en termes tellement simples que, pour la démontrer, il suffirait de traduire son énoncé en formule algébrique. »

5° Je ne sais si je me fais illusion, mais il me semble que le principe de ce genre de calcul arithmétique se trouve déjà indiqué dans les Traités de l'*Abacus*, dont M. Chasles a donné le commentaire, la traduction et le texte dans une étude parue aux *C. R.*, XVI, 1843 : *Explication des Traités de l'Abacus et particulièrement du Traité de Gerbert*, p. 156-173; *Règles de l'Abacus : Traduction littérale*, p. 218-237; *Texte*, p. 237-246.

Autres indications. — L'exposition du système de Cauchy se trouve en Note dans les *Leçons d'Arithmétique* de P.-L. Cirodde, Paris, 1842. Dans l'analyse de cet Ouvrage (*N. A.*, 1842, p. 56) Terquem a pensé que cette convention ne sera jamais adoptée. Enfin, pour citer des documents plus récents, il convient de rappeler que ce même procédé a été signalé ou réinventé par Ed. Lucas (*Récr. math.*, t. I, 1882, p. 152), et qu'on le retrouve dans l'*Arithmétique amusante* du même auteur (1895, p. 167).

H. Brocard.

581. (G. Kœnigs). — La formule (4) de M. Kœnigs est donnée, sauf une erreur de coefficient numérique, dans une Note publiée par moi dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, troisième série, t. VI, année 1887, p. 407. E. Genty.

584. (E. Lemoine). — Vous trouverez la question résolue dans le *Traité de Géométrie analytique* de Salmon (trad. H. Resal et V. Vaucheret, 5e édition), p. 506, mais la solution paraît difficile à expliciter. *Biosse.*

QUESTIONS.

516. **[D1d]** Énoncé rectifié. — Si la fonction $f(x, y)$ *est nulle sur un contour fermé* C, et uniforme, finie et continue ainsi que ses dérivées partielles des différents ordres, à son intérieur, il existe au moins un point, à l'intérieur du contour, pour lequel auront lieu les inégalités suivantes :

$$f \gtrless 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \lessgtr 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2 > 0.$$

D. Gravé (Saint-Pétersbourg).

635. **[V5b]** Vers la moitié du xiv^e siècle, un certain *Magister Dominicus de Clavasio Parisiensis* publia un Traité intitulé : *Practica geometrie demonstrativa*, edita Parisiis, 1346, en trois Livres. On connaît de ce Traité sept manuscrits, dont quatre dans l'Amploniana d'Erfurt, deux dans la bibliothèque royale de Munich et un dans la bibliothèque royale de Madrid. Mais de la vie de l'auteur il n'y a que la seule mention dans le manuscrit amplonien, f. 37 : « Explicit practica geometrie magistri Dominici de Clavasio astrologi cuiusdam regis Francie. » La *Practica geometrie,* pour un auteur du xiv^e siècle, est un Ouvrage digne d'admiration. En préparant une édition de ce Traité, je prie les lecteurs qui auront une connaissance plus approfondie de la vie de l'auteur, ou de manuscrits qui auraient échappé à mes recherches, de vouloir bien m'en donner avis, afin que je puisse en profiter dans l'édition précitée.

Maximilian Curtze (Thorn).

636. **[V]** Où pourrait-on trouver des études déjà faites sur la question suivante :

« Calculer les forces élastiques intérieures tendant à dé-former un corps solide animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe »? Ch. Carron.

637. **[M¹1b]** Exprimer les nombres plückériens de la courbe de déviation d'une courbe plane donnée (lieu des centres des coniques à contact du quatrième ordre) en fonction de trois des six nombres plückériens de la courbe donnée.

P.-H. Schoute (Groningue).

638. **[M⁴m]** A-t-on déjà remarqué que l'équation intrinsèque de la chaînette d'égale résistance peut se mettre sous la forme $\rho = \frac{\rho_0}{2}\left(e^{\frac{s}{\rho_0}} + e^{-\frac{s}{\rho_0}}\right)$, ρ_0 désignant le rayon de courbure au point le plus bas? F. Robellaz.

639. **[I25b]** L'étude de la question n° 400 m'a conduit à la notion, nouvelle pour moi, des nombres CIRCULAIRES. Les multiples de ces nombres jouissent de la propriété de reproduire toujours les *mêmes chiffres* disposés dans le *même ordre*. Quand le nombre des chiffres du produit surpasse celui du multiplicande, il suffit d'écrire le produit en *hélice* pour en trouver les chiffres primitifs. Certains nombres sont MULTICIRCULAIRES. Cette propriété est indépendante de la base du système de numération. Les nombres *circulaires* ont-ils déjà été étudiés?

F. Delastelle.

640. **[I3b]** p désignant un nombre premier, on sait, par le théorème de Fermat, que $\frac{2^p - 2}{p}$ est un nombre entier. Peut-on démontrer que ce nombre entier n'est jamais divisible par p?

J. Franel (Zurich).

641. **[I11b]** La fonction $\mu(n)$ étant définie comme il suit : $\mu(n) = 0$, si n contient un facteur carré; $\mu(n) = +1$ ou -1, suivant que n est le produit de facteurs premiers en nombre pair ou en nombre impair, tous différents; je désirerais savoir s'il est possible de prouver que la série $\sum_n \mu(n)\,\frac{1}{n^s}$ est convergente pour $s > \frac{1}{2}$, ou si cette série a déjà été l'objet d'études antérieures. Cette série est celle que l'on obtient en développant

le produit infini, inverse de la fonction de Riemann $\zeta(s)$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} - \frac{1}{10^s} - \frac{1}{11^s} - \frac{1}{13^s} - \frac{1}{15^s} \cdots,$$

p représentant tous les nombres premiers.

C. Couturier (Louvain).

642. **[P6f]** Existe-t-il des Ouvrages traitant de la transformation par représentation conforme et s'est-on occupé de l'étude des courbes transformées et particulièrement des courbes qui sont des transformées de droites? M. Servant.

643. **[P6f]** Le problème suivant est-il possible? Étant donnée une courbe quelconque $\varphi(x, y) = 0$, trouver une transformation par représentation conforme, telle que cette courbe se transforme en elle-même? Y a-t-il plusieurs solutions?

M. Servant.

644. **[M¹1c]** Un lecteur pourrait-il indiquer dans quel Ouvrage ou dans quel Recueil a été principalement traitée et développée la théorie des polaires dans les courbes d'un degré supérieur au second? *Riboud.*

645 **[I25a]** Quelles sont les suites dont la somme est égale au carré du nombre des termes?

Exemples :

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2n - 1 = n^2,$$

$$\frac{3^{n-1}+1}{2} + \frac{3^{n-1}+1}{2} + 1 + \frac{3^{n-1}+1}{2} + 2 + \ldots + \frac{3^n - 1}{2} = 3^{2n-2}.$$

G. de Rocquigny.

646. **[I25b]** Où peut-on se procurer la Table des nombres triangulaires présentée par M. A. Arnaudeau dans les séances de l'Académie des Sciences du 4 et du 11 février 1895 (*C. R.*)?

G. de Rocquigny.

647. **[E5]** Je désirerais des renseignements sur les *Recueils d'intégrales* publiés en France et à l'étranger. Ch. Rabut.

648. **[V9]** Je voudrais bien connaître s'il existe, ou voir publier, s'il est encore à faire, un Traité de Géométrie dans

lequel chaque proposition (théorème, corollaire, etc.) fut accompagnée d'une Notice historique destinée à préciser à quelle époque et dans quel Ouvrage elle a été publiée pour la première fois. Il serait, notamment, très intéressant de rappeler de cette façon les différentes propositions d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Ptolémée, etc., sans rien modifier à l'ordre adopté dans les Traités modernes. Ce serait, en d'autres termes, une annotation systématique des propositions énoncées dans les Géométries les plus récemment publiées. Je suis persuadé qu'un Ouvrage ainsi présenté serait hautement apprécié du public mathématique. H. Brocard.

649. **[V9]** Quelque correspondant pourrait-il me procurer le numéro suivant d'un journal danois, ou tout au moins m'indiquer où je le trouverais à Paris : *Tidsskrift for Mathematik* (5e série) *udgivet af J.-P. Gram et H.-G. Zeuthen*, t. II, 1884, p. 113 à 139? Il s'agit d'un article de M. J.-P. Gram sur une formule de mortalité d'Oppermann. A. Quiquet.

650. **[H9]** Je serais reconnaissant à celui qui voudrait avoir la complaisance de citer dans l'ordre systématique, simplement par leur titre et leur date, les travaux sur l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues d'un nombre quelconque de variables indépendantes, qu'il pourrait connaître. *Enesca.*

651. **[$L^1$14a]** J'ai publié (*M.*, 1895, p. 42) une Note, résumant les propriétés des triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse ; les Correspondants qui connaîtraient des propriétés relatives à ces triangles, autres que celles qui sont énoncées (*loc. cit.*), sont instamment priés de les adresser, soit à la rédaction de *Mathesis*, soit à celle de l'*Intermédiaire*, soit à l'auteur soussigné (M. Barisien, 6, rue Chomel, à Paris). Ces propriétés supplémentaires feront l'objet d'un article complétant la monographie en question. E.-N. Barisien.

652. **[V]** Dans quel Ouvrage a paru pour la première fois l'expression « condition nécessaire et suffisante » pour l'énonciation d'un théorème et de son inverse? *Humilis.*

653. **[V]** Quel auteur a fait usage pour la première fois du mot *prismatoïde?* *Milèse.*

654. **[E5]** La valeur de l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{x^2+a^2}{1-x}}$, où a^2 est une constante, est-elle infinie? Sinon, j'en voudrais connaître la valeur. STOLL (Bensheim).

655. **[S2]** Pourquoi un œuf vide se tient-il en équilibre sur un jet d'eau? E.-M. LÉMERAY.

656. **[H11d]** Les fonctions itératives ne figurent pas dans le Répertoire bibliographique; ne pourrait-on pas les classer sous la rubrique ci-dessus, à la suite des équations fonctionnelles? E.-M. LÉMERAY.

657. **[X2]** On sait que les nombres de la Table logarithmique de Napier (Neperus) n'ont qu'un rapport assez éloigné avec les logarithmes naturels ou hyperboliques (appelés à tort népériens). Quelle est en réalité la plus ancienne Table de logarithmes naturels qui ait été publiée? PAUL TANNERY.

658. **[V]** Quel est l'auteur qui le premier a fait usage de l'expression « sectio aurea »?

W.-W. BEMAN (Ann-Arbor, U. S. A.).

659. **[I2bα]** On sait que Fermat a cru posséder une démonstration de la proposition : 2^p+1 est un nombre premier, si $p=2^n$; et que cette proposition est inexacte. Mais on peut évidemment exclure un certain nombre de formes de diviseurs premiers. Jusqu'où a-t-on été dans cette voie et jusqu'où peut-on aller? PAUL TANNERY.

660. **[I2bα]** De deux passages de Mersenne sur les nombres parfaits (préf. des *Cogitata phys.-math.* de 1644 et page 182 des *Reflectiones* de 1647), Ed. Lucas, d'après une lettre qu'il m'a adressée, avait tiré cette proposition, qu'il attribuait à Fermat :

« Pour que 2^p-1 soit premier, *il faut et il suffit* que p soit premier et de l'une des formes $2^{2n}+1$, $2^{2n}\pm 3$, $2^{2n+1}-1$. »

Contrairement à son opinion, je suis porté à croire que les indications de Mersenne proviennent de Frenicle et qu'elles sont plus ou moins empiriques. D'autre part, l'énoncé ci-dessus serait faux *en tant que condition suffisante*, si $2^{67}-1$ est un nombre composé (*voir* question 266). Il n'en serait pas moins intéressant de rechercher quelle peut être la valeur de cet énoncé *en tant que condition nécessaire.* PAUL TANNERY.

661. [M¹8aα] Où puis-je trouver l'équation de *la courbe parallèle à l'hypocycloïde à quatre rebroussements?* Je désire surtout savoir le degré de cette courbe.

662. (S) **[C2e]** Étant donnés

$$u = x\sin x + \cos x, \qquad v = \sin x - x\cos x,$$

évaluer $\int \frac{x^2\,dx}{u^2}, \int \frac{x^2\,dx}{v^2}, \int \frac{b\,x^2\,dx}{(au+bv)^2}$ (¹).

W.-W. Beman (Ann-Arbor, U. S. A.).

663. [I19c] A-t-on étudié l'équation $x^n - Ay^n = 1$ en nombres entiers, n étant un nombre entier supérieur à 2 et A un nombre entier qui n'est pas une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte? L'équation, qui peut être regardée comme une généralisation de l'équation de Pell, a-t-elle des solutions entières?

Carl Störmer (Christiania).

664. [I13bα] Fermat a dit que 25 est le seul carré en nombres entiers qui, augmenté de 2, donne un cube.

Connaît-on sa démonstration et serait-il possible de l'appliquer à la proposition suivante, que je présume être vraie? 9 est le seul carré entier qui, diminué de 1, donne un cube.

H. Delannoy.

665. [L¹15f] Voici une question qui n'offre d'autre difficulté que celle d'une élimination que je ne puis parvenir à faire parce que les calculs sont trop longs; je serai heureux d'avoir le résultat, qu'un correspondant trouvera peut-être d'une façon moins laborieuse. Soient O le centre et M un point quelconque d'une ellipse donnée. Sur le rayon OM, ou sur son prolongement, on prend de O vers M une longueur ON = n.OM, et du point N on mène la perpendiculaire NP sur la tangente à l'ellipse au point M. On demande l'équation et l'aire de la courbe décrite par le point P, lorsque le point M se déplace sur l'ellipse donnée, particulièrement l'aire de la courbe pour le cas de $n = 2$.

V. Cristescu (Bucarest).

666. [A3g] La méthode pour trouver la limite des racines d'une équation, que M. H. Laurent attribue à M. Laguerre

---

(¹) M. Hermite (*Cours d'Analyse*, 1873, p. 260) dit : « On n'a aucun procédé pour trouver ces intégrales directement. »

(LAURENT, *Algèbre*, 4^e^ édition, 3^e^ Partie), est-elle en effet de cet auteur, ou de M. Thibault, comme M. B. Niewenglowski le dit dans son Algèbre? JUAN J. DURAN-LORIGA (La Corogne).

667. **[L¹16a]** Quels travaux ont été publiés, relatifs au billard elliptique? JUAN J. DURAN-LORIGA (La Corogne).

668. **[J1aα]** Parmi les vingt-quatre permutations des quatre premiers nombres, il y en a deux (2413 et 3142) qui jouissent de cette propriété que la différence de deux quelconques de leurs chiffres n'est jamais égale à la différence de leurs rangs. 1° *Démontrer* que le nombre des permutations jouissant de cette propriété *doit* être précisément égal à 2. 2° Généraliser, en considérant les permutations des n premiers nombres.

H. DELANNOY.

669. **[C2h]** Soit une fonction $f(x, y)$ des deux variables indépendantes x et y, définie dans un champ fini C; soient $c\ldots d$ l'intervalle de l'ordonnée minima à l'ordonnée maxima, $a\ldots b$ l'intervalle de l'abscisse minima à l'abscisse maxima des points du contour; soit enfin y_r un point de l'intervalle $c\ldots d$, et indiquons par $\alpha\ldots\beta$ le segment de $y = y_r$ compris dans le champ, α et β étant évidemment des fonctions de y_r. Ayant partagé les intervalles $a\ldots b$ et $c\ldots d$ l'un en m et l'autre en n parties suivant une loi quelconque (mais telle que m et n soient indéfiniment croissants par l'application répétée de cette loi et que les parties des deux intervalles deviennent indéfiniment petites), l'intervalle $\alpha\ldots\beta$ sera aussi décomposé en parties $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ par les parallèles à l'axe des y conduites par les points de division de $a\ldots b$. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des points quelconques du champ, choisis respectivement dans les parties $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, et ε_r une quantité aussi petite qu'on voudra; on pourra alors déterminer pour m une valeur telle que l'on ait

$$\delta_1 f(x_1, y_r) + \delta_2 f(x_2, y_r) + \ldots + \delta_n f(x_n, y_r) - \varphi(y_r) < \varepsilon_r$$

en valeur absolue, $\varphi(y_r)$ supposé existant et égal à $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x, y_r)\,dx$.

On dit que la fonction $f(x, y)$ est *uniformément intégrable* par rapport à x et pour les valeurs de y comprises dans l'intervalle $c\ldots d$ lorsque, ε étant aussi petit qu'on le voudra, on peut déterminer m de manière que dans tout intervalle tel que $\alpha\ldots\beta$

on ait en valeur absolue

$$\delta_1 f(x_1, y) + \delta_2 f(x_2, y) + \ldots + \delta_n f(x_n, y) - \varphi(y) < \varepsilon.$$

Or je demande ceci : si la fonction $f(x, y)$ est intégrable par rapport à x pour toute valeur de y comprise dans l'intervalle $c \ldots d$, sera-t-elle aussi uniformément intégrable par rapport à x, et pour les mêmes valeurs de y?

La démonstration n'offre aucune difficulté lorsque le champ est rectangulaire; mais il n'en est pas de même, je crois, lorsque cela n'a pas lieu. U. Ceretti (Rieti).

670. [**Q2**] On sait que des généralisations ont été faites pour le plan et pour les hyperplans à n dimensions, en partant de la notion de rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. Je désirerais des renseignements sur toutes les généralisations de cette nature qui ont été faites.

Eliakim Hastings Moore (Chicago).

671. [**Q4c**] Pour gagner au $n^{\text{ième}}$ coup du jeu du Go-Bang (*voir* t II, p. 2) il suffit de placer quatre jetons de même couleur au $(n-2)^{\text{ième}}$ coup sur quatre cases consécutives en ligne droite, les cases contiguës dans le prolongement de cette ligne étant libres. Pour arriver à ce dernier résultat, il suffit de placer, au $(n-4)^{\text{ième}}$ coup, un jeton qui forme, dans deux directions différentes, deux séries de trois jetons de même couleur sur trois cases consécutives en ligne droite, les cases contiguës dans le prolongement de ces deux lignes étant libres ; il y a d'autres dispositions qui assurent le gain de la partie. Combien y a-t-il de diagrammes, ou types différents de dispositions des jetons d'une même couleur, qui assurent le gain de la partie, et quel est le nombre de coups *minimum* nécessaire pour réaliser chacun de ces types sur l'échiquier, quel que soit le jeu de l'adversaire, le nombre des cases et des jetons étant supposé illimité? Si on limite le nombre des cases ou des jetons, la question présente, en dehors du cas général, les complications qui rendent inapplicables à un échiquier carré les formules applicables à un échiquier à deux bords (au lieu de 4), dans le problème des n reines [1].

H. Tarry.

[1] *Voir* Lucas, *Récréations mathématiques*, t. I.

RÉPONSES.

30. (T. Parmentier). — *Sixième réponse.* Note. — Les 707 décimales rectifiées du nombre π, dont il a été question t. I, p. 15-16, ont été rééditées tout récemment dans le *Zeitschrift* d'Hoffmann, 1895, t. XXVI, p. 263, avec une réimpression textuelle d'un article de W. Shanks, daté du 14 avril 1873 et une courte esquisse biographique de cet infatigable calculateur.

La formule employée pour cette évaluation du nombre π est la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tang } \frac{1}{5} - \text{arc tang } \frac{1}{239},$$

dont les deux termes avaient été déterminés chacun avec 709 décimales. Cette communication a été complétée par une statistique de la fréquence des divers chiffres 0, 1, 2, ..., 9 dans l'expression du nombre π. H. Brocard.

36. (A. Cornu). — *Troisième réponse.* — Les *Annales de Gergonne* renferment une foule d'articles relatifs à l'étude et à la bibliographie des caustiques planes. On en pourra juger d'après l'extrait suivant, simplement résumé ici : V (1816), 283; XI (1822), 229; XIV (1824), 1 et 129; XV (1825), 345-358; XVI (1826), 307-313; — *Ch. Sturm,* Recherches d'analyse sur les caustiques planes, XVI (1826), 238-247; — *Gergonne,* divers Mémoires sur l'Optique, XVI, 1-19, 65-80, 247-254, 307-315; — *Th. de Saint-Laurent,* Recherche de l'équation générale de la caustique par réflexion et par réfraction relative au cercle, XVII (1826), 1-33, 33-35, 128-134; XVIII (1827), 1-18, 48-55. — *Sarrus,* XVI (1826), etc.

Voici également d'autres références sommaires *J.-B. Biot,* Sur les surfaces catacaustiques (caustiques par réflexion) et diacaustiques (caustiques par réfraction) dans la sphère. J. E. P XVII, 1841. — A. Lévistal, Recherches d'Optique géométrique. A. E. N. 1867; 195-254. — F. Bosser. Die Theorie der kaustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung (Acad. de Munich, 1869 et Z. XV, 1870). — A. Transon. J. M., t. I. (1836), 191. — Petit, Correspondance sur l'École Polytechnique, t. II, 354, etc. Enfin, de nombreux articles des N. A. : H. Faure. Caustique de la parabole, 1844, 365-370. — C. Soulé. Diacaustique dans le cas d'une surface réfractante plane; 1847, 186-189. — O. Terquem, Note bibliographique. *Ibid.*, 189-194. — A. Mannheim, Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude des anticaustiques; 1861, 220-222. — Divers (caustique de la parabole, etc.; 1863, 97-104 et 180). — *Rouquel*, Caustique par réflexion de la développante d'un cercle, etc. *Ibid.*, 497-498. — *A. Cornu*, Caustiques; centre de jonction. *Ibid.*, 311-317. — *Breton de Champ*, Sur les rayons de courbure des caustiques en leurs points de rebroussement; 1865, 25-30. — *P. Moëssard*, *Barbier* et *E. Lucas*. Caustique de la parabole, etc.; 1866, 21-31. — *E. Bour*, 1867, 153. — *J. Moutier*, Sur la diacaustique d'une surface plane; 1875, 128-130. *E. Laguerre*. Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, etc.; 1883, 16-34. — *H. Laquière*. Construction géométrique des caustiques par réflexion; 1883, 74-76. — *E. Laguerre*, Anticaustiques par réfraction de la parabole, etc.; 1885, 5-16; etc. Enfin, d'autres indications qu'il resterait à emprunter à différents Recueils mathématiques.

J'estime cependant que l'utilisation des renseignements ci-dessus et de ceux qui ont été déjà fournis (t. I, p. 190, et t. II, p. 208) donnera les éléments nécessaires à l'établissement de la bibliographie demandée. H. Brocard.

50. (H. Laurent). — *Deuxième réponse*. — Nous avons reçu de M. Ceretti (Rieti) une réponse complète à la question 50, que nous regrettons de ne pouvoir insérer à cause de son étendue, d'autant plus que la Note de Catalan, t. I, p. 76, ne répondait pas à la question; nous la signalerons si elle paraît ailleurs.

La Rédaction.

52. (A. Boutin). — M. E. Maillet nous envoie, comme ré-

ponse à cette question qui est un sujet d'étude, un fort intéressant Mémoire qu'il vient de publier à Toulouse (*Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, 9e série, t. VII, année 1895). La Rédaction.

57. (Aurelio Lugli). — Cette question se présente trop naturellement dans l'étude des intéressantes propriétés des nombres $(n)_1$, $(n)_c$, formés de n chiffres 1 ou de n chiffres c, pour qu'elle n'ait pas déjà sollicité depuis longtemps l'attention et la curiosité de plusieurs chercheurs. Il est juste de remonter jusqu'à Ibn-el-Banna de Maroc et à d'autres mathématiciens arabes pour les premières tentatives de décomposition de ces nombres (voir l'*Arithmétique amusante* d'Ed. Lucas, p. 63-69). Après l'indication bibliographique citée dans l'énoncé (t. I, p. 22), il convient de rappeler qu'une solution partielle, ou plutôt l'exposition de l'état de cette question, a été donnée par Ed. Lucas (*J. E.*; 1886, p. 160). A cette date, il a ajouté à la liste publiée par W. Loof (*Archives de Grunert*; 1851, p. 54) et par Reuschle (*Neue zahlentheoretische Tabellen*, 1856) les décompositions de $(17)_1$ et de $(29)_1$. Celle de $(17)_1$, entre autres, venait d'être obtenue par M. Le Lasseur (voir *loc. cit.* et *M.*, IV, 1884, p. 38; VI, 1886, p. 153; VII, 1887, p. 73-75).

Je ne sais trop si la recherche d'une méthode de décomposition des nombres $(n)_1$, lorsque n est un nombre premier, aurait quelques chances de réussite. Il n'y a pas à se dissimuler l'énorme difficulté de cette investigation.

Le tableau de ces décompositions, s'il pouvait être dressé pour toutes les valeurs de n, renfermerait d'ailleurs tous les nombres premiers et tous les nombres impairs, à l'exclusion des multiples de 5, ce qui revient à dire qu'un nombre impair quelconque, non terminé par 5, divise, nécessairement, un nombre $(n)_1$ (théorème de Plateau). On parviendrait donc, théoriquement, à résoudre la question proposée, en essayant la division d'un groupe indéfini de chiffres 1 par la suite naturelle des nombres impairs non terminés par 5. On pourrait former un tableau où les diviseurs seraient : 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27,...; les valeurs de n : 6, 9, 2, 6, 16, 13, 6, 18, 27,... les nombres de chiffres du quotient : 5, 8, 1, 4, 14, 11, 4, 16, 24, ...

Les quotients étant impairs, et non terminés par 5, sont donc aussi des éléments du même tableau, mais ils ne sont pas nécessairement des nombres premiers, de sorte que cette recherche ne paraît pas avoir grande chance d'aboutir. Mais, tel qu'il est et bien qu'il réponde incomplètement à la question, ce tableau donnerait lieu à des remarques nouvelles, comme j'ai eu l'occasion de le reconnaître, en reprenant diverses recherches arithmétiques commencées au *P. M. S.* 1892, 25-27, 89-93, 114-119. Je n'en donnerai pas ici le détail, qui sera mieux à sa place dans le journal précité ou dans un Recueil analogue, mais il y en a une, notamment, que j'ai signalée en 1892, et dont M. Laisant m'a communiqué une élégante démonstration; elle est relative aux valeurs de n, puissances de 3. Lorsque $n = 3^p$, le nombre $(n)_1$ est divisible par n, et le quotient est formé de groupes de $(p - 2)$ chiffres dont la différence, jusqu'à une certaine limite, est le nombre $(3^{p-1})_1$. Je ferai également observer que les fractions décimales périodiques peuvent être considérées comme des variétés de nombres à chiffre unique, et que cette façon de les envisager peut donner un moyen assez curieux de déterminer les chiffres de la période correspondant à une fraction $\frac{1}{2k+1}$, car on les obtient dans leur ordre inverse. (Voir *P. M. S. loc. cit.*).

H. Brocard.

59. (Laussedat). — La plus ancienne invention d'appareil enregistreur en Météorologie paraît être celle de l'anémomètre. Voici, par exemple, ce que je trouve à ce sujet dans le *Dictionnaire raisonné de Physique*, de J. Brisson (1800) : « Wolf, Poleni et Pitot ont donné chacun un anémomètre de leur invention. Mais on n'a rien imaginé de plus ingénieux et plus complet en ce genre que l'anémomètre dont le ci-devant comte d'Ons-en-Bray a donné la description et les figures dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1734, p. 123 et suiv. » Brisson ajoute : « On trouve aussi dans les *Transactions philosophiques* la description d'un anémomètre qui consiste en une plaque mobile sur le limbe gradué d'un quart de cercle. Le vent est supposé souffler perpendiculairement contre cette plaque mobile, et sa force est indiquée par le nombre des degrés qu'il lui fait parcourir. » L'anémomètre imaginé par d'Ons-en-Bray a été réellement construit; il en existe un spécimen, peut-être unique, dans les collections du Conservatoire national des Arts

et Métiers. D'après la description de l'inventeur (*loc. cit.* p. 123-134, 6 planches), l'appareil enregistrerait sur le papier la direction du vent pendant les 24 heures, avec ses variations de vitesse ou d'intensité.

H. Brocard.

71. (G. Oltramare). — *Troisième réponse.* — Voici une solution plus générale que la solution que j'ai donnée t. I, p. 244. Si $m = \frac{a - t^3}{6(k^2 - k'^2)}$, on a :

$$(m + k)^3 + (m - k)^3 - (m + k')^3 - (m - k')^3 + t^3 = a.$$

Remarque. — Pour que m soit entier, quel que soit a, il faut choisir k et k', et cela suffit, de telle sorte que les $6(k^2 - k'^2)$ premiers cubes donnent pour restes à $6(k^2 - k'^2)$, dans un certain ordre, les $6(k' - k'^2)$ premiers nombres. Par exemple $k = 1$, $k' = 0$ donnent une solution. En effet, les 6 premiers cubes donnent pour restes à 6, dans l'ordre naturel, les 6 premiers nombres. Par suite, si $a = 6\alpha + \alpha_1$, on devra prendre $t = 6\theta + \alpha_1$, θ étant une nouvelle variable arbitraire, et l'on aura dès lors

$$(m + 1)^3 - m^3 + (m - 1)^3 + (6\theta + \alpha_1)^3 = a$$

avec

$$m = \frac{6\alpha + \alpha_1 - (6\theta + \alpha_1)^3}{6}.$$

Ces deux formules donnent une infinité de décompositions quel que soit a, puisque θ est arbitraire. Si l'on pouvait déterminer d'autres systèmes de valeurs de k et k', conformément à la remarque, on obtiendrait de ce fait de nouvelles séries de solutions.

P.-F. Teilhet.

77. (G. Oltramare). — *Quatrième réponse.* — La solution du *J. E.* de M. Vuibert, dont on parle t. II, p. 209, est reproduite dans les *Exercices d'Arithmétique* de MM. Fitz-Patrick et Chevrel, p. 155 (Hermann, Paris, 1895).

A. Goulard.

100. (E. Lemoine). — *Deuxième réponse.* — Dans la réponse donnée à cette question (t. II, p. 152), je ne vois pas bien comment on démontre, dans les conditions demandées par l'auteur de la question, l'inégalité $DK_b (= BK_c) < CK_b$ [1], sur laquelle

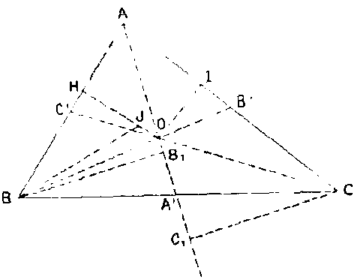
---

[1] On démontre facilement que $BK_c < CK_b$ en remarquant que $K_b K_c$ coupe CB au même point que B' C'; mais il est clair que cette démonstra-

repose la démonstration. Voici, en tous cas, une démonstration qui ne s'appuie que sur les théorèmes du premier Livre de Géométrie.

Catalan ayant démontré (*Théorèmes et problèmes de Géométrie*), par les théorèmes du premier Livre, la proposition suivante : *Dans un triangle* ABC (*fig.* 1), *les médianes* AA′, BB′, CC′ *se*

Fig. 1



coupent en un même point O *situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté correspondant, et à un plus grand côté correspond une plus petite médiane,* je me servirai de ce théorème dans ma démonstration. A′, B′, C′ sont les pieds des médianes.

Soit $AC > AB$; nous aurons $CC' > BB'$; donc $OC > OB$; et comme, dans un triangle OBC, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté, on a $\widehat{OBC} > \widehat{OCB}$.

On a aussi $\widehat{OBA} > \widehat{OCA}$; en effet, abaissons de B et de C les perpendiculaires BB_1, CC_1, sur AO, puis de O les perpendiculaires OI, OH sur AC et sur AB, enfin prenons sur HO (dans le sens HO) $HJ = OI$ et joignons BJ. Dans les triangles rectangles ABB_1, ACC_1, les côtés CC_1, BB_1 sont égaux; mais comme BA, hypoténuse du premier, est $<$ CA, hypoténuse du second, on a : $\widehat{BAO} > \widehat{CAO}$; on a d'ailleurs $BJ < BO < OC$; donc $\widehat{HBJ} > \widehat{ICO}$; *a fortiori* $\widehat{HBO} > \widehat{ICO}$, ou $\widehat{OBA} > \widehat{OCA}$, ce qui était à établir d'abord.

---

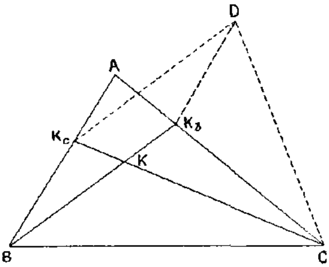
tion, toute simple qu'elle soit, emprunte des théorèmes du troisième Livre. Celle de M. G. Tarry répond exactement à l'esprit même de la question.

E. Lemoine.

Soient (*fig.* 2) K_b, K_c, K les pieds des symédianes sur BA, AC et l'intersection de BK_b avec CK_c.

Prenons K_bD égal et parallèle à BK_c; joignons K_cD, DC. Les symédianes étant, par définition, les symétriques des médianes par rapport à la bissectrice partant du même sommet, il suit (*fig.* 1) que les angles OBC, OBA étant respectivement plus grands que OCB, OCA, les angles KBC et KBA (*fig.* 2) sont

Fig. 2.



respectivement plus grands que KCB et KCA. Dans ces conditions on ne peut avoir $BK_b = CK_c$. En effet, si ces deux lignes sont égales, les deux triangles BCK_c, CBK_b, dans lesquels on a un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun donnent DK_b ($= BK_c$) $< CK_b$, d'où $\widehat{K_bDC} > \widehat{K_bCD}$ et, comme $\widehat{K_cBK_b} > \widehat{ACK_c}$, $\widehat{K_bDK_c} > K_bCK_c$. Ajoutons membre à membre, il vient $\widehat{K_bDC} + \widehat{K_bDK_c} > \widehat{K_bCD} + \widehat{K_bCK_c}$ ou $\widehat{K_cDC} > \widehat{K_cCD}$, d'où $CK_c > DK_c$ ou $CK_c > BK_b$.

On conclut de tout cela que, si deux côtés AB *et* AC *sont inégaux*, les deux symédianes correspondantes ne peuvent être égales, et le théorème est démontré.

Remarques. — Le même mode de démonstration par l'absurde peut servir à prouver très simplement que, si deux bissectrices BK_b, CK_c sont égales, le triangle est isoscèle. En effet, supposons $AC > AB$, puisque $B > C$, $\widehat{KBC}$ et $\widehat{KBA}$ seront respectivement plus grands que $\widehat{KCB}$ et $\widehat{KCA}$, d'où $CK_c > DK_c$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Cette démonstration est plus courte et plus élégante que celle qui est donnée par Catalan (*loc cit.*).

Notre démonstration du théorème de la question **100** n'est pas évidemment très simple, mais, comme nous n'utilisons que les propositions du premier Livre, elle remplit, et au delà, le désir que nous avait d'ailleurs exprimé l'auteur de cette question, de voir une démonstration géométrique ne s'appuyant que sur les propositions des deux premiers Livres. Il est vrai que les théorèmes qui peuvent se démontrer avec ces seules ressources sont assez rares et assez délicats à établir; il n'y en a que très peu dans les Exercices de Catalan (*loc. cit.*); c'est un chapitre qu'il serait fort intéressant d'augmenter. G. TARRY.

108. (*Rosace*). — *Troisième réponse.* — Voir, dans les *Publications de l'Institut grand-ducal de Luxembourg*, 1893, t. XXII, un Mémoire de M. Eug. Ferron, intitulé : *Essai d'une Théorie mathématique sur les fractures terrestres et les diaclases artificielles*, p. 28-50, 1 pl. Une Note d'Ed. Roche, sur la variation de la pesanteur à l'intérieur de la Terre, et un intéressant Mémoire du même géomètre sur l'état intérieur du globe terrestre, publiés dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier*, 1855, t. III, p. 107-125, et 1881, t. X, p. 221-264, doivent, nous semble-t-il, être ajoutés aux indications bibliographiques déjà données. H. BROCARD.

109. (IVANOFF.) — NOTE. — On sait que l'on a, en général,

$$\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{x}=\frac{2x+3}{6}\sqrt{x}+\alpha_x,$$

α_x décroissant quand x augmente, et restant compris entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$.

Pour l'objet de la question, il est commode d'exprimer cette somme des racines carrées des nombres impairs successifs en fonction de $\left(x+\frac{5}{2}\right)$. On y arrive facilement en posant

$$\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\alpha_x=\mathrm{A}\left(x+\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\mathrm{B}\left(x+\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\beta_x;$$

en développant le second membre, on trouve $\mathrm{A}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{B}=-\frac{3}{4}$ et l'on voit que, de même que α_x, β_x est positif et décroît quand x augmente; il reste compris entre $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{12}$.

Il résulte de là que l'on a

$$
(1)\quad \begin{cases}
\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{x} > \frac{1}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}\left(x+\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} \\
\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{x} < \frac{1}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}\left(x+\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}.
\end{cases}
$$

Cela posé, dans les premiers membres des inégalités de la question **109**, prenons les racines carrées elles-mêmes, au lieu de leurs parties entières, et mettons $\sqrt{\frac{p}{2}}$ en facteur; nous aurons à considérer l'expression

$$\sqrt{\frac{p}{2}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{4m-1}\right);$$

mais, de $p = 8m+3$, il résulte $4m-1 = \frac{p}{2}-\frac{5}{2}$, et cette expression devient

$$\sqrt{\frac{p}{2}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{\frac{p}{2}-\frac{5}{2}}\right).$$

En se servant alors des formules (1), on trouve les deux limites

$$\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{p}{2}},$$

et l'on peut écrire

$$
(2)\quad \begin{cases}
\sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{\frac{3p}{2}}+\sqrt{\frac{5p}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{4m-1}{2}p} > \frac{2p^2-9p}{24}+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}, \\
\sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{\frac{3p}{2}}+\sqrt{\frac{5p}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{4m-1}{2}p} < \frac{2p^2-9p}{24}+\frac{2}{9}\sqrt{\frac{p}{2}}.
\end{cases}
$$

Si, dans la dernière de ces inégalités (2), on remplace le terme $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{p}{2}}$ par la quantité $\frac{p+6}{24}$, qui est toujours plus grande, son second membre devient $\frac{2p^2-9p}{24}+\frac{p+6}{24} = \frac{(p-1)(p-3)}{12}$.

On a donc

$$\sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{\frac{3p}{2}}+\sqrt{\frac{5p}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{4m-1}{2}p} < \frac{(p-1)(p-3)}{12}$$

et cette inégalité subsiste *a fortiori* si l'on ne fait la somme que des parties entières des racines carrées qui en composent le premier membre, ce qui démontre la seconde inégalité de la question. Considérons maintenant la première des inégalités (2); en ne prenant que les parties entières des racines carrées, on diminue chaque terme du premier membre d'une quantité moindre que 1, et, comme il y a $2m$ termes, on diminue en somme ce premier membre d'une quantité moindre que $2m$; si donc on diminue en même temps le second membre de $2m$, l'inégalité ne sera pas détruite. On a, par suite, en tenant compte de ce que $2m = \frac{p-3}{4}$ et, en supprimant le terme positif $\frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}$,

$$\mathrm{E}\sqrt{\frac{p}{2}} + \mathrm{E}\sqrt{\frac{3p}{2}} + \ldots + \mathrm{E}\sqrt{\frac{4m-1}{2}p} > \frac{2p^2 - 15p + 18}{24}$$

$$= \frac{\left(p - \frac{3}{2}\right)(p-6)}{12};$$

en diminuant encore le second membre de $\frac{p+4}{24}$, on obtient la forme un peu plus simple

$$\mathrm{E}\sqrt{\frac{p}{2}} + \mathrm{E}\sqrt{\frac{3p}{2}} + \mathrm{E}\sqrt{\frac{5p}{2}} + \ldots + \mathrm{E}\sqrt{\frac{4m-1}{2}p} > \frac{(p-1)(p-7)}{12}.$$

Dans l'énoncé de la question **109**, il y a $\frac{(p-1)(p-5)}{12}$, limite plus rapprochée que la précédente; cela revient à admettre que les quantités négligées en prenant les parties entières des racines carrées ne surpassent pas en moyenne $\frac{1}{2}$, ou que leur somme ne surpasse pas m $\left(\text{plus exactement } m - \frac{1}{24} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}\right)$; des vérifications numériques semblent en effet indiquer que c'est vrai; mais je n'ai pas réussi à le démontrer.

Je ne crois pas que la restriction de l'énoncé, que $8m + 3$ doit être un nombre premier, soit nécessaire. C. Moreau.

130. (Haton de la Goupillière.) — Soient x, y, z les coordonnées d'un point m, invariablement lié à un axe A : l'axe A coïncidant avec l'axe Oz. Si l'axe A tourne d'un angle α autour

de O, dans le plan xOz, le point m vient en un point m' qui a pour coordonnées

$$x' = z \sin\alpha + x \cos\alpha, \qquad y' = y, \qquad z' = z \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Supposons maintenant que le plan xOz soit enroulé sur un cylindre de révolution de rayon r, ayant Oz pour génératrice : l'axe A se transforme en une hélice, et je supposerai qu'une normale au plan xOz a pour transformée une normale de même longueur au cylindre ; l'axe du cylindre étant pris pour axe des z_1, le point m_1, transformé de m', a pour coordonnées

$$x_1 = (y' + r) \cos \frac{x'}{r}, \qquad y_1 = (y' + r) \sin \frac{x'}{r}, \qquad z_1 = z'$$

ou

$$x_1 = (y + r) \cos \frac{z \sin\alpha + x \cos\alpha}{r},$$

$$y_1 = (y + r) \sin \frac{z \sin\alpha + x \cos\alpha}{r}, \qquad z_1 = z \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Si x, y, z sont fonctions d'un même paramètre, x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées d'un point quelconque de la courbe (m_1) transformée de (m). Ces formules résolvent la question proposée, si l'on admet dans l'enroulement d'un toron l'hypothèse de déformation d'où elles dérivent. ERNEST DUPORCQ.

136. (*Alauda*). — *Deuxième réponse.* — Voici, en coordonnées normales, une forme symétrique de l'équation de la droite de Simson (ou de Wallace) :

$$(1) \qquad \sum \frac{ax(b\nu - c\mu)}{\lambda - \mu\cos C - \nu\cos B} = 0.$$

Cette équation renferme *trois* paramètres λ, μ, ν sous forme homogène, mais il est aisé de voir qu'elle ne change pas lorsqu'on remplace λ, μ, ν respectivement par $\lambda + Ka$, $\mu + Kb$, $\nu + Kc$; il n'y a donc, en définitive, qu'un seul paramètre. Si l'on veut avoir une forme de l'équation dans laquelle ne figure *explicitement* qu'un paramètre, il suffit d'assujettir λ, μ, ν à vérifier trois équations du premier degré, symétriques par rapport aux deux systèmes de lettres a, b, c; λ, μ, ν, et dans lesquelles figure un paramètre variable. En posant, *par exemple*, $\lambda + \mu + \nu = 0$,

$a\lambda + b\mu + c\nu = 1$, $a^2\lambda + b^2\mu + c^2\nu = \rho$, on obtient

$$\lambda = \frac{\rho - (b+c)}{(a-b)(a-c)}, \;\ldots,$$

et la substitution de ces valeurs dans l'équation (1) donne une équation *entièrement symétrique dépendant rationnellement du seul paramètre* ρ :

$$\sum ax \frac{\rho[b^2+c^2-a(b+c)]-(b+c)(b^2+c^2-a^2-bc)}{a(\cos C-\cos B)(a-\rho)+b(1+\cos B)(b-\rho)-c(1+\cos C)(c-\rho)} = 0.$$

Em. Borel.

ABC étant le triangle de référence, soient p, q, r les coordonnées du point P du cercle circonscrit; si $y = kz$ est l'équation de AP, p, q, r sont proportionnels à $-(b+ck)$, a, ak, et l'on trouve facilement l'équation suivante de la droite de Wallace

$$\begin{aligned} 0 = &-(b+ck)(1+k\cos A)(k+\cos A)x \\ &+(\cos B - k\cos C)(1+k\cos A)by - k(\cos B - k\cos C)(k+\cos A)cz. \end{aligned}$$

Remplaçant, dans cette équation, k par $\frac{q}{r}$, $b+ck$ par $-\frac{aq}{p}$ et tenant compte des relations

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}+\frac{\cos A}{q}\right) = \frac{1}{b}\left(\frac{\cos C}{r}-\frac{\cos A}{p}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{p}+\frac{\cos C}{q}\right),$$

il vient, tous calculs faits,

$$(1) \qquad \sum \frac{a^2 qr}{r\cos B - q\cos C}x = 0,$$

qui a une forme symétrique, mais qui contient les coordonnées p, q, r du point P; si l'on pose

$$\frac{\frac{1}{p}}{\sin(\varphi+\varphi_1)} = \frac{\frac{1}{q}}{\sin(\varphi+\varphi_2)} = \frac{\frac{1}{r}}{\sin(\varphi+\varphi_3)}$$

avec

$$\varphi_1 = \frac{B-C}{3}, \qquad \varphi_2 = \frac{4\pi + C - A}{3}, \qquad \varphi_3 = \frac{8\pi + A - B}{3},$$

on arrive, en remplaçant dans (1) $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ par les sinus qui leur sont proportionnels, à l'équation

$$(2)\quad ax\,\mathrm{tang}(\varphi+\varphi_1)+by\,\mathrm{tang}(\varphi+\varphi_2)+cz\,\mathrm{tang}(\varphi+\varphi_3)=0,$$

qui a une forme symétrique et ne contient en réalité que le seul paramètre φ.

Remarques. — L'équation de la parabole inscrite à ABC et dont le foyer est P est

$$\sqrt{a^2\sin(\varphi+\varphi_1)}+\sqrt{b^2\sin(\varphi+\varphi_2)}+\sqrt{c^2\sin(\varphi+\varphi_3)}=0.$$

L'axe de cette parabole a pour équation

$$\Sigma\,ax\,[\mathrm{cotg}(\varphi+\varphi_2)+\mathrm{cotg}(\varphi+\varphi_3)]=0.$$

WELSCH.

En écrivant que les projections du point $P(x, y, z)$ sur les côtés sont sur la droite $uX+vY+wZ=0$, on obtient

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{lll} & (y+x\cos C)v & +(z+x\cos B)w=0,\\ (x+y\cos C)u & & +(z+y\cos A)w=0,\\ (x+z\cos B)u & +(y+z\cos A)v & =0.\end{array}\right.$$

La condition de possibilité de ce système est

$$(y+z\cos A)(z+x\cos B)(x+y\cos C)\\ +(z+y\cos A)(x+z\cos B)(y+x\cos C)=0.$$

On a d'ailleurs $\frac{\sin A}{x}+\frac{\sin B}{y}+\frac{\sin C}{z}=0.$

Introduisons dans le système en u, v, w les trois quantités $\frac{\sin A}{x}=\lambda$, $\frac{\sin B}{y}=\mu$, $\frac{\sin C}{z}=\nu$, dont la somme est nulle. On réduit facilement les trois équations (1) aux deux suivantes :

$$\frac{1}{\lambda}(\nu\sin B\cos C-\mu\sin C\cos B)u=\frac{1}{\mu}(\lambda\sin C\cos A-\nu\sin A\cos C)v\\ =\frac{1}{\nu}(\mu\sin A\cos B-\lambda\sin B\cos A)w,$$

de sorte que la droite de Wallace a pour équation

$$\frac{\lambda X}{\nu\sin B\cos C-\mu\sin C\cos B}+\frac{\mu Y}{\lambda\sin C\cos A-\nu\sin A\cos C}\\ +\frac{\nu Z}{\mu\sin A\cos B-\lambda\sin B\cos A}=0.$$

En posant, puisque $\lambda+\mu+\nu=0$, $\lambda=\cos\varphi$, $\mu=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$, $\nu=\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)$, on aura, après quelques transformations,

$$\frac{X}{\sin(C-B)+\sqrt{3}\operatorname{tang}\varphi\sin A}+\frac{Y}{\sin(A-C)+\sqrt{3}\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)\sin B}$$
$$+\frac{Z}{\sin(B-A)+\sqrt{3}\operatorname{tang}\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)\sin C}=0,$$

ou
$$\frac{X}{b^2-c^2+a^2\sqrt{3}\operatorname{tang}\varphi}+\frac{Y}{c^2-a^2+b^2\sqrt{3}\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}$$
$$+\frac{Z}{a^2-b^2+c^2\sqrt{3}\operatorname{tang}\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)}=0.$$

A. Laronde.

La formule suivante semble répondre au *desideratum* exprimé, t. I, p. 174. Dans le système de coordonnées défini précédemment (coordonnées barycentriques), le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ a pour équation $\frac{\sin^2 P_1}{x}+\frac{\sin^2 P_2}{y}+\frac{\sin^2 P_3}{z}=0$, et la droite de Wallace correspondant à un point quelconque (x, y, z) de ce cercle est représentée par l'équation

(1) $\quad \Sigma X yz\,[(x+y+z)\cos P_1 - x\sin P_2\sin P_3]\sin P_1=0.$

On peut d'ailleurs exprimer x, y, z en fonction d'un paramètre variable φ. Soit, par exemple,

$$\rho x=\frac{\sin^2 P_1}{\sin(P_2-P_3)\cos(P_1-\varphi)},\qquad \rho y=\ldots,\qquad \rho z=\ldots.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtiendra l'équation de la droite de Wallace sous la forme demandée. On trouvera

$$\sum\frac{X(b^2-c^2)\cos(A-\varphi)}{a^2}$$
$$\times\left\{\cos A\left[\frac{b^3}{(c^2-a^2)\cos(B-\varphi)}+\frac{c^3}{(a^2-b^2)\cos(C-\varphi)}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{a^3\cos B\cos C}{(b^2-c^2)\cos(A-\varphi)}\right\}=0.$$

Remarque. — Les équations

$$(x+y+z)\cos P_1 - x\sin P_2 \sin P_3 = 0, \quad \ldots$$

représentent les côtés du triangle symétrique de $P_1P_2P_3$ par rapport au centre O. J. FRANEL (Zurich).

On sait que la droite de Simson (ou de Wallace) d'un point P du cercle circonscrit au triangle ABC passe par le point à l'infini inverse du point P', autre extrémité du diamètre PP', et réciproquement. Il en résulte que, si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées normales proportionnelles du point P, et y_1, y_2, y_3 celles du point P', il faut que les équations des droites de Simson, de P et de P', aient respectivement les formes suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{a X_1 y_1}{x_1} + \frac{b X_2 y_2}{x_2} + \frac{c X_3 y_3}{x_3} = 0, \\ &\frac{a X_1 x_1}{y_1} + \frac{b X_2 x_2}{y_2} + \frac{c X_3 x_3}{y_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

On exprime que le point P est sur le cercle circonscrit par les équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &x_1 = \frac{a}{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\beta-\gamma)}, \quad x_2 = \frac{b}{\sin(\beta+\varphi)\sin(\gamma-\alpha)}, \\ &x_3 = \frac{c}{\sin(\gamma+\varphi)\sin(\alpha-\beta)}, \end{aligned} \right.$$

où φ est un paramètre variable. De plus, il est facile de vérifier que le point P' a pour coordonnées

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &y_1 = \frac{a x_2 x_3}{x_2\cos\gamma - x_3\cos\beta}, \quad y_2 = \frac{b x_3 x_1}{x_3\cos\alpha - x_1\cos\gamma} \\ &y_3 = \frac{c x_1 x_2}{x_1\cos\beta - x_2\cos\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Des équations (2) et (3) on conclut que

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{a x_2 x_3}{x_1(x_2\cos\gamma - x_3\cos\beta)}, \quad \ldots,$$

ou si l'on substitue les valeurs de x_1, x_2, x_3 des équations (2), en omettant les facteurs superflus,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\beta-\gamma)}{a[b\cos C\sin(\gamma+\varphi)\sin(\alpha-\beta) - c\cos B\sin(\beta+\varphi)\sin(\gamma-\alpha)]}, \quad \ldots;$$

et l'on a par les équations (1) les équations définitives :

1° De la droite de Simson du point P,

$$\sum \frac{X_1 \sin(\alpha+\varphi)\sin(\beta-\gamma)}{b\cos\gamma\sin(\gamma+\varphi)\sin(\alpha-\beta)-c\cos\beta\sin(\beta+\varphi)\sin(\gamma-\alpha)}=0;$$

2° De la droite de Simson du point P′,

$$\sum \frac{[b\cos\gamma\sin(\gamma+\varphi)\sin(\alpha-\beta)-c\cos\beta\sin(\beta+\varphi)\sin(\gamma-\alpha)]a^2 X_1}{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\beta-\gamma)}=0.$$

Dans ces formules, α, β, γ désignent les angles du triangle ABC, a, b, c les côtés.

M. Lemoine a remarqué que les équations de ces droites deviennent illusoires, si l'on suppose le triangle équilatéral. Cette difficulté ne peut être levée par aucune transformation, car elle est la conséquence de la nature même de la question. Tant que le triangle a ses côtés inégaux, il peut y avoir sur la circonférence une origine fixe, à partir de laquelle on compte le paramètre φ. Dans le cas présent, cette origine est le foyer de la parabole de Kiepert, car les coordonnées de ce point sont $1:\sin(\beta-\gamma)$, $1:\sin(\gamma-\alpha)$, $1:\sin(\alpha-\beta)$, et alors $\varphi=0$; pour le point R de Steiner, φ est égal à $-\omega$ (ω est l'angle de Brocard), pour A, B, C il est respectivement égal à $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Mais lorsque le triangle devient équilatéral, en dehors des sommets A, B, C, il n'y a aucun point fixe sur la circonférence qu'on puisse prendre pour origine; car alors la parabole de Kiepert et les points de Steiner et de Tarry, etc. n'existent plus. La même particularité se présente pour les coordonnées générales d'un point du cercle circonscrit lorsque le triangle de référence est équilatéral. Par conséquent, il faut alors nécessairement prendre pour origine un des sommets A, B, C, ce qu'on aurait d'ailleurs pu faire aussi dans le cas général. En effet, soient O le centre de la circonférence, P un de ses points, en désignant l'angle AOP par ϑ et en comptant les ϑ à partir de A dans le sens ABC, on a pour les coordonnées du point P

$$\begin{aligned}
x_1 &= r[\cos\alpha+\cos(\vartheta+\beta-\gamma)] &&= -2r\sin(\tfrac{1}{2}\vartheta+\beta)\sin(\tfrac{1}{2}\vartheta-\gamma),\\
x_2 &= r[\cos\beta-\cos(\vartheta+\beta)] &&= 2r\sin(\tfrac{1}{2}\vartheta+\beta)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta,\\
x_3 &= r[\cos\gamma-\cos(\gamma-\vartheta)] &&= 2r\sin(\tfrac{1}{2}\vartheta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta.
\end{aligned}$$

En augmentant ϑ de 180° on en tire les coordonnées du point P′, autre extrémité du diamètre PP′,

$$y_1 = -2r\cos(\tfrac{1}{2}\vartheta + \beta)\cos(\tfrac{1}{2}\vartheta - \gamma),$$
$$y_2 = 2r\cos(\tfrac{1}{2}\vartheta + \beta)\cos\tfrac{1}{2}\vartheta, \qquad y_3 = 2r\cos(\tfrac{1}{2}\vartheta - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}\vartheta;$$

alors on obtient

$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\vartheta + \beta)\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\vartheta - \gamma), \qquad \frac{y_2}{x_2} = \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\vartheta + \beta)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta,$$
$$\frac{y_3}{x_3} = \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\vartheta - \gamma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

ou

$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\vartheta, \qquad \frac{y_2}{x_2} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\vartheta - \gamma), \qquad \frac{y_3}{x_3} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\vartheta + \beta).$$

On en conclut que les équations des droites de Simson des points P et P′ sont les suivantes

$$X_1 a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\vartheta + X_2 b \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\vartheta - \gamma) + X_3 c \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\vartheta + \beta) = 0$$

et

$$X_1 a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta + X_2 b \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\vartheta - \gamma) + X_3 c \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\vartheta + \beta) = 0.$$

Ces équations sont générales et, dans le cas d'un triangle équilatéral, deviennent

$$X_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\vartheta + X_2 \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\vartheta - 60^\circ) + X_3 \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\vartheta + 60^\circ) = 0,$$
$$X_1 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta + X_2 \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\vartheta - 60^\circ) + X_3 \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\vartheta + 60^\circ) = 0.$$

Remarque. — Le point $\dfrac{1}{\sin(\beta - \gamma)}, \ldots,$ origine des φ, est l'inverse du réciproque du point de Steiner. Le point diamétralement opposé a pour coordonnées $\dfrac{1}{\cos\alpha - 2\cos\beta\cos\gamma}, \ldots.$

Stoll (Bensheim).

Nous avions ces solutions depuis fort longtemps pour la plupart; nous ne les avons pas publiées plus tôt faute de place, et parce que nous voulions entrer dans quelques développements, extraits des solutions détaillées que nous avions, pour élucider complètement la question des droites de Wallace (dites *de Simson*). Quoique ce sujet ait été beaucoup étudié, la chose était utile, comme le prouve la lecture des réponses précédemment données (tome I, p. 174) et de celles-ci; il en ressort le fait assez exceptionnel — et qui n'avait pas été remarqué, croyons-nous, jusqu'ici — qu'il est impossible d'avoir l'équation *générale* des droites de Wallace sous forme complètement symétrique, en fonction d'un seul paramètre, *sans que cette* *forme devienne illusoire dans le cas où le triangle est équilatéral*. La diversité des formes obtenues dans ces réponses est curieuse.

LA RÉDACTION.

Remarque. — La droite de Wallace du point (x, y, z) a pour équation :

$$\sum \frac{(y + z\sin A)(z + y\sin A)}{a} x\xi = 0.$$

Niss.

138. (E. LEMOINE). — *Deuxième réponse.* — Voici, à l'égard des nombres 54 et 108, mentionnés dans les réponses déjà publiées (t. II, p. 102-103) une indication qui pourrait bien avoir quelque relation avec la question proposée. C'est que le double de 108, 216, est précisément égal à 6^3, dont l'égalité à la somme $3^3 + 4^3 + 5^3$ avait été remarquée par Platon. Voir *N. A.* 1866, 189 et 457-458. Voir aussi F. Hoefer, *Hist. des Math.*, 1874, 138-143, et F. Hultsch (*Z.* 1882, 41-60.) H. BROCARD.

133. (J. NEUBERG). — *Deuxième réponse.* — Consulter : Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*; 1891, énoncé du problème 429; Amiot, *Solutions raisonnées des problèmes de Géométrie*, p. 167; *J. E.* de M. Vuibert, 3e année, p. 134; *J. E.* de M. de Longchamps, 1886, p. 37, 137, 161, 281, où l'on trouve d'autres indications. La plupart des auteurs (Ed. Lucas, *Récréations mathématiques*, t. II; Catalan, *Théorèmes et problèmes*), qui ne citent qu'une construction, donnent la préférence à celle de Specht (*Cr.*, t. III) : la voici telle que je l'ai lue autrefois dans le premier ou dans le second volume du *Supplément au Manuel général de l'Instruction publique* (presque partout ailleurs on la donne moins simplement).

Sur la tangente en A on porte une longueur AC égale aux $\frac{13}{5}$ du rayon, et l'on joint OC; on prolonge le diamètre AB d'une longueur BD égale aux $\frac{3}{5}$ du rayon, et par le point D on mène la parallèle à OC jusqu'à sa rencontre en E avec le prolongement de AC; la longueur DE est sensiblement égale à celle de la circonférence O. On trouve, en effet,

$$\frac{DE}{R} = \frac{13\sqrt{146}}{25} = 2 \times 3,14159196\ldots.$$

Il est clair qu'on peut trouver une infinité de constructions, de plus en plus approchées, et aussi probablement de plus en plus compliquées, par exemple en réduisant π ou π^2 en fraction continue; mais il me paraît difficile qu'aucune d'elles réunisse plus d'avantages que celle de Specht. A. GOULARD.

166. (E. CESÀRO). — *Deuxième réponse.* — M. Rabut (p. 32) n'a pas répondu à une question *plus générale* que la mienne, car une déformation *élastique* (infiniment petite) ne satisfait aux lois de l'homographie que dans les régions infinitésimales de l'espace. Dans une région finie, les constantes de l'homographie varient d'un point à l'autre, et cette variation est régie, comme on sait, par des équations aux dérivées partielles du second ordre. De plus, M. Rabut parle de *surfaces*, et j'ai demandé à connaître des *courbes;* j'aurais même grand intérêt à connaître *une seule ligne à double courbure* jouissant de la propriété énoncée. E. CESÀRO (Naples).

Si l'on remplace, comme le fait M. Ch. Rabut (1895, p. 32), les quantités x_3, y_3, z_3 dans l'équation $F(x_3, y_3, z_3 + K) = 0$, par trois fonctions linéaires homogènes des trois expressions $L\frac{x}{u}$, $L\frac{y}{u}$, $L\frac{z}{u}$, on ne voit pas ce que devient la transformation homographique, car alors il faudrait exprimer que les deux premières fonctions conservent la même valeur et que la troisième varie de K. Du reste, cela revient à dire que toutes les surfaces auto-homographiques sont représentées par l'équation $F(x_1, y_1, z_1) = 0$, la fonction F ne changeant pas quand on y remplace x_1, y_1, z_1 par $\frac{mx_1}{q}$, $\frac{ny_1}{q}$, $\frac{pz_1}{q}$, comme cela ressort immédiatement des équations même de l'homographie, ce qui n'apprend rien de plus.

Une ligne auto-homographique sera représentée par deux équations analogues, les constantes m, n, p, q conservant les mêmes valeurs dans les deux équations.

On peut se faire une idée de la figure obtenue par transformation exponentielle dans le cas d'une surface : c'est, par exemple, celle qui résulterait de l'enroulement sur un cylindre quelconque d'une sorte de bourrelet qui ne serait astreint, ni à suivre une hélice, ni à avoir une section constante, mais devrait seulement satisfaire à cette condition, que deux spires successives pourraient être amenées à coïncider, par une translation parallèle aux génératrices du cylindre. Une ligne tracée sur cette figure, de façon que la portion de cette ligne appartenant à une sphère se reproduise dans la même position relative sur les autres, sera la transformée exponentielle d'une ligne auto-homographique.

Avant d'examiner ce que sont les figures primitives, supposons que les quantités $L\frac{m}{q}$, $L\frac{n}{q}$, $L\frac{p}{q}$, tendent vers zéro, en conservant toujours entre elles les mêmes rapports (¹); la transformation deviendra continue. La surface obtenue par transformation exponentielle se réduira alors à un cylindre et la transformée exponentielle d'une ligne auto-homographique à une droite.

Et, de même qu'un cylindre est le lieu géométrique des positions d'une droite qui se déplace en restant parallèle à elle-même, la surface auto-homographique la plus générale sera le lieu des positions d'une ligne auto-homographique quelconque se déplaçant d'une façon quelconque, les paramètres de l'homographie restant constants. De même aussi que $F(x - az, y - bz) = 0$ est l'équation générale des cylindres dont les génératrices sont parallèles à la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$, et ont pour équations : $x = az + p$, $y = bz + q$, avec la condition $F(p, q) = 0$, l'équation générale des surfaces auto-homographiques lieu des courbes auto-homographiques dont les équations sont : $x = Pz^A$, $y = Qz^B$, avec la condition $F(P, Q) = 0$, sera la suivante :

$$F\left(\frac{x}{z^A}, \frac{y}{z^B}\right) = 0,$$

ou, avec les notations de M. Rabut,

$$\Phi\left\{\frac{x^{\frac{1}{L\frac{m}{q}}}}{z^{\frac{1}{L\frac{p}{q}}}}, \frac{y^{\frac{1}{L\frac{n}{q}}}}{z^{\frac{1}{L\frac{p}{q}}}}\right\} = 0.$$

(¹) Autrement dit, supposons que K tende vers zéro, et non pas qu'il soit nul, car alors il n'y aurait plus de transformation.

L'équation $x^\alpha y^\beta z^\gamma u^\delta =$ const. de MM. Klein et Lie ne représente, comme le fait remarquer M. Rabut, qu'un cas très particulier des surfaces admettant un groupe continu d'homographies. Les surfaces qu'elle donne sont aux surfaces générales ce que les plans sont aux cylindres. Nous pouvons actuellement nous représenter ce qu'est une surface auto-homographique, dans le cas où les paramètres m, n, p, q ont des valeurs finies. On obtiendra une telle figure, en enroulant sur une surface Φ, un bourrelet de forme quelconque, astreint seulement à la condition qu'on puisse passer d'une spire à la suivante par une transformation homographique, les paramètres étant tels que les quantités $\mathrm{L}\frac{m}{q}$, $\mathrm{L}\frac{n}{q}$, $\mathrm{L}\frac{p}{q}$ soient proportionnelles aux quantités analogues correspondant à la fonction Φ. D'après ce que nous avons dit ci-dessus, on voit que l'on peut concevoir de même des lignes auto-homographiques, dans le cas où les paramètres ont des valeurs finies.

WELSCH.

177. (G. DE ROCQUIGNY). — L'examen attentif des papiers laissés par Ed. Lucas a conduit à cette conclusion, que, contrairement à l'espoir du premier moment, il serait très difficile de publier une suite à la *Théorie des nombres*, dont le Tome I seul a paru. Toutefois, les notes de l'auteur, certains passages de sa correspondance, et la réimpression de quelques Mémoires de lui, assez peu connus, formeraient un Volume intéressant pour ceux qui cultivent l'Arithmétique supérieure. C'est là un projet, qui n'est pas complètement abandonné, mais dont la réalisation ne saurait être prochaine, quoi qu'il arrive.

H. DELANNOY, C.-A. LAISANT, E. LEMOINE.

183. (H. DELLAC). — *Deuxième réponse.* — Soit n le nombre des chiffres du carré N^2. Considérons les nombres

$\mathrm{A} = 10^{n-1} - 1$, $\mathrm{B} = 10^{n-2} - 1$, $\mathrm{C} = 10^{n-3} - 1$, $\ldots$, 999, 99, 9,

ainsi que les plus grands carrés contenus dans ces nombres

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2, \quad \ldots, \quad 31^2, \quad 9^2, \quad 3^2;$$

désignons par s la somme de ces carrés

$$s = a^2 + b^2 + c^2 + + \ldots + 31^2 + 9^2 + 3^2,$$

et appelons $\mathrm{P_N}$ le nombre demandé des caractères d'imprimerie nécessaires pour imprimer une Table de multiplication étendue jusqu'à $N \times N$; on trouve la formule suivante où la lettre E indique, comme d'habitude, la partie entière de la fraction devant laquelle elle est écrite,

$$P_N = nN^2 - s - 2\left[\sum_{K=a+1}^{K=N} E\left(\frac{A}{K}\right) + \sum_{K=b+1}^{K=N} E\left(\frac{B}{K}\right) + \ldots + \sum_{K=10}^{K=N} E\left(\frac{99}{K}\right) + \sum_{K=4}^{K=N} E\left(\frac{9}{K}\right)\right].$$

On démontre cette formule en constatant qu'elle est exacte pour les faibles valeurs de N et en faisant voir qu'elle est vraie pour N si elle l'est pour $N-1$. Pour ce dernier objet, il y a deux cas à examiner.

1° $(N-1)^2$ et N^2 ont le même nombre de chiffres.

Si l'on écrit les deux formules pour N et $N-1$, en observant qu'alors n est le même, ainsi que A, B, C, ... et, par suite, la somme s, on a

$$P_N = nN^2 - s - 2\left[\sum_{K=a+1}^{K=N} E\left(\frac{A}{K}\right) + \sum_{K=b+1}^{K=N} E\left(\frac{B}{K}\right) + \ldots\right],$$

$$P_{N-1} = n(N-1)^2 - s - 2\left[\sum_{K=a+1}^{K=N-1} E\left(\frac{A}{K}\right) + \sum_{K=b+1}^{K=N-1} E\left(\frac{B}{K}\right) + \ldots\right],$$

d'où, en faisant la différence,

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) - 2\left[E\left(\frac{A}{N}\right) + E\left(\frac{B}{N}\right) + E\left(\frac{C}{N}\right) + \ldots\right].$$

2° $(N-1)^2$ a un chiffre de moins que N^2, c'est-à-dire $n-1$. Les formules donnant P_N et P_{N-1} s'écriront

$$P_N = nN^2 - s - 2\left[E\left(\frac{A}{N}\right) + \sum_{K=b+1}^{K=N} E\left(\frac{B}{K}\right) + \sum_{K=c+1}^{K=N} E\left(\frac{C}{K}\right) + \ldots\right],$$

$$P_{N-1} = (n-1)(N-1)^2 - [s - (N-1)^2]$$
$$- 2\left[\sum_{K=b+1}^{K=N-1} E\left(\frac{B}{K}\right) + \sum_{K=c+1}^{K=N-1} E\left(\frac{C}{K}\right) + \ldots\right].$$

Dans la première de ces formules, le premier terme de la quantité entre crochets se réduit à $E\left(\frac{A}{N}\right)$, car il est clair que, dans ce cas, a est égal à $N - 1$; dans la seconde formule, le nombre A ne doit évidemment pas intervenir ni, par conséquent, le carré $a^2 = (N-1)^2$ qui alors doit être retranché de la somme s. En faisant la différence de ces valeurs de P_N et de P_{N-1}, on trouve, comme dans l'autre cas,

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) - 2\left[E\left(\frac{A}{N}\right) + E\left(\frac{B}{N}\right) + E\left(\frac{C}{N}\right) + \ldots\right].$$

Cela posé, si l'on se reporte par la pensée aux Tables de multiplication étendues jusqu'à $(N-1)(N-1)$ et jusqu'à $N \times N$, il est visible que la différence entre ces deux Tables est constituée par les nombres qui se trouvent dans la dernière rangée et dans la dernière colonne de la Table relative à N et que la différence entre P_N et P_{N-1} est égale au nombre total des chiffres de ces $2N-1$ nombres; or le plus grand d'entre eux, N^2, a n chiffres et les autres, qui sont égaux deux à deux, sont les $N-1$ premiers multiples de N; on peut donc écrire

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) - 2(R_1 + 2R_2 + 3R_3 + \ldots),$$

R_i représentant combien il y a de multiples de N qui ont i chiffres de moins que N^2 Mais, d'après la définition des nombres A, B, C, ..., on reconnaît facilement que l'on a

$$R_1 = E\left(\frac{A}{N}\right) - E\left(\frac{B}{N}\right), \qquad R_2 = E\left(\frac{B}{N}\right) - E\left(\frac{C}{N}\right),$$
$$R_3 = E\left(\frac{C}{N}\right) - E\left(\frac{D}{N}\right), \quad \ldots;$$

il vient alors

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) - 2\left\{\left[E\left(\frac{A}{N}\right) - E\left(\frac{B}{N}\right)\right] + 2\left[E\left(\frac{B}{N}\right) - E\left(\frac{C}{N}\right)\right] + 3\left[E\left(\frac{C}{N}\right) - E\left(\frac{D}{N}\right)\right] + \ldots + hE\left(\frac{M}{N}\right)\right\},$$

ou, en réduisant,

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) - 2\left[E\left(\frac{A}{N}\right) + E\left(\frac{B}{N}\right) + E\left(\frac{C}{N}\right) + \ldots\right],$$

expression identique à celle qui a été trouvée précédemment au moyen de la formule que l'on se proposait de démontrer et qui est ainsi établie d'une manière générale. C. Moreau.

190. (H. Lez.) — *Troisième réponse.* — Plus généralement

et sans artifice, on peut éliminer φ entre les équations

$$a\cos\varphi + b\cos 2\varphi = c, \qquad a'\sin\varphi + b'\sin 2\varphi = c'.$$

Soit $\cos\varphi = t$; les équations proposées deviennent

$$at + b(2t^2 - 1) = c, \qquad \sqrt{1 - t^2}\,(a' + 2b't) = c'$$

De la première on tire t, que l'on porte dans la deuxième.

A. Goulard.

On peut remarquer que ce calcul direct est assez laborieux à cause des radicaux et, en tous cas, peu élégant. La Rédaction.

201. (Artemas Martin). — *Troisième réponse.* — On trouve aussi la limite demandée dans l'essai de Spence « Transcendantes logarithmiques », p. 26 (*voir* réponse 337, t. II, p. 183). L'auteur de cet essai annonce également des méthodes pour faire la somme de

$$\frac{x^2}{1^n.2^m} - \frac{x^3}{2^n.3^m} + \frac{x^4}{3^n.4^m} - \ldots,$$

$$\frac{x^3}{1^n.2^m.3^l} - \frac{x^4}{2^n.3^m.4^l} + \frac{x^5}{3^n.4^m.5^l} - \ldots,$$

et de beaucoup d'autres séries. A.-S. Ramsey (Édimbourg).

224. (E.-N. Barisien). — *Deuxième réponse.* — La proposition vérifiée par M. Barisien pour l'ellipse et la cycloïde se généralise dans les termes suivants : « L'aire comprise entre les podaires respectives, par rapport à un même point du plan, d'une courbe fermée quelconque et de sa développée, est indépendante du choix de ce point et égale à l'aire de la courbe proposée. » La démonstration qui suit repose sur ce lemme évident, base de la théorie des planimètres : « L'aire balayée par une droite limitée de longueur l (constante ou non) a pour expression $\int l\sin V\,ds$, $\sin V\,ds$ étant le déplacement élémentaire du milieu de la droite, estimé normalement à la direction de cette droite. »

Soient maintenant MN, MP la tangente et la normale en M à la courbe donnée, sur lesquelles nous abaissons du pôle O les perpendiculaires ON, OP : les droites égales OM, NP se coupent en leur milieu I, et ce milieu décrit une courbe homothétique à la courbe donnée, dont la tangente en I est parallèle à MN, par conséquent également inclinée sur OM et NP. Il en résulte, d'après le lemme, que les droites OM, NP balayent des aires équivalentes. Or la première balaye l'aire de la courbe donnée, la seconde l'aire comprise entre la podaire de cette courbe et celle de sa développée. Donc, etc. Ce théorème a un beau corollaire : « L'aire comprise entre deux courbes fermées parallèles n'est pas altérée par leur transformation podaire, quel que soit le point du plan pris pour pôle (¹). »

Cette aire est donc un *invariant intégral* de la transformation podaire et des divers groupes qu'elle peut engendrer. Ces groupes, qui sont tous de contact, ont déjà un invariant différentiel intéressant qui ne paraît pas avoir été signalé : l'angle $v = V$ formé par la tangente avec le rayon vecteur issu du pôle. Aussi est-il généralement très commode, dans les questions relatives aux podaires, de prendre pour coordonnées v et V, au lieu de r et θ ; v est l'angle de la tangente avec le rayon vecteur pour la courbe primitive, V l'angle analogue pour la transformée. En considérant le cercle comme courbe parallèle à un point, on obtient de suite, au moyen du corollaire ci-dessus, l'expression de l'aire de sa podaire par rapport à un point quelconque ; c'est la somme des aires du cercle donné et de celui qui a pour diamètre la distance de son centre au pôle. On peut faire, du même principe, quantité d'applications analogues qu'il suffit d'avoir signalées.

Ch. Rabut.

240. (P. Girardville). — *Deuxième réponse.* — Un instrument donnant les résultats dont parle la question 240 rendrait de très grands services au point de vue de l'art militaire, comme télémètre. En topographie il remplacerait avantageusement les lunettes stadimétriques, tant par sa portée plus grande que par les facilités résultant du fait de ne pas être obligé de transporter une mire au point dont on veut mesurer la distance. Il serait notamment utile dans un lever d'itinéraire pour relever, de part et d'autre du chemin suivi, des points importants. On fera remarquer, en raison des circonstances très défavorables pour les observations où sont toujours en campagne les télémètres, qu'un instrument insuffisant à ce point de vue particulier pourrait néanmoins rendre des services en topographie.

Stratège.

(¹) Bien entendu, les deux transformées ne sont pas parallèles ; elles sont conchoïdes l'une de l'autre par rapport au pôle.

245. (E. Cesàro). — *Deuxième réponse*. — Remarques relatives aux réponses de MM. Franel et Kluyver (1895, p. 153-157). — La formule (1) de M. Franel est identique à la suivante que j'ai posée comme question (*T. M.*, 1893, p. 54) :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\theta)^{s-2}\sin s\theta}{e^{2\pi\tang\theta}-1}\,d\theta.$$

Je trouve encore, dans mes notes, entre autres, les formules

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} + i2^{s-1}\int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{\pi y}+1}\left(\frac{1}{(1-yi)^s} - \frac{1}{(1+yi)^s}\right)$$

et $$(s-1)\zeta(s) = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2}+yi)^{1-s}}{(e^{\pi y}+e^{-\pi y})^2}\,dy,$$

où les logarithmes qui interviennent dans la définition des exponentielles ont leurs valeurs principales. Ces formules, dont la dernière est remarquable à cause de sa simplicité, se démontrent aisément à l'aide du théorème de Cauchy, si important pour la sommation des séries.

Dans une Note : Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (*C. R.*, t. CIV, 1887), j'ai donné la série

$$(1) \qquad (s-1)\zeta(s) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu (s-1)^\nu,$$

où $$C_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\nu(\log n)^{\nu-1}}{n} - (\log n+1)^\nu + (\log n)^\nu\right],$$

et calculé les neuf premiers coefficients avec neuf décimales (ce qui, dans ma notation, est désigné par $(-1)^\nu \nu!$. $C_{\nu+1}$ est identique à C_ν dans la notation de M. Cesàro). M. J.-P. Gram (Copenhague) a récemment calculé, avec un grand nombre de décimales, les coefficients du développement (1). Ses calculs seront sans doute publiés prochainement (ceci nous était envoyé le 14 avril 1895); en attendant, je transcris ci-après les résultats de mes calculs de 1887.

Note. — Tous les chiffres donnés sont certains; par conséquent l'erreur est toujours plus petite qu'une demi unité de la dernière décimale.

$$
\begin{aligned}
z\zeta(1+z) = 1 &+ 0{,}57\ 72\ 15\ 66\ 49\ 02\ z \\
&+ 0{,}07\ 28\ 15\ 84\ 54\ 84\ z^2 \\
&- 0{,}00\ 48\ 45\ 18\ 16\ ..\ z^3 \\
&- 0{,}00\ 03\ 42\ 30\ 57\ ..\ z^4 \\
&+ 0{,}00\ 00\ 96\ 89\ ..\ ..\ z^5 \\
&- 0{,}00\ 00\ 06\ 61\ 10\ 3.\ z^6 \\
&- 0{,}00\ 00\ 00\ 33\ 16\ 24\ z^7 \\
&+ 0{,}00\ 00\ 00\ 10\ 46\ 2.\ z^8 \\
&- 0{,}00\ 00\ 00\ 00\ 87\ 3.\ z^9 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

J.-L.-W.-V. JENSEN (Copenhague).

246. (YOUSSOUFIAN). — *Deuxième réponse.* — Note pour servir de complément à la liste des Dictionnaires mathématiques cités (p. 110). — SAVÉRIEN, *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique, où l'on traite de l'origine, du progrès de ces deux Sciences et des Arts qui en dépendent, et des diverses révolutions qui leur sont arrivées jusqu'à notre temps; avec l'exposition de leurs principes et l'analyse des sentiments des plus célèbres auteurs sur chaque matière.* 2 vol. in-4°; Paris, 1753.

Ce livre contient d'utiles renseignements sur l'histoire des Mathématiques et facilite l'intelligence des anciens auteurs, en donnant la signification de nombreux termes techniques inusités aujourd'hui.

Au tome I, page xxv de la Préface, on lit :

« M. *Conrad Dasipode,* professeur de Mathématique à Strasbourg, a donné, le premier, un Dictionnaire de Mathématique intitulé : *Dictionarium mathematicum,* in-8°, 1573, accompagné de 12 planches. Cet Ouvrage contient les définitions et les divisions de l'Arithmétique, de la Géométrie, de la Géodésie, de l'Astronomie et de l'Harmonie, et elles se trouvent par ordre de matière. En 1668, *Hierome Vital,* théatin, publia un second Dictionnaire de Mathématique avec ce titre : *Lexicon mathematicum,* in-8°, 18 planches; mais il n'y est question que de la Géométrie, de l'Astronomie et de l'Astrologie. L'auteur le refondit à Rome, en 1690, et l'augmenta de plusieurs connaissances de mathématique et de beaucoup de choses inutiles. Ces deux Ouvrages n'ont de recommandable que le titre. Ils ont eu si peu de succès, que M. *Ozanam* les regardait comme non avenus. Aussi dit-il dans la préface de son *Dictionnaire mathématique*, publié en 1691 (2), qu'il était surprenant qu'on n'eût point encore donné de son tems un Dictionnaire *où l'on expliquât les termes des Mathématiques*. Cependant, à le bien prendre, celui de M. *Ozanam* n'est pas un Dictionnaire. C'est, comme le dit cet auteur, une *idée générale des Mathématiques*, où l'on indique les articles par un ordre alphabétique des termes des matières.... »

[L'auteur parle ensuite du Dictionnaire de *Wolf*, cité par M. Cantor, et il ajoute, p. XXVI] :

« Il y a quelques années que M. *Stone*, de la Société Roïale de Londres, publia un nouveau Dictionnaire de Mathématique, in-8°, sans planches, qui a eu 2 éditions. L'Ouvrage est en anglois. L'auteur s'y est attaché, comme M. *Wolf*, à définir les termes et à les expliquer assez souvent avec quelques détails. Sans servitude, il en a orné quelques-uns de traits historiques, qui y ont rapport. Il est néanmoins une différence entre le Dictionnaire de M. *Wolf* et celui de M. *Stone*. Les articles qui composent celui ci sont plus serrés et plus dépendants en quelque sorte des Mathématiques, et l'érudition est plus prodiguée dans celui-là. »

JACQUES BOYER.

Conrardus Dasipodius (Strasbourg, in-8°, 1573), en grec et en latin.

Hieronymus Vitalis. — *Savérien*.

Ozanam. — Dictionnaire mathématique (Paris, 1691, in-4°).

J. Harris. — Universal english Dictionary of Arts and Sciences (London, 1704-1710).

Chambers. — « Cyclopedia », contenant un Dictionnaire mathématique (London, 1728).

Une traduction hollandaise par *Sprögel* (Amsterdam, 1758), du « Résumé des principaux Ouvrages de Mathématiques » de Christian von Wolf, qui publia son Dictionnaire en 1716.

H. Braid.

Un Dictionnaire mathématique a été publié en 1702, à Londres, par J. Ralphson, *F. R. S.*, sous le titre de : « A mathematical Dictionary, or a compendious explication of all mathematical terms, abridg'd from Monsieur Ozanam, and others, ..., etc. » W.-W. BEMAN (Ann-Arbor, U.S.A.).

Nous avons supprimé, comme à l'ordinaire, de ces dernières réponses, tout ce qui pouvait faire double emploi avec ce que nous avions déjà imprimé.
LA RÉDACTION.

Je suis certain de l'existence d'une « Histoire des Mathématiques », par GAUBIL, mais je ne puis indiquer rien de précis.

Muller.

249. (MARIUS LIVON). *Deuxième réponse.* — Une réponse très étudiée et très intéressante nous a été adressée, il y a plusieurs mois, par M. HÉBRAILH, sous le titre : *Étude sur les variations de la hausse dans une arme à feu quand le but s'élève ou s'abaisse par rapport à l'horizon.* Nous l'avons communiquée à M. Marius Livon, qui regrette que son étendue nous en interdise la publication intégrale dans le journal; nous donnerons, en communication, le manuscrit aux personnes qu'elle intéresserait et nous nous bornerons à l'extrait ci-après.

LA RÉDACTION.

En appelant r la distance du but, α l'angle de tir, β l'angle de site et V la vitesse initiale, on tire de l'équation de la trajectoire dans le vide

$$\sin(2\alpha-\beta) = \sin\beta + \frac{gr}{V^2}\cos^2\beta.$$

Cette équation conduit aux conclusions suivantes

1° La portée maximum r sur une droite faisant un angle β avec l'horizon est représentée par l'équation $\dfrac{gr}{V^2} = \dfrac{1}{1+\sin\beta}$.

La ligne des portées maxima est ainsi une parabole ayant pour axe la verticale passant par l'origine de la trajectoire.

2° Pour le tir direct, les maxima et minima de $(\alpha - \beta)$, en supposant r constant, sont donnés par l'équation

$$\frac{3gr}{V^2}\sin^2\beta - 2\sin\beta + \frac{gr}{V^2} = 0.$$

Le lieu des points correspondants à ces maxima et minima est ainsi une ellipse ayant, pour sommets du petit axe, l'origine de la trajectoire et le sommet de la parabole des portées maxima; elle est entièrement contenue dans l'intérieur de cette parabole. En outre, les points de cette même ellipse correspondent aux maxima et minima de $(\alpha-\beta)$, pour le tir plongeant, quand le but se déplace sur une horizontale.

3° Les courbes joignant les points pour lesquels la valeur de $(\alpha - \beta)$ est la même, ont pour équation, en coordonnées polaires, r, β :

$$\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \beta)\cos\beta - \sin^2(\alpha - \beta)\sin\beta = \frac{1}{2}\,\frac{gr}{V^2}\cos^2\beta.$$

Ce sont des paraboles passant par l'origine de la trajectoire, dont l'axe est vertical, et qui ont naturellement pour enveloppe la parabole des portées maxima.

Supposons maintenant le projectile lancé dans l'air. La distance atteinte, sur une droite d'angle β avec l'horizon, au lieu d'être r, ne sera plus que r'. J'admets que, pour une valeur donnée de r, r' soit constant quel que soit β; comme on connaît expérimentalement les valeurs de r pour $\beta = 0$, on en déduira la valeur de $(\alpha - \beta)$ nécessaire pour atteindre dans l'air le point ayant pour coordonnées r' et β.

En appelant α_1 l'angle de tir permettant d'atteindre dans l'air un point dont l'angle de site est β et α_2 l'angle de tir donné par l'expérience permettant d'atteindre dans l'air un autre point placé à la même distance et dont l'angle de site est nul, on aura

$$\sin(2\alpha_1 - \beta) = \sin\beta + \sin 2\alpha_2 . \cos^2\beta.$$

L'hypothèse qui précède n'est pas mathématiquement exacte, mais ne peut pas amener d'erreurs sensibles.

A. Hébrailh.

230. (A. Schobloch). *Deuxième réponse.* — Une réponse complète ne nous semble pas possible, à moins que l'auteur de la question ne la précise, en faisant savoir ce qu'il entend par courbes *de même espèce*. Quant à la réponse (nécessairement *partielle*) de M. Rabut, nous pensons qu'il serait utile d'y joindre quelques indications bibliographiques. Nous nous bornons ici à signaler les *Remarques sur la théorie des roulettes*, par M. E. Cesàro (*N. A.*, p. 226; 1888). *Rosace.*

255. *Deuxième réponse.* — Soient $S = 0$ et $S' = 0$ les équations de deux coniques concentriques et homothétiques, Δ et Δ' leurs déterminants, ∇ l'invariant, dont l'évanouissement signifie que S est une parabole; alors on a d'abord

$$S' = S + \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3)^2 = 0.$$

Si q désigne le rapport des axes homologues de S et S', on sait que $q^2 = \Delta : \Delta'$; en outre que $\Delta' = \Delta + \lambda\nabla$, parce qu'en ce cas l'invariant δ_1 est égal à ∇, que l'invariant δ_2 et le déterminant de $(ax_1 + bx_2 + cx_3)^2$ s'annulent. De ces deux équations on tire $\lambda = \frac{\Delta(1-q^2)}{q^2\nabla}$; par conséquent, on a

$$S' = S + \frac{\Delta(1-q^2)}{q^2\nabla}(ax_1 + bx_2 + cx_3)^2 = 0.$$

Dans le cas de la question, q^2 est égal à -1; donc

$$S' = S - \frac{2\Delta}{\nabla}(ax_1 + bx_2 + cx_3)^2 = 0$$

est l'équation demandée. STOLL (Bensheim).

258. (LEMOINE). *Cinquième réponse.* — Les conditions indiquées t. II, p. 111, ne sont pas distinctes : la dernière est une conséquence des deux premières. Il suffit même, pour que l'hyperboloïde des hauteurs soit de révolution, que trois des éléments tels que $\alpha a'$ soient égaux et parallèles à un même plan. Examinons la chose de plus près. Si deux segments $\alpha a'$, $\beta b'$ sont égaux, ils font le même angle avec l'arête cd, sur laquelle leurs projections se confondent. Par suite, l'un des plans principaux de l'hyperboloïde des hauteurs est parallèle au plan bissecteur du dièdre cd ou du dièdre extérieur adjacent.

Si trois segments $\alpha a'$, $\beta b'$, $\gamma c'$ sont égaux sans être parallèles à un même plan, les arêtes issues du sommet d forment un trièdre (qui peut être extérieur au tétraèdre) dont les angles plans ont une somme égale à deux droits, et les plans bissecteurs des dièdres extérieurs de ce trièdre forment un trièdre trirectangle dont les arêtes sont parallèles aux axes de l'hyperboloïde des hauteurs, de sorte que la forme (rapports des longueurs des axes) et l'orientation de cet hyperboloïde sont indépendantes de la position de la quatrième face, qui est seulement astreinte à être perpendiculaire à une génératrice du cône asymptote. Si les trois segments $\alpha a'$, $\beta b'$, $\gamma c'$ sont égaux et parallèles à un même plan, l'hyperboloïde est de révolution.

Remarques. — 1° L'égalité des quatre segments tels que $\alpha a'$ n'entraînerait pas leur parallélisme à un même plan. Il en résulterait seulement que le tétraèdre serait équifacial.

2° L'hyperboloïde des hauteurs étant, dans tous les cas, équilatère (*Question* 391), s'il est en même temps de révolution, son équation peut se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = K^2$$

C'est la deuxième condition énoncée t. II, p. 77. WELSCH.

259. (E. LEMOINE). — *Deuxième réponse.* — Soient ABC et A′B′C′ deux triangles, et M et M′ deux points tels que

$$MA = M'A', \quad MB = M'B', \quad MC = M'C'.$$

Portons le triangle A′B′C′ en AB_1C_1, de sorte que le segment M′A′ coïncide avec le segment MA : les perpendiculaires aux milieux des segments BB_1 et CC_1 se couperont en M; or la première de ces perpendiculaires touche évidemment, en un point P de la droite AB_1, la conique (P) de foyers A et B et d'axe focal égal à A′B′; la seconde touche de même en un point Q de AC_1, la conique (Q) de foyers A et C et d'axe focal égal à A′C′. Si donc, autour du foyer commun A, on fait tourner l'angle B_1AC_1, égal à l'angle B′A′C′, le point de concours des tangentes menées aux coniques (P) et (Q), aux points où elles coupent respectivement les côtés AB_1 et AC_1, décrira le lieu du point M; par suite (questions 343) ce lieu est une conique.

Les coniques (P) et (Q), rapportées à deux axes rectangulaires $A\xi$ et $A\eta$, ont pour équations

$$\xi^2 + \eta^2 = p^2, \qquad \xi^2 + \eta^2 = q^2,$$

p et q désignant deux fonctions linéaires en ξ et η; on voit facilement que la conique (M) se trouve alors représentée par l'équation $\xi^2 + \eta^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos A'$.

Si $A\xi$ coïncide avec AB, on a

$$p = \frac{c}{c'}\left(\xi + \frac{c'^2 - c^2}{c}\right),$$
$$q = \frac{b}{b'}\left(\xi\cos A + \eta\sin A + \frac{b'^2 - b^2}{b}\right).$$

Enfin, si x, y et z désignent les distances aux côtés du triangle ABC du point (ξ, η), on a $\xi = \dfrac{y}{\sin A} + \dfrac{z}{\operatorname{tang} A}$; $\quad \eta = z$.

Éliminant p, q, ξ, η entre les cinq équations précédentes, et rendant le résultat homogène par l'introduction du facteur $\frac{ax+by+cz}{2S}=1$, on obtient l'équation de la conique lieu du point M, rapportée au triangle ABC.

Si dans le résultat obtenu on fait $a'=c$, $b'=a$, $c'=b$; $A'=C$, $B'=A$, $C'=B$, on trouve facilement le lieu demandé dans la question, mais je n'ai pu le mettre sous une forme élégante et un peu condensée. Cette solution géométrique s'applique, dans l'espace, au cas de deux tétraèdres : on a à trouver le lieu du sommet d'un trièdre dont les faces sont tangentes à trois quadriques de révolution ayant un foyer principal commun, en des points de contact qui, joints au foyer en question, déterminent un trièdre égal à un trièdre donné; le lieu est une quadrique. Les quadriques étant

$$x^2+y^2+z^2=p^2, \qquad x^2+y^2+z^2=q^2, \qquad x^2+y^2+z^2=r^2$$

(p, q, r sont des fonctions linéaires de x, y, z), le lieu sera (α, β, γ étant les angles des faces du trièdre)

$$x^2+y^2+z^2=p^2+q^2+r^2-2qr\cos\alpha-2rp\cos\beta-2pq\cos\gamma.$$

Ernest Duporcq.

Cette solution, que nous avons depuis fort longtemps, ne répond pas, à vrai dire, à la question, mais elle est extrêmement ingénieuse et nous la donnons parce qu'elle peut faciliter l'étude de ces coniques qui ont des propriétés remarquables, fort nombreuses, mais assez difficiles à présenter et à découvrir, ainsi que le montrent les résultats obtenus par M. Poulain (*J.S.*; 1883) et par M. T.-J. Allersma (*W.O.*, t. VI, p. 246-252. Voir *Intermédiaire*, t. II, p. 158).

M. Welsch nous a, dès que la question a paru dans les placards de préparation du journal, envoyé une solution complète de la question 259 donnant l'équation demandée sous forme explicite et *relativement simple;* mais il a repris son manuscrit pour étudier les propriétés des coniques (M) et (M'); nous la donnerons donc plus tard. E. Lemoine.

279. (J. Franel). — *Deuxième réponse.* — Considérons les seconds points d'intersection de la circonférence $P_1P_2P_3P_4$ avec les hauteurs P_1H_2 et P_2H_1 : ces points sont les symétriques des points P_1 et P_2 par rapport au diamètre de la circonférence parallèle à P_3P_4; or, ils sont aussi, comme on sait, les symétriques par rapport à P_3P_4 des orthocentres H_2 et H_1. On voit donc que le quadrilatère $P_1P_2H_1H_2$ est un parallélogramme, et le milieu de P_2H_2 coïncide, par suite, avec le milieu G de P_1H_1.

De même des milieux de P_3H_3 et de P_4H_4. D'ailleurs la droite de Wallace (ou de Simson) relative à un point de la circonférence circonscrite à un triangle passe par le milieu du segment compris entre ce point et l'orthocentre du triangle : par suite, les quatre droites de Wallace considérées concourent en G.

E. DUPORCQ.

1° Il est clair que M_1 désignant le centre de gravité du triangle $P_2P_3P_4$, ..., le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est homothétique inverse (rapport d'homothétie $-\frac{1}{3}$) du quadrangle $P_1P_2P_3P_4$, le centre d'homothétie étant le centre de gravité des quatre sommets.

2° Puisque dans un triangle le point de concours des hauteurs est homothétique direct du point de concours des médianes par rapport au centre du cercle circonscrit (rapport d'homothétie 3), il est clair que le quadrilatère $H_1H_2H_3H_4$ homothétique de $M_1M_2M_3M_4$ l'est aussi de $P_1P_2P_3P_4$ suivant le rapport

$$-\tfrac{1}{3}\times 3 = -1.$$

3° Le point H_1 étant sur la directrice de la parabole de foyer P_1 qui est inscrite dans le triangle $P_2P_3P_4$, le centre de symétrie appartient à la tangente au sommet de cette parabole, ou, en d'autres termes, à la droite de Wallace du triangle $P_2P_3P_4$ relative au point P_1.

Remarque. — Lorsque le quadrangle $P_1P_2P_3P_4$ n'est plus inscriptible, le quadrangle $H_1H_2H_3H_4$ cesse de lui être superposable par retournement, mais les deux quadrangles ont toujours *même aire*. Cette proposition est même la conséquence d'une plus simple, savoir que : si d'un point X on mène des perpendiculaires aux côtés d'un triangle $P_1P_2P_3$ jusqu'à leur rencontre en $H_1H_2H_3$ avec l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère $P_1P_2P_3X$, la surface du triangle $H_1H_2H_3$ est égale à celle du triangle $P_1P_2P_3$.

On peut encore signaler ceci : les points P_1, P_2, P_3, P_4 et H_1, H_2, H_3, H_4, qui sont sur une même hyperbole équilatère, ont quatre par quatre même rapport anharmonique. E. MALO.

I. Le point G n'est autre que le symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport au centre de gravité I des sommets du quadrilatère. Soient p_1p_2 la projection orthogonale du côté P_1P_2 sur le côté opposé, et G le point d'intersection des droites de Wallace des sommets P_1 et P_2 par rapport aux triangles formés par les sommets restants : les triangles OP_1P_2, Gp_1p_2 sont semblables, et G est le quatrième sommet du parallélogramme construit avec les projetantes du centre O sur les côtés P_1P_2, P_3P_4. Or, le centre de ce parallélogramme est précisément le centre de gravité des sommets du quadrilatère.

II. La deuxième propriété énoncée se déduit de l'examen du triangle $P_1G_1H_1$ et de la transversale OG, G_1 étant le barycentre du triangle $P_2P_3P_4$. On a, en effet : $OH = 3OG$ et $G_1I = \frac{G_1P_1}{4}$. Il en résulte que G est le milieu de P_1H_1; ce point est de même le milieu de P_2H_2, de P_3H_3 et de P_4H_4.

P. Sondat, Welsch.

Soient P_i l'un des sommets P_1, P_2, P_3, P_4; Δ_i le triangle complémentaire; H_i l'orthocentre de Δ_i. On sait que la directrice de la parabole ϖ_i, inscrite à Δ_i et ayant P_i pour foyer, contient le point H_i; on sait en outre que le point milieu de P_iH_i (segment compris entre le *foyer* et la *directrice* de la parabole) se trouve sur la *tangente au sommet* de ϖ_i, soit a_i. Mais la *droite de Wallace, relative au triangle* Δ_i *et au point* P_i, *n'est évidemment rien autre que cette tangente* a_i; donc le théorème est démontré, si l'on admet que les quatre segments P_1H_1, P_2H_2, P_3H_3, P_4H_4 ont même point milieu. Si l'on n'admet pas cette dernière propriété, pour la démontrer on peut poser une transformation homographique, prenant comme fondamentaux les quadrangles $P_4H_1H_2H_3$ et $H_4P_1P_2P_3$. L'homographie sera homologique, l'axe d'homologie étant à l'infini, parce que les trois droites $P_4(H_1, H_2, H_3)$ sont parallèles à leurs correspondantes $H_4(P_1, P_2, P_3)$; par conséquent les droites

$$P_iH_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$$

se coupent au centre d'homologie, soit O, et les côtés du triangle $H_1H_2H_3$ sont parallèles aux côtés homologues de $P_1P_2P_3$: de manière que, $P_4P_jH_4H_j\,(j = 1, 2, 3)$ étant un parallélogramme, O est bien le point milieu commun des quatre segments indiqués, ou, ce qui revient au même, les deux quadrangles $P_1P_2P_3P_4$ et $H_1H_2H_3H_4$ sont symétriques par rapport au centre O. On voit par là que *la droite de Wallace, relative à un triangle* ABC *et à un point* M *de la circonférence circonscrite, a aussi la propriété de passer par le point milieu du segment, compris entre* M *et l'orthocentre de* ABC. G. JUNG (Milan).

283. (E. CESÀRO). J'ai rencontré, au mois de septembre 1894, les courbes auxquelles M. Cesàro fait allusion, dans un travail sur la *génération des courbes par roulement* qui doit paraître prochainement. C'est en cherchant quelle courbe doit rouler sur une droite pour qu'un de ses points engendre une courbe donnée, que j'ai rencontré ces courbes et que je les ai appelées *paracycloïdes*, ignorant que M. Cesàro m'eût devancé. Si la courbe donnée est une ellipse, on trouve que la courbe roulante est une épicycloïde (qui dégénère en développante de cercle lorsque l'ellipse dégénère en parabole); mais, si la courbe donnée est une hyperbole, la courbe roulante est une paracycloïde, c'est-à-dire une courbe réelle engendrée par le roulement sur un cercle fixe de rayon R d'un cercle mobile imaginaire de rayon $r = \frac{R}{2} + \rho\sqrt{-1}$ (ρ étant une constante arbitraire). Les paracycloïdes peuvent, comme les épicycloïdes, être engendrées de deux manières différentes, c'est-à-dire par deux cercles imaginaires différents roulant sur un même cercle réel. Il suffit pour cela que les rayons des cercles mobiles soient des imaginaires conjuguées. La paracycloïde a une forme analogue à la développante du cercle, mais sa normale, au lieu d'être tangente au cercle directeur, lui est extérieure; c'est pourquoi le centre instantané de rotation est imaginaire. La paracycloïde admet comme courbes asymptotes deux spirales logarithmiques dont les pôles sont au centre du cercle fixe. Enfin, elle est semblable à sa seconde développée. La plupart des théorèmes relatifs à l'épicycloïde s'appliquent à la paracycloïde et cette dernière devrait être définitivement classée parmi les lignes cycloïdales. Quant à trouver un déplacement réel équivalent au roulement d'un cercle imaginaire sur un cercle réel, il me semble que cette recherche est ou indéterminée ou impossible. Indéterminée si l'on cherche un déplacement tel qu'un point du plan décrive une paracycloïde, puisqu'il faut se donner au moins deux trajectoires pour définir un déplacement; impossible, si l'on cherche un déplacement tel que *tous* les points du plan décrivent les mêmes

trajectoires que celles produites par le roulement du cercle imaginaire : en effet, dans tout déplacement réel, tous les points du plan décrivent des trajectoires réelles, tandis que dans le roulement du cercle imaginaire tous les points du plan décrivent des trajectoires imaginaires, à l'exception d'un seul qui décrit une paracycloïde. En effet, supposons que deux points décrivent des trajectoires réelles, les normales à ces deux trajectoires se rencontreraient au centre instantané de rotation et celui-ci serait réel, ce qui n'a pas lieu, puisque la normale à la paracycloïde ne rencontre pas le cercle réel.

René de Saussure (Baltimore).

291. (P Vernier).—*Deuxième réponse.*— 1° On peut démontrer arithmétiquement (*voir* t. II, p. 83) la proposition plus générale qui suit :

x et y étant deux nombres premiers entre eux, si les nombres impairs a et b ont r pour plus grand commun diviseur, $x^a + y^a$ et $x^b + y^b$ ont pour plus grand commun diviseur $x^r + y^r$.

En effet, on peut déterminer deux nombres entiers g et h tels que l'on ait $ga = hb + r$, g et h étant ici de parité différente. Supposons d'abord g impair et h pair ; de l'égalité

$$x^{ga} + y^{ga} = (x^{hb} - y^{hb})x^r + y^{hb}(x^r + y^r),$$

il résulte que tout diviseur commun à $x^a + y^a$ et $x^b + y^b$, divisant $x^{ga} + y^{ga}$ et $x^{hb} - y^{hb}$, divise $y^{hb}(x^r + y^r)$. Mais, x et y étant premiers entre eux, y^{hb} est premier avec $x^a + y^a$ et $x^b + y^b$, et avec tous leurs diviseurs. Donc tout diviseur commun à $x^a + y^a$ et $x^b + y^b$ divise $x^r + y^r$, ce qui ne peut être que si $x^r + y^r$ est le plus grand commun diviseur de $x^a + y^a$ et $x^b + y^b$. En supposant g pair et h impair, on partirait de l'égalité $x^{ga} - y^{ga} = (x^{hb} + y^{hb})x^r - y^{hb}(x^r + y^r)$.

Démontrons maintenant que, *x et y étant deux nombres premiers entre eux, si les nombres a et b sont impairs, $x^a + y^a$ et $x^b - y^b$ ont pour plus grand commun diviseur* 1 *ou* 2.

En effet, soit m le plus petit commun multiple de a et b. Tout diviseur commun à $x^a + y^a$ et $x^b - y^b$ divise $x^m + y^m$ et $x^m - y^m$ (il suffit même que b soit impair); donc il divise $2x^m$ et $2y^m$ et, par suite, il divise 2.

2° *Voir* Desboves, *Questions d'Algèbre* (2e édition, p. 226). On peut énoncer le théorème plus général qui suit :

x et y étant deux nombres premiers entre eux, si m est un multiple commun impair des nombres impairs a et b, le nombre entier $\frac{x^m+1}{x^a+1}$ ne peut être premier que si b divise a, car il est divisible par $\frac{x^b+1}{x^r+1}$, r étant le plus grand commun diviseur de a et b.

En effet, x^m+1 est divisible par x^a+1 et x^b+1 et, par suite, par leur plus petit commun diviseur $\frac{(x^a+1)(x^b+1)}{x^r+1}$, d'où il suit que $\frac{x^m+1}{x^a+1}$ est divisible par $\frac{x^b+1}{x^r+1}$. A. Goulard.

302. (*R.-Ch. Weitz*). — *Deuxième réponse.* — Dans la réponse qu'il a donnée à la question n° 302, t. II, p. 115, M. Ch. Rabut a indiqué divers théorèmes sur la chaînette. Au cours de l'étude que je poursuis, j'ai eu occasion de remarquer les propriétés indiquées dans les nos 2 et 4. Ces propriétés dérivent immédiatement, de même que celles mentionnées dans le n° 3, de la considération du polygone de Varignon, complétée en remarquant que le rayon de courbure peut s'obtenir en menant une perpendiculaire à la direction sur laquelle on compte les arcs, jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire au vecteur parallèle à la tangente au point considéré. On voit facilement, d'ailleurs, que le lieu des extrémités de ces rayons est une parabole de paramètre $\frac{a}{2}$, a étant le paramètre de la chaînette (tension ou ordonnée au sommet); les propriétés des faisceaux de droites, du triangle ou de la parabole se transforment, par ces considérations, en propriétés des arcs ou flèches successives de la chaînette, et en relations entre les rayons de courbure. C'est ainsi qu'on a, par exemple, les théorèmes suivants :

1° *Quand un angle droit est circonscrit à une chaînette de paramètre a, les rayons de courbure ρ et ρ' aux points de tangence sont liés entre eux par la relation* $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=\frac{1}{a}$.

2° *Soient une chaînette et le rayon de courbure en un point séparé du sommet par un arc s, σ étant l'arc de développée com-*

pris entre l'extrémité de ce rayon et le point de rebroussement de cette développée, l'aire de la figure triangulaire mixtiligne comprise entre la chaînette, le rayon de courbure, la développée et l'axe est égale à $\frac{s}{2}\left(a+\frac{\sigma}{3}\right)$. *R.-Ch. Weitz.*

311. (Jacques Boyer). — Dans les listes des membres de l'ancienne Académie des Sciences, figure un de Lannion, admis en 1679, exclu en 1685. Le Dictionnaire de Moréri donne, d'autre part, des détails sur la famille noble de Lannion et mentionne, vers la même époque, un abbé de ce nom, qui doit être le même personnage, puisque Ozanam le cite comme mathématicien.

Paul Tannery.

314. (P.-F. Teilhet). — *Deuxième réponse.*

M. Tafelmacher nous a envoyé une réponse détaillée d'où nous extrayons l'indication suivante qui n'a pas été donnée dans les réponses de la page 117, t. II.

A. Rieke a publié deux travaux sur l'équation $x^p + y^p = z^p$, (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd 34 und 36; 1889 et 1891). A. Tafelmacher (Santiago, Chili).

315. (A. Boutin). — *Deuxième réponse.* — La série dont il s'agit est un cas spécial de la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots$$

On aura, en effet, $y = F\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m+1}{2}, +(m+1), -4x\right)$.

Voir aussi, pour des valeurs entières positives de m, par exemple, *Schlömilch :* Uebungsbuch zur Studium der höheren Analysis, I, p. 54 et 292. Carl Störmer (Christiania).

La fonction

$$y_m = 1 + mx + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

s'arrête, pour $m = 2n$, au terme $+(n+1)x^n$; elle se termine par le terme $+x^n$, pour $m = 2n - 1$.

En comparant y_m à y_{m-1} on trouve la formule

$$(1) \qquad y_m = y_{m-1} + x y_{m-2}.$$

Les racines réelles de ces polynomes ne pouvant être que négatives, si y_{m-1} s'annule pour une valeur $-x_1$ de x, y_m et y_{m-2} seront de signes contraires.

Dans la suite $y_0 = 1, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}, y_p, \ldots, y_m$, deux polynomes juxtaposés, y_{p-1} et y_p ne peuvent s'annuler simultanément, quand x varie, car il en résulterait $y_{p-2} = 0$ et, par suite, $y_0 = 0$, ce qui n'est pas possible. Ces polynomes sont donc des fonctions de Sturm.

Supposons $m = 2n$; la suite comprendra $2n + 1$ fonctions et ne présentera, pour $x = 0$, que des permanences. Pour $x = -\infty$, elle offrira une suite alternée de n variations et de n permanences. Si $m = 2n - 1$, la dernière fonction disparaît, mais les n variations subsistent.

Comme y_{2n} et y_{2n-1} sont de même degré n, ces fonctions ont l'une et l'autre toutes leurs racines réelles.

A l'aide de (1) on trouvera facilement les formules

$$y_{2n} = y_{n-1}(y_{n-1} + 2xy_{n-2}) \qquad \text{et} \qquad y_{2n+1} = (y_n)^2 + x(y_{n-1})^2.$$

La première seule peut faciliter la recherche des racines.

AUDIBERT.

329. (E. LEMOINE). — Considérons d'abord quelques-unes des propriétés des opérations par lesquelles s'obtient la « transformation continue en A, en B, en C » de toute fonction d'un triangle, et représentons les trois opérations par α, β, γ respectivement.

Nous avons

$$\gamma(a) = -a, \qquad \beta\gamma(a) = \beta(-a) = a, \qquad \alpha\beta\gamma(a) = \alpha(a) = a;$$

semblablement $\alpha\beta\gamma(r) = -r$, $\alpha\beta\gamma(r_1) = -r_1$, ...

Représentant, pour abréger, par μ l'opération composée $\alpha\beta\gamma$, nous trouverons que, F étant une fonction quelconque, on a, avec les notations ordinaires r, r_1, r_2, r_3 représentant les rayons des cercles tangents aux trois côtés, p le demi-périmètre,

$$p_1 = p - a, \; p_2 = p - b, \; p_3 = p - c,$$

$$\begin{aligned} &\mu[F(a, b, c, p, p_1, p_2, p_3, r, r_1, r_2, r_3, h_1, h_2, h_3, S, R)] \\ &\quad = F(a, b, c, p, p_1, p_2, p_3, -r, -r_1, -r_2, -r_3, \\ &\qquad\qquad -h_1, -h_2, -h_3, -S, -R). \end{aligned}$$

Par suite, soit F_1 une fonction quelconque dont les termes sont de dimensions *impaires* par rapport aux lettres $r, r_1, \ldots, R_1$ dont le signe est changé par l'opération μ, on a évidemment $\mu F_1 = -F_1$. Si, au contraire, F_2 représente une fonction *paire*, au même point de vue, on a $\mu F_2 = F_2$. Ainsi, dans l'un ou l'autre cas, on a $\mu F = \pm F$, relation qui n'a plus lieu lorsque F est une fonction *mixte* au point de vue indiqué. De plus, il est aisé de prouver que *toute* fonction $\alpha^2 F = F$, ou comme on peut l'écrire, $\alpha^2 = 1$ (*ii*), d'où $\alpha = \alpha^{-1}$; mais puisque $\mu = \alpha\beta\gamma$,

$$\mu\alpha = \alpha\mu = \alpha.\alpha\beta\gamma = \alpha^2.\beta\gamma = \beta\gamma,$$

d'où, excepté dans le cas des fonctions *mixtes*, on a $\alpha = \pm \beta\gamma$.

(*iii*) Et en faisant la même restriction, si $\alpha = \pm 1$, l'on a $\beta\gamma = \pm 1$, et, par suite, $\beta = \pm\gamma$. Réciproquement, si $\beta = \pm\gamma$, $\alpha = \pm 1$.

Maintenant, il y a en tout sept espèces de cas possibles par rapport à la variété des résultats produits par les opérations α, β, γ sur toute identité reliant entre elles les lettres a, b, c, p, etc. (identité que l'on peut toujours écrire sous la forme $F = 0$); et ces espèces différentes peuvent être indiquées par les cas typiques suivants :

(1)	$\alpha = \beta = \gamma = 1$,	
(2)	$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad 1$	tous différents,
(3)	$\alpha = 1 \neq \beta = \gamma$,	
(4)	$\alpha = \beta = \gamma \neq 1$,	
(5)	$\alpha = 1, \quad \beta,\quad \gamma,\quad 1$	tous différents,
(6)	$\alpha \neq 1, \quad \beta = \gamma = 1$,	
(7)	$\alpha \neq 1, \quad \beta = \gamma \neq 1$.	

Ici, pour le moment, $\alpha = 1$ signifie que l'identité sur laquelle on opère ne change pas, et il en sera ainsi soit que $\alpha F = +F$ ou $= -F$, $F = 0$ étant l'identité considérée.

Nous voyons donc qu'avec la restriction que l'identité, une fois mise sous la forme $F = 0$, ne soit pas une équation mixte, les cas (5), (6), (7) sont impossibles par (*iii*). Les cas (1), (2), (3), (4), (5) sont ceux que M. Lemoine a désignés par (a), (b), (c), (d), (e).

Il reste à prouver que si l'on a une identité de la forme $F = 0$

dans laquelle $F \equiv F_1 + F_2$, F_1 étant impair et F_2 pair dans le sens expliqué plus haut, $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont aussi des identités, *prises séparément*. En effet, puisque $F = 0$ est une identité, $\mu F = 0$ en est une aussi. Mais $\mu F = \mu(F_1 + F_2) = -F_1 + F_2$, d'où $F_1 + F_2 = 0$ identiquement, et $-F_1 + F_2 = 0$ identiquement; donc $F = 0$ est une identité, et il en est de même de $F_2 = 0$.

Il est facile de fabriquer de ces identités. On trouvera par exemple que $pr - p_1 r_1 + rr_1 - p_2 p_3 = 0$ est une identité tombant sous le cas (e) de M. Lemoine.

J'ai omis jusqu'ici toute considération des angles A, B, C, par la raison qu'ils introduisent une complication de plus. De fait l'on a $\alpha\beta\gamma\, F(A, B, C) = F(-A, -B + 2\pi, -C)$, et, par suite, la propriété caractéristique de μ n'est plus aussi simple. Il est clair pourtant qu'en s'en tenant aux fonctions de A, B, C, qui ne sont pas altérées par la substitution de $-A + 2\pi$ pour $-A$, les résultats seront les mêmes que précédemment. Ainsi, par exemple, nous pouvons avoir une fonction trigonométrique quelconque de A ou d'un multiple quelconque de A, de même de $\cot\frac{A}{2}$, $\tang\frac{A}{2}$. Dans ce cas, il faut tenir compte de A, B, C en même temps que de $r, r_1, \ldots$, en comptant les dimensions. Mais dans le cas de fonctions telles que $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}$, l'on ne peut plus tirer les conclusions précédentes; je doute même que l'on puisse alors, sans prendre des précautions spéciales, se fier à la validité de la « transformation continue » elle-même.

R.-F. Muirhead (Edimbourg).

332. (*Clara Ter Bush*). — *Deuxième réponse*. — Un essai de traduction, dans le système binaire, d'un nombre transcendant usuel, se trouve dans une étude arithmétique publiée au *J. E.*, 1878, p. 229. C'est le logarithme du nombre π.

$$\text{Log.}\,\pi = 0.49714\ldots\ (\text{base } 10) = 0{,}011\,111\,110\,100010\,10011\ldots\ (\text{base } 2).$$

Le quatrain mnémotechnique relatif au nombre π, inséré t. II, p. 122, a été publié dans le t. V, 1879, de la *N. C.*, p. 449, d'après une communication de M. Radicke, empruntée à l'*Illustrirte Zeitung*. Le même quatrain est rapporté dans les *Problèmes de Géométrie* de MM. Laisant et Elie Perrin (Paris, Delagrave, 1894), p. 42, et les auteurs ajoutent, comme l'avait fait Catalan (*loc. cit.*) : « La 32e décimale [1] est un zéro, ce qui empêche d'étendre davantage ce procédé mnémotechnique. » A quoi je répondrai : Nullement ; il suffira de représenter les zéros par des mots de dix lettres. Ce moyen avait été indiqué (ainsi que le quatrain susmentionné) au sujet d'un concours analogue à la question 332, et proposé dans les *Tablettes du Chercheur* (15 décembre 1892 et 15 janvier 1893), mais ce concours n'a pas donné de résultat. Je suis persuadé cependant qu'il serait facile d'y répondre en simple prose, sinon en rimes ; la vraie difficulté n'est pas de composer une phrase ou même un discours suivant les conditions requises, mais bien d'éviter la banalité. C'est du reste, à peu d'exceptions près, l'écueil de la plupart des formules mnémotechniques.

Je ferai encore deux remarques très simples.

1° Pour le nombre π, les 31e, 32e et 33e décimales forment le groupe 5.0.2, facile à se rappeler.

2° Pour le nombre e, beaucoup de personnes retiennent aisément les nombres 2, 7, 1828, 1828. Le groupement des 6 chiffres suivants est assez curieux à noter : il est formé de deux nombres 45 encadrant le double, 90, soit : 45.90.45. H. BROCARD.

333. (H. LEZ). — *Troisième réponse.* — Pour compléter les renseignements bibliographiques que M. Brocard a donnés p. 230, je signale le supplément que j'ai publié au Mémoire qu'il indique *Z.*, t. XXXIX, 1894, p. 120-124, contenant la détermination des paramètres des paraboles. STOLL (Bensheim),

M. Brocard nous a également donné le même renseignement.

334. (A. THORIN). — *Deuxième réponse.* — Les premiers nombres satisfaisant à la première condition sont 7, 17, 29, ... ; à la deuxième condition : 13, 23, ... Les décompositions en trois facteurs sont plus nombreuses que celles en *deux* seulement. H. TARRY.

336. (L. MEURICE). — *Deuxième réponse.* — On lira avec intérêt sur la « Géométrie de la règle » un article du colonel de Coatpont (*N. C.*, 1877, III, 204). L'auteur y prouve « qu'il est pos-

---

[1] On a imprimé, par erreur, 31e.

sible de faire avec la règle seule ce qu'on fait avec la règle et le compas » à condition de définir la règle « une lame offrant deux côtés rectilignes et parallèles permettant de tracer des parallèles équidistantes ». Quelques remarques critiques concernant cet article et extraites d'une lettre du major de Tilly se trouvent dans la *N. C.*, 1879, V, p. 439 et suivantes. *A. Braid.*

347. (Cyp. Stephanos). — *Deuxième réponse.* — A propos de la Note de M. Ballue (*N. A.*, 1895) citée dans l'*Intermédiaire*, t. II, p. 231, Note qui était aussi une réponse à la question 347, j'estime que l'auteur n'est pas arrivé à démontrer la possibilité du plan, puisque : 1° sa définition a besoin, pour être acceptée, qu'on démontre d'abord l'existence de surfaces répondant à cette définition, et présente en conséquence le même défaut que la définition habituelle du plan ; 2° du reste, M. Ballue ne démontre pas ultérieurement l'existence de surfaces répondant à sa définition, mais il essaye de déduire, de sa définition, la propriété du plan exprimée par la définition habituelle en s'appuyant sur deux postulats qu'il n'énonce pas explicitement et qu'on ne peut pas déduire de sa définition du plan. Ces deux postulats sont les suivants : 1° On peut transporter la figure formée par deux points A et B de telle manière que ces deux points viennent s'appliquer sur une droite donnée quelconque; 2° Si l'on fait tourner un plan autour de deux de ses points, on peut faire passer ce plan par un point donné quelconque de l'espace.

Cependant cette Note telle quelle peut être utile en incitant à faire une étude approfondie du sujet, sur les points auxquels s'appliquent les objections. Cyp. Stephanos (Athènes).

364. (E. Gelin). — Les formules attribuées à Thomas Simpson ont été signalées dans l'*Opus palatinum de triangulis*, publié en 1596, après la mort de l'auteur, Rheticus, par son disciple Valentin Otho (Wolf, *Handbuch der Astronomie*, 1890, t. I, p. 170). Paul Tannery.

366. (G. de Rocquigny). — *Deuxième réponse.* — Pour le théorème de Fermat, voir t. II, p. 175. Euler a été conduit à l'identité qui porte son nom en cherchant 16 nombres qui, disposés en carré, satisfassent à 22 conditions données. Voir *Commentationes Arithmeticæ collectæ*, t. I, p. 427-443.

E. Fauquembergue.

371. (R.-H. Van Dorsten). — *Troisième réponse.* — Le triangle arithmétique donné par M. Welsch (t. II, p. 236) est exactement la même chose que mon échiquier triangulaire (voir *Théorie des nombres*, par Ed. Lucas, p. 90 et suiv.). H. Delannoy.

377. (D. Gravé). — *Deuxième réponse.* — En suivant la méthode indiquée par M. H. Brocard, après l'avoir convenablement développée, on parvient à reconnaître que la question a une étroite liaison avec la considération des facteurs premiers des nombres de la forme x^2+1. Les Tables des diviseurs des nombres x^2+1, données par Euler et Gauss, suffisent, à ce qu'il me semble, pour démontrer qu'après la solution de Machin il n'y a pas de solutions inférieures à 10^9. Des travaux plus urgents ne me permettent pas de poursuivre en ce moment cette analyse. D. Gravé (St-Pétersbourg).

389. (L. Autonne). — *Deuxième réponse.* — A citer encore : H. Andoyer, Étude d'une courbe algébrique autour d'un point à distance finie (*R. M. S.*, 1895, p. 130). A. Goulard.

391. (E. Genty). — *Deuxième réponse.* — 1° Une face quelconque d'un tétraèdre coupe l'hyperboloïde des hauteurs suivant une conique circonscrite à cette face et passant par l'orthocentre du triangle qui la constitue. Cette courbe est donc une hyperbole équilatère, et, comme son plan est perpendiculaire à l'une des hauteurs, l'hyperboloïde est équilatère.

2° Étant donné un hyperboloïde équilatère, on peut construire un tétraèdre ayant pour hauteurs 4 quelconques de ses génératrices.

Les arêtes de ce tétraèdre seront les 6 droites s'appuyant sur 2 génératrices et perpendiculaires aux 2 autres. Il est clair que ces droites forment un tétraèdre, car le plan mené par l'une d'elles, perpendiculairement à l'une des génératrices qu'elle ne rencontre pas, coupe l'hyperboloïde suivant une hyperbole équilatère passant par les traces de 3 génératrices données, et le triangle déterminé par ces traces a pour orthocentre la trace de la génératrice du 2e système parallèle à la 4e. Welsch.

Voir le *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, par G. Salmon (traduction de O. Chemin), au bas de la page 177. Voir aussi *Traité de Géométrie*, par MM. Rouché et de Comberousse; 1891, 6e édition, Note de M. Neuberg sur la géométrie récente du tétraèdre, p. 595-616, dernier paragraphe.

392. (J. Franel). — *Deuxième réponse.* — Nous avions également reçu de M. E. Malo une solution de la question 392, fondée sur des principes très analogues à ceux qui ont servi de point de départ aux réponses déjà publiées. L'auteur observe que, dans les hypothèses faites par M. Franel sur la dérivée de la fonction $F(t)$, on peut considérer la proposition comme résultant du théorème bien connu de Cauchy sur la convergence ou la divergence simultanée de la série $\sum_1^n \Phi(r)$ et de l'intégrale $\int_1^n \Phi(t)\,dt$, bien qu'à l'inverse la proposition de M. Franel, une fois démontrée, puisse être considérée comme une très intéressante extension de ce théorème de Cauchy.

La Rédaction.

394. (Ch. Bioche). *Deuxième réponse.* — Dans son Ouvrage intitulé : *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Turin, 1893), M. Peano démontre le théorème suivant :

Supposons que, pour chaque point d'un certain intervalle F, la fonction $f(x)$ soit continue et admette une dérivée finie et déterminée uniquement par l'équation

$$(1) \qquad f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x+k)}{h-k},$$

les quantités h et k tendant vers zéro d'une manière absolument quelconque; alors la fonction $f'(x)$ est continue dans l'intervalle F. Ce théorème n'est pas en contradiction avec les remarques de M. *Outis* (p. 126), car la fonction continue définie par les équations $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$, admet bien une dérivée discontinue et déterminée pour $x = 0$, si l'on pose

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\left(h \sin \frac{1}{h}\right);$$

mais on voit aisément que l'expression

$$Q = \frac{f(h) - f(k)}{h-k} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - k^2 \sin \frac{1}{k}}{h-k}$$

converge vers une limite différente de zéro, si les quantités h et k deviennent infiniment petites d'une manière convenable. En effet, soit

$$h = \frac{1}{u}, \qquad k = \frac{1}{u+v};$$

on a évidemment

$$Q = \frac{(u+v)^2 \sin u - u^2 \sin(u+v)}{uv(u+v)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{v}{u}}\left[\sin u \, \frac{1-\cos v}{v} + \frac{2\sin u}{u} + \frac{v\sin u}{u^2} - \cos u \, \frac{\sin v}{v}\right].$$

Si maintenant on fait croître au delà de toute limite positive les quantités u et $\frac{1}{v}$, on a sensiblement $Q = -\cos u$. Soit, par exemple, $u = (2r+1)\pi$, r étant un entier positif devenant de plus en plus grand; il s'ensuit $\lim Q = 1$. Donc, si l'on définit la dérivée $f'(x)$ par l'équation générale (1), la fonction $f(x)$ définie par M. *Outis* n'a pas de dérivée bien déterminée pour $x = 0$.

KNESER (Dorpat).

Nous avons reçu de M. *Rosace*, pendant que la première réponse était à l'impression, une réponse qui citait la même fonction $x^2 \sin \frac{1}{x}$, et faisait remarquer qu'elle présentait une discontinuité *de seconde espèce* pour $x = 0$.

LA RÉDACTION.

395. (JOSEPH GILLET). *Deuxième réponse.* — Le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & 1+\alpha_2, & 1, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 1, & \dots & \dots & 1+\alpha_p \end{vmatrix}$$

est une fonction entière symétrique de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, qui s'annule pour $\alpha_i = 0$, $\alpha_k = 0$. Par conséquent

$$D = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \left[1 + c\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_p}\right)\right],$$

c désignant un facteur numérique. Substituant $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_p}$ au lieu de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et multipliant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, on obtient

$$E = \begin{vmatrix} \alpha_1+1, & \alpha_1, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_1 \\ \alpha_2, & \alpha_2+1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_p, & \alpha_p, & \alpha_p, & \ldots, & \alpha_p+1 \end{vmatrix} = 1 + c(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p).$$

Le facteur c est égal à 1, parce que le déterminant E se réduit à α_1+1 si l'on fait $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_p = 0$.

En écrivant $\frac{\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}, \ldots, \frac{\alpha_p}{\beta_p-\alpha_p}$ à la place de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, et multipliant par le produit $(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\ldots(\beta_p-\alpha_p)$, la dernière équation donne

$$F = \begin{vmatrix} \beta_1, & \alpha_1, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_p, & \alpha_p, & \ldots & \ldots, & \beta_p \end{vmatrix}$$
$$= (\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\ldots(\beta_p-\alpha_p)\left[1+\frac{\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}+\ldots+\frac{\alpha_p}{\beta_p-\alpha_p}\right].$$

Le déterminant proposé par M. Gillet est un cas spécial du déterminant F. A. HURWITZ (Zurich).

398. (E.-M. LÉMERAY). — Quand m et n sont deux nombres entiers et positifs dont le premier est le plus grand, on sait que le coefficient du binome $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$ est entier. Dans le cas où $m=p$ est un nombre premier, le numérateur est divisible par p, tandis que le dénominateur est premier avec p; donc $\frac{1}{p}\binom{p}{n}$ est un nombre entier (*voir* par exemple Lejeune-Dirichlet, *Zahlentheorie*, § 20). Cette proposition connue et celle de M. Lémeray ne sont que des corollaires d'un théorème plus général que voici Si p est un nombre premier, satisfaisant aux inégalités $m-n+1 \leqq p \leqq m$ et $p>n$, $\binom{m}{n}$ est divisible par p. La démonstration reste la même.

J.-L.-W.-V. JENSEN (Copenhague).

413. (G. DE ROCQUIGNY). — *Deuxième réponse.* — M. Dujardin, dans sa Note p. 269, a demandé si une démonstratton a été

donnée de la proposition de Fermat sur la somme de trois nombres triangulaires. Il y en a une de Gauss fondée sur l'expression de n tirée de l'équation

$$8n+3=(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2.$$

H. Brocard.

417. (P.-F. Teilhet). — Le théorème énoncé dans cette question est exact si les facteurs $\alpha_k^2+\beta_k^2$ sont des nombres premiers inégaux, et il ne l'est qu'à cette condition. En effet, le produit des deux premiers facteurs de cette forme est, d'après l'identité de Fibonacci, la somme de deux carrés de deux manières différentes; ces deux sommes multipliées respectivement par le troisième facteur donnent 2^2 décompositions et ainsi de suite; s'il y a n facteurs, le nombre des décompositions est 2^{n-1}. D'autre part, Gauss a démontré ce théorème : « Si $N=A^a B^b C^c\ldots$, A, B, C... étant des diviseurs premiers différents, tous de la forme $4m+1$ (par suite décomposables d'une seule manière en deux carrés), et $a, b, c\ldots$ des entiers positifs, et si l'on fait $\omega=(a+1)(b+1)(c+1)\ldots$, le nombre des décompositions de N en deux carrés est $\frac{\omega}{2}$ lorsque N n'est pas un carré, et $\frac{\omega-1}{2}$ lorsque N est un carré. » Or, dans le cas, $a=b=c=\ldots=1$; donc $\omega=2^n$; et comme le facteur A^2 ne modifie pas le nombre des décompositions, ce nombre est 2^{n-1}. Ce qui concorde bien avec le nombre des décompositions obtenues par l'emploi répété de l'identité de Fibonacci. Si les facteurs $\alpha_k^2+\beta_k^2$ n'étaient pas premiers, ils seraient généralement décomposables eux-mêmes de diverses manières en deux carrés et le nombre des décompositions de N en deux carrés serait supérieur à 2^{n-1}.

E. Fauquembergue.

Nous avons reçu plusieurs autres réponses, mais aucune ne donnait aussi nettement la condition *nécessaire et suffisante* pour la vérité du théorème.

La Rédaction.

Le théorème est énoncé dans les *Recherches arithmétiques de Gauss* (trad. Poullet-Delisle, p. 157, note). A. Goulard.

Voir plus loin (p. 371) ma réponse aux questions 459 et 460.

Paul Tannery.

445. (E. Lemoine). — *Deuxième réponse.* — Si a est le plus petit nombre, on doit avoir : $a(a+1)(a+2)=kx^3$.

1° Si a est impair, le premier nombre se compose de trois facteurs premiers entre eux, et comme de *trois* nombres consécutifs *un seul* peut être un cube, il restera deux facteurs dont le produit donnera pour k un nombre non premier, sauf si $a = 1$; mais alors ni $a + 1$ ni $a + 2$ ne forment un cube.

2° Si a est pair, on a, en posant $a = 2a'$,

$$4a'(a' + 1)(2a' + 1) = kx^3;$$

a', $(a' + 1)$, $(2a' + 1)$ sont premiers entre eux. Or x doit contenir 2 en facteur, car k nombre premier ne peut égaler 4. Si $a' = 2a''$, $8a''(2a'' + 1)(4a'' + 1) = kx^3$, a'', $(2a'' + 1)$, $(4a'' + 1)$ sont premiers entre eux; donc, comme dans le premier cas, il ne peut y avoir de solutions que si $a'' = 1$, et cela n'en donne point. Si $a' = 2a'' + 1$,

$$8(a'' + 1)(2a'' + 1)(4a'' + 3) = kx^3;$$

le même raisonnement exige : $a'' + 1 = 1$, ce qui *fournit la seule solution du problème :* $3 \times 8 = kx^3 = 2 \times 3 \times 4$.

ELLING HOLST (Christiania), P.-F. TEILHET,
CARL STÖRMER (Christiania).

M. FAUQUEMBERGUE a envoyé également une solution simple, mais qui s'appuie sur des considérations beaucoup moins élémentaires.

456. (CLÉRY). — *Deuxième réponse* (*addition*). — Le théorème d'Yvon Villarceau est encore démontré dans le *J. E.*, p. 335; 1877, ainsi que dans le *J. E.* de M. Vuibert, p. 142; 1889.

A. GOULARD.

459. (E. LEMOINE). — D'après la Note de Gauss que j'ai citée dans ma réponse à la question 417 (p. 369), le plus petit nombre dont le carré est de n façons différentes la somme de deux carrés est de la forme $N = 5^\alpha . 13^\beta . 17^\gamma \ldots$ avec la condition

$$\tfrac{1}{2}(2\alpha + 1)(2\beta + 1)(2\gamma + 1)\ldots - \tfrac{1}{2} = n.$$

(J'écris $-\frac{1}{2}$ et non $+\frac{1}{2}$, parce que Gauss compte pour une la décomposition $N^2 + 0$, ce que ne fait pas M. Lemoine). Cette condition peut s'écrire

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1)(2\gamma + 1)\ldots = 2n + 1.$$

On en déduit

$$\begin{array}{llll} \text{pour } n=2, & N=5^2 & \text{ou} & 25, \\ \text{»} \quad n=3, & N=5^3 & \text{ou} & 125, \\ \text{»} \quad n=4, & N=5.13 & \text{ou} & 65, \\ \text{»} \quad n=5, & N=5^5 & \text{ou} & 3125, \ldots. \end{array}$$

A. GOULARD.

459 et **460**. (E. LEMOINE). — Les questions de ce genre ont été complètement résolues par Fermat (*Obs. sur Dioph.*, III, 22). Ce n'est d'ailleurs pas 65, mais 25 qui est minimum comme hypoténuse de deux façons différentes

$$\overline{25}^2 = \overline{7}^2 + \overline{24}^2 = \overline{15}^2 + \overline{20}^2.$$

C'est de même 125 qui est minimum comme hypoténuse de trois façons différentes

$$\overline{125}^2 = \overline{35}^2 + \overline{120}^2 = \overline{44}^2 + \overline{117}^2 = \overline{75}^2 + \overline{100}^2.$$

Enfin c'est 65 qui est minimum comme hypoténuse de quatre façons différentes

$$\overline{65}^2 = \overline{16}^2 + \overline{63}^2 = \overline{25}^2 + \overline{60}^2 = \overline{33}^2 + \overline{56}^2 = \overline{39}^2 + \overline{52}^2.$$

Voici d'ailleurs la règle de Fermat pour former un nombre qui soit de n façons différentes la somme de deux carrés. Prenez tous les facteurs premiers de $2n$, en répétant ceux qui sont égaux; retranchez l'unité de chacun d'eux; soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ les restes (égaux ou inégaux) et $p_1, p_2, p_3, \ldots$ des nombres premiers *différents* entre eux et de la forme $4m+1$; le nombre $p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\ldots.$ satisfera à la condition proposée. Il s'ensuit que si l'on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 1$, et qu'il y ait q facteurs, on aura $n = 2^{q-1}$, ce qui suffit au reste pour répondre aussi à la question **417**.

PAUL TANNERY.

Les questions 459 et 460, comme nous le voyons par le très grand nombre de réponses reçues, étaient très familières à tous les géomètres qui s'occupent un peu spécialement des nombres. Parmi toutes ces solutions, du reste, identiques à des détails de forme près, nous nous sommes borné à en choisir une comme type, nous contentant de citer les autres qui sont, pour 459, de MM. BÉLIGNE, E. BRAND, BROCARD, CURJEL (Chester), DUJARDIN, FAUQUEMBERGUE, G. FRIOCOURT, ITALO GHERSI (Gênes), TEILHET.

LA REDACTION.

460. (E. LEMOINE). — Oui; car, d'après la Note de Gauss déjà citée (*voir* mes réponses aux questions **417** et **459**), si l'on décompose $2n+1$ en facteurs (premiers ou non) $2\alpha+1$, $2\beta+1$, ..., tout nombre de la forme $2^m.P.a^\alpha.b^\beta...$ a son carré décomposable de n façons différentes en une somme de deux carrés; on désigne ici par P un produit de facteurs premiers tous de la forme $4k-1$, et par a, b, ... des nombres premiers de la forme $4k+1$.

A. GOULARD.

MM. BÉLIGNE, BRAND, CURJEL (Chester) FAUQUEMBERGUE ont encore répondu d'une façon analogue à la question 460; nous citerons quelques résultats numériques ajoutés par M. Brand.

LA RÉDACTION.

Le plus petit nombre dont le carré est de *six* façons différentes la somme de deux carrés est 845. On a

$$\begin{aligned}\overline{845}^2 &= \overline{836}^2+\overline{123}^2=\overline{676}^2+\overline{507}^2=\overline{780}^2+\overline{325}^2\\ &=\overline{208}^2+\overline{819}^2=\overline{429}^2+\overline{728}^2=\overline{116}^2+\overline{837}^2.\end{aligned}$$

Le plus petit nombre dont le carré est de *sept* façons différentes la somme de deux carrés est 325. On a

$$\begin{aligned}\overline{325}^2 &= \overline{36}^2+\overline{323}^2=\overline{80}^2+\overline{315}^2=\overline{204}^2+\overline{253}^2=\overline{260}^2+\overline{195}^2\\ &=\overline{280}^2+\overline{165}^2=\overline{300}^2+\overline{125}^2=\overline{312}^2+\overline{91}^2.\end{aligned}$$

Le plus petit nombre dont le carré est de *treize* façons différentes la somme de deux carrés est 1105. On a

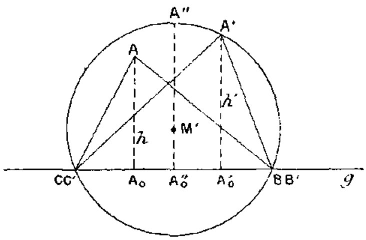
$$\begin{aligned}\overline{1105}^2 &= \overline{1104}^2+\overline{47}^2=\overline{744}^2+\overline{817}^2=\overline{576}^2+\overline{943}^2\\ &=\overline{264}^2+\overline{1073}^2=\overline{1100}^2+\overline{105}^2=\overline{700}^2+\overline{855}^2\\ &=\overline{1020}^2+\overline{425}^2=\overline{520}^2+\overline{975}^2=\overline{952}^2+\overline{561}^2\\ &=\overline{272}^2+\overline{1071}^2=\overline{1092}^2+\overline{169}^2=\overline{468}^2+\overline{1001}^2\\ &=\overline{884}^2+\overline{663}^2.\end{aligned}$$

Au-dessous du nombre 1105, il n'y a pas de nombre dont le carré est la somme de deux carrés de 5, 8, 9, 10, 11 ou 12 façons différentes.

Si l'on impose la condition que les carrés composants soient premiers entre eux, 65 est le plus petit nombre dont le carré est de *deux* façons différentes et la somme de deux carrés 1105 est le plus petit nombre dont le carré est de *quatre* façons différentes la somme de deux carrés. Au-dessous de 1105 il y a 131 nombres dont les carrés sont décomposables en sommes de deux carrés premiers entre eux, 94 ont leurs carrés décomposables d'une seule manière et 37 de deux façons différentes. E. Brand.

462, 463, 464. (*Muller*). — *Deuxième réponse.* — Soient A, B, C les sommets du triangle donné; choisissons le côté BC comme axe d'affinité g, et soit A′BC un triangle en affinité avec ABC. On suppose que les points correspondants sont situés du même côté de l'axe. Cet axe g et la paire A, A′ de points correspondants définissent une certaine affinité. Au cercle circonscrit au triangle A′BC correspond une certaine ellipse cir-

Fig. 1.



conscrite au triangle ABC (les tangentes en deux points correspondants, tels que A et A′, se coupent sur l'axe). On obtient ainsi une infinité de cercles en faisant varier A′ dans le demi-plan mené par g et par le point A. A chacun de ces cercles correspondent une infinité d'ellipses obtenues en faisant varier A′ sur le cercle considéré. On engendre ainsi toutes les ellipses circonscrites à ABC en construisant les figures affines de tous les cercles passant par B et C. Les aires de deux figures affines sont entre elles dans le rapport des distances de deux points correspondants à l'axe. Soient J′ l'aire du cercle A′BC, J l'aire de l'ellipse correspondante, h' et h les distances des deux points correspondants A′ et A à l'axe; on aura

$$\text{(1)} \qquad J = J' \frac{h}{h'},$$

A′ se déplaçant sur le cercle A′BC, J′ et H sont constants, h' variable. J passe par son minimum quand h est maximum, ce qui arrive quand A′ est en A″. En ce point la tangente au cercle est parallèle à l'axe, de même aussi la tangente au point A à l'ellipse correspondante.

Au cercle A′BC correspondent une infinité d'ellipses passant par A, B, C, et parmi ces dernières celle dont la tangente en A est parallèle au côté opposé BC a la plus petite surface. Plus généralement, l'ellipse de surface minima circonscrite au triangle ABC a, au point A, une tangente parallèle au côté BC. Ceci subsiste, évidemment, pour les sommets B et C; d'où ce résultat :

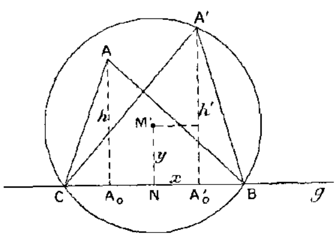
L'ellipse de surface minima circonscrite à un triangle est celle dont les tangentes aux sommets sont parallèles aux côtés opposés. Le centre de cette ellipse est le centre de gravité du triangle, les médianes sont des diamètres. Le cercle A′BC, de centre M′, correspondant à cette ellipse, jouit donc également de cette propriété, que les tangentes aux sommets A, B, C sont parallèles aux côtés opposés du triangle A′BC. Ce dernier est, par conséquent, équilatéral. Si l'on fait $BC = 2a$, il viendra

$$h' = a\sqrt{3}, \qquad J' = \frac{4a^2}{3}\pi,$$

d'où $J = \frac{4a^2}{3}\pi \times \frac{h}{a\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}ah = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\Delta$, Δ étant la surface du triangle ABC, pour l'aire minima cherchée.

On peut encore raisonner ainsi : à la circonférence A′BC

Fig. 2.



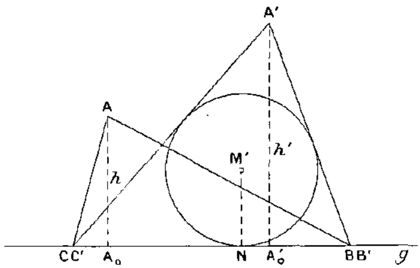
correspond une ellipse circonscrite au triangle donné ABC, dont l'aire J est déterminée par la formule (1). Soit N le milieu de BC, de sorte que $CN = NB = a$, et faisons $NM' = y$, $NA'_0 = x$; on aura

$$J = h\pi \frac{a^2 + y^2}{y + \sqrt{a^2 + y^2 + x^2}},$$

a et h sont constants, x et y variables. En cherchant les valeurs de ces variables qui correspondent à un minimum de J, on trouve $x = 0$, $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$, d'où, pour ce minimum, l'expression $J = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} ah = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \Delta$, comme précédemment.

Soit ABC le triangle proposé; choisissons BC comme axe d'affinité, et soient A′BC un triangle quelconque en affinité avec ABC, M′ le centre et q le rayon du cercle inscrit dans ce

Fig. 3.



triangle. Ce cercle et l'ellipse affine correspondante touchent l'axe au même point N. Faisons $CN = p$, $CB = 2a$, il viendra $A'A'_0 = h' = \frac{2pq(2a - p)}{p(2a - p) - q^2}$, et l'aire de l'ellipse correspondant au cercle inscrit est égale à

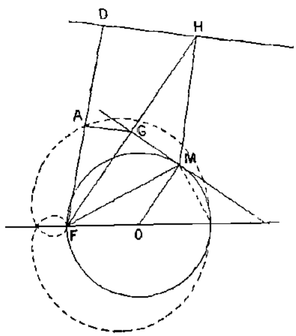
$$J = q^2 \pi \frac{h}{h'} \qquad \text{ou} \qquad J = \pi \frac{h}{2}\left[q - \frac{q^3}{p(2a - p)}\right].$$

Les valeurs de p et de q, qui correspondent au maximum de cette surface, sont respectivement $p = a$, $q = \frac{a}{\sqrt{3}}$; le triangle A′BC est, dans ce cas, équilatéral. L'aire maxima a pour expression $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} ah = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \Delta$, Δ étant la surface du triangle donné ABC. De ce qui précède résulte encore que l'ellipse d'aire minima circonscrite à un triangle et l'ellipse d'aire maxima inscrite dans le même triangle sont concentriques, semblables et semblablement placées, car ces deux ellipses sont les figures affines de deux cercles concentriques.

L'ellipse d'aire minima circonscrite à un triangle et l'ellipse d'aire maxima inscrite dans le même triangle ont le même centre M qui est le centre de gravité du triangle considéré. La différence en question est donc un minimum $\left(= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \Delta\right)$, quand le point M coïncide avec le centre de gravité du triangle.

WEILER (Zurich).

469. (E.-N. BARISIEN). — Soit, sur une circonférence O de rayon R, le foyer F d'une parabole tangente en M à cette circonférence. Prenons le symétrique H du foyer par rapport à la tangente en M; la perpendiculaire HD sur MH est la directrice de la



parabole, la perpendiculaire FD sur HD en est l'axe, et le milieu A de FD en est le sommet. Désignons par ρ la longueur FA et par ω l'angle AFO; en menant la tangente AG au sommet et observant que les trois angles AFG, GFM, MFO sont égaux à $\frac{\omega}{3}$, on obtient immédiatement pour l'équation du lieu du sommet, en coordonnées polaires, $\rho = 2R\cos^3\frac{\omega}{3}$.

L'élimination de ρ et ω entre cette équation et les relations $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$ (élimination qui se fait très simplement en utilisant l'identité $\cos\omega = 4\cos^3\frac{\omega}{3} - 3\cos\frac{\omega}{3}$), donne pour l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires

$$2(2x^2 + 2y^2 - Rx)^3 = 27R^2(x^2 + y^2)^2.$$

La courbe est donc du *sixième* degré. Elle a la forme d'un limaçon à point double réel $\left(-\frac{R}{4}, 0\right)$; elle est tangente au cercle, au point F et au point qui lui est diamétralement opposé.

L'aire de boucle rentrante est, à cause de la symétrie par rapport à l'axe polaire, donnée par la formule

$$u = 2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\rho^2 d\omega}{2} = 4R^2 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^6\frac{\omega}{3}\, d\omega = \frac{R^2}{8}(5\pi - 9\sqrt{3}).$$

L'aire totale est égale à

$$2\int_0^{\pi} \frac{\rho^2 d\omega}{2} = 4R^2 \int_0^{\pi} \cos^6\frac{\omega}{3}\, d\omega = \frac{R^2}{8}(10\pi + 9\sqrt{3}).$$

H. Brocard, E. Duporcq, E. Fauquembergue, P. Hendlé, Elling Holst (Christiania), E. Mosnat, P. Tannery.

Les solutions, au fond, tout à fait identiques, ont été fondues en une seule; nous ne le faisons observer que pour expliquer la différence que les auteurs trouveraient entre $\frac{R^2}{8}(10\pi + 9\sqrt{3})$ et le résultat qu'ils avaient donné, parce que plusieurs avaient des erreurs matérielles de détail dans le signe attribuable à l'aire de la boucle et dans les limites des intégrales définies. La Rédaction.

472. (G. Koenigs). — Les courbes d'irrationalité 3 ont été étudiées par Küpper (*Ueber die Curve C_p^m von n^{ter} Ordnung und dem Geschlecht $p > 1$, auf welchem die einfachen Specialschaaren $g_2^1\, g_3^1$ vorkommen*; Prag. Abh, 7e série, III; 1889) et par Bobek (*Ueber Dreischaarcurven*, Wien Ber. Bd. 98, p. 142-173; 1889). Quant aux courbes d'irrationalité quelconque, j'ai publié un *premier* Mémoire *Curve k-gonali* (*Ann. di Mat.*, S. II, t. XXI, p. 221-236; 1893), où l'on trouve aussi une Table des courbes d'irrationalité quelconque, appelées *courbes k-gonales typiques*, qui ont l'ordre maximum dans leur genre. J. Amodeo (Naples).

La question posée n'est autre chose que celle de la détermination sur une courbe des *systèmes spéciaux*, théorie qui a provoqué de très nombreux travaux en Allemagne et en Italie. En particulier, M. Castelnuovo a établi que si un système linéaire r fois infini découpe sur une courbe de genre p des groupes de

p' points, on a

$$p \leqq \lambda \left[p' - \frac{r+1}{2} - \lambda \frac{r-1}{2} \right].$$

où λ est le plus grand entier contenu dans $\dfrac{p'-r}{r-1}$, théorème établi par Halphen pour $r=3$.

On peut consulter à ce sujet : Nöther et Brill, *M. A.*, t. VII. — Halphen, *Sur la classification des courbes gauches* (*J. É. P.*, Cahier 52, p. 31). — Castelnuovo, *Actes de l'Académie de Turin*, vol. XXIV (*Rend. Acc. d. Lincei;* août et sept. 1889). — Fano, *Mémoires de l'Acad. de Turin*, série II, t. XLIV, 1893. — Bertini, *Actes de l'Acad. de Turin*, t. XXVI.

474. (Louis Rossel). — *Deuxième réponse.* — Nous avons oublié, t. II, p. 275, de mentionner que nous avions encore d'autres réponses et de nommer leurs auteurs, mais, comme elles reviennent à celles que nous avons données, nous nous contenterons de réparer notre oubli en disant que les réponses de MM. Vicaire, W.-W. Beman (Ann-Arbor, Michigan). A.-S. Ramsey (Edimbourg), E.-B. Escott (Ann-Arbor, Michigan) arrivent à la même forme de conclusion que MM. C. Cailler et Sadier (*voir* p. 276). La Rédaction.

480, 481. (M. De Montcheuil).

Nous avons reçu des réponses de MM. *Quemquæris*, P. Puig, G. Cellerier, Cailler, P. Rivereau; mais ces questions étant résolues dans les Traités d'Analyse un peu développés, où l'on donne la méthode à employer pour intégrer les équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre (*voir*, par exemple, H. Laurent, *Traité d'Analyse*, t. VI, Chap. I), nous nous bornons à une brève indication. La Rédaction.

Si l'on pose $x_1 + p_1 z = a_1, \ldots, x_n + p_n z = a_n$, on aura $p_1 = \dfrac{a_1 - x_1}{z}, \ldots, p_n = \dfrac{a_n - x_n}{z}$, et en remplaçant dans l'équation proposée $p_1, \ldots, p_2, p_n$ par les valeursprécédentes, on aura

$$F\left[a_1, a_2, a_n, \sqrt{z^2 + (a_1 - x_1)^2 + \ldots + (a_n - x_n)^2}\right] = 0.$$

Cette équation détermine z en fonction de x_1, x_2, x_n et des n constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Elle donne donc l'intégrale complète de l'équation proposée, d'après la méthode de Jacobi et Mayer. P. Puig.

484. (C.-A. LAISANT). — I. Une première réponse est fournie par le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Pour qu'un polynome* X *jouisse de la propriété requise, il faut et il suffit qu'il prenne des valeurs entières pour* $m+1$ *valeurs entières et consécutives de* x.

En effet, les différences $m^{\text{ièmes}}$ d'un polynome algébrique, de degré m, sont constantes; il suffit donc d'en connaître une seule. Or celle-ci est déterminée par $m+1$ valeurs de X, fournies par $m+1$ valeurs entières et consécutives de x. Donc, si celle-ci est entière, les valeurs de X d'où elle dérive le sont aussi, et il s'ensuit que toutes les valeurs des différences intermédiaires et finalement de X, successivement obtenues par la répétition de cette constante, le sont aussi. C. Q. F. D.

Le point de départ e des $m+1$ valeurs consécutives de x peut être quelconque; mais le calcul des coefficients du polynome

$$(1) \qquad X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

écrit dans la forme ordinaire, devient plus simple, sans rien ôter d'essentiel à la généralité des conclusions, si l'on suppose $e=0$. Les valeurs initiales de x sont alors : 0, 1, 2, 3, ..., m, auxquelles correspondent les $m+1$ valeurs initiales, quelconques mais entières, ..., X_0, X_1, X_2, X_3, ..., X_m, respectivement.

II. Avec ces données on calculera les valeurs numériques des coefficients a_i, dont la détermination est unique, en fonction des X_i. Les procédés les plus élémentaires de l'élimination permettent de reconnaître immédiatement, dans le cas actuel [1], que :

THÉORÈME II. — *Les coefficients rationnels qui se présentent dans la composition du polynome* X, *tel qu'il est caractérisé, ne peuvent avoir pour dénominateurs que le nombre* $m!$ *ou l'un de ses diviseurs.*

III. Cette conséquence ressort aussi manifestement d'une autre solution, fort élégante, de la question, que M. Camille

---

[1] En s'appuyant sur une propriété des déterminants *potentiels*, que j'ai démontrée dans le tome CXX (1895) des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, page 408.

Jordan, invité par moi à l'étudier de son côté, a bien voulu me fournir. La voici :

« Tout polynome algébrique de degré m, entier en x, peut être écrit sous la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} X &= A_0 + A_1 x + A_2\frac{x(x-1)}{2} + A_3\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} + \ldots \\ &\quad + A_m\frac{x(x-1).(x-2)\ldots[x-(m-1)]}{m!}. \end{aligned}\right.$$

Il est évident, à première vue, qu'il faut et qu'il suffit, pour que X jouisse de la propriété requise, que les $m+1$ coefficients A_i soient entiers. »

De ces coefficients A_i on passe, d'ailleurs, *par de simples additions*, à ceux a_i de la forme (1) ; ce qui confirme immédiatement la conclusion formulée par le théorème II, obtenu plus haut d'une autre façon, très simple aussi. La composition de ces coefficients a_i mérite de fixer l'attention.

IV. Pour abréger l'écriture, convenons de désigner par le symbole $(m!)$ un diviseur quelconque de $m!$, et par le symbole (X_n) le développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ du binome $(X-1)$, dans lequel, les coefficients newtoniens étant conservés, on affectera la lettre X d'*indices*, au lieu d'*exposants* de puissances, égaux à ces derniers. On aura ainsi, par exemple, pour fixer les idées : $(X_4) = X_4 - 4X_3 + 6X_2 - 4X_1 + X_0$.

En se rappelant la signification attribuée (§ I) aux X_i, il est aisé de voir que les A_i, qui figurent dans la forme (2), ont pour valeurs successives

$$A_0 = X_0; \qquad A_1 = X_1 - X_0;$$
$$A_2 = X_2 - 2X_1 + X_0; \qquad A_3 = X_3 - 3X_2 + 3X_1 + X_0; \quad \ldots,$$

ou, d'après le symbole ci-dessus,

$$A_0 = X_0; \qquad A_1 = (X_1); \qquad A_2 = (X_2);$$
$$A_3 = (X_3); \qquad \ldots; \qquad A_m = (X_m).$$

Cela posé, pour revenir de la forme (2) à la forme (1), qui est la plus habituelle, si l'on groupe ensemble, dans la formule (2), après l'avoir ainsi développée, les coefficients qui y affectent une même puissance de la variable x, et qu'on identifie leur somme algébrique avec le coefficient a_i qui affecte la même puissance de x dans la formule (1), on obtient les égalités ci-après, qui déterminent les a_i, savoir

$$
(\mathrm{M})\quad \left\{
\begin{aligned}
&a_m = \frac{(\mathrm{X}_m)}{m!}, \qquad a_{m-1} = \frac{(\mathrm{X}_{m-1})}{m-1!} - \frac{\mathrm{X}_m}{(m!)};\\
&a_{m-2} = \frac{(\mathrm{X}_{m-2})}{m-2!} - \frac{(\mathrm{X}_{m-1})}{(m!)} + \mathrm{K}\frac{(\mathrm{X}_m)}{(m!)}, \qquad \ldots;\\
&a_2 = \frac{(\mathrm{X}_2)}{2} - \frac{(\mathrm{X}_3)}{(m!)} + \ldots \mp \mathrm{K}'\frac{(\mathrm{X}_{m-2})}{(m!)} \pm \mathrm{K}''\frac{(\mathrm{X}_{m-1})}{(m!)} \mp \mathrm{K}'''\frac{(\mathrm{X}_m)}{(m!)};\\
&a_1 = \frac{(\mathrm{X}_1)}{1} - \frac{(\mathrm{X}_2)}{2} + \frac{(\mathrm{X}_3)}{3} - \ldots \pm \frac{(\mathrm{X}_{m-2})}{m-2} \mp \frac{(\mathrm{X}_{m-1})}{m-1} \pm \frac{(\mathrm{X}_m)}{m};\\
&a_0 = \mathrm{X}_0.
\end{aligned}
\right.
$$

On remarquera, dans ces expressions, où ne figurent que les développements-binomes (X_i), avec des diviseurs de $m!$, ou $m!$ lui-même, et des coefficients K_i, que les fonctions X_i s'y succèdent en ordre régulier et en nombres croissant chaque fois d'une unité, avec une alternance régulière des signes + et —, et qu'elles commencent par celle de ces fonctions qui porte le même indice que le coefficient a_i lui-même. Quant aux coefficients K_i, ce sont toujours des nombres entiers, résultant, après réduction au même dénominateur, de la somme algébrique des numérateurs de fractions dont les dénominateurs individuels sont, exclusivement, des diviseurs $(m!)$ de

$$m! = 1.2.3\ldots m \quad (^1).$$

---

(1) Lorsque le point de départ e des valeurs initiales et consécutives de x n'est pas nul, les formules qu'on obtient offrent une symétrie tout aussi remarquable. L'espace ne permet pas de les écrire ici. Je me borne donc à dire que, dans ce cas :

1° Le coefficient a_m de x^m reste tel quel, indépendant de e;

2° Tous les autres coefficients subsistent; mais il s'y adjoint un, deux, ..., m termes, identiques à ceux des formules (M), dont chacun est multiplié par e, e^2, e^3, ..., e^m, etc. Il y a d'autres conséquences sur lesquelles je ne puis m'étendre.

Application. — Soit $m = 4$; les formules (M) deviennent

$$(\mathrm{N})\quad \left\{\begin{aligned} a_4 &= \frac{(\mathrm{X}_4)}{2.3.4}, \qquad a_3 = \frac{(\mathrm{X}_3)}{2.3} - \frac{(\mathrm{X}_4)}{4},\\ a_2 &= \frac{(\mathrm{X}_2)}{2} - \frac{(\mathrm{X}_1)}{3} + 11\,\frac{(\mathrm{X}_4)}{2.3.4},\\ a_1 &= \frac{(\mathrm{X}_1)}{1} - \frac{(\mathrm{X}_2)}{2} + \frac{(\mathrm{X}_3)}{3} - \frac{(\mathrm{X}_4)}{4} \qquad \text{et} \qquad a_0 = \mathrm{X}_0,\end{aligned}\right.$$

Si les valeurs données des X_i sont, pour $x = 0, 1, 2, 3, 4$, $\mathrm{X}_0 = -1$, $\mathrm{X}_1 = 0$, $\mathrm{X}_2 = 1$, $\mathrm{X}_3 = 2$, $\mathrm{X}_3 = 2$, $\mathrm{X}_4 = 4$, respectivement, et qu'on introduise ces valeurs dans les formules (N), on trouve pour la valeur de X,

$$\mathrm{X} = \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^3}{4} + 11\,\frac{x^2}{2.3.4} + 3\,\frac{x}{4} - 1,$$

qui satisfait à l'énoncé. On en tire, par exemple, les valeurs 9, 20, 43, 219, ... qui correspondent, respectivement, à $x = 5$, 6, 7, 10, ..., et qui sont toutes entières, etc.

E. DE JONQUIÈRES.

Tout polynome algébrique de degré n peut se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1\frac{x}{1} &+ \ldots\\ &+ a_k\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} + \ldots\\ &+ a_n\frac{x\ldots(x-n+1)}{n!}.\end{aligned}\right.$$

En écrivant que $f(x)$ prend des valeurs entières pour $x = 0$, $1, 2, \ldots, n$, on trouve comme conditions successives que a_0, $a_1, \ldots, a_n$, doivent être des nombres entiers. Réciproquement, si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers, comme pour toute valeur entière de x le rapport de $x(x-1)\ldots(x-k+1)$ à $k!$ est un nombre entier, on voit que $f(x)$ prend une valeur entière.

La solution générale de la question posée est donc donnée par la formule (1), où $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ sont des nombres entiers arbitraires. En l'ordonnant en x, on aura

$$f(x) = \frac{a_n}{n!}x^n - \frac{\frac{n-1}{2}a_n - a_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

VASCHY.

La question posée revient à la suivante un polynome entier en x à coefficients entiers peut-il être divisible par un entier donné m, quelle que soit la valeur entière donnée à x, sans que tous les coefficients soient divisibles par m? J'ai résolu complètement [1] cette question en montrant que le *seul* théorème arithmétique dont on ait à se servir pour en avoir la solution dans chaque cas est le *théorème de Fermat pour les modules premiers;* on utilise en outre, bien entendu, les principes élémentaires de la théorie de la divisibilité. E. BOREL.

La détermination complète des polynomes à coefficients rationnels prenant des valeurs entières pour toutes les valeurs entières de la variable a été faite par M. Hilbert dans son Mémoire sur la théorie des formes algébriques (*M. A.*, t. XXXVI, p. 512; 1890). J. FRANEL (Zurich).

485. (J. FRANEL). — Posons, pour abréger, $1 - 2x = \varphi(x)$ et désignons par z une variable, par n un nombre entier positif quelconque. Nous avons l'identité, facile à vérifier,

$$(1)\quad e^{nz\varphi(x)} + e^{nz\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)} + \ldots + e^{nz\varphi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^z - e^{-z}}\, e^{z\varphi(nx)}.$$

En observant que $\dfrac{z}{e^z - e^{-z}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k (2^{2k-1} - 1) B_k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$,

$B_0 = -1$, $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ... étant les nombres de Bernoulli, nous obtenons

$$\frac{1}{n}\,\frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^z - e^{-z}} = 1 + \psi_1(n)\frac{z^2}{3!} + \psi_2(n)\frac{z^4}{5!} + \psi_3(n)\frac{z^6}{7!} + \ldots,$$

(1) *Introduction à la Théorie des nombres et à l'Algèbre supérieure* (Note I : Sur le théorème de Fermat); Nony et C^{ie}, 1895.

$\psi_k(n)$ désignant une fonction entière de n^2, savoir

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\psi_k(n) = n^{2k} &- (2k+1)_2\, 2(2^1-1)\,B_1\, n^{2k-2}\\ &+ (2k+1)_4\, 2(2^3-1)\,B_2\, n^{2k-4}\\ &- (2k+1)_6\, 2(2^5-1)\,B_3\, n^{2k-6} + \ldots\end{aligned}\right.$$

Maintenant développons les deux membres de l'identité (1) suivant les puissances de z, et égalons les coefficients de z^r; nous trouvons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}& n^{r-1}\left\{[\varphi(x)]^r + \left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]^r + \ldots + \left[\varphi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right]^r\right\}\\ &= [\varphi(nx)]^r + \tfrac{1}{3}(r)_2\,\psi_1(n)\,[\varphi(nx)]^{r-2}\\ &\qquad + \tfrac{1}{5}(r)_4\,\psi_2(n)\,[\varphi(nx)]^{r-4} + \ldots\end{aligned}\right.$$

C'est l'équation générale demandée par M. Franel. En effet, la fonction $\varphi_1(x)$ étant définie par les équations

$$\varphi_1(x+1) = \varphi_1(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_1(x) = \varphi(x) \qquad \text{pour} \qquad 0 < x < 1,$$

l'équation (3) subsiste, si l'on remplace $\varphi(x)$ par $\varphi_1(x)$, comme on le voit aisément en écrivant $\dfrac{x}{n}$ au lieu de x. La fonction $f(x)$ de M. Franel est égale à $\frac{1}{2}\varphi_1(x)$. Pour $n = 1, 2, 3$, l'équation (3) donne bien les formules mentionnées par M. Franel.

A. Hurwitz (Zurich).

491. (L. Certo). — *Remarque.* — La *réponse,* publiée t. II, p. 278, ne donne pas ce que je désirais. Ces renseignements m'étaient connus; il n'en est pas de même de la question *précise* que j'avais en vue et dont je serai heureux d'avoir la solution. L. Certo (Palerme).

Nous devons constater que l'auteur de la réponse (p. 278) a fait remarquer lui-même que ses renseignements étaient loin d'être complets. Mais ils n'en présentaient pas moins un réel intérêt historique pour beaucoup de nos lecteurs, et c'est pourquoi nous n'avons pas hésité à les publier.

La Rédaction.

QUESTIONS.

672. **[I2]** Si : $a = 10^m - 1$, $b = 10^n - 1$; $n \gtreqless m$, le théorème suivant, vérifié pour $m = 1$ et $n = 1, 2, 3, 4$; pour $m = 2$ et $n = 2, 3$, etc. est-il vrai?

La période de la fraction décimale équivalente à $\frac{1}{a \times b}$ est composée de $a \times n$ chiffres

G. Ricalde (Merida, Yucatan).

673. **[A3b]** Soit posé, comme à l'ordinaire,

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!},$$

et soient deux équations

$$(1) \qquad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

$$(2) \qquad y^{C_m^n} + \beta_1 y^{(C_m^n - 1)} + \beta_2 y^{(C_m^n - 2)} + \ldots + \beta_{C_m^n - 1} y + \beta_{C_m^n} = 0,$$

liées par la condition que les racines de (2) sont les combinaisons n à n des racines de (1); je désire obtenir une formule qui donne les coefficients de (2) en fonction des coefficients de (1); on a, en particulier, $\beta_1 = (-1)^{n-1} p_n$,

$$\beta_2 = p_{n-1}\,p_{n+1} - p_{n-2}\,p_{n+2} + p_{n-3}\,p_{n+3} - \ldots \\ - (-1)^{k-1} p_{n-k}\,p_{n+k} + \ldots (-1)^{n-1} p_{2n}.$$

Je voudrais les autres. G. Ricalde (Merida, Yucatan).

674. **[R]** Une revue allemande a donné, il y a deux ou trois mois, le poids du cerveau de M. de Bismarck; l'article a été mentionné par le journal *le Temps;* on omet de dire comment cette quantité a pu être mesurée sur l'homme d'État. Sans proposer à nos Correspondants la solution exacte de ce problème, qui paraît difficile dans l'état actuel de la Science, je pose la question suivante, qui déjà ne semble pas aisée à résoudre : *Étant donnée une statue dont la matière n'est pas supposée*

homogène, déterminer exactement le poids de la tête sans la couper. Le solide à peser est bien défini par un plan dont la trace sur le cou peut être marquée à l'extérieur.

CH. RABUT.

675. **[V8]** Les *Œuvres complètes de Diderot* renferment deux écrits scientifiques : un résumé d'Acoustique, œuvre de seconde main évidemment, et un *Traité de la développante du cercle*, où la Géométrie infinitésimale est maniée avec autant d'aisance que dans les *Principes* de Newton ; ce traité contient, entre autres, une construction intéressante des racines de l'équation générale du troisième degré, basée sur la trisection empirique de l'angle. Pourrait-on me dire si son contenu est de l'invention de Diderot lui-même ou si l'on a affaire à une simple compilation, dont les matériaux auraient pu être aisément fournis par d'Alembert ? Il serait intéressant de savoir si la valeur mathématique de Diderot était ce que semblent indiquer de pareilles recherches, ou si elle était la même que celle de Voltaire, mort sans avoir compris que l'arc ne fût pas proportionnel à son sinus.

CH. RABUT.

676. **[I17a]** Dans l'étude des carrés formés par la somme de deux carrés, j'ai trouvé la formule générale

$$\begin{aligned}&[(2^{n-1-\alpha}5^{n-\beta}-1)\,10^n]^2+(10^n-2^\alpha 5^\beta)^2\\ &\quad=[(2^{n-1-\alpha}5^{n-\beta}-1)\,10^n+2^\alpha 5^\beta]^2,\end{aligned}$$

qui donne, pour chaque valeur de n, $2n$ solutions pour lesquelles $\alpha\beta=0$, avec $\alpha\neq\beta$, solutions que j'appelle *primitives*, et $n(n+1)-1$ solutions quelconques. Or, cette formule ne donne pas toutes les solutions de la question. Je désirerais savoir si quelque mathématicien l'a résolue d'une façon complète.

P.-F. TEILHET.

677. **[K14]** J'ai posé *comme exercice* dans le J. E., 1894, sous le n° 551, la question suivante : On donne six droites $a_1, \ldots, a_6$ rangées par ordre de grandeur. Combien peut-on faire, au maximum, de tétraèdres non superposables avec ces six droites ? Discuter le problème en montrant quels sont les seuls nombres possibles de tétraèdres que l'on peut former au-dessous du maximum suivant les relations de grandeur qui existent entre ces six droites. La discussion que je croyais avoir

faite quand j'ai proposé la question est erronée ; je la propose aux lecteurs de l'*Intermédiaire ;* je n'ai pu y arriver complètement.

E. LEMOINE.

678. **[V9]** J'ai lu dans un journal suédois (*Dagens Nyheter*, 29 mars 1895) la Notice suivante : « Il y a peu de temps, l'Institut de France a décerné le grand prix des Sciences mathématiques à trois auteurs de Mémoires extrêmement importants, savoir MM. Painlevé, Roger Liouville et Weingarten. Les deux auteurs français ont demandé l'insertion de leurs Mémoires dans les *A. M.*, par le motif qu'ils pourront ainsi attirer l'attention sur leurs découvertes, plus que si leurs Mémoires étaient publiés dans le *J. M.* Pour la même raison, M. Weingarten a demandé la publication de son Mémoire dans les *A. M.* et non dans le *Cr.* »

Cette Notice, dont je ne suis pas en état de contrôler l'exactitude, m'a suggéré l'idée qu'il serait d'un grand intérêt d'avoir des renseignements précis sur les lecteurs des différents journaux mathématiques les plus importants. Je me permets donc de poser la question suivante : Quels sont, abstraction faite des journaux *élémentaires*, les journaux mathématiques actuellement les plus répandus et quels sont les nombres respectifs de leurs abonnés dans les différents pays?

G. ENESTRÖM (Stockholm).

M. G. Eneström ayant posé la question, nous la transmettons à nos lecteurs, mais nous croyons bien qu'il n'y sera point répondu d'une façon un peu précise. Les seules personnes qui pourraient le faire — et encore chacune pour ce qui la concerne — sont les éditeurs ou les directeurs de ces publications, et nous doutons fort qu'il vienne de nombreuses réponses de ce côté.

LA RÉDACTION.

679. **[J2c]** La manière de compter les points étant celle du jeu de piquet à deux, pour le premier qui compte, on retire d'un jeu de 32 cartes les cartes inférieures, sept, huit et neuf; et des 20 cartes restantes, on tire, au hasard, 12 cartes. Quelle est la probabilité de compter 90 ou plus avec ces 12 cartes?

A. BOUTIN.

680. **[I19c]** La solution complète, en nombres entiers, de l'équation

$$X^3 + Y^3 = Z^3 + V^3$$

est-elle connue? On trouve, en dehors des solutions évidentes :

$$12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3, \qquad 16^3 + 2^3 = 15^3 + 9^3.$$

Je ne demande que des renseignements bibliographiques.

A. Boutin.

681. [I19a] La proposition suivante : « Tout carré entier peut toujours être décomposé en *quatre* triangulaires » est-elle exacte? G. de Rocquigny.

682. [H8f] Un correspondant pourrait-il me donner des renseignements, bibliographiques ou autres, me permettant de résoudre l'équation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + p = 0$$

(λ et p sont des fonctions de x et de y), à laquelle j'ai été amené par une question qui m'intéresse. De Montcheuil.

683. [K14d] Kinkelin est-il le premier qui ait publié la formule dite : formule prismoïdale à deux termes,

$$J = \frac{h}{4}(G + 3y),$$

où G représente une des bases et y une section à distance des $\frac{2}{3}$ de l'altitude h, à partir de l'autre base? Voir *Grunert's Archiv*, t. XXXIX, p. 181-186 (Kinkelin); t. LXIII, p. 440-443; 1879 (Sinram); et *Schlömilch's Zeitschrift*, t. XXIII, p. 412-414 (Becker).

Une démonstration élémentaire de cette formule a-t-elle été donnée dans quelque Traité français ou allemand ou dans quelque monographie? W.-W. Beman (Ann-Arbor, U. S. A.).

684. [K14d] Dans les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire* (Paris, 1872), E. Catalan (p. 330) dit, à propos de la formule prismoïdale ordinaire

$$V = \tfrac{1}{6}[B + B' + 4B'']H :$$

« Cette formule a été donnée par le célèbre professeur *Sarrus*. »

Quelque Correspondant voudrait-il fournir des renseignements à ce sujet? W.-W. Beman (Ann-Arbor, U. S. A.).

RÉPONSES.

30. (T. Parmentier). — *Septième réponse.* — M. Brocard a bien voulu nous transcrire les 707 décimales du nombre π, dont il est parlé p. 321; ceux de nos lecteurs, qui ne pourraient se procurer facilement les recueils mentionnés dans les réponses précédentes, seront, sans doute, bien aises de trouver, dans notre Journal, la plus grande approximation obtenue jusqu'ici pour le nombre π.

$\pi = 3,$

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399
37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825
34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582
23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559
64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475
64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610
45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315
58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360
01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057
27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011
94912 98336 73362 44065 66430 86021 39501 60924 48077
23094 36285 53096 62027 55693 97986 95022 24749 96206
07497 03041 23668 86199 51100 89202 38377 02131 41694
11902 98858 25446 81639 79990 46597 00081 70029 63123
77381 34208 41307 91451 18398 05709 85.. etc.

La Rédaction.

203. (*D. Boin*). — *Deuxième réponse.* — Si l'on veut se faire une idée de l'approximation obtenue par l'emploi de ce procédé, voici quelques résultats d'expériences mentionnés par M. W. Rouse Ball (*Math. Recr.*, p. 173; 1892) :

3204 épreuves. $\pi = 3,1553$. A. Smith; 1855.

600 épreuves. $\pi = 3,137$. Un élève de M. de Morgan.

1120 épreuves, entourées de certaines précautions. $\pi = 3,1419$. Fox; 1864.

H. Brocard.

285. (E. Cesàro). — *Troisième réponse.* — La question proposée revient à trouver une interprétation réelle du roulement d'une circonférence de rayon $R + r\sqrt{-1}$ sur une circonférence fixe de centre réel et de rayon égal à $-2R$ ou $-2r\sqrt{-1}$. Considérons le cas où le cercle fixe est réel. Soient O le centre de ce cercle, de rayon $-2R$, et OA la semi-droite choisie pour origine des angles. Désignons par α l'angle qui satisfait aux relations $\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}}$, $\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}$, $\tan g\alpha = \frac{r}{R}$, et construisons un triangle OCC', tel que l'angle $C'OC$ soit égal à 2α et que le produit des deux côtés OC et OC' soit égal à $R^2 + r^2$.

C et C' sont les composantes isotropes (ou composantes de Laguerre) d'un point imaginaire CC', qui est le centre d'une circonférence de rayon $R + r\sqrt{-1}$, tangente en un point DD' à la circonférence de centre OO et de rayon $-2R$. En effet, que l'on adopte la définition que j'ai donnée dans ma *Géométrie générale*, ou celle de Laguerre (*N. A.*, p. 174; 1870), la distance $CC'OO$ est égale à $R - r\sqrt{-1}$, et, par conséquent, la droite $CC'OO$ (qui passe par les points CC' et OO) coupe la circonférence fixe en un point DD', tel que

$$DD'CC' = DD'OO + OOCC' = R + r\sqrt{-1}.$$

On voit aisément que les points réels de la circonférence de centre CC' sont le point E, symétrique du point O par rapport au milieu du segment CC', et le point F, symétrique du point O par rapport à la droite CC'. Désignons par ω l'angle que fait, avec l'origine OA, la bissectrice de l'angle COC'. Enfin, posons $e^\beta = \sqrt{\frac{OC}{OC'}}$, β étant le logarithme népérien de $\sqrt{\frac{OC}{OC'}}$. On démontre, par ma *Géométrie générale* [1], que l'arc de la circonférence fixe compris entre la droite origine OA et le rayon

[1] *Voir* mes Mémoires de *Géométrie générale* (*A. F.*; années 1889 à 1894).

aboutissant au point DD′, est égal à $-2R(\omega-\beta\sqrt{-1})$ et que l'arc de la circonférence mobile, compris entre les rayons qui aboutissent au point de contact DD′ et au point réel EE, est égal à $(R+r\sqrt{-1})2\beta\sqrt{-1}$. Pour que ces deux arcs aient même longueur, il faut et il suffit qu'on ait l'égalité $\omega=\frac{r\beta}{R}$. Si donc on donne à la figure OCC′E une position telle que l'angle ω soit égal à $\frac{r\beta}{R}$, le point E sera un point de la courbe dont M. Cesàro demande la génération cinématique. A une grandeur donnée du segment OC correspond, de la manière indiquée, une position du point E, dont le lieu géométrique est une courbe. Le point F ne donne pas de courbe, mais seulement des points isolés.

On obtiendrait la courbe correspondant au cas du cercle fixe imaginaire de rayon $-2r\sqrt{-1}$, en remplaçant, dans les relations précédentes, R par r et r par $-R$. On emploiera, avec succès, le système de coordonnées isotropes, pour obtenir l'équation de la courbe. G. Tarry.

290. (J.-H. Lond). — Comme renseignement de nature à pouvoir mettre sur la voie d'autres indications bibliographiques, je signalerai : *S. M. L.*, t. II (1866-1869) ; S. Roberts (Sur la description mécanique de différentes espèces de courbes circulaires du troisième et du quatrième degré). H. Brocard.

344. (E.-M. Lémeray). — *Troisième réponse.* — Nous voulons reparler ici de la *Bibliothèque mathématique des travailleurs* qui est en plein fonctionnement, dirigée par M. le Dr Hulmann, et installée 4, *rue de la Cure, Paris-Auteuil.* Le montant de l'abonnement est de 12fr pour six mois, ou de 24fr par an; les abonnements partent du 1er de chaque mois et sont reçus aussi pour l'étranger partout où cela est possible. Les frais de port, envoi et retour des volumes, sont à la charge des abonnés. Chacun d'eux peut garder, pendant quatorze jours pleins, les volumes reçus par lui (au nombre de deux). Il peut prolonger ce délai, si les volumes ne sont pas réclamés dans l'intervalle par d'autres personnes.

La Bibliothèque vient de nous adresser son premier Catalogue portant la date de juillet 1895, et comprenant 630 numéros, parmi lesquels figurent un grand nombre d'Ouvrages ou de Mémoires très importants, quelques-uns rares ou même introuvables. Elle continue à s'enrichir chaque jour, par des acquisitions nouvelles résultant des demandes faites par les abonnés eux-mêmes et aussi par un certain nombre de dons gracieux. En plus des Ouvrages inscrits dans ce Catalogue il y a une très grande quantité de Mémoires divers, non encore classés et qui formeront la partie la plus précieuse de la Bibliothèque.

Un nouveau Catalogue sera publié au cours de 1896.

Ceux de nos lecteurs qui voudraient recevoir le Catalogue, ou qui désireraient des renseignements complémentaires, devront les demander au Directeur de la Bibliothèque, à l'adresse indiquée ci-dessus.

L'*Intermédiaire* ne peut que se féliciter d'avoir contribué à cet heureux résultat, en propageant l'idée si utile de notre excellent collaborateur, M. Lémeray. Tous ceux qui ont à cœur le développement des études mathématiques s'associeront à nous pour remercier M. le Dr Hulmann de son initiative, si intéressante pour tous les mathématiciens isolés, souvent dépourvus des moyens de recherche qui leur sont cependant indispensables pour continuer leurs travaux.

Le Directeur envoie, le plus souvent, même les Ouvrages demandés qui ne sont pas sur le Catalogue, lorsqu'il peut les acquérir ou se les procurer.

LA RÉDACTION.

363. (*Trébig*). — Sans pouvoir affirmer qu'il existe déjà des machines arithmétiques à développer les déterminants, la possibilité d'exécution de semblables machines ne me semble pas devoir être mise en doute. L'étude et la construction de machines arithmétiques n'ont pas cessé de faire de grands progrès, et tout récemment, à Bordeaux, une machine à évaluer les racines réelles ou imaginaires des équations algébriques a été présentée à l'Association française par M. L. Torres. Cette machine effectue aussi le développement des polynomes; il est probable qu'une transformation de détail de quelques-uns de ses organes donnera le principe d'une machine à développer les déterminants. La description de la machine de M. L. Torres fait l'objet d'un Mémoire de XXIV-105 pages et 24 figures, publié par l'inventeur (Bilbao, juin 1895).

H. BROCARD.

372. (D. Gravé). — *Troisième réponse.* — En proposant cette question, sur un problème déjà connu, j'avais en vue sa liaison avec les propriétés des solutions singulières de certaines équations différentielles. C'est ce que M. Rabut a remarqué dans sa réponse. Je pense, avec M. Cesàro, qu'il faut poser la question suivante : Trouver toutes les fonctions des coefficients A_i de l'équation

$$A_1 x^n + A_2 x^{n-1} y + \ldots + A_{\frac{(n+2)(n+1)}{1.2}} = 0$$

de la courbe osculatrice d'ordre n, qui ne peuvent rester constantes sans que la courbe se réduise à une courbe algébrique d'ordre n.

Les considérations suivantes donnent la solution de la question pour $n = 1$. Soit l'équation de la tangente $\eta = a\xi + b$, où

$$a = y', \tag{1}$$

$$b = y - xy', \tag{2}$$

d'où $a' = y''$, $b' = -xy''$. La fonction cherchée étant $f(a, b)$, nous obtenons $f'_a a' + f'_b b' = 0$ ou $(f'_a - xf'_b)y'' = 0$. Pour que l'équation $f(a, b) =$ const. ne donne que des droites, il faut que l'équation

$$f'_a - xf'_b = 0 \tag{3}$$

soit équivalente à l'équation d'une droite

$$lx + my + n = 0. \tag{4}$$

En éliminant x, y, y' entre les équations (1), (2), (3), (4), nous avons $(l + am)f'_a + (mb + n)f'_b = 0$, équation aux différences partielles dont l'intégration donne toutes les fonctions cherchées. En intégrant, nous obtenons la relation linéaire $La + Mb + N = 0$. L, M, N sont les constantes arbitraires.

D. Gravé (St-Pétersbourg).

376. (C. Stephanos). — *Deuxième réponse.* — Cauchy, dans les premières lignes de son Mémoire, dit qu'il ne considère que les polyèdres *convexes;* il n'y a donc pas contradiction entre la solution donnée p. 244 et ce qu'a affirmé Cauchy.

C. Juel (Copenhague).

412. (G. Oltramare). — *Deuxième réponse.* — La question se réduit, en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation, à un cas particulier de l'équation $\Sigma h_n \varphi(x + a_n) = f(x)$, $f(x)$ étant une fonction donnée et φ une fonction inconnue. Cette équation forme l'objet de deux Mémoires (*Mem. dell' Accad. di Bologna*, 1887-88) où je l'ai intégrée tant dans le cas des h_n constantes que dans le cas des h_n fonctions rationnelles de x.

S. PINCHERLE (Modène).

413. (G DE ROCQUIGNY). — *Réponse à la Note de M.* DUJARDIN, t. II, p. 269. — Dans l'*Essai sur la Théorie des nombres* de Legendre (Paris, chez Duprat, an VI), on lit, p. 398 : « Tout nombre impair, excepté seulement les nombres $8n + 7$, est la somme de trois quarrés » et, p. 399 : « *Corollaire.* De ce que tout nombre $8n + 3$ est de la forme $p^2 + q^2 + r^2$, il s'ensuit que *tout nombre entier est la somme de trois triangulaires*, ce qui est le fameux théorème de Fermat dont nous avons déjà parlé. » Quant à une démonstration directe, élémentaire, analogue à celle que M. Matrot a donnée du théorème de Diophante, Bachet ou Fermat « Tout nombre entier est la somme d'au plus quatre carrés », je n'en connais pas, et elle serait très désirable. Je ferai aussi cette remarque que les nombres triangulaires eux-mêmes, sauf 1 et 6, sont toujours décomposables en trois triangulaires *effectifs*, aucun des trois composants n'étant égal à zéro. Posons $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$; n ne peut être que de l'une des formes $3p - 1$, $3p$, $3p + 1$; on a donc

$$T_{3p-1} = 2T_{2p-1} + T_p, \qquad T_{3p} = 2T_{2p} + T_{p-1},$$
$$T_{3p+1} = T_{2p} + T_{2p+1} + T_p.$$

G. DE ROCQUIGNY.

414. (G. DE ROCQUIGNY). — *Deuxième réponse.* — L'équation proposée revient à

$$(2y+1)^2 = x(x+1) + 1 = (x+1)^2 - x,$$

d'où immédiatement : $(x + 2y + 2)(x - 2y) = x$, ce qui est évidemment impossible en nombres entiers, le premier facteur du premier membre étant à lui seul plus grand que le second membre.

A. C. DAVIDOGLOU (Berlad).

A. S. RAMSEY (Edimbourg). P.-F. TEILHET.

418. (E. GELIN). — Les formules d'Euler (*Commentationes Arithmeticæ collectæ*, t. I, p. 474) sont exactes; mais il y a une erreur de calcul dans la deuxième application, la valeur de y est fausse. En la rectifiant, on obtient l'identité

$$12231^4 + 10203^4 = 10381^4 + 2903^4.$$

Euler a reconnu lui-même l'erreur; il la signale dans un Mémoire de 1780 sur le même sujet (*Commentationes*..., t. II, p. 456), où il donne l'identité précédente. Ajoutons qu'Euler a trouvé l'identité beaucoup plus simple $158^4 + 59^4 = 133^4 + 134^4$, identité qui représente peut-être la plus simple des solutions de l'équation $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$. E. FAUQUEMBERGUE.

Voir *M.* 1889, p. 241-242. H. BROCARD.

421. (E. CESÀRO). — *Note.* — Posons $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Il s'agit de trouver sous quelles conditions la différence $S_n - k \log n$ tend vers une limite déterminée quand n croît indéfiniment. Cela revient à chercher les conditions de convergence de la série V dont le terme général est

$$(1) \quad \begin{cases} v_{n+1} = [S_{n+1} - k \log(n+1)] - (S_n - k \log n) \\ \phantom{v_{n+1}} = u_{n+1} - k \log \dfrac{n+1}{n}. \end{cases}$$

Soit $u_n = \dfrac{k + \varepsilon_n}{n}$; on a $v_{n+1} = \dfrac{k}{n+1} - k \log \dfrac{n+1}{n} + \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{n+1}$. Le second membre de cette égalité se compose de deux parties; la première : $\dfrac{k}{n+1} - k \log \dfrac{n+1}{n}$ est le terme général d'une série convergente; donc, pour que la série V converge, il faut et il suffit que la série de terme général $\dfrac{\varepsilon_n}{n} = u_n - \dfrac{k}{n}$ soit elle-même convergente. Désignons par S' la somme de cette nouvelle série et par C la constante d'Euler; nous aurons

$$\lim(S_n - k \log n) = kC + S'.$$

J. LE ROUX.

423. (*Hubert Larsac*). — Le général de Coatpont a publié ce théorème; voir : *Note sur la Géométrie du compas*, Paris, 1890. D.-E. SMITH (U. S. A).

425. (H. DELANNOY). — *Troisième réponse.* — Il est dit (t. II, p. 270) que la question 425, au fond, est identique à la question 360. Je ne le juge pas ainsi, parce que la question 360 a été résolue (c'est, comme je l'ai dit, t. II, p. 232, une simple application du théorème de Tait), tandis que la démonstration *directe* du théorème, demandée par la question **425**, reste encore à trouver.

H. Delannoy.

Il me semble aussi qu'il ne serait pas sans intérêt d'avoir des démonstrations nouvelles du problème célèbre des quatre couleurs. Selon moi, on peut encore faire des objections à la démonstration que donne le regretté Ed. Lucas dans ses intéressantes *Récréations mathématiques*. Comment, surtout, achever *la démonstration* (t. IV, p. 173-174) dans tous les cas (une île verte étant, par exemple, dans la région rouge), de ce qu'il est effectivement possible de s'arranger avec quatre couleurs dans toutes les figures imaginables?

C. Juel (Copenhague).

431. (E.-N. Barisien). — L'enveloppe cherchée est la développée d'une épicycloïde, en supposant que l'aiguille des minutes est la plus longue. Le rapport des rayons du cercle fixe et du cercle roulant est celui de 11 à 1.

La démonstration, très facile, est une conséquence directe de la double génération des épicycloïdes, théorème qui a été publié d'abord par M. Mannheim.

C. Juel (Copenhague).

446. (D. Gravé). — Dans les équations considérées, x, y, z sont les trois côtés d'un triangle dont les bissectrices intérieures sont a, b, c. Pour ce problème, *voir* le *Résumé d'un Mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices*; par M. P. Barbarin (*S. M.* 1894, t. XXII, p. 76-80).

E. Fauquembergue.

M. G. Dostor a indiqué (*J. E.*, 1880, 20-23) diverses formules relatives aux bissectrices (intérieures α' et extérieures α'') d'un triangle, notamment $\alpha' = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$, $\alpha'' = \dfrac{2bc}{b-c}\sin\dfrac{A}{2}$, ou bien $\alpha'^2(b+c)^2 = [(b+c)^2 - a^2]bc$, etc. Si donc on se donne les bissectrices intérieures α, β, γ, les côtés x, y, z du triangle seront les racines de trois équations de la forme $\alpha^2(y+z)^2 = [(y+z)^2 - x^2]\,yz$, etc., c'est-à-dire du système de la question **446**.

Ces équations reviennent à celles de Terquem (t. II, p. 172). En effet, on en déduit $4(y^2z^2 - 4S^2) = [(y-z)^2 - x^2]^2$, ou

$16\,S^2 = 2\,(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - (x^4 + y^4 + z^4)$, formule connue. Le lecteur voudra donc bien se reporter à la bibliographie donnée (*loc. cit.*). H. Brocard.

449. (P. Vernier). — Les expressions A et B ont été considérées par M. E. Ghysens qui en a fait l'objet d'une question proposée dans la *N. C.* (t. III, question 276). L'auteur fait observer que les solutions conduisent aux valeurs de plusieurs intégrales définies. La solution qui donne les expressions de A et de B sous forme finie a été publiée dans le tome V, p. 287. Quant à la constante G, Catalan en a donné diverses expressions, entre autres celle que signale l'auteur de la question et que l'on trouve dans ses *Mélanges mathématiques* (t. I, p. 209-212). E. Fauquembergue.

451. (E. Lemoine). — *Deuxième réponse.* — Il me semble que la réponse (t. II, p. 305) est erronée; en effet, l'expression $\dfrac{l(1-x)}{l\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}$ représente le nombre de coups tel que x est la probabilité d'amener la boule n en un de ces coups, mais on ne peut en conclure que réciproquement $\dfrac{l(1-x)}{l\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}$ est précisément le nombre de coups correspondant à la probabilité x de vider l'urne au bout de k épreuves; par exemple, soit $n=2$, $k=3$. Il faut, pour satisfaire à l'énoncé du problème, que les boules se présentent dans l'ordre suivant : 1, 2, 1, Donc la probabilité de vider l'urne en trois coups est $\frac{1}{4}$ et la formule $\dfrac{l(1-x)}{l\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = 3$ donnerait $x = \frac{7}{8}$.

La solution véritable me paraît être

$$x = \sum \left[\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{z-1} \times \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{z_1-1} \cdots \times \frac{1}{n-p}\left(1-\frac{1}{n-p}\right)^{z_p-1} \cdots \times \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{z_{n-2}-1}\right]$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de la parenthèse pour lesquelles $z + z_1 + \ldots z_{n-2} = k$. $z, z_1, \ldots, z_{n-2}$ étant des nombres entiers positifs et non nuls.

WELSCH.

474. (LOUIS ROSSEL). — *Troisième réponse.* — Soit $f(x)$ une fonction *uniforme* jouissant de la propriété énoncée. On a identiquement $f(x) = \dfrac{1+f(x)}{1+f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$. Si donc on désigne par $\varphi(x)$ la fonction uniforme $1+f(x)$, on peut écrire $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

Inversement, quelle que soit la fonction uniforme $\varphi(x)$, il est clair que le quotient $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ répond à la question; on obtient donc ainsi la solution générale.

A chaque fonction φ correspond une seule fonction f, mais la réciproque n'est pas vraie: car, étant donné $f(x)$, on peut prendre $\varphi(x) = [1+f(x)]\,\psi\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$, en désignant par $\psi\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$ une fonction symétrique arbitraire des quantités x, $\dfrac{1}{x}$.

L. LECORNU.

Nous avons cité, p. 277, un travail de M. *Lecornu* qui fournit comme cas particulier une réponse à la question 474, mais la forme de la solution, fort différente de celles qui ont déjà été publiées, nous a engagé à reproduire cependant les lignes précédentes, que M. Lecornu nous avait adressées dès que la question avait paru dans le journal.

LA RÉDACTION.

RECTIFICATION. — Page 378 effacer ligne 16 le nom de M. W.-W. Beman, ligne 17 celui de M. E.-B. Escott; voici leur réponse : $\Phi(x)$ étant une fonction quelconque de x, on a $f(x) = \dfrac{\Phi(x)}{\Phi\left(\dfrac{1}{x}\right)}$, qui répond à la question.

W.-W. BEMAN (Ann-Arbor), E.-B. ESCOTT (Chicago).

503. (DE LA CAMPA). — La théorie des tensions dans une étoffe flexible est traitée dans le cours que je fais chaque année aux officiers d'aérostiers. Cette théorie m'est personnelle et n'a pas encore été publiée; d'autre part elle est trop étendue pour trouver place dans l'*Intermédiaire*. Il faudrait du moins con-

naître les points précis que l'auteur voudrait particulièrement élucider pour savoir s'il est possible d'y donner une réponse qui n'exige pas trop de développements. L.-M.-J. Renard.

507. (C. Flye Sainte-Marie). — Je me permets de rappeler que j'ai traité cette question dans un Mémoire intitulé : *Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume*, Mémoire inséré dans le *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg* (1869), reproduit en partie dans les *Mathematische Annalen*, von Clebsch und Neumann, et couronné plus tard (en 1880) du prix Steiner par l'Académie des Sciences de Berlin. J'y ai démontré que le polyèdre cherché doit être circonscriptible à une sphère, de manière que chacune de ses faces soit touchée en son centre de gravité par la sphère. Je profite de l'occasion pour rappeler la question **113**, relative au même sujet. L. Lindelöf (Helsingfors).

513. (*Cordelier*). — Nous avons reçu de M. Fr. Laeng (Brescia) une intéressante réponse à cette question ; comme elle est trop étendue malheureusement pour trouver place dans le Journal, nous la signalons seulement ici en faisant savoir à M. *Cordelier* que nous la tenons à sa disposition s'il veut bien se faire connaître en nous donnant son nom et son adresse.

La Rédaction.

529. (Ferber). — La solution de cette question revient à celle de la question **29** ; posons, en effet :

$$y_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad y_2 = x_2 + x_3 + \ldots + x_n, \quad \ldots, \quad y_n = x_n.$$

On doit avoir : $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = n$, les y formant une suite de nombres entiers positifs non croissants.

Ernest Duporcq.

545. (*Trinitario*). — *Deuxième réponse*. — Pour la bibliographie de cette question, voir plusieurs Notes de M. O. Stolz, (*M. A.*, t. **22**, 1883, et t. **31**, 1888, etc.) et un important Mémoire de M. G. Veronese : *Il continuo rettilineo e l'assiome VI d'Archimede* [*Atti dei Lincei*, Rome, VI (4), 1890, p. 603-624].

H. Brocard.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

A. Calinon. — *La Géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante;* gr. in-8°, 48 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895.

H. Vogt. — *Leçons sur la résolution algébrique des équations,* avec une Préface par M. Jules Tannery; 1 vol. gr. in-8°. Paris, Nony, 1895; prix 5^{fr}.

A. Cabreira. — *Analyse geometrica de duas espiraes parabolicas;* in-8°. Lisbonne, 1895.

Mario Pieri. — *Sui principii que reggono la Geometria di posizione* (Extrait des *Actes de l'Acad. royale des Sciences de Turin*); in-8°. Turin, 1895.

Paul Haag. — *Cours de Calcul différentiel et intégral;* 1 vol. in-8° de 612 p.; Paris, Dunod, 1893. — *Cours de Mécanique rationnelle;* 1 vol. in-8° de 552 p., Paris, Dunod, 1894.

Bulletin de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. B. Niewenglowski. Rédacteur en chef, M. L. Gérard, Docteur ès Sciences, Professeur au lycée de Lyon. Au bureau de la Société d'éditions scientifiques, 4, rue Antoine-Dubois, Paris. France 5^{fr}, étranger 6^{fr}.

Gino-Loria. — *Le Scienze esatte nell' antica Grecia.* Libro II : Il periodo aureo della Geometria greca. Modena, 1895.

Julius Hurwitz. — *Ueber eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung complexer Grössen* (Inaugural-Dissertation). Halle a. S. Druck von Ehrhardt Karras; 1895.

Giuseppe Peano. — *Sul moto del polo terrestre;* Torino, Carlo Clausen, 1895.

O. Stolz. — *Ueber den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe.* Wien, F. Tempsky, 1895.

Carl Störmer. — *Om en generalisation af integralet* $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Christiania, Jacob Dybwad, 1895.

V. Retali. — *Sur le double contact et le contact quartiponctuel de deux coniques.*

Ettore Bortolotti. — *Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze.* Roma, 1895.

Éduard Weyr. — *Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems.* Wien, F. Tempsky, 1895.

G. Cantor. — *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (erster Artikel). Extrait des *Mathematische Annalen,* 1895.

L. Raffy. — *Recherches sur les surfaces harmoniques.* Paris, 1895.

J.-G. de Galdeano. — *Discurso leido en la Universitad de Zaragosa en la solemne apertura del Curso academico de* 1895 *á* 1896. Saragosse, 1895.

QUESTIONS.

685. **[K14d]** Je désirerais savoir si Wittstein a été le premier à se servir du terme « prismatoïde » dans l'acception suivante : « Unter einem *Prismatoïd* verstehe ich ein Polyeder, welches von zwei parallelen Polygonen, die ausserdem vollkommen unabhängig von einander sind, als *Grundflächen* und in Allgemeinen von Dreiecken, welche mit je einer Grundfläche eine Seite und mit der anderen einen Eckpunkt gemein haben, als *Seitenflächen* begrenzt wird [1]. » Wittstein, *Grunert Archiv*, Vol. XXXIX, p. 2; Wittstein, *Das Prismatoïd* (Hannover, 1860); *Stereometrie* (Hannover, 1862).

W.-W. Beman (Ann-Arbor.).

686. **[V7]** L'*Arithmétique politique* (1691), livre posthume de l'Anglais Petti, cité par Melon dans son *Essai politique sur le commerce* (1734), est-il le premier Ouvrage sur le sujet? Y en a-t-il d'autres?

A. Rebière.

687. **[O2c]** En septembre 1893, un mathématicien italien avait, dit-on, trouvé la formule donnant le périmètre de l'ellipse en fonction des deux demi-axes a et b. Quelqu'un se rappellerait-il cette formule? Le mathématicien italien l'avait trouvée en étudiant les propriétés de la sinusoïde.

Nous reproduisons cette question, venant d'un correspondant dont nous ne connaissons pas le nom, pour qu'il puisse la préciser, car le périmètre de l'ellipse a, en fonction des demi-axes, une expression en série bien connue, et ce n'est évidemment pas cela qu'il demande.

La Rédaction.

---

(1) J'appelle prismatoïde un polyèdre qui est limité par deux polygones parallèles d'ailleurs complètement indépendants l'un de l'autre, comme bases, et par des triangles qui ont chacun un côté commun avec un des côtés d'une des bases et un sommet à l'un des sommets de l'autre base, comme surfaces latérales.

688. **[D]** Il y a plus d'un an (*J. S.* 1894, p. 163), en rendant compte du *Cours d'Analyse* de M. Cesàro, après avoir reproduit la définition donnée par lui, de la fonction continue, j'ai dit, à ce propos, qu'il serait désirable qu'il y eût entente sur cette définition qui, placée à la base de l'Analyse, intéresse toute la Science. Or il n'y a accord, ni dans les livres, ni dans l'enseignement, sur le langage qu'il convient d'adopter pour obtenir une définition de la fonction continue, qui, par la clarté de sa forme, s'imposerait à l'esprit des débutants. L'appel que j'avais adressé aux lecteurs du journal cité, pour provoquer une étude critique des diverses définitions publiées, est resté sans réponse. Espérant être plus heureux, je m'adresse aux lecteurs de l'*Intermédiaire*, et j'émets de nouveau le désir de recevoir, sur le sujet en question, un ou plusieurs articles que je m'empresserai de publier dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1). G. DE LONGCHAMPS.

689. **[O7b]** On trouve dans divers Ouvrages, notamment dans les *Conférences de Physique* de Verdet, et dans l'*Astronomie* de Baillaud, une théorie des systèmes centrés et en particulier des systèmes de lentilles, basée sur l'emploi des fractions continues et due à Gauss. J'ai vu autre part, dans un périodique, je crois, la même théorie, mais beaucoup plus simple. Pourrait-on me donner l'indication bibliographique exacte?

G.-H. NIEWENGLOWSKI.

690. **[D6bγ]** Les théorèmes, compris dans les formules suivantes, sont-ils connus :

$$\begin{gathered}\Sigma\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}(x_1+\varepsilon_1x_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}x_n)^n\\ =2^{n-1}.1.2.3\ldots n.x_1x_2\ldots x_n,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Sigma\varepsilon_1\varepsilon_2.\ \ \varepsilon_{2n-1}\cos(x_1+\varepsilon_1x_2+\ldots+\varepsilon_{2n-1}x_{2n})\\ =(-1)^n.2^{2n-1}\sin x_1\sin x_2\ldots\sin x_{2n},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Sigma\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{2n}\sin(x_1+\varepsilon_1x_2+\ldots+\varepsilon_{2n}x_{2n+1})\\ =(-1)^n2^{2n}\sin x_1\sin x_2\ldots\sin x_{2n+1},\end{gathered}$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs de $\varepsilon_k=\pm 1$. De ces formules on peut déduire aisément une foule d'autres, par dérivation par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. CARL STÖRMER (Christiania).

(1) Adresse 9, rue du Val-de-Grâce, Paris.

RÉPONSES.

168. (J. de Vries). — *Troisième réponse.* — Cayley (*Collected mathematical Papers*, t. II) a aussi démontré la loi de réciprocité de Legendre généralisée, en s'aidant de quelques considérations géométriques. La démonstration est reproduite dans l'*Introduction à la théorie des nombres* de M. Borel, p. 95.

A. Goulard.

176. (G. de Rocquigny). — *Troisième réponse.* — La contradiction apparente entre les deux assertions d'Ed. Lucas, relevée dans la *deuxième réponse* (t. II, p. 217), peut s'expliquer ainsi : C'est Fermat qui a affirmé le premier le fait que les nombres $2^{61}-1$ et $2^{127}-1$ sont premiers. Si donc on tient pour bonne l'affirmation du grand arithméticien en se fiant uniquement à son autorité et sans s'attacher à savoir si elle a été, par d'autres, l'objet d'une vérification ultérieure, on est conduit à dire que $2^{127}-1$ est le plus grand nombre premier connu. Si l'on ne veut pas se contenter de cette affirmation et si l'on se borne à ne considérer que les nombres premiers pour lesquels on connaît la vérification de leur caractère, on doit s'arrêter au nombre $2^{61}-1$ qui a fait l'objet d'une vérification de la part de M. Seelhoff (voir la *première réponse*, t. I, p. 203).

On sait que M. Genaille a imaginé un ingénieux appareil propre à reconnaître si un nombre de la forme 2^n-1 est premier ou non. Il serait à souhaiter que cet appareil fût appliqué à la recherche du caractère de $2^{127}-1$. M. d'Ocagne.

179. (G. de Rocquigny). — *Voir* une étude de M. P.-H. Schoute, parue aux *Verslagen en Mededeelingen* de l'Académie des Sciences d'Amsterdam, 1892, t. IX, p. 226-230, mais la question n'y est pas complètement résolue; je ne crois pas qu'elle le soit encore nulle part. H. Brocard.

224. (E.-N. Barisien). — *Troisième réponse*. — 225. *Deuxième réponse*. — 465. (E. Duporcq). — *Deuxième réponse*. — 536. (*Nester*). — 538. (E.-N. Barisien). — 599. (E. Duporcq). — Ces différentes questions se trouvent résolues comme cas particuliers de théorèmes démontrés dans un Mémoire, publié dans le fascicule d'octobre 1895 du *J. M.* (p. 443-465), sur l'aire plane balayée par un vecteur variable, par M. Ernest Duporcq.

La Rédaction.

246. (Youssoufian). — *Troisième réponse*. — Remarque sur la *deuxième réponse*, t. II, p. 349.

L'*Histoire des Mathématiques*, par Gaubil, est probablement l'Histoire de l'Astronomie chinoise depuis le commencement de la monarchie chinoise jusqu'à l'an 206 avant Jésus-Christ, dont MM. Houzeau et Lancaster (*Bibliographie générale de l'Astronomie*, I, p. 378) indiquent quatre éditions différentes.

G. Eneström (Stockholm).

247. (D. Sintsof). — M. J. Tannery, dans sa Thèse de doctorat, a le premier formulé les propositions suivantes :

Les racines d'une équation algébrique entière en x et y, du degré n en y, satisfont à une équation différentielle linéaire et homogène, qui est de l'ordre n, s'il n'existe entre les racines aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, et d'ordre moindre dans le cas contraire. Si la somme des racines n'est pas nulle, l'équation différentielle admet une solution rationnelle. Si une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients rationnels admet une solution algébrique y, racine de l'équation irréductible et entière $f(x, y) = 0$, elle admettra comme solutions toutes les autres racines de cette équation.

L. Sauvage.

259. (E. Lemoine). — *Troisième réponse*. — Ma réponse (p. 352) à la question 259 permet de déterminer géométriquement les coniques (M) et (M′), au moyen de trois points et de leurs polaires; voici comment :

Par rapport à un cercle de centre A, les coniques (P) et (Q) ont pour polaires réciproques deux circonférences, dont la ligne des centres est un axe de symétrie de la transformée de (M) : cette propriété a pour corrélative la suivante : le point de rencontre α des deux directrices des coniques (P) et (Q), relatives au foyer A, a pour polaire, par rapport à (M), la perpendiculaire menée par A à αA; le point α est d'ailleurs facile à déterminer : ses projections sur AB et AC sont distantes des milieux de ces côtés des longueurs $\frac{c^2}{2c'}$ et $\frac{b^2}{2b'}$ portées du côté du sommet A. On a de même les polaires des points β et γ.

ERNEST DUPORCQ.

302. (*R.-Ch. Weitz*). — *Troisième réponse.* — Au congrès de Montpellier, M. G. Darboux a présenté une Note sur la théorie du cerf-volant, annoncée *A. F.*, 1879, p. 283, mais dont M. Laisant a donné l'extrait suivant, dans la Notice historique sur les travaux des 1^{re} et 2^e sections (Toulouse, 1887) :

« Lorsqu'on lâche progressivement le fil qui retient le cerf-volant, celui-ci décrit dans l'espace une chaînette; il est au point le plus haut ou au sommet de cette chaînette quand la tangente au fil, au point où il est tenu par la main, est devenue horizontale. »

Cette curieuse propriété de la chaînette est à mentionner dans une bibliographie de cette courbe. H. BROCARD.

317. (A. BOUTIN). — *Deuxième réponse.* — On trouve la même proposition énoncée dans la *N. C.*, par Ed. Lucas (1876, p. 102). Gerono (*loc cit.*, p. 214) a rappelé qu'elle était un corollaire d'un théorème de Le Besgue (*N. A.*, 1863, p. 68) cité d'ailleurs dans la solution donnée, t. II, p. 119 et 120.

H. BROCARD.

342. (J.-J. DURAN-LORIGA). — *Deuxième réponse.* — En remerciant M. le colonel Moreau pour la solution partielle de ma question n° 342, j'ajoute que la solution générale serait très importante, pour moi, à connaître.

J.-J. DURAN-LORIGA (La Corogne).

436. (H. DELLAC). — Je ne crois pas que l'Ouvrage ou l'article dont parle M. Dellac existe et je m'unis à lui dans le désir de le voir paraître. J'ajoute que le géomètre qui voudra essayer de combler cette lacune dans la littérature mathématique pourra tirer une foule de renseignements précieux de la 4^e partie du *Saggio di una bibliografia euclidea* de M. Riccardi (*Memorie della R. Accademia delle Scienze del l'Istituto di Bologna,*

t. I de la 5e série), à laquelle est joint un *Appendice contenente l'elenco cronologico di una serie di monografie attinenti al quinto postulato di Euclide, alla teoria delle parallele ed ai principi della geometria euclidea.*

GINO LORIA (Gènes).

La littérature allemande possède une revue intéressante et très détaillée de divers essais de démonstration du postulatum d'Euclide; c'est un article de Sohnke (de 16 pages in-4°) dans l'ouvrage intitulé : *Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaften und Künste*, herausgegeben von Ersch und Gruber, dritte Section; elfter Theil (Leipz., 1835). L'auteur passe en revue 92 Ouvrages sur la théorie des lignes parallèles et en donne une classification. L'article de Sohnke ne mentionne pas un seul essai anglais, et certes la littérature anglaise possède aussi une grande quantité d'Ouvrages ayant pour but de perfectionner la théorie des parallèles.

Dans la littérature russe, il y a un Ouvrage de M. Bouniakofsky sur la théorie des lignes parallèles, paru en 1853 (15 pages). L'auteur critique les démonstrations du postulatum données par Proclus, Nassir-Eddin, Castillon, Clavius, Simpson, Bertrand, Gouriew, Schulten, Cristian, Tatarinow, Legendre et en donne deux nouvelles.

A. VASSILIEF (Kasan).

On peut citer : « FÉLIX DAUGE, *Cours de Méthodologie mathématique* professé à l'Université de Gand (Gauthier-Villars et fils; 1896) ». — M. Dauge indique *et discute* sommairement plusieurs moyens proposés pour démontrer soit le postulatum d'Euclide, soit une autre proposition entraînant ce postulatum comme conséquence. L'auteur donne ensuite quelques notions générales touchant les travaux de Lobatchefsky et de Beltrami.

H. Braid.

M. Kettner a publié une thèse : *Beschouwingen over de theorie der evenwijdige lijnen als Grondslag der Meetkunde* (¹) où diverses démonstrations sont discutées. Cette thèse a été soutenue à l'Université de Leyde en 1879.

N. QUINT (La Haye).

(¹) Considérations sur la théorie des parallèles comme fondement de la Géométrie.

465. (E. Duporcq). — *Deuxième réponse.* — *Voir* p. 404 la réponse à la question 224. La Rédaction.

483. (A. Goulard). — Soit AB le côté du pentagone régulier de centre O.

Portons sur le rayon OA une longueur OC égale au côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle.

Il est clair que BC = OA, et, par suite, on a

$$\overline{AB}^2 - \overline{OA}^2 = OA.AC.$$

D'autre part, $\overline{OC}^2 = OA.AC$. Donc, $\overline{AB}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$.

Elling Holst (Christiania). Welsch. E. Mosnat.

Je veux signaler la démonstration du théorème que donne Euclide dans la proposition 10 du XIII^e Livre des *Éléments*; comme je ne connais pas la méthode de M. Dufailly, je ne peux pas juger si elle est meilleure. Gino Loria (Gênes).

Considérons le carré ABA′B′ inscrit dans le cercle de centre O; MNA′ le triangle équilatéral, MN étant parallèle à la diagonale BB′. Décrivons du point M un arc de cercle avec le côté du carré pour rayon; cet arc coupe AA′ en Q, de l'autre côté de BB′: B′Q représente le côté du pentagone, OQ le côté du décagone, OB le rayon.

Cette solution, qui met bien en évidence la relation dont parle la question, est basée sur celle de Mascheroni (*Géométrie du compas*, p. 50). G. Delahaye, E. Fauquembergue.

Dans le cas où la question de l'inscription du décagone regulier a été traitée comme elle l'est dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, voici une démonstration qui semble plus simple que celle qui est donnée ordinairement dans les traités de Géométrie.

Supposons la circonférence de rayon r partagée en 10 parties égales aux points 0, 1, 2, ..., 9, et soient d et d' les côtés des décagones réguliers convexe et étoilé, p et p' ceux des deux pentagones réguliers.

Considérons le quadrilatère inscrit ayant pour sommets les points de divisions 0, 1, 2, 3; ses deux diagonales sont égales au côté p du pentagone convexe. Le théorème de Ptolémée donne $p^2 = d^2 + dd'$. Or $dd' = r^2$, d'où $p^2 = d^2 + r^2$; p est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit d et r. De même, dans le quadrilatère ayant pour sommets les points o, 3, 6, 9, le même théorème donne :

$$dd' + d'^2 = p'^2 \quad \text{ou} \quad p'^2 = d'^2 + r^2.$$

Donc p' est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit d' et r.

On en déduit la construction de Bourget donnant à la fois d, d', p, p' sur la même figure. J. Sadier.

Soit AB le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de centre O, portons le rayon du cercle de A en C sur AB; joignons OA, OC ; comme AO = AC et que l'angle OAC = 72°, OC est le côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle donné. Menons de C la tangente CD au cercle, joignons OD; on a : $\overline{CD}^2 = CB.CA$. Mais on a aussi $\overline{AB}^2 = CA.BC$, puisque le côté du décagone régulier inscrit est le plus grand segment du rayon AC divisé en moyenne et extrême raison.

Donc, dans le triangle rectangle ODC, l'hypoténuse CO est le côté du pentagone, CD est le côté du décagone, OD le rayon.

On aurait une construction analogue pour le côté du pentagone étoilé. Je ne connais pas la construction donnée par M. Dufailly, mais celle-ci, fort connue, d'ailleurs, me paraît parler très bien à l'œil. J. Colette.

492. (*Enesca*). — Il convient d'ajouter aux noms des savants qui se sont occupés des intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique celui de M. Massieu, aujourd'hui Inspecteur général des Mines. L'une de ses deux thèses de doctorat, soutenues le 19 août 1861 devant la Faculté des Sciences de Paris, a pour titre : *Sur les intégrales algébriques des problèmes de Mécanique* (Paris, Mallet-Bachelier, 1861), et touche au sujet en question. Haton de la Goupillière.

493. (H. Delannoy). — Je tiens de Ed. Lucas qu'il existe un livre anglais sur les nœuds des fils et sur les filets, mais Lucas n'a pu me préciser davantage ses indications. Peut-être trouverait-on ce livre, et, dans ce livre, la réponse à la question proposée. L. Sauvage.

499-500. (*Nester*). — Dans la Note, t. II, p 92, M. *Nester* observe que les questions dont il s'agit se rattachent au problème de l'ellipse *circulaire* circonscrite à un quadrilatère, qui est l'ellipse du système se rapprochant le plus du cercle. Voici une solution assez simple de ce problème. Soit $f + \lambda\varphi = 0$ le réseau de coniques circonscrites au quadrilatère donné. En supposant que le système contienne des ellipses, il est évident qu'il existe aussi deux paraboles réelles. Soient $f = 0$ et $\varphi = 0$ ces paraboles; la direction de leurs axes, comme on sait, peut être déterminée avec la règle et le compas. On sait que, pour trouver *la grandeur et les directions des axes* de l'ellipse cherchée, on peut prendre, au lieu de l'équation $f + \lambda\varphi = 0$, l'équation $f_0 + \lambda\varphi_0 = 0$, qu'on forme au moyen de la première, en négligeant les termes linéaires. « Si deux réseaux de coniques contiennent deux paires de courbes semblables et parallèlement situées, toutes les courbes des deux systèmes le sont également l'une à l'autre. » Supposons que f et φ soient pris de façon que les deux paires de droites parallèles $f_0 = 0$ et $\varphi_0 = 0$ forment un losange. L'ellipse circulaire circonscrite à ce losange a ses axes confondus avec les diagonales de ce losange. Ainsi, une ellipse homothétique à la courbe cherchée peut être construite avec la règle et le compas. En considérant le losange auxiliaire, on est facilement conduit aux solutions de la plupart des problèmes formulés dans la question. On peut encore ajouter cette remarque : L'ellipse circulaire d'un réseau est semblable à la courbe infiniment voisine du système. Or, quand un système de points se meut sans changer de forme, chaque point P, au même instant, est dirigé dans un sens, qui forme un angle instantané commun avec le rayon vecteur PO mené à un centre instantané de rotation commun O. En conséquence, les points communs à l'ellipse circulaire et à l'ellipse infiniment voisine sont disposés de manière que les tangentes, dirigées dans le même sens, font les mêmes angles avec les rayons vecteurs d'un même point. Pour une ellipse donnée, trois points arbitraires, pris sur elle, déterminent le quatrième par une construction facile, de façon que l'ellipse donnée soit l'ellipse circulaire de ces quatre points.

En remarquant que l'ellipse circulaire circonscrite à quatre points est, en même temps, l'ellipse circulaire *inscrite* dans le quadrilatère formé par les tangentes en ces points, on a une méthode pour la solution de la question 500.

Quant à l'expression $a - b$, elle ne me semble pas propre à définir la ressemblance approchée d'une ellipse avec un cercle. Lorsqu'il s'agit *de la forme*, évidemment c'est le *rapport* qui doit jouer ce rôle. Ici, il s'agit du minimum de la quantité

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}.$$

ELLING HOLST (Christiania).

500. (*Nester*). — Dans un Mémoire *Sur le produit des axes principaux des coniques touchant trois ou quatre droites données* (*M.*, p. 33; 1892), M. Molenbroek détermine l'ellipse maximum inscrite dans un quadrilatère; ce qui répond à une partie de la question 500. Les formules contenues dans ce Mémoire permettraient d'ailleurs de la résoudre complètement.

E. FAUQUEMBERGUE.

501. (*Onponale*). — Le mode de génération indiqué peut être remplacé par un autre plus commode, conséquence de ce que *si la droite* AB *passe par un point fixe* O, *la droite* CD *passe aussi par un point fixe* O_1. Si l'ellipse donnée a pour équation $E = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, et si x_1, y_1 sont les coordonnées du point O, celles du point O_1 sont

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}x_1, \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}y_1.$$

Il en résulte que *les droites* AB *et* CD *tournent autour des points* O *et* O_1 *dans des sens opposés, en faisant des angles égaux avec les axes de l'ellipse.*

Soient R, S, T les points de concours respectifs des trois couples de droites AB et CD, AC et BD, AD et BC. On retrouve d'abord immédiatement que le point R, comme le dit M. *Onponale,* décrit une hyperbole équilatère qui est l'hyperbole d'Apollonius passant par les pieds des normales à l'ellipse issues du point O. Cette hyperbole, comme on sait, a pour équation $H = c^2xy + b^2y_1x - a^2x_1y = 0$.

On peut trouver directement la courbe lieu des points S et T par les considérations suivantes. Il est clair que cette courbe, qui est du quatrième ordre, coupe l'ellipse E aux points où deux des points R, S, T se confondent, ce qui indique que la courbe passe par les points d'intersection de l'ellipse : 1° avec l'hyperbole; 2° avec les polaires P et P_1 des points O et O_1 par rapport à l'ellipse, ce qu'on peut démontrer par des considérations purement géométriques. On trouve de même que la courbe a pour asymptotes les axes des x et des y, et que chacun de ces axes rencontre la courbe en deux couples de points X_1, X_2, Y_1, Y_2, qui sont respectivement les conjugués harmoniques des sommets de l'ellipse. Les deux points à l'infini qui restent à déterminer se trouvent définis par les directions perpendiculaires aux asymptotes de l'ellipse, ce qui veut dire qu'il existe une ellipse E_1 semblable à E, mais tournée à 90°, et qui passe par les points d'intersection de l'ellipse E avec les polaires P et P_1. On trouve pour l'équation de E_1 ainsi définie

$$\begin{aligned}E_1 = (b^2x_1^2 + a^2y_1^2)(a^2x^2 + b^2y^2)\\ - 2a^2b^2c^2(xx_1 - yy_1) - (b^6x_1^2 + a^6y_1^2 - a^2b^2c^4) = 0.\end{aligned}$$

Les considérations précédentes montrent que la courbe cherchée a une équation de la forme $E_1.H + (Ax + By + C)E = 0$. L'observation déjà faite que les axes des x et des y sont asymptotes fournit les valeurs de A et B

$$A = -(b^2x_1^2 + a^2y_1^2)a^2y_1, \qquad B = (b^2x_1^2 + a^2y_1^2)b^2x_1,$$

et la relation indiquée relativement aux points X_1 et X_2 ou Y_1 et Y_2 fournit la valeur $C = a^2b^2c^2x_1y_1$. L'équation du lieu des points S et T est donc finalement

$$\begin{aligned}&(c^2xy + b^2xy_1 - a^2yx_1)\\ &\quad\times[(b^2x_1^2 + a^2y_1^2)(a^2x^2 + b^2y^2)\\ &\qquad - 2a^2b^2c^2(xx_1 - yy_1) - (b^6x_1^2 + a^6y_1^2 - a^2b^2c^4)]\\ &\quad + (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)\\ &\qquad\times[(b^2x_1y - a^2y_1x)(b^2x_1^2 + a^2y_1^2) + a^2b^2c^2x_1y_1] = 0.\end{aligned}$$

Ce résultat donne un exemple intéressant de la façon dont on peut parvenir à l'équation d'un lieu géométrique, *par des considérations préliminaires,* en évitant ainsi des calculs d'élimination qui, dans le problème actuel, seraient fort compliqués.

Elling Holst (Christiania).

502. (G. Kœnigs). — La question proposée revient, à cause même du théorème de M. Kœnigs, au problème suivant : *Étant donné sur un plan un système ∞^1 de courbes, trouver les surfaces dont les lignes asymptotiques d'un système ont pour*

projections orthogonales, sur le plan, les courbes données.

Le problème, ainsi énoncé, dépend de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre du *type parabolique*

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial u} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

dont les coefficients α, β peuvent d'ailleurs être des fonctions quelconques des variables indépendantes u, v. Pour le démontrer, je prends le plan fixe comme plan xy et les courbes du système donné pour courbes coordonnées $v = \text{const.}$; en leur associant un deuxième système tout à fait arbitraire de courbes $u = \text{const.}$, soit alors

$$(2) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire du plan. Si nous supposons que les formules

$$(3) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

définissent une des surfaces demandées, la théorie générale nous apprend que x, y, z devront bien satisfaire à une même équation (1) et réciproquement, si cela a lieu, les lignes $v = \text{const.}$ de la surface seront des lignes asymptotiques. Or, comme x, y sont des fonctions de u, v données à l'avance, les coefficients α, β seront aussi déterminés et l'on aura en effet : $\alpha = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $\beta = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$, les symboles de M. Christoffel $\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$ étant calculés pour la forme binaire (2), ce qui donne

$$(4) \quad \alpha = \frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} + \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - 2\,\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}}{2(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)}, \quad \beta = \frac{-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} + 2\,\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}}{2(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)}.$$

Dans le cas rappelé par M. Kœnigs, les lignes $v = \text{const.}$ sont des droites et par conséquent $\beta = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$; alors l'équation (1) est immédiatement intégrable et donne les surfaces réglées. Mais je vais considérer un autre cas fort intéressant. Supposons que *les lignes $v = \text{const.}$ soient des cercles concentriques*. Introduisons les coordonnées polaires par les formules $x = v \cos u$,

$y = v \sin u$; nous aurons

$$ds^2 = v^2 du^2 + dv^2, \qquad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0, \qquad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -v.$$

En posant $v = e^{-t}$, l'équation (1) devient l'équation classique de la théorie de la chaleur (Voyez RIEMANN, *Partielle Differentialgleichungen*, § 50 et suiv.) :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}. \tag{5}$$

Nous pourrons donc appliquer ici les résultats bien connus de Riemann, chaque cas d'intégration avec des conditions données aux limites recevant une interprétation géométrique correspondante.

J'ajoute que, dans le cas actuel, l'équation différentielle du deuxième système de lignes asymptotiques devient

$$2\left(\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) du = v\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv. \tag{6}$$

Si, par exemple, on part de la solution élémentaire $z = v^{m^2} \sin(mu)$, où m est une constante réelle quelconque, l'équation (6) s'intègre de suite et donne $v^{\frac{m^2}{2}} \sin(mu) = \text{const.}$ Ainsi les lignes qui ont l'équation ci-dessus en coordonnées polaires forment avec les cercles qui ont le centre à l'origine un de ces réseaux à invariants égaux, dont parle l'auteur de la question [1].

J'indique encore un cas où l'équation (1) se réduit à l'équation (5) de la théorie de la chaleur. L'élément linéaire

$$ds^2 = (u^2 + 1) du^2 + 2u\,du\,dv + dv^2 = du^2 + (u\,du + dv)^2$$

appartient évidemment au plan, et l'on a encore ici

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0, \qquad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1.$$

Les lignes $v = y - \frac{x^2}{2} = \text{const.}$ sont alors des paraboles égales.

---

[1] En particulier, si m est un nombre rationnel, la surface et ses lignes asymptotiques seront algébriques.

Il serait facile et intéressant de multiplier les exemples, mais cela ne peut se faire ici. LUIGI BIANCHI (Pise).

536. (*Vester*). — *Voir*, p. 404, la réponse à la question 224.
LA RÉDACTION.

Supposons en général que, par le centre de courbure O d'une courbe (A), on mène, faisant avec le rayon de courbure OM un angle constant θ dans un sens déterminé, une droite $OR = OM$. Soit (B) la courbe lieu du point R.

Considérons les points O', M', R' infiniment voisins des précédents. On peut prendre $OO'MM'$ et $OO'RR'$ comme éléments des aires de (A) et de (B). Soient $\rho M = \rho$, $O'M' = \rho + d\rho$, et $d\alpha$ l'angle de contingence formé par les rayons OM, $O'M'$. Il est aisé de voir qu'en négligeant les infiniment petits du second ordre, on aura

$$dA = OO'MM' = \frac{\rho^2\,d\alpha}{2}, \qquad dB = OO'RR' = \frac{\rho^2\,d\alpha}{2} + \rho\,d\rho \sin\theta.$$

Intégrant entre les limites ρ_0 et ρ_1, $B = A + \frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_0^2)\sin\theta$.

Pour avoir les aires totales des courbes, il faut d'ailleurs ajouter de part et d'autre celle de la développée de A, ce qui ne change pas la différence. Celle-ci est constamment nulle si $\theta = \pi$; mais elle s'annule, dans le cas général, toutes les fois que les valeurs limites des rayons de courbure sont égales. Il convient cependant de remarquer que la proposition n'a qu'une valeur analytique et peut conduire géométriquement à des résultats illusoires, si l'on ne discute pas quelles sont les parties des aires qui doivent être considérées comme négatives, etc.

PAUL TANNERY, WELSCH.

La proposition soupçonnée est exacte : il n'est pas même nécessaire que les diamètres MN et PQ soient rectangulaires, mais il suffit que leur angle soit constant. Ce théorème n'est, en effet, qu'un cas limite du suivant : « Étant donnée une courbe (m), soient ma et mp, deux droites la coupant en m sous des angles donnés. Soit a un des points où ma coupe la courbe (m), et soit p le second point d'intersection de mp avec la circonférence passant par a et touchant la courbe en m. Quand m décrit la courbe (m), p décrit une courbe d'aire égale. »

Enfin, ce dernier théorème n'est lui-même qu'un cas particulier du suivant : « Soient abc un triangle et p un point de son cercle circonscrit : le triangle abc restant semblable à lui-même, si ses trois sommets décrivent des courbes d'aires équivalentes, le lieu des homologues de p est une courbe de même aire que les précédentes. » Autrement dit : « Si une figure (A) se déplace dans un plan P, tout en changeant de grandeur, mais en restant semblable à une figure donnée (a), et si tous ses points M décrivent des courbes fermées, le lieu des points m de la figure (a), auxquelles correspondent des courbes (M) d'aires égales, est une circonférence. » On vérifie facilement d'une façon analytique cette propriété, que j'ai récemment trouvée par la Géométrie.

Ern. Duporcq.

538. (E.-N. Barisien). — *Voir*, p. 404, la réponse à la question 224.

La Rédaction.

548. (*Milèse*). — Les seules traductions françaises de Riemann sont au nombre de deux. Il a paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. V, 1873, une traduction de M. Picard du Mémoire *Sur la représentation des fonctions par les séries trigonométriques*, et MM. Gauthier-Villars viennent de publier une traduction de M. Laugel du Mémoire *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, suivie d'une liste bibliographique des Ouvrages, Tables et Mémoires relatifs à ce sujet depuis Euler jusqu'à 1895.

La Rédaction.

550. (Haton de la Goupillière). — M. Haton de la Goupillière sera peut-être content de savoir que M. Somoff († 1876), professeur de Mécanique à l'Université de Saint-Pétersbourg, membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg, a exécuté dans sa *Mécanique rationnelle* le programme que propose le célèbre savant français. Voici les matières traitées par Somoff (*Mécanique rationnelle*, seconde Partie, p. 1-164) (1) :

A. Le calcul des masses. La valeur moyenne d'une fonction de point. Densité moyenne de la masse. Centre de la masse.

---

(1) Il y a une traduction allemande faite par M. Ziwet, professeur à l'Université Ann-Arbor.

B. Méthodes pour la détermination des centres de la masse.

C. Les mouvements quadratiques relatifs aux plans. Moments d'inertie. Axes principaux.

D. Variation des masses et des étendues. Paramètres différentiels des fonctions de point. Fonctions thermométriques. Formules de Green. A. VASSILIEF (Kasan).

556 (*Nester*). — Soit $p = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ l'équation de la bissectrice MP, p étant la distance OP à l'origine et α le demi-angle $\widehat{\mathrm{OMH}}$. Si θ désigne l'angle du rayon vecteur $\mathrm{OM} = r$ avec l'axe polaire OH, on aura les relations

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta, \qquad p = r\sin\alpha.$$

Introduisant ces vecteurs dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$p^2\left(\frac{\sin^2 2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 2\alpha}{b^2}\right) = \sin^2\alpha.$$

C'est l'équation polaire de la podaire de l'enveloppe. En coordonnées ordinaires elle s'écrit

$$\frac{4x^2y^2}{a^2} + \frac{(x^2-y^2)^2}{b^2} = y^2.$$

On la construit aisément. AUDIBERT, H. BROCARD.

A l'aide des deux premières équations données plus haut, on peut théoriquement calculer l'équation de l'enveloppe. Nous nous contenterons de la donner en coordonnées tangentielles

$$\frac{4\eta^2\xi^2}{a^2} + \frac{(\xi^2-\eta^2)^2}{b^2} = \eta^2(\eta^2+\xi^2)^2.$$

AUDIBERT.

De même que dans la question 223 (1894, p. 116 et 207) l'hypothèse $a = b\sqrt{2}$ correspond à une forme particulière de la courbe. H. BROCARD.

599. (E. DUPORCQ). — *Voir*, p. 404, la réponse à la question 224. LA RÉDACTION.

QUESTIONS.

691. [I4a] Je me suis appuyé, dans ma solution de la question n° 109 [1], sur le théorème suivant : « p étant un nombre premier de la forme $8m+3$, la suite $1, 2, \ldots, 2m$ contient toujours m résidus quadratiques du nombre p. » On a aussi le théorème analogue, que l'on peut démontrer à peu près de la même manière : « p étant un nombre premier de la forme $8m+7$, la suite $2m+2, 2m+3 \ldots 4m+3$, contient toujours $m+1$ résidus quadratiques de p. » Ces théorèmes ont-ils déjà été énoncés? Je ne demande qu'un renseignement bibliographique, s'il y en a, puisque j'ai leur démonstration. RAOUL BRICARD.

692. [I19a] Soient r un nombre rationnel mesurant la diagonale d'un parallélépipède rectangle; α, β, γ les angles qu'elle forme avec trois arêtes issues du même sommet. Les longueurs de ces arêtes sont : $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$; celles des diagonales des faces sont : $r\sin\alpha$, $r\sin\beta$, $r\sin\gamma$, et l'on a la relation

$$(1) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

De plus, les formules

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

montrent que si $\tan\frac{\alpha}{2}$ est rationnelle, $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ le sont aussi; et, réciproquement, si $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sont en même temps rationnels, il en est de même de $\tan\frac{\alpha}{2}$.

Donc si l'on veut que les arêtes et toutes les diagonales soient commensurables, il faut et il suffit que $\tan\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\gamma}{2}$ le soient.

[1] Solution qui paraîtra ultérieurement. LA RÉDACTION.

Posant, pour abréger l'écriture, $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = x$, $\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = y$, $\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = z$; la relation (1) devient

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 + \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 = 1.$$

Mais, d'après la réponse de M. Brocard à la question 361 (t. II, p. 174), cette équation est impossible en nombres rationnels.

Pourrait-on démontrer *directement* cette impossibilité?

E. FAUQUEMBERGUE.

693. **[V9]** Dans l'*Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, par J. Hoüel (Paris, Gauthier-Villars, 1867), p. 67, on trouve la Note suivante : « Lagrange avait reconnu l'indépendance entre les formules de la Trigonométrie sphérique et l'axiome II (ou postulat 5 d'Euclide). Il considérait d'ailleurs toutes les autres tentatives de démonstration comme insuffisantes. C'est ainsi qu'il s'exprimait dans ses conversations avec M. Biot (*Communiqué par M. Lefort*). » Existe-t-il, dans les *Œuvres* imprimées de Lagrange, quelque passage qui confirme cette assertion de Hoüel?

P. MANSION (Gand).

694. **[M²2d]** On lit (*A. E. N.*, 2ᵉ série, t. VII, 1878, p. 284) la phrase suivante relative aux transformations par rayons vecteurs réciproques, où

$$ds^2 = \frac{1}{h^2}(dX^2 + dY^2 + dZ^2) \quad \text{avec} \quad h = aX + bY + cZ$$

et $a^2 + b^2 + c^2 = 0$: « M. Cremona, croyons-nous, a le premier appelé l'attention sur ce cas spécial de l'inversion. » Le renseignement donné sous forme dubitative par M. Darboux est-il exact? Sinon, qui a traité le premier ce cas, et dans quel recueil?

LUCIEN LÉVY.

695. **[A3g]** Dans une recherche sur la théorie des caisses de retraites, j'ai été, il y a quelques années, amené au théorème suivant : Soit $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x + a_{n-1} = 0$ une équation où $1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-2} > a_{n-1} > 0$; appelons, de plus, α_1 la plus petite et α_2 la plus grande des fractions $\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$; alors les valeurs absolues (les modules) de toutes les racines de l'équation sont comprises entre α_1 et α_2.

Ce théorème a-t-il été indiqué dans quelque Traité sur la théorie des équations? G. Eneström (Stockholm).

696. **[V3]** Dans le Tome I de son *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, M. Marie parle deux fois du géomètre Zénodore, qu'il fait naître, page 26, en —450, et page 261, vers 290. D'ailleurs, M. Marie attribue à ses deux Zénodore, à plus de sept siècles de distance, le même Ouvrage et le même commentateur! Il y a bien là une inadvertance de l'auteur; faut-il se ranger à l'avis de Baltzer qui, dans une note au bas de la page 136 de sa *Planimétrie*, dit que Zénodore (autrefois confondu avec Zénodote) a été placé dans le v^e siècle avant J.-C., mais doit probablement être placé après Archimède? A. Goulard.

697. **[A3i]** Un auteur s'est-il occupé spécialement des équations algébriques ou trigonométriques dites *Poristiques?* J'en ai rencontré plusieurs exemples à résoudre dans les *Mathematical problems* by Wolstenholme (London, 1878). E. Sadier.

698. **[O6rα]** Un correspondant voudrait-il donner une solution *analytique* du théorème suivant, que j'ai obtenu géométriquement?

Le lieu des points tels que leurs surfaces podaires, relatives à une surface fermée, aient des volumes égaux, est une sphère, dont le centre est le centre de gravité de la surface considérée, si l'on suppose sa densité en un point quelconque proportionnelle à la somme des courbures principales en ce point. E. Duporcq.

699. **[P3b]** On considère une ellipse et sa transformée par inversion, par rapport à un pôle P, la puissance d'inversion étant p^2. Lieu du point P pour que toutes les transformées aient une même aire donnée, la puissance d'inversion restant constante. Généraliser si possible. La question a-t-elle été traitée dans quelque Ouvrage? Servant.

700. **[V8]** Pourrait-on donner des renseignements biographiques sur le mathématicien *Charpit* qui, le 30 juin 1784, présenta à l'Académie des Sciences de Paris un Mémoire cité par Jacobi (*C. R.*, 1842) et par Terquem (*N. A.*, 1849, 399) sur *la réduction des équations aux différentielles partielles du premier ordre non linéaires?* Ce Mémoire a-t-il été publié depuis? A-t-il été recherché dans les Archives de l'Académie?

H. Brocard.

RÉPONSES.

347. (Cyp. Stephanos). — *Troisième réponse.* — M. Ricart (*voir* t. II, p. 231) paraît avoir emprunté sa définition du plan à Duhamel, *Des méthodes dans les Sciences de raisonnement*, 2e Partie, p. 12.

A. Goulard.

361. (Artemas Martin). — *Deuxième réponse.* — La possibilité d'un parallélépipède rectangle à arêtes et à diagonales des faces, mesurées en nombres entiers, a été démontrée par Euler (*Algèbre*, t. II, n° 238), comme on pourra le voir aussi dans les *N. A.* (1874, p. 64, 200-201, 289-292, 340-343, C. Chabanel et C. Moreau); mais les solutions indiquées (*loc. cit.*) ne donnent plus de nombre entier pour la diagonale du solide.

H. Brocard.

438. (J. Réveille). — Bien que je ne me souvienne pas d'avoir vu *formellement* énoncées les propositions signalées sous le n° 438, il est assez difficile de les considérer comme nouvelles, car ce sont des conséquences immédiates du théorème connu que, « si deux coniques sont doublement tangentes à une même troisième, deux de leurs sécantes communes forment un faisceau harmonique avec les cordes de contact ». En effet, si ces coniques sont deux cercles d'un même système, dont l'un évanouissant, on obtient sans autre considération la première proposition.

Dans le cas où ces coniques sont encore deux cercles, dont l'un évanouissant, mais de différents systèmes, le même théorème principal montre que la droite TT', joignant les points de contact des tangentes menées du foyer F au cercle non évanouissant (C), coupe la droite FC au point I situé sur la directrice. Le demi-angle des tangentes FT, FT', issues de F, ayant pour sinus $\frac{CT}{CF}$ $\left(\text{c'est-à-dire } \sqrt{\frac{CI}{CF}}, \text{ en raison de } CI.CF = \overline{CT}^2\right)$, est bien constant, car on ramène sur-le-champ $\sqrt{\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CF}}}$ à $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. La démonstration peut, du reste, s'achever par la Géométrie sans invoquer même la définition de la fonction sinus.

L'auteur donne ici cette démonstration.

On déduit de cette démonstration que les énoncés suivants et celui du n° 438 ne sont pas intrinsèquement distincts.

1° Les points de contact des tangentes menées du foyer d'une conique à un cercle bitangent ayant son centre sur l'axe non focal sont situés chacun sur une asymptote (si le centre était sur l'axe focal, le lieu des points de contact serait une conique homothétique et concentrique à la première, admettant comme sommets les foyers de celle-ci).

2° Si autour d'un point fixe F comme sommet, on fait pivoter un angle de grandeur constante et que, du point où chaque côté rencontre une droite fixe, on décrive un cercle tangent à l'autre côté, l'enveloppe de ces cercles est une hyperbole admettant le point F comme foyer et la droite fixe comme axe focal : le lieu du point où chaque cercle touche le côté opposé de l'angle mobile est une des asymptotes de l'hyperbole. E. Malo.

MM. A.-S. Ramsey (Edimbourg) et V. Retali (Milan) ont aussi adressé des réponses fort simples à cette question. La Rédaction.

450. (E. Lemoine). — *Deuxième réponse.* — Soit ABCD un tétraèdre et soit O un point quelconque de l'espace : 4 plans respectivement perpendiculaires aux droites OB, OB, OC et OD détermineront un tétraèdre orthologique à ABCD. Pour que ce tétraèdre soit doublement orthologique à ABCD, il faut et il suffit qu'il existe un point O′ tel que, par exemple, les droites O′A, O′B, O′C et O′D soient respectivement parallèles aux droites OB, OC, OD et OA. S'il en est ainsi, il y aura une infinité de tétraèdres A′B′C′D′ homothétiques à ABCD et tels que leurs sommets A′, B′, C′ et D′ soient respectivement sur les droites OB, OC, OD et OA. Considérons celui d'entre eux dont le sommet A′ coïncide avec B ; le point O sera à la fois sur les droites CB′, DC′, et AD′. Or les droites CB′ et AD′ ne peuvent se rencontrer, le point D′ étant évidemment en dehors

du plan ACB', qui n'est autre que le plan A'B'C' On voit donc que deux tétraèdres ne sont jamais doublement orthologiques. La même méthode, appliquée au triangle, montre au contraire que si O appartient à la conique circonscrite au triangle ABC et ayant le même centre de gravité, les triangles de côtés perpendiculaires aux droites OA, OB et OC sont triplement orthologiques à ABC. Les deux centres O' et O'' correspondants sont sur la même conique, et le triangle OO'O'' a le même centre de gravité que le triangle ABC.

On peut aussi répondre à la question en s'appuyant sur un théorème plus général, c'est qu'*il n'existe pas de tétraèdre* T *orthologique à la fois à deux tétraèdres donnés*, T_1 et T_2 : si, en effet, il en existe un, les tétraèdres T_1 et T_2 ont leurs faces parallèles à celles de deux tétraèdres homologiques, dont les sommets se trouvent sur quatre droites concourantes perpendiculaires aux faces du tétraèdre T ; les faces correspondantes des tétraèdres T_1 et T_2 doivent donc se couper suivant quatre droites parallèles à un même plan. De là résulte l'impossibilité de tétraèdres doublement orthologiques, un tétraèdre ne pouvant posséder quatre arêtes parallèles à un même plan.

Ernest Duporcq.

451. (E. Lemoine). — *Troisième réponse.* — Soit $y_{n,k}$ la probabilité cherchée ; on voit d'abord immédiatement que la probabilité est nulle si k est inférieur à n ou si, k étant supérieur à n, on a $n = 1$, et que cette probabilité est égale à $\frac{1}{n!}$ lorsque $k = n$.

En général, si l'on fait le premier tirage, deux cas peuvent se présenter :

1° On tire une boule ne portant pas le numéro le plus élevé ; probabilité de ce tirage, $\frac{n-1}{n}$; probabilité qui en résulte pour la réussite de l'opération, $y_{u,k-1}$; 2° on tire la boule portant le numéro le plus élevé ; probabilité de ce tirage, $\frac{1}{n}$; probabilité qui en résulte pour la réussite de l'opération, $y_{n-1,k-1}$.

On a donc l'équation

$$y_{n,k} = \frac{n-1}{n} y_{n,k-1} + \frac{1}{n} y_{n-1,k-1}.$$

En partant de la formule d'Algèbre connue

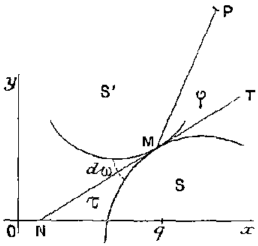
$$\frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^{p=n-2} (-1)^p \frac{(n-p-1)^{n-1}}{p!\,(n-p)!} = y_{n,n},$$

on arrive, pour la probabilité cherchée, c'est-à-dire pour la probabilité que l'urne soit vidée au coup de rang n, et pas avant, à

$$y_{n,k} = \sum_{p=0}^{p=n-2} (-1)^n \frac{p(n-p-1)^{k-1}}{p!(n-p)!\,(n-p)^{k-n}}$$

C. Moreau.

465. (E. Duporcq). — *Deuxième réponse.* — Le mouvement du plan Q sur le plan P est défini par le roulement d'une courbe



S′ liée au plan Q sur une courbe S invariable dans le plan P, ces deux courbes étant les lieux des centres instantanés de rotation sur chaque plan.

L'angle dont tourne un point P autour du point de contact M des deux courbes pendant l'instant dt est $d\omega = \frac{1}{2}(d\tau + d\tau')$; $d\tau$ et $d\tau'$ étant les angles de contingence des deux courbes au point M.

Soient q la projection du centre de gravité de la courbe décrite par P sur Ox; x l'abscisse de M; φ et τ les deux angles PMT et MNx; on a

$$Oq \int d\omega = 4m\pi\, Oq = \int [\mathrm{MP}\cos(\varphi + \tau) + x]\, d\omega.$$

TM$\,d\omega$ est un élément de la courbe décrite par P et est perpendiculaire à MP; $\cos(\varphi+\tau)\mathrm{MP}\,d\omega$ est donc la projection de cet élément sur Oy et comme la courbe décrite par P est fermée, $\int \cos(\varphi + \tau)\,\mathrm{MP}\,d\omega = 0$. On a donc $4m\pi \mathrm{O}q = \int x\,d\omega$, quantité qui ne dépend que des variables définissant les deux courbes S et S' et par conséquent constante, quelle que soit la position de P.

J. Destoux.

467. (E.-N. Barisien). — Sur le cercle circonscrit au quadrilatère AB_1C_1P, soit Q le point diamétralement opposé au point A ; l'angle PAQ est évidemment le complément de l'angle α, et le rapport des côtés AP et AQ du triangle rectangle PAQ est $\sin\alpha$. On en déduit que le point Q est sur une circonférence Γ qui passe par le point A et par le point diamétralement opposé de la circonférence (ABC), et qui coupe cette dernière suivant l'angle α. Soient b et c les seconds points d'intersection de la circonférence Γ avec les droites AB et AC ; la droite B_1C_1 est évidemment une droite de Wallace du triangle Abc, et son enveloppe est donc une hypocycloïde à trois rebroussements. Quel que soit α, toutes les hypocycloïdes obtenues sont tangentes aux côtés du triangle ABC. Une telle hypocycloïde étant définie par quatre conditions, on en déduit le théorème suivant : « Si, par les sommets d'un triangle circonscrit à une hypocycloïde à trois rebroussements, on mène à cette courbe les troisièmes tangentes, ces trois droites coupent, sous des angles égaux, les côtés du triangle opposés aux sommets dont elles sont issues. »

Ernest Duporcq.

Étant donnés un point P et une droite g dans un plan Q, on peut, par le point P, mener une droite l et une seule située dans le plan Q et telle que l'angle (l, g) ait une tangente donnée ; on entend par (l, g) l'angle obtenu en faisant tourner la droite g dans le sens direct autour de l'un de ses points, jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle à la droite l. Soient maintenant P_1, P_2, P_3 les sommets d'un triangle quelconque, g_1, g_2, g_3 les côtés P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 et P un point arbitraire du cercle C circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$. Par ce point P menons trois rayons l_1, l_2, l_3 tels que les angles (l_1, g_1), (l_2, g_2), (l_3, g_3) aient une tangente donnée que nous désignerons par $\tan g\alpha$. Les points d'intersection des rayons l_1, l_2, l_3 avec les côtés respectifs g_1, g_2, g_3 sont alors situés sur une même droite L. L'équation de cette droite, par rapport à deux axes rectangulaires quelconques dont l'origine O coïncide avec le centre du cercle C, peut se mettre sous la forme suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\alpha[x\cos(\alpha+u)+y\sin(\alpha+u)]\\ &\quad=\frac{r}{2}[\sin(2\alpha+u-\varphi)-\sin(u-\varphi_1)\\ &\qquad\qquad-\sin(u-\varphi_2)-\sin(u-\varphi_3)], \end{aligned}\right.$$

r étant le rayon du cercle C, φ, φ_1, φ_2, φ_3 les angles des droites OP, OP_1, OP_2, OP_3 avec l'axe des x et où l'on a fait, pour abréger,

$$u=\frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3-\varphi}{2}.$$

En supposant, en particulier, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, on retrouve l'équation de la droite de Wallace (voir t. I, p. 174).

De l'équation (1) on tire aisément la solution des questions posées par M. Barisien. Ainsi l'enveloppe de la droite L, quand le point P décrit la circonférence C, est une hypocycloïde à trois rebroussements engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{r}{2\sin\alpha}$ roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon triple dont le centre a pour coordonnées

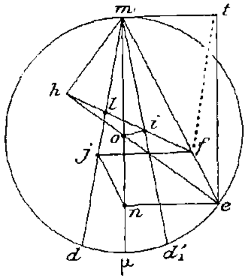
$$x=\quad r\frac{\sin(\alpha+\varphi_1)+\sin(\alpha+\varphi_2)+\sin(\alpha+\varphi_3)}{2\sin\alpha},$$

$$y=-r\frac{\cos(\alpha+\varphi_1)+\cos(\alpha+\varphi_2)+\cos(\alpha+\varphi_3)}{2\sin\alpha}.$$

Nous signalerons une intéressante propriété de cette droite L. Son enveloppe, quand α varie (φ restant fixe), est la parabole inscrite dans le triangle $P_1P_2P_3$ et dont le foyer est en P. C'est là une généralisation de cette propriété élémentaire : le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes à une parabole est la tangente au sommet.

J. Franel (Zurich).

482. (Goulard). — Soient m le point commun aux coniques du faisceau, $m\mu$ leur rayon de courbure en ce point et md leur diamètre. Si, pour une de ces coniques, n est le point où l'axe focal rencontre la normale $m\mu$, on sait que la perpendiculaire ne à cette droite rencontre le rayon vecteur mf, qui passe par le foyer de cette courbe, en un point e qui est la projection de μ sur mf. On sait aussi que la perpendiculaire fj à $m\mu$ et la parallèle nj à mf se coupent en un point j du diamètre md. D'après cela, la construction du foyer f de l'une des coniques se réduit à ceci : *Sur $m\mu$ comme diamètre on décrit une circon-*



férence de cercle et l'on mène une corde arbitraire me. Du pied t de la perpendiculaire abaissée de e sur la tangente en m, on mène tf parallèlement au diamètre md : cette droite coupe me au foyer f. Lorsque la corde me tourne autour de m, le point f ainsi déterminé engendre une courbe dont nous allons maintenant chercher la nature.

Faisons d'abord remarquer que la conique, dont f est un des foyers, a son autre foyer sur la corde symétrique de me par rapport à μ. Si l'on cherche, en appliquant la construction précédente, le foyer sur la droite md, on trouve qu'il est à l'infini. La conique correspondante est la parabole du faisceau, et son foyer, d'après ce qui précède, est le point milieu de md_1, symétrique de md par rapport à $m\mu$.

Appelons o le centre de la circonférence et reprenons la corde arbitraire me. Cette droite est la bissectrice de l'angle oet. Le pied h de la perpendiculaire mh à eo est alors le symétrique de t par rapport à me.

La droite hf est donc symétrique de ft par rapport à cette même droite.

L'on a $\widehat{ehf} = \widehat{fte} = \widehat{\mu m d_1}$.

D'après cela, en appelant i le point de rencontre de hf et de md_1 : les points o, i, m, h sont sur une circonférence de cercle. L'angle oim est alors droit comme l'angle ohm et *le point i est* *le milieu de la corde* md_1; c'est donc, d'après une remarque précédente, *le foyer de la parabole du faisceau.*

Appelons l le point où hf coupe md; l'on a

$$\widehat{lfm} = \widehat{lfm} = \widehat{fml},$$

donc le triangle flm est isoscèle et le côté lf est égal à lm.

On voit donc que *sur une droite arbitraire* lif, *qui passe par le foyer fixe de la parabole, on obtient le point* f *en portant* lf *égal à* lm, *qui est compté sur le diamètre fixe* md *à partir du point* m. *Le point* f *engendre alors une strophoïde lorsque* lif *tourne autour du foyer* i. MANNHEIM.

486. (*Nester*). — *Deuxième réponse.* — Dans la réponse donnée, p. 278, nous avons oublié de mettre à côté du nom de M. MANNHEIM celui de M. G.-A. SCOTT (Bryn Mawr, U. S. A.) qui nous avait envoyé une réponse conçue en termes presque identiques, et de mentionner les élégantes solutions que MM. AUDIBERT, ELLING HOLST et SADIER nous ont envoyées, mais que les renseignements bibliographiques donnés nous permettent de ne pas reproduire. LA RÉDACTION.

487. (DÉSIRÉ ANDRÉ). — Il semble que ce soit Catalan qui, le premier, ait formulé le théorème empirique en question. Il y fut conduit, en 1842, par l'étude de la série

$$1 + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{15.16} + \frac{1}{24.25} + \ldots + \frac{1}{(p-1)p} + \ldots,$$

p étant une *puissance;* et « perdit près d'une année à la recherche d'une démonstration qui fuyait toujours ». (*Voir* CATALAN, *Mélanges math.*, t. I, p. 42.) L'auteur a, d'ailleurs, reproduit ce théorème sous forme de question dans la *N. C.*, 1877, t. III, p. 434, mais je n'en connais pas de démonstration générale. *H. Braid.*

488. (D. BESSO). — Dans le Livre des *Essais* de Spence (*voir* I, **337**, p. 183), Sir John Herschel faisait remarquer que Spence avait étudié l'intégrale $\int \frac{dx}{x-1} (\log x)^{\frac{m}{n}}$ et laissé un manuscrit sur ce sujet, lequel n'était pas publié dans le Volume. Si l'on fait usage de la notation de Spence, on peut représenter facilement l'intégrale $\int \frac{(\log x)^n}{x \pm 1} dx$ par la série

$$(\log x)^n \overset{1}{\mathrm{L}}(1 \pm x) - n(\log x)^{n-1} \overset{2}{\mathrm{L}}(1 \pm x)$$
$$+ n(n-1)(\log x)^{n-2} \overset{3}{\mathrm{L}}(1 \pm x) - \ldots$$
$$+ (-1)^n n! \overset{n+1}{\mathrm{L}}(1 \pm x).$$

A.-S. Ramsey (Édimbourg).

496. (H. Delannoy). — Le nombre de solutions du problème des 6 jetons sur un échiquier de n cases est donné par les formules

$$n \text{ pair} : 6C_n^3 C_{n-4}^3 + 8C_n^3(3n-14) + n(n-2)(n-6)(n-12),$$
$$n \text{ impair} : 6C_n^3 C_{n-4}^3 + 8C_n^3(3n-14)$$
$$+ 2(n-1)(n-6)(n^2-13n+26),$$

que l'on écrit

$$n \text{ pair} : \frac{n(n-1)(n-2)}{6}[(n-4)(n-5)(n-6)+8(3n-14)]$$
$$+ n(n-2)(n-6)(n-12),$$
$$n \text{ impair} : \frac{n(n-1)(n-2)}{6}[(n-4)(n-5)(n-6)+8(3n-14)]$$
$$+2(n-1)(n-6)(n^2-13n+26).$$

Pour le cas précisé dans la question, $n = 6$ et la première formule donne 640 pour le nombre des solutions. G. Tarry.

514. (B. Portier). — *Les Carrés magiques. Étude historique et arithmétique,* par H. Tarry. Alger, typographie Jourdan; 1876. Brochure de 18 pages.— *On the general properties of nasik squares,* par A.-H. Frost (*extracted from the quarterly Journal of pure and applied Mathematics,* n° 57; 1877), brochure de 16 pages. — *Magic squares, from the Encyclopædia britannica,* par M. A.-H. Frost; 1882. Brochure de 13 p. — *Die magischen Figuren, allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Alterthum stammenden Problems,* par Dr Hermann Schefeler. Leipsig, Verlag Teubner; 1882. Volume de 112 pages. — *Sur les égalités à deux degrés,* par G. de Longchamps (Extrait du *Journal de mathématiques élémentaires,* numéros d'août et de septembre 1889). Librairie Delagrave. Brochure de 8 pages. — *Égalités à deux degrés,* par

Michel Frolov (Extrait du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII; 1889). Brochure de 15 pages. H. Delannoy.

Je crois devoir signaler la brochure suivante, écrite en français, mais qui est, je crois, fort peu connue : Chambeyron (L.), *Théorie des carrés magiques*. In-4°; 29 pages. Lorient, impr. Baumal.

A. Goulard.

519. (*Piol*) [1]. — L'ensemble des points par lesquels la bille ira passer est infiniment moins vide que l'ensemble de ceux par lesquels elle ne passera pas; on pourrait dire qu'il y a entre les deux ensembles la même relation qu'entre l'ensemble des nombres rationnels et celui des nombres réels compris dans un même intervalle. Toutefois, si le rapport $\frac{a \operatorname{tang} \alpha}{b}$, où a, b sont les longueurs des côtés du billard et α est l'angle de la direction initiale de la bille avec les longueurs des côtés a, est irrationnel, la bille passera aussi près qu'on le voudra de tout point arbitrairement donné. Je démontrerai cela dans une Note qui paraîtra dans un de nos journaux mathématiques.

G. Vivanti (Pavie).

Soient L la longueur AB d'une bande, H la longueur de l'autre AC, O l'origine du mouvement qu'on peut toujours prendre sur la bande L, D la distance OA, α l'angle de la bande L avec la trajectoire suivie par la bille en partant de O, h et d les distances d'un point a du billard aux bandes L et H.

La projection de la bille sur la bande L suivra cette bande en allant de O en A, de A en B, etc. Chaque fois que la bille touchera la bande L, sa projection aura parcouru la distance $\frac{2h}{\operatorname{tang}\alpha}$ une fois de plus. Pour que la bille passe par le point a, il faudra pouvoir résoudre l'une des quatre équations

$$D \pm \left(d \pm \frac{h}{\operatorname{tang}\alpha}\right) + 2nL = m\frac{2H}{\operatorname{tang}\alpha}$$

au moyen de valeurs entières ou nulles de m et de n, ce qui ne sera pas toujours possible.

Si le rapport $\frac{H}{L \operatorname{tang}\alpha}$ est incommensurable, ces quatre équa-

---

[1] C'est par suite d'un malentendu que cette question est parue sous un pseudonyme . le nom de l'auteur est Marette. La Rédaction.

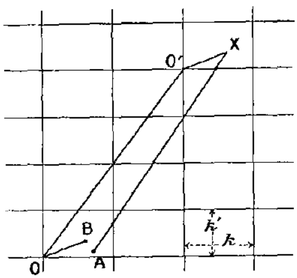
tions pourront se résoudre et la bille passera aussi près que l'on voudra d'un point donné. A. HÉBRAILH.

L'hypothèse de l'énoncé permet de remplacer la trajectoire brisée de la bille par une ligne droite sur un plan divisé indéfiniment en rectangles ayant les dimensions k et k' du billard. Il est clair, en effet, que par des duplicatures convenables on pourra faire coïncider l'un quelconque des rectangles du plan avec un rectangle origine, à chaque pliage la ligne droite se transformant en une ligne brisée telle que l'angle d'incidence égale l'angle de réflexion.

Ceci posé, considérons l'équipollence

$$A + X = 2mk + 2nk'i + B,$$

dans laquelle A représente une droite OA définissant le point de départ de la bille, X sa trajectoire; $2mk + 2nk'i$, avec m, n



entiers une droite OO' aboutissant à l'origine d'un certain rectangle et B une droite OB définissant un point quelconque du billard. Cette équipollence signifie que le contour OAXO'O se ferme avec $O'X = B$, c'est-à-dire que la bille rencontre le point considéré après $2m$ et $2n$ réflexions.

On en tire : $X = 2mk + 2nk'i + B - A$. L'inclinaison de X devant rester constante, on doit avoir

$$2nk' + t :: 2mk + s = \text{const.} = \text{tang inc} X,$$

où s, t sont les parties réelles et imaginaires de $B - A$. Cette condition est une équation du premier degré où les inconnues sont entières.

Une pareille équation admet une solution périodique lorsque tous les coefficients étant entiers, ceux des inconnues sont premiers entre eux. Donc, théoriquement, la bille ne pourra pas toujours atteindre un point quelconque du billard. Dans la pratique, on pourra toujours diviser par les facteurs communs et multiplier par une puissance de 10 convenable pour avoir des coefficients entiers. La solution ne sera qu'approchée; mais il sera toujours possible de prendre un nombre de chiffres significatifs suffisant pour que la trajectoire passe aussi près qu'on le voudra du point donné. Cela limitera simplement le nombre des solutions. Il faut remarquer qu'il y a en tout quatre séries de solutions données par les équipollences

$$A+X=2mk+2nk'i\pm B, \qquad A+X=2mk+2nk'i\pm \operatorname{conj} B$$

qui proviennent de ce que le point B occupe dans les divers rectangles quatre positions différentes suivant la parité des duplicatures.

FERBER.

520. (CERETTI). — Si tous les points de la portion de surface minima dont on est parti ont des coordonnées finies et si, en outre, le groupe obtenu est proprement discontinu, on conclut:

1° Que, pour cette surface minima, la fonction $\mathfrak{f}(s)$ de M. Weierstrass est une fonction *algébrique ;*

2° Que les intégrales

$$\int \mathfrak{f}(s)\,ds, \qquad \int s\,\mathfrak{f}(s)\,ds, \qquad \int s^2\,\mathfrak{f}(s)\,ds$$

sont, généralement parlant, des intégrales abéliennes de *première* espèce.

La surface adjointe de Bonnet étant donnée par les équations

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{R}\, i \int^{s} (1-s^2)\,\mathfrak{f}(s)\,ds,\\ y &= \mathfrak{R} - \int^{s} (1+s^2)\,\mathfrak{f}(s)\,ds,\\ z &= \mathfrak{R}\, i \int^{s} 2s\,\mathfrak{f}(s)\,ds, \end{aligned}$$

où $\mathfrak{R}$ désigne que l'on doit prendre, de la quantité complexe qui suit $\mathfrak{R}$, seulement la partie *réelle*, sera toujours périodique, puisque chaque système de périodes simultanées des trois intégrales abéliennes donne naissance, généralement parlant, à une périodicité de cette surface.

H. A. SCHWARZ (Berlin).

523. (Léon Autonne). — Comme application des théorèmes de Fourier, je crois la formule (2) parfaitement correcte.

Sous une forme quelque peu différente, Riemann en fait usage dans le Mémoire *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*Ges. Werke*, p. 149).

Seulement il n'est pas permis de prendre pour $\varphi(s)$ une fonction tout à fait arbitraire. En premier lieu, la fonction $\varphi(s)$ définie par (1) est uniforme et holomorphe dans tout le plan; le point à l'infini est donc un pôle ou bien un point singulier essentiel. Pour connaître la vraie nature de ce point, substituons dans (1) $s = m \pm ni$ (où n est entier). Il viendra

$$\varphi(m \pm ni) = \int_a^b e^{mt}\,V(t)\cos nt\,dt \pm i\int_a^b e^{mt}\,V(t)\sin nt\,dt.$$

Faisons tendre n vers ∞ et appliquons aux deux intégrales le théorème énoncé par M. Jordan, p. 217 de son *Cours d'Analyse*, t. I; 1883. Il en résultera : $\lim\limits_{n=\infty}\varphi(m \pm ni) = 0$. Cela suffit pour conclure que $s = \infty$ est un point singulier essentiel d'un caractère très spécial. Il n'y a pas alors à s'étonner que la supposition $\varphi(s) = s, s^2, \ldots$ ou bien $\varphi(s) = e^{\pm s}$ donne un résultat absurde. En effet, pour s et s^2, le point à l'infini est un pôle; et quant à $e^{\pm s}$, bien que $s = \infty$ soit maintenant un point singulier essentiel, la condition $\lim\limits_{n=\infty}\varphi(m \pm ni) = 0$ n'est pas remplie.

J.-C. Kluyver (Leyde).

Note. — Nous rappelons qu'il a été publié récemment par M. Laugel une traduction française du Mémoire cité de Riemann (*voir* t. II, p. 415).

La Rédaction.

580. (Paul Tannery). — On peut remarquer tout au moins que la trajectoire du pôle d'une spirale logarithmique roulant sur une autre spirale logarithmique (d'ailleurs quelconque), en partant de la coïncidence de leurs deux pôles à la limite, est une spirale logarithmique identique à la courbe fixe et de même pôle.

Haton de la Goupillière.

657. (E-M. Lémeray). — La limite de $\dfrac{\log\text{nat.}(1+\alpha)}{\alpha}$ pour $\alpha = 0$ est l'unité, et Napier avait fait égal à l'unité le rapport des vi-

tesses initiales des deux mobiles qu'il décrit au commencement du Livre de 1614, et des mouvements desquels il déduit ses logarithmes. De ce double fait il est résulté que les logarithmes népériens, comparés aux logarithmes naturels ou hyperboliques, obéissent à une relation simple, et cette relation est

$$\text{lognép.}\,x = 10^7(\text{lognat.}\,10^7 - \text{lognat.}\,x),$$

formule de laquelle il suit que le nombre dont le logarithme népérien est zéro est 10^7, et que les logarithmes népériens sont décroissants. Napier, dont la Table est une Table de logarithmes-sinus et non pas une Table des logarithmes des nombres naturels, avait pris le rayon égal à 10^7, et voulant que le logarithme du rayon fût zéro, il eut zéro pour logarithme du nombre 10^7. Le logarithme zéro ne correspondant pas au nombre un, les logarithmes de Napier n'ont pas la propriété

$$\log ab = \log a + \log b,$$

non plus que ne l'ont ceux de Bürgi, contemporain de Napier et second inventeur des logarithmes, qui, lui, ne connaît pas le terme logarithme, et chez lequel zéro est le logarithme du nombre 10^8. Il serait facile de montrer, mais ce n'est pas ici le lieu, qu'avec ces logarithmes on peut faire toutes multiplications, divisions, extractions aussi aisément que s'ils jouissaient de la propriété en question. Si l'on avait eu alors, comme on l'a aujourd'hui, le maniement facile et courant des décimales, Napier eût fait le rayon égal à l'unité, et il résulte des déductions mêmes qui donnent la formule ci-dessus qu'on aurait alors, entre les logarithmes népériens et les logarithmes naturels la relation

$$\text{lognép.}\,x = -\,\text{lognat.}\,x,$$

qui est celle qu'on obtient si l'on remplace 10^7 par 1 dans ladite formule. Nous avons vu que la Table de Napier est décroissante. Le logarithme du rayon ayant été fait égal à zéro, si Napier avait fait sa Table croissante, tous ses logarithmes-sinus eussent été négatifs, tandis qu'ils sont positifs avec des logarithmes décroissants. Peut-être a-t-il voulu que ses logarithmes-sinus fussent positifs, et que c'est là la raison pour laquelle sa Table est décroissante. Il serait très facile de montrer qu'avec le genre de considérations que Napier a mises à la base de la construction de sa Table, ses logarithmes, comparés aux logarithmes naturels, suivraient la relation

$$\text{log nép.}\, x = 10^7(\text{log nat.}\, x - \text{log nat.}\, 10^7)$$

s'il eût voulu avoir une Table croissante, et la relation

$$\text{log nép.}\, x = \text{log nat.}\, x$$

s'il eût en outre pris le rayon égal à 1, c'est-à-dire qu'il serait tombé alors sur les logarithmes naturels. Il n'a donc manqué que cela pour que les premiers logarithmes publiés eussent été des logarithmes naturels.

C'est John Speidell, un contemporain de Napier, qui, le premier, a commencé de franchir l'intervalle qui sépare les logarithmes népériens des naturels. Napier avait eu en vue de faciliter les calculs de l'Astronomie et de la Navigation, et sa Table, qui est une Table trigonométrique, se prête mal aux opérations de l'Arithmétique. Sans doute on les peut effectuer par son moyen, puisqu'en regard des logarithmes-sinus elle donne les nombres correspondants, qui sont les sinus pour le rayon 10^7; mais les nombres, non plus que les logarithmes, ne croissant par degrés égaux, l'interpolation est malaisée quand il ne s'agit pas d'un calcul trigonométrique. Pour remédier à cet inconvénient de la Table de Napier, John Speidell publia ses *New logarithms,* dont la première édition vit le jour, dit Hutton dans l'historique qu'il a mis en tête de ses Tables, en 1619, et la sixième en 1624. Dans celle-ci, toujours selon Hutton, se trouve un Appendice qui consiste en une Table des logarithmes des mille premiers nombres entiers, et ces logarithmes sont, à un facteur puissance de 10 près, les logarithmes naturels de ces nombres. Me trouvant un jour à Londres j'espérais rencontrer dans la Bibliothèque du British Museum cette édition de 1624, mais l'établissement ne possède de John Speidell qu'une édition antérieure à cette année-là. Peut-être ce livre, le premier en date contenant des logarithmes naturels, se trouve-t-il dans quelqu'une des grandes bibliothèques de Paris. Ch. Ruchonnet (*Lausanne*).

TABLE DES QUESTIONS ET RÉPONSES.

Chacune des questions publiées dans le Tome II porte un numéro d'ordre suivi de la lettre de l'Index du Répertoire bibliographique, servant à désigner la classe de la question correspondante. Les autres nombres de la Table indiquent les pages du Volume.

La lettre R indique qu'il existe des réponses ou des Notes en portefeuille, à publier ultérieurement.

La lettre Σ désigne les *sujets d'étude*, pour lesquels nous avons cru devoir proposer une subdivision spéciale (*voir* ci-dessus, p. 177).

Questions posées. Tome I		Pages.	Réponses. Tome II. Pages.
183.	I	95	152, 341.
186.	I	96	37.
190.	B	97	38, 217, 343.
191.	X	97	40, 219.
192.	X	98	41, 220.
193.	D	98	42, 106, 143.
195.	K	98	43.
197.	K	99	144.
200.	I	100	44, 220.
201.	D	100	45, 344.
202.	L	100	45.
203.	J	100	45, 389.
204.	A	101	47.
206.	O	102	51.
208.	I	102	52.
216.	B	114	54.
217.	V	115	55.
219.	M^2	116	56.
220.	V	116	58, 220.
224.	K	116	106, 344, 404.
225.	K	117	107.
228.	K	118	59.
230.	K	118	60, 221.
232.	L^2	129	62, 221.
233.	K	129	63.
234.	K	129	65.
235.	H	129	221.
237.	K	131	67.
239.	I	131	67.
240.	U	131	167, 345.
241.	F	132	152.
242.	A	132	68.
244.	A	132	70, 222.
245.	E	133	153, 346.
246.	V	133	110, 347, 404.
247.	H	133	404.
249.	S	134	71, 349.
250.	O	134	72, 350.
254.	O	145	168.
255.	L^1	145	73, 350.
258	K	146	75, 111, 351.
259.	K	146	158, 352, 404.
260.	I	146	78.
261.	Q	146	79.
268	K	149	R.

Questions posées. Tome I.		Pages.	Réponses. Tome II. Pages.
269.	K	149	169.
270.	K	149	171.
271.	H	149	80.
272.	M^1	149	224.
274.	V	149	81.
277.	M^2	150	82, 224.
279.	K	151	353.
280.	V	151	82.
283.	V	152	83.
285.	O	153	160, 356, 390.
288.	K	153	83.
290.	M^1	154	391.
291.	I	154	83, 357.
295.	M^1	155	112, 224.
296.	O	155	114.
297.	K	156	84, 226.
299.	K	156	183.
302.	V	177	114, 358, 405.
303.	H	177	226.
304.	Q	177	115.
306.	V	178	115.
307.	V	178	86.
308.	R	178	86, 228.
309.	O	179	87, 229.
310.	I	179	88.
311.	V	179	359.
312.	H	179	88.
313.	P	179	117.
314.	I	179	117, 359.
315.	D	180	172, 359.
316.	H	180	119.
317.	I	180	119, 405.
325.	S	183	120.
326.	S	183	120.
329.	K	184	360.
330.	J	184	120, 229.
332.	I	185	122. 362.
333.	V	186	123, 230, 363.
334.	I	186	123, 363.
335.	A	186	123.
336.	V	187	124, 363.
337.	C	187	183.
342.	J	188	184, 405.
343.	L^1	188	231.
344.	V	209	160, 391.

Questions posées. Tome I.		Pages.	Réponses. Tome II. Pages.
347.	V	210	231, 364, 420.
348.	V	210	124.
349.	D	210	R.
350.	I	210	185.
351.	A	211	185.
352.	E	211	173, 231.
358.	V	213	188.
359.	K	213	173.
360.	Q	213	232, 270.
361.	I	214	174, 420.
363.	X	214	392.
364.	K	214	364.
365.	K	225	191.
366.	V	226	175, 364.
370.	E	227	193, 365.
371.	J	227	235, 287.
372.	L^1	227	237, 287, 393.
373.	V	227	193, 241.
374.	V	227	242.
375.	M^2	228	242.
376.	K	228	243, 393.

Questions posées. Tome I.		Pages.	Réponses. Tome II. Pages.
377.	D	228	244, 365.
378.	V	228	247.
379.	I	228	249.
380.	I	230	259.
382.	K	230	287.
383.	N^4	230	194.
385.	I	232	288.
386.	I	232	289.
387.	V	233	290.
389.	M^3	233	260, 365.
390.	H	233	292.
391.	L^2	233	125, 365.
392.	D	234	294, 366.
393.	I	234	125.
394.	C	234	126, 366.
395.	B	235	127, 367.
397.	Q	235	261.
398.	I	235	368.
399.	Q	235	297.
400.	I	236	262.

Questions posées. Tome II.		Pages.	Réponses. Tome II. Pages.
401.	A	1	
402.	Q	2	194.
403.	K	3	
404.	K	3	264.
405.	K	3	196.
406.	I	3	299.
407.	J	4	265.
408.	Q	4	
409.	Q	4	
410.	K	4	
411.	R	4	265.
412.	H	5	265, 393.
413.	I	5	269, 368, 394.
414.	I	5	302, 394.
415.	V	5	269.
416.	X	5	R.
417.	I	5	369.
418.	I	6	394.
419.	V	6	
420.	O	7	

Questions posées. Tome II.		Pages.	Réponses. Tome II. Pages.
421.	D	7	395.
422.	O	7	
423.	K	7	395.
424.	Q	8	
425.	Q	8	270, 395.
426.	I	8	
427.	I	8	270.
428.	S	8	R.
429.	D	9	R.
430.	I	9	271.
431.	M^2	9	396.
432.	O	9	272.
433.	Q	9	
434.	Q	11	
435.	J	11	
436.	Q	12	405.
437.	K	12	
438.	L^1	13	420.
439.	R	13	
440.	I	13	R.

Questions posées. Tome II.		Pages	Réponses. Tome II. Pages.
441.	I	13	
442.	K	14	
443.	J	14	
444.	J	14	
445.	I	15	304, 369.
446.	B	15	396.
447.	L^1	15	
448.	B	15	
449.	E	16	397.
450.	K	16	304, 421.
451.	J	17	305, 397, 422.
452.	J	17	
453.	Q	17	R.
454.	Q	17	
455.	A	18	305.
456.	V	18	274. 370.
457.	K	18	
458.	I	19	R.
459.	I	19	370.
460.	I	19	371.
461.	I	19	308.
462.	L^1	19	310, 373.
463.	L^1	19	310, 373.
464.	L^1	19	310, 373.
465.	R	19	407, 423.
466.	V	20	
467.	O	20	424.
468.	L^1	20	R.
469.	L^1	21	376.
470.	K	21	200.
471.	K	21	
472.	M^1	21	377.
473.	R	22	R.
474.	H	22	275, 378, 398.
475.	M^1	22	
476.	K	23	
477.	I	23	R.
478.	M^1	23	
479.	Q	24	R.
480.	H	24	378, 432.
481.	H	24	378.
482.	L^1	24	425.
483.	K	25	407.
484.	A	25	379.
485.	D	25	383.

Questions posées. Tome II.		Pages.	Réponses. Tome II. Pages.
486.	M^1	26	278, 427.
487.	I	26	427.
488.	E	26	427.
489.	V	26	R.
490.	H	89	
491.	V	89	278, 384.
492.	R	89	408.
493.	Q	89	408.
494.	Q	91	
495.	Q	91	
496.	Q	91	428.
497.	L^1	91	
498.	L^1	91	278.
499.	L^1	91	408.
500.	L^1	92	408, 410.
501.	L^1	92	410.
502.	O	92	411.
503.	R	93	398.
504.	V	93	
505.	K	93	
506.	K	93	
507.	K	93	399.
508.	V	93	R.
509.	R	129	
510.	O	129	
511.	C	129	
512.	O	130	R
513.	V	130	399.
514.	Q	131	428.
515.	Q	131	
516.	D	131, 313.	
517.	J	131	
518.	V	132	
519.	K	132	429.
520.	O	132	431.
521.	I	132	200.
522.	A	133	
523.	E	133	432.
524.	M^1	134	
525.	K	134	279.
526.	H	134	R.
527.	D	145	
528.	A	145	
529.	I	145	399.
530.	V	146	

Questions posées. Tome II.	Pages.	Réponses. Tome II. Pages.	Questions posées. Tome II.	Pages.	Réponses. Tome II. Pages.
621. **S**	284		661. **M^1**	318	R.
622. **H**	284		662. **C**	318	R.
623. **E**	284		663. **I**	318	R.
624. **I**	285	R.	664. **I**	318	R.
625. **V**	285	R.	665. **L^1**	319	R.
626. **S**	285	R.	666. **A**	319	
627. **V**	285		667. **L^1**	319	
628. **B**	285		668. **J**	319	
629. **N^1**	286		669. **C**	319	
630. **T**	286		670. **Q**	320	
631. **V**	286	R.	671. **Q**	320	
632. **L^2**	286		672. **I**	385	R.
633. **B**	286	R.	673. **A**	385	
634. **A**	286	R.	674. **R**	385	R.
635. **V**	313		675. **V**	386	
636. **V**	313		676. **I**	386	
637. **M^1**	314		677. **K**	386	
638. **M^4**	314	R.	678. **V**	387	R.
639. **I**	314	R.	679. **J**	387	R.
640. **I**	314		680. **I**	387	R.
641. **I**	314		681. **I**	388	R.
642. **P**	315		682. **H**	388	R.
643. **P**	315	R.	683. **K**	388	R.
644. **M^1**	315	R.	684. **K**	338	R.
645. **I**	315	R.	685. **K**	401	
646. **I**	315	R.	686. **V**	401	
647. **E**	315	R.	687. **O**	401	R.
648. **V**	315	R.	688. **D**	402	
649. **V**	316	R.	689. **O**	402	R.
650. **H**	316		690. **D**	402	
651. **L^1**	316		691. **I**	417	
652. **V**	316		692. **I**	417	
653. **V**	316		693. **V**	418	
654. **E**	317	R.	694. **M^2**	418	
655. **S**	317	R.	695. **A**	418	
656. **H**	317		696. **V**	419	
657. **X**	317	432	697. **A**	419	
658. **V**	317		698. **O**	419	
659. **I**	317		699. **P**	419	
660. **I**	317	R.	700. **V**	419	

Note. — Dans ce Tableau nous n'avons indiqué, lorsqu'il y a plusieurs réponses à une même question qui se suivent immédiatement, que la page ù se trouve la première de ces réponses consécutives.

Énoncé rectifié. — N° 516, p. 313.

TABLE DES QUESTIONS

CLASSÉES SUIVANT LES DIVISIONS DE L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Ce Tableau fait connaître le sujet général des différentes questions proposées et le genre de recherches sur lesquelles s'est plus particulièrement portée l'attention des Correspondants. On remarquera, dans le Tome II, la place importante donnée, comme précédemment, à quelques subdivisions : l'Analyse combinatoire, la Géométrie de situation, l'Histoire des Sciences mathématiques; avec de nombreux énoncés relatifs à la Théorie des équations, au Calcul des probabilités, à la Théorie des nombres, à l'Analyse indéterminée et à la Géométrie.

Les nombres de cette Table sont les *numéros* des questions auxquelles la division de l'Index se rapporte.

Nous y avons ajouté une subdivision nouvelle, marquée Σ, et désignant les *sujets d'étude*.

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS.

Les noms inscrits sont exclusivement ceux des auteurs de questions ou de réponses.

L'_italique_ désigne les pseudonymes.

Les chiffres ordinaires indiquent les numéros des pages. Les numéros sans astérisque se rapportent aux QUESTIONS POSÉES; avec astérisque, ils désignent le rappel des questions au moment de la publication des réponses; en __caractères gras__, ils indiquent les __réponses__ annoncées dans le texte ou publiées.

Les questions 447 (p. 15), 661 (p. 318) et 687 (p. 401) sont anonymes.

Nous adressons nos remerciments à M. H. Brocard qui a bien voulu se charger de la rédaction des Tables des matières, suivant le type inauguré au Tome I type qui paraît donner toutes les facilités désirables pour les recherches.

Grâce à une subvention, qui n'a pas été inférieure à 1000^{fr}, de notre zélé collaborateur, le Tome II a compté 174 pages de plus que le précédent, c'est-à-dire plus de 230 pages en sus des 200 annoncées aux abonnés. Nous avons le ferme espoir que les nouvelles dispositions adoptées pour l'agrandissement du format à partir de 1896 donneront le moyen de satisfaire à toutes les exigences d'une prompte publication des questions et des réponses en portefeuille.

LA RÉDACTION.

ERRATA

TOME I.

Page 15, lignes 16 et 17, *au lieu de :* $\frac{r}{2(n+1)}$ et $\frac{r(n-1)}{2(n+1)}$, *lisez :* $\frac{r}{n+1}$ et $\frac{r(n-1)}{n+1}$.

» 16, ligne 3 en remontant, *au lieu de :* § 16, *lire :* § 6.

» 50, ligne 2 de la question 100, *après :* géométrique, *ajoutez :* et par les théorèmes du 1er et du 2e livre de Géométrie.

» 117, ligne 10 (question 225), *après :* ellipse, *ajoutez :* par rapport au centre,

» 136, ligne 16, *au lieu de* s_2^3, *lire* s_3^2.

» 144, ligne 11, *effacez* On sait que $D_1H = D_1A$.

» 144, ligne 13, *au lieu de :* HD.HD, *lisez* $HD.HD_1$; *effacez* les lignes 14, 15, 16.

» 151, ligne 4, *au lieu de :* droite, *lisez* gauche.

» 164, ligne 12, *au lieu de :* $\gtreqless 16$, *lisez :* > 16.

» 211, question 351, *supprimez :* et même que toutes les racines sont comprises entre -1 et -2.

» 238, ligne 25, *au lieu de :* anglaise, *lire :* américaine.

» 252, ligne 5, *au lieu de :* $\frac{u-v}{b-a} = 1$, *lire :* $\frac{u+v}{b-a} = 1$.

» 258, ligne 8 en remontant, *au lieu de :* liaisons, *lisez :* bissectrices.

» 261 (Tables), *après :* 152 V 88, *lisez :* 202.

» 263 (Tables) vis-à-vis de la question 352, *ajoutez :* R.

» 266 (Tables), 1re colonne, ligne 4 en remontant, *après :* Boyer, *ajoutez à la fin de la ligne :* 179.

» 267 (Tables), *après :* Friocourt (E.), *supprimez :* 181 *et ajoutez sur une nouvelle ligne :* Friocourt (G.), 181.

» 268 (Tables), les nos **207**, 228, qui désignent des nos de pages se rapportant à M. B. Niewenglowski, se rapportent en réalité à M. G.-H. Niewenglowski dont le nom doit être ajouté à la liste page 268.

» 271 (Tables), ligne 24, *au lieu de :* > 17, *lisez :* > 16.

TOME II.

» 11, lignes 8 et 11, *après :* couleur, *mettez :* sur des cases consécutives.

Page 11, ligne 12, *au lieu de :* fermés, *mettez :* amorcés.
» 19, question 460, *au lieu de :* nombres, *lisez :* carrés entiers.
» 21, ligne 2, question 468, *au lieu de :* lemniscate de Bernoulli, *lisez :* courbe analogue à la lemniscate de Bernoulli.
» 27, ligne 25, *après :* figure, *ajoutez :* symétrique d'une figure.
» 70, ligne 14, *au lieu de :* $f'(n)$, *lire :* $f'(x)$.
» 75, ligne 2, *au lieu de :* $\sin^2\alpha^2$, *lisez :* $\sin^2\alpha$.
» 79, lignes 9, 10, 14, *au lieu de :* mp, *lisez :* m_p.
» 83, avant-dernière ligne, *au lieu de :* p, *lisez* r.
» 87, ligne 16, question 309, *ajoutez : Deuxième réponse.*
» 106, ligne 15, *au lieu de :* DE REFFEY, *lisez :* DE REFFYE.
» 107, ligne 4, *au lieu de :* Liége, *lire :* Leyde.
» 112, ligne 15, *au lieu de :* O, *lire :* A.
» 126, ligne 12, *après :* 164, *ajoutez :* t. I.
» 131, ligne 3 de la question 516, *après :* différents ordres, *ajoutez :* et qu'elle soit égale à zéro pour tous les points du contour.
» 137, ligne dernière, *au lieu de :* $z+v$, *lisez :* $z-v$.
» 138, ligne 14, *au lieu de :* (4), *lisez :* (5).
» 144, lignes 10, 11, *au lieu de :* le nombre, *lisez :* les nombres.
» 144, ligne 14, *au lieu de :* avoir ce résultat, *lisez :* diviser ce résultat par 2.
» 145, question 527, *au lieu de :* $\frac{A_n}{B_n} z_n$, *lisez* $\sum \frac{A_n}{B_n} z^n$.
» 152, ligne 5, *au lieu de :* AC, *lisez :* AC'.
» 152, ligne 7, *au lieu de :* $K_b CK_b$, *lisez :* $K_b CK_c$.
» 199, le déterminant qui forme le dénominateur de la formule (5) doit être au carré.
» 215, ligne 10 en remontant, *au lieu de :* $\frac{b(b+1)}{2}$, *lisez :* $\frac{b(b-1)}{2}$.
» 215, ligne 5 en remontant, *au lieu de :* considère un, *lisez :* considère dans un.
» 222, ligne 3 en remontant, *au lieu de :* $a_0 x^p$, *lisez :* $a_0 x^m$.
» 246, ligne 2 en remontant, *au lieu de :* $\alpha^m \beta^m \gamma^m$, *lisez* $\alpha^m \beta^p \gamma^q$.
» 247, ligne 11, *au lieu de :* arc tang $\frac{1}{10}$, *lisez :* arc tang $\frac{1}{70}$.
» 264, dernière ligne, en dénominateur, *au lieu de :* $ab+cd-ef$, *lisez :* $ac+bd-ef$.
» 264, ligne 4, *au lieu de :* divisible par n, A étant divisible par n, *lisez :* congrue à A suivant le module n.
» 265, ligne 3, *au lieu de :* $ab+cd$, *lisez :* $ac+bd$.
» 275, ligne 15, *au lieu de :* Trost, *lisez :* Frost.
» 289, ligne 8 en remontant, *au lieu de :* fois 2, *lisez :* fois 2^s.
» 289, ligne 4 en remontant, *au lieu de :* $3^s \mathrm{E}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)^s - 1\right]$, *lisez*

$$3^s \mathrm{E}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)^s\right] - 1.$$

» 289, dernière ligne, *au lieu de :* $\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)p\right]$, *lisez :* $\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\right]^{\frac{s}{p}}$.

Page 295, ligne 2, en dessus du signe Σ, *au lieu de :* $t = n$, *lisez* . $r = n$.
» 299, ligne 21, *au lieu de :* $a' - b'$, *lisez :* $a' + b'$.
» 305, ligne 10 en remontant, le numérateur du second membre doit être 1 et non k.
» 314, ligne 10, *au lieu de :* $e^{\frac{1S}{\rho_0}}$, *lisez :* $e^{\frac{s}{\rho_0}}$.
» 325, ligne 17, *au lieu de :* $(m+1)^3 - m^3 + (m+1)^3 + (6\theta + \alpha_1)^3$, *lisez :* $(m+1)^3 - m^3 - m^3 + (m+1)^3 + (6\theta + \alpha_1)^3$.
» 332, ligne 10, *au lieu de :* proportionnels, *lisez* . inversement proportionnels.
» 333, ligne 8, *il manque respectivement* x, y, z sous chaque radical.
» 338, ligne 26, *au lieu de :* publique, *lisez :* primaire.
» 356, ligne 4, *après :* (E. Cesàro), *mettre : — Deuxième réponse.*
» 358, ligne 9, *au lieu de :* diviseur, *lisez :* multiple.
» 358, lignes 5 et 10, *au lieu de* . $\dfrac{x^m+1}{x^a+1}$, *lisez :* $\dfrac{x^m+y^m}{x^a+y^a}$.
» 358, lignes 6 et 10, *au lieu de :* $\dfrac{x^b+1}{x^r+1}$, *lisez :* $\dfrac{x^b+y^b}{x^r+y^r}$.
» 358, ligne 8, *au lieu de :* x^m+1, x^a+1 et x^b+1, *lisez :*

$$x^m+y^m,\ x^a+y^a \text{ et } x^b+y^b.$$

» 358, ligne 9, *au lieu de :* $\dfrac{(x^a+1)(y^b+1)}{x^r+1}$, *lisez* .

$$\frac{(x^a+y^a)(x^b+y^b)}{x^r+y^r}.$$

» 395, ligne 3 en remontant, *au lieu de :* troisième, *lisez* : deuxième.
» 414, ligne 11, *au lieu de :* ρM, *lisez :* OM.

NOTE.

Un accident qui s'est produit au tirage du numéro de janvier 1895 a défiguré sur quelques exemplaires les dernières lignes de la p. 24 (question 482). Elles doivent être rétablies comme il suit :

(On sait que cette courbe peut se définir au moyen d'un point et d'une droite : la droite est ici le diamètre commun, et le point n'est autre que le foyer de la parabole du faisceau.)

A. Goulard.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

21644 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.