



【思路岛课后习题答案网】为广大学子提供各科课后习题答案，不用积分，不用注册，就能下载！
全心打造一流的课后习题答案下载平台！

第二章习题答案

2.1 (1) 已知连续时间信号 $x(t)$ 如图 P2.1(a)所示。试画出下列各信号的波形图，并加以标注。

(a) $x(t-2)$

(b) $x(1-t)$

(c) $x(2t+2)$

(2) 根据图 P2.1(b)所示的信号 $h(t)$ ，试画出下列各信号的波形图，并加以标注。

(a) $h(t+3)$

(b) $h(\frac{t}{2}-2)$

(c) $h(1-2t)$

(3) 根据图 P2.1(a)和(b)所示的 $x(t)$ 和 $h(t)$ ，画出下列各信号的波形图，并加以标注。

(a) $x(t)h(-t)$

(b) $x(1-t)h(t-1)$

(c) $x(2-\frac{t}{2})h(t+4)$

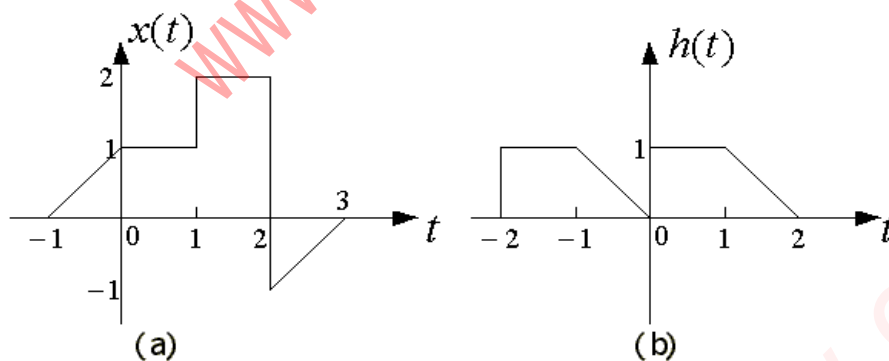
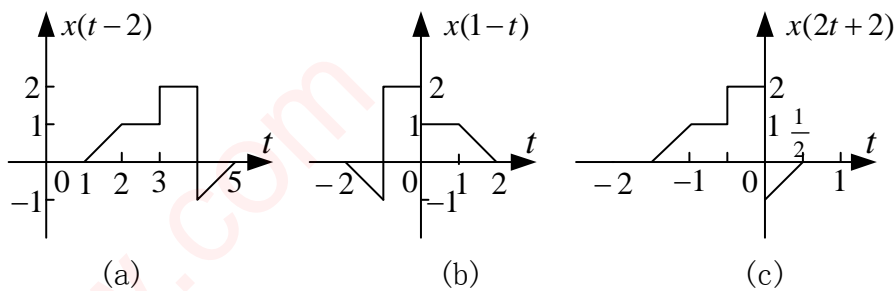
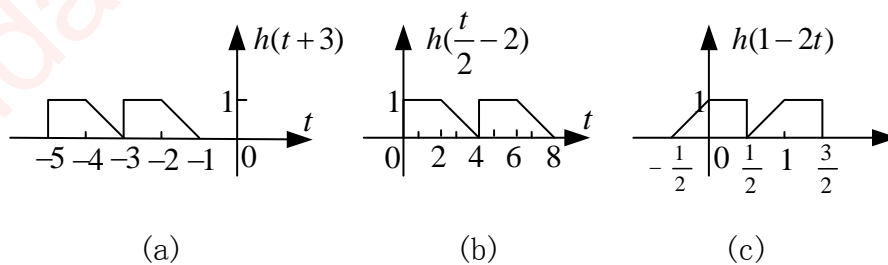


图 P2.1

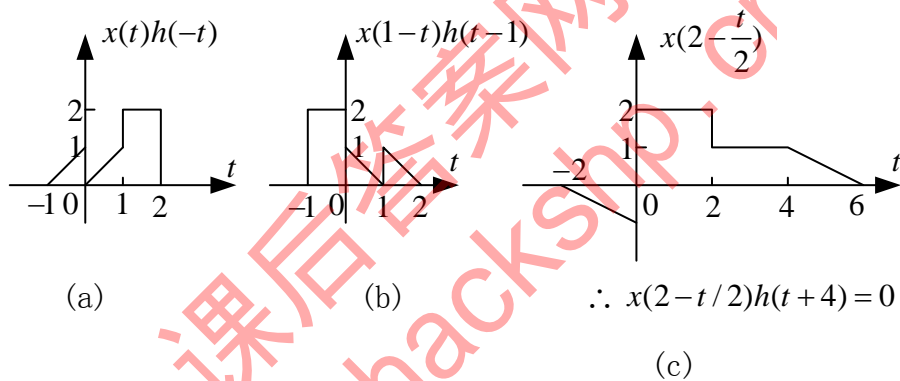
解：(1) 各信号波形如下图所示：



(2) 各信号波形如下图所示：



(3) 各信号波形如下图所示：



2.2 已知信号 $x(5-2t)$ 的波形图如图 P2.2 所示，试画出 $x(t)$ 的波形图，并加以标注。

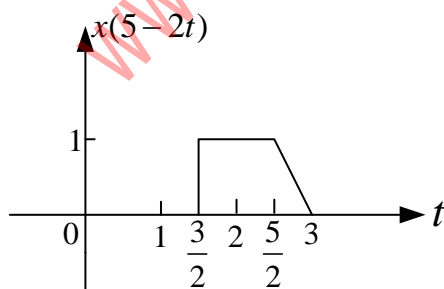
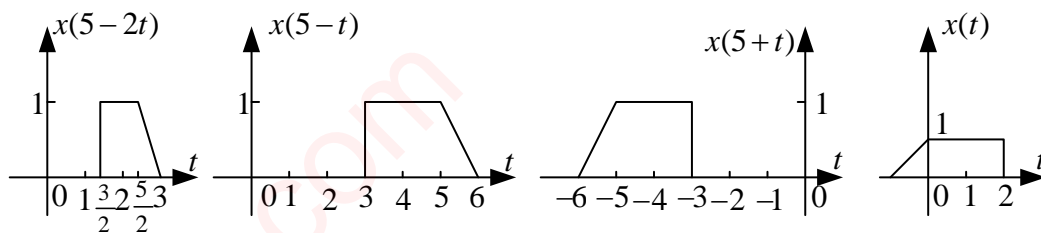


图 P2.2

解：波形如下图所示：



2.3 (1) 已知离散时间信号 $x(n]$ 如图 P2.3(a)所示，试画出下列各信号的波形图，并加以标注。

(a) $x(4-n]$

(b) $x(2n+1]$

(c) $\hat{x}(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{3}), & n \\ 0, & \text{其他}n \end{cases}$

(2) 对图 P2.3(b)所示的信号 $h(n]$ ，试画出下列个信号的波形，并加以标注。

(a) $h(2-n]$

(b) $h(n+2]$

(c) $h(n+2) + h(-n-1)$

(3) 根据图 P2.3(a)和(b)所示的 $x(n]$ 和 $h(n]$ ，画出下列各信号的波形图，并加以标注。

(a) $x(n+2)h(1-2n]$

(b) $x(1-n)h(n+4]$

(c) $x(n-1)h(n-3]$

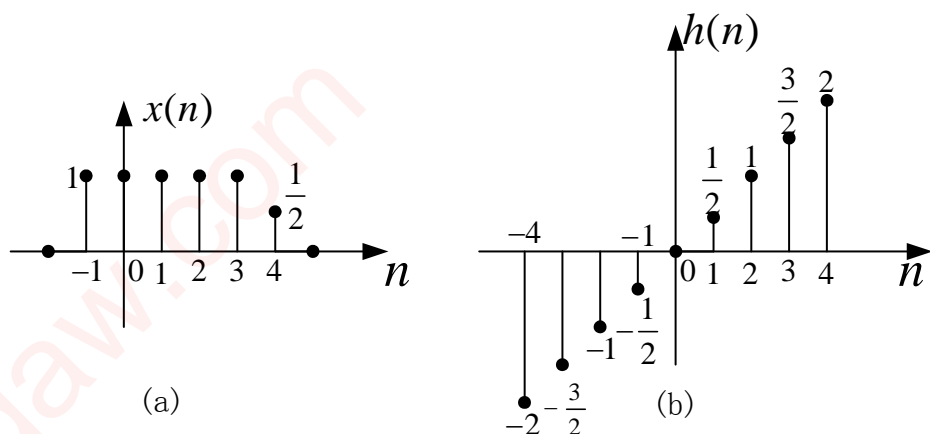
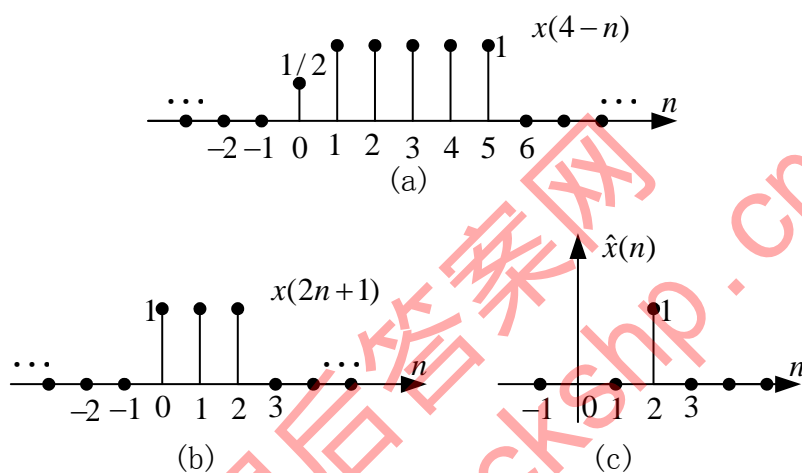
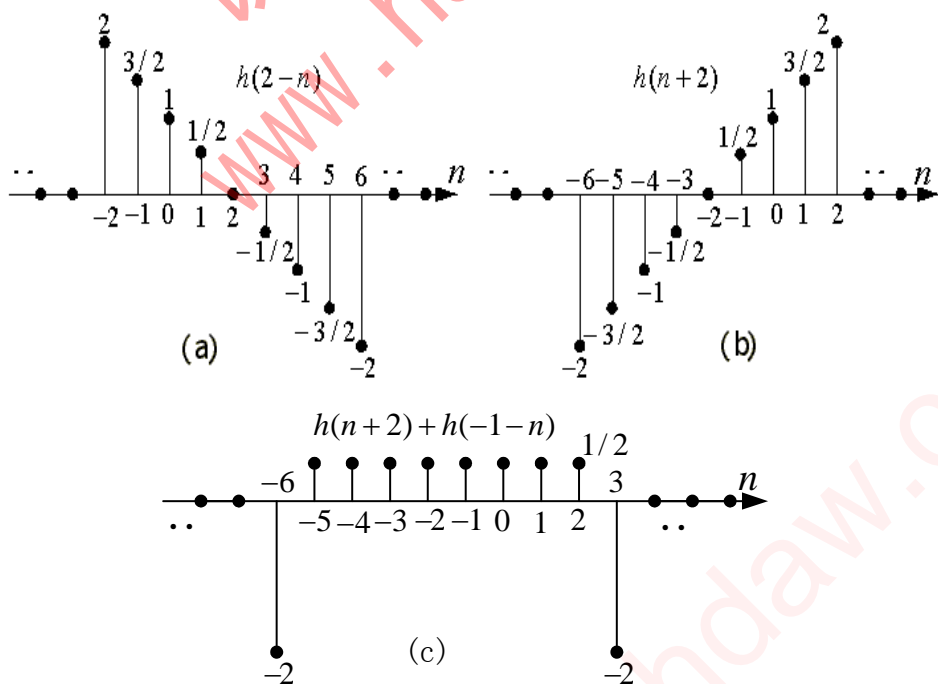


图 P2.3

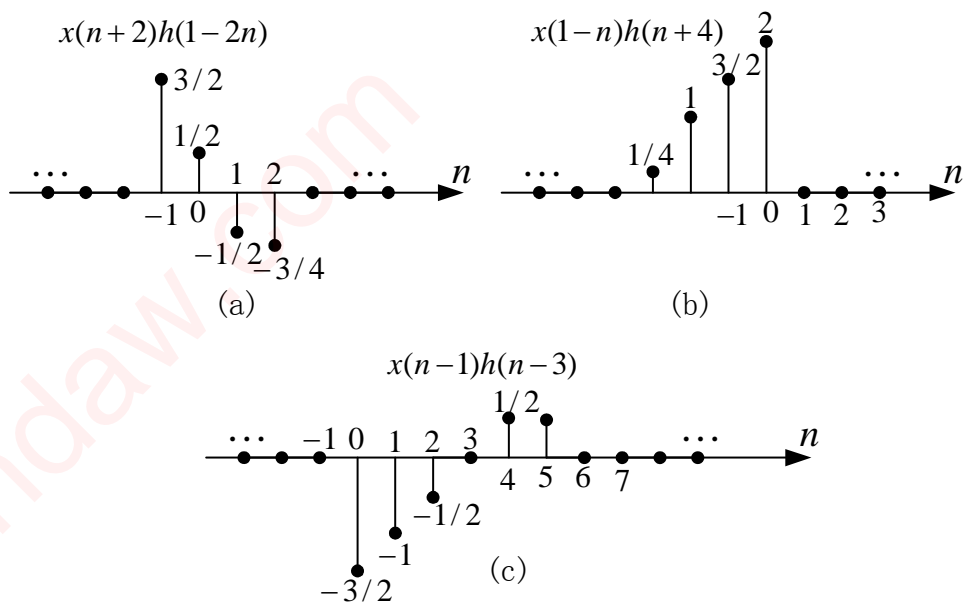
解：(1) 各信号波形图如下图所示：



(2) 各信号波形图如下图所示：



(3) 各信号波形如下图所示：



2.4 画出图 P2.4 所给各信号的奇部和偶部。

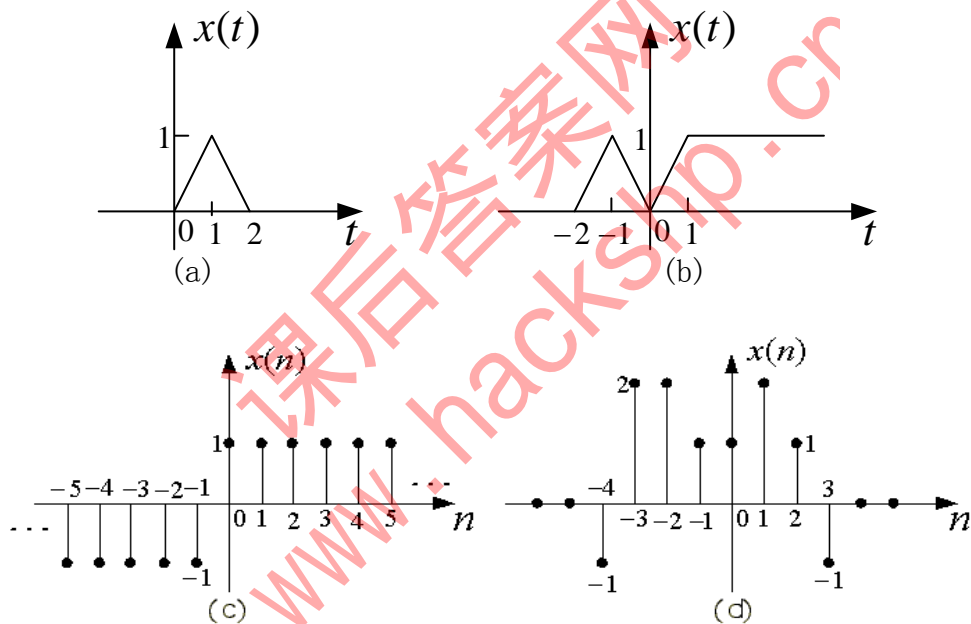
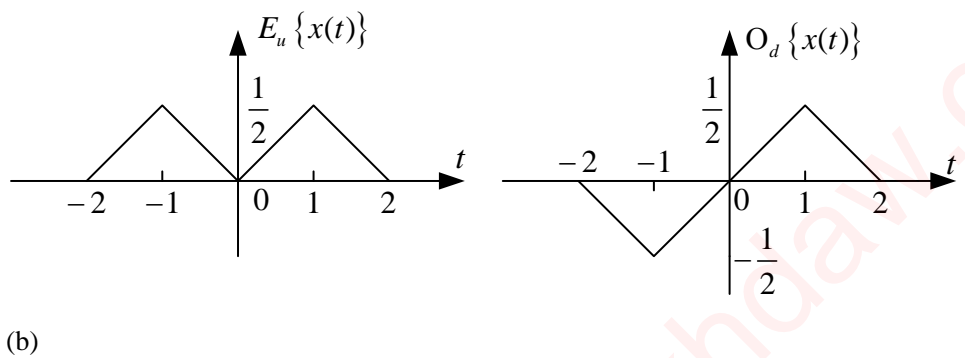
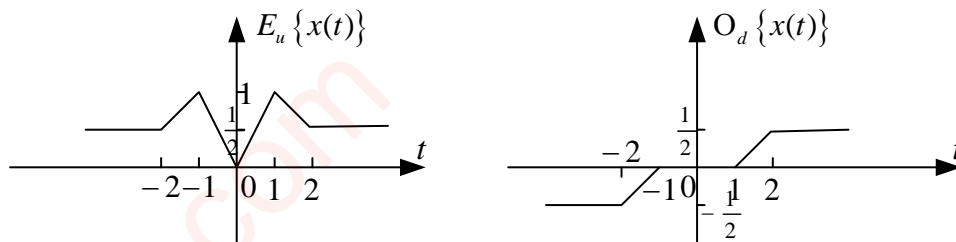


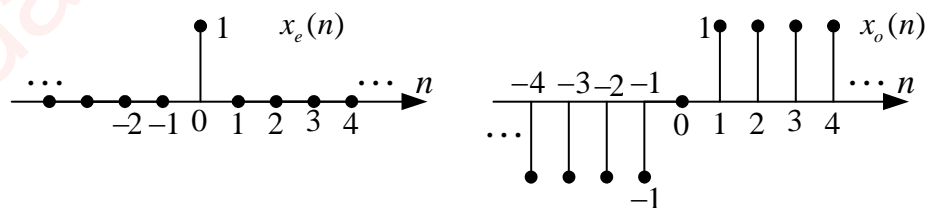
图 P2.4

解: (a)

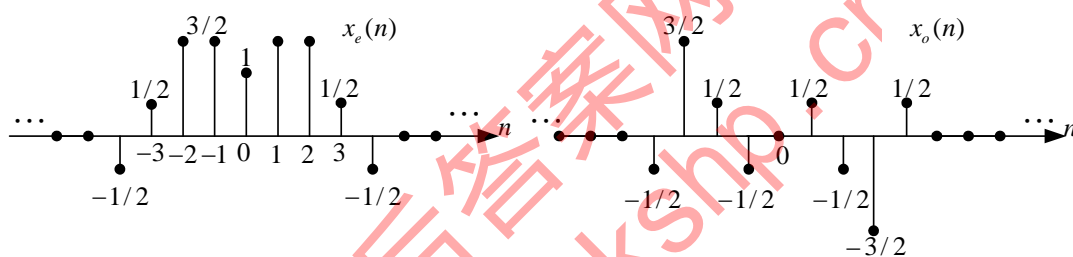




(c)



(d)



2.5 已知 $x(n]$ 如图 P2.5 所示，设：

$$y_1(n) = x(2n)$$

$$y_2(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 偶} \\ 0, & n \text{ 奇} \end{cases}$$

画出 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 的波形图。

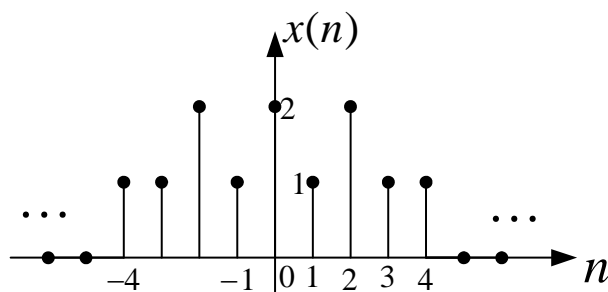
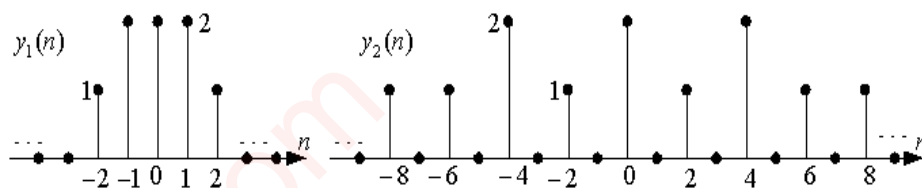


图 P2.5

解：



2.6 判断下列说法是否正确？如果正确，则求出每个信号基波周期之前的关系，如果不正确，则举出一个反例。

(1) (a) 若 $x(t)$ 是周期的，则 $x(2t)$ 也是周期的。

(b) 若 $x(2t)$ 是周期的，则 $x(t)$ 也是周期的。

(c) 若 $x(t)$ 是周期的，则 $x(t/2)$ 也是周期的。

(d) 若 $x(t/2)$ 是周期的，则 $x(t)$ 也是周期的。

(2) 定义 $y_1(n) = x(2n)$, $y_2(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 偶} \\ 0, & n \text{ 奇} \end{cases}$

(a) 若 $x(n)$ 是周期的，则 $y_1(n)$ 也是周期的。

(b) 若 $y_1(n)$ 是周期的，则 $x(n)$ 也是周期的。

(c) 若 $x(n)$ 是周期的，则 $y_2(n)$ 也是周期的。

(d) 若 $y_2(n)$ 是周期的，则 $x(n)$ 也是周期的。

解：(1) (a) 正确。若 $x(t)$ 的周期为 T ，则 $x(2t)$ 的周期为 $T/2$ 。

(b) 正确。若 $x(2t)$ 的周期为 T ，则 $x(t)$ 的周期为 $2T$ 。

(c) 正确。若 $x(t)$ 的周期为 T ，则 $x(t/2)$ 的周期为 $2T$ 。

(d) 正确。若 $x(t/2)$ 的周期为 T ，则 $x(t)$ 的周期为 $T/2$ 。

(2) 由 $y_1(n) = x(2n)$, $y_2(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 偶} \\ 0, & n \text{ 奇} \end{cases}$

(a) 正确。设 $x(n)$ 的周期为 N 。如果 N 为偶数，则 $y_1(n)$ 的周期为 $N/2$ ；如果 N

为奇数，则必须有 $2N_0 = 2N$ ，才能保证周期性，此时 $y_1(n)$ 的周期为 $N_0 = N$ 。

(b) 不正确。设 $x(n) = g(n) + h(n)$ ，其中 $g(n) = \sin \frac{\pi n}{4}$ ，对所有 n ，

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \text{ 奇} \\ 0, & n \text{ 偶} \end{cases} \quad \text{显然 } x(n) \text{ 是非周期的, 但 } y_1(n) \text{ 是周期的。}$$

(c) 正确。若 $x(n)$ 的周期为 N , 则 $y_2(n)$ 的周期为 $2N$ 。

(d) 正确。若 $y_2(n)$ 的周期为 N , 则 N 只能是偶数。 $x(n)$ 的周期为 $N/2$ 。

2.7 判断下列各信号是否是周期信号, 如果是周期信号, 求出它的基波周期。

(a) $x(t) = 2 \cos(3t + \pi/4)$ (b) $x(n) = \cos(8\pi n/7 + 2)$

(c) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$ (d) $x(n) = e^{j(n/8 - \pi)}$

(e) $x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} [\delta(n-3m) - \delta(n-1-3m)]$

(f) $x(t) = \cos 2\pi t \times u(t)$ (g) $x(n) = \cos(n/4) \times \cos(n\pi/4)$

(h) $x(t) = E_v [\cos 2\pi t \times u(t)]$ (i) $x(t) = E_v [\cos(2\pi t + \pi/4) \times u(t)]$

(j) $x(n) = 2 \cos(\pi n/4) + \sin(\pi n/8) - 2 \sin(\pi n/2 + \pi/6)$

解: (a) $x(t) = 2 \cos(3t + \pi/4)$, 周期信号, $T = \frac{2\pi}{3}$ 。

(b) $x(n) = \cos(8\pi n/7 + 2)$, 周期信号, $\therefore \Omega_0 = \frac{8\pi}{7}$, $\therefore N = 7$

(c) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$, 周期信号, $T = 2$ 。

(d) $x(n) = e^{j(n/8 - \pi)}$, 非周期信号, 因为 $\Omega_0/2\pi$ 是无理数。

(e) $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(n-3m) - \delta(n-1-3m)]$, 设周期为 N , 则有

$$x(n+N) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(n+N-3m) - \delta(n+N-1-3m)], \text{ 令 } N=3k, (k \text{ 为整数})$$

$$\text{则 } x(n+3k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(n-3(m-k)) - \delta(n-1-3(m-k))], \text{ 令 } m-k=l \text{ 则有}$$

$$x(n+3k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(n-3l) - \delta(n-1-3l)] \quad \text{显然, } x(n) \text{ 是周期信号, 其周期为}$$

$N = 3$ 。

(f) $x(t) = \cos 2\pi t \times u(t)$, 非周期信号。

(g) $\because \cos \frac{n}{4}$ 是非周期的, $\therefore x(n)$ 是非周期信号。

(h) $x(t) = E_v [\cos 2\pi t \times u(t)] = \frac{1}{2} [(\cos 2\pi t) \times u(t) + (\cos 2\pi t) \times u(-t)]$, 周期的, 周期 $T=1$ 。

(i) $x(t) = E_v [\cos(2\pi t + \pi/4) \times u(t)]$, 非周期信号。

(j) $x(n)$ 是周期信号, 其周期就是 $\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ 和 $\sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ 的公共周期。

\therefore 周期为 $N=16$ 。

2.8 (a) 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是周期信号, 其基波周期分别为 T_1 和 T_2 。在什么条件下, 和式

$x(t) + y(t)$ 是周期的? 如果该信号是周期的, 它的基波周期是什么?

(b) 设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都是周期信号, 其基波周期分别为 N_1 和 N_2 。在什么条件下, 和式

$x(n) + y(n)$ 是周期的? 如果该信号是周期的, 它的基波周期是什么?

解: (a) $\because x(t), y(t)$ 是周期的, $x(t+kT_1)=x(t), y(t+lT_2)=y(t)$

令 $f(t) = x(t) + y(t)$, 欲使 $f(t)$ 是周期的, 必须有

$$s(t+T_0) = x(t+T_0) + y(t+T_0) = x(t) + y(t) = f(t)$$

$$\therefore T_0 = kT_1 = lT_2 \quad \text{即} \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{k}, \quad \text{其中 } k, l \text{ 为整数。}$$

这表明: 只要 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的周期之比 $\frac{T_1}{T_2}$ 是有理数, $x(t) + y(t)$ 就一定是周期的。

其基波周期 T_0 是 T_1, T_2 的最小公倍数。

(b) $\because x(n)$ 和 $y(n)$ 是周期的, $x(n+N_1)=x(n), y(n+N_2)=y(n)$

令 $f(n) = x(n) + y(n)$, 欲使 $f(n)$ 是周期的, 必须有

$$N_0 = kN_1 = mN_2 \quad (k, m \text{ 为整数})$$

$$\text{即} \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{m}{k} = \frac{N_1' \gcd(N_1, N_2)}{N_2' \gcd(N_1, N_2)} = \frac{N_1'}{N_2'}$$

$$\therefore N_1' \text{ 与 } N_2' \text{ 无公因子, } \therefore m = N_1', k = N_2'$$

$$N_0 = N_2' N_1 = N_1 N_2 / \gcd(N_1, N_2)$$

2.9 画出下列各信号的波形图：

(a) $x(t) = (2 - e^{-t})u(t)$ (b) $x(t) = e^{-t} \cos 10\pi t [u(t-1) - u(t-2)]$

(c) $x(t) = u(t^2 - 9)$ (d) $x(t) = \delta(t^2 - 4)$

解：各信号波形如下图所示：

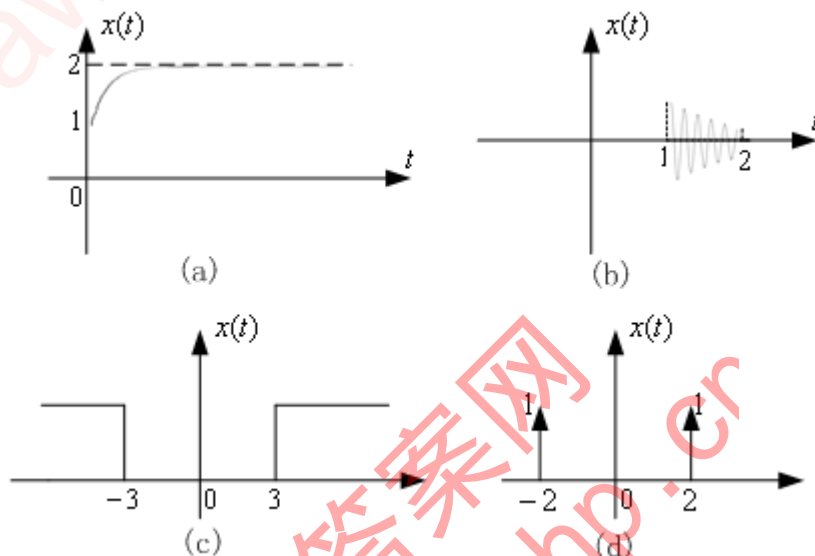


图 PS2.9

2.10 已知信号 $x(t) = \sin t \times [u(t) - u(t - \pi)]$ ，求：

(a) $x_1(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + x(t)$ (b) $x_2(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

解： $x(t) = \sin t \times [u(t) - u(t - \pi)]$

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \cos t \times [u(t) - u(t - \pi)] + \sin t \times [\delta(t) - \delta(t - \pi)] \\ &= \cos t \times [u(t) - u(t - \pi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= -\sin t \times [u(t) - u(t - \pi)] + \cos t \times [\delta(t) + \delta(t - \pi)] \\ &= -\sin t \times [u(t) - u(t - \pi)] + \delta(t) \cdot \cos 0 + \delta(t - \pi) \cdot \cos \pi \\ &= -\sin t \times [u(t) - u(t - \pi)] + \delta(t) - \delta(t - \pi) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{(a) } x_1(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + x(t) = \delta(t) - \delta(t - \pi)$$

$$(b) \quad x_2(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \cos t & 0 < t \leq \pi \\ 2 & t > \pi \end{cases}$$

2.11 计算下列各积分：

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \times \delta(t - \frac{\pi}{2}) dt \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \times \delta(t + 2) dt$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + t + 2) \delta(t - 1) dt \quad (d) \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \frac{t_0}{2}) \times \delta(t - t_0) dt$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \delta(\tau) dt \quad (f) \int_{-1}^1 \delta(t^2 - 4) dt$$

解： (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t \times \delta(t - \frac{\pi}{2}) dt = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \times \delta(t + 2) dt = e^{-(-2)} = e^2$

(c) 同(b), 4

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} u(t - \frac{t_0}{2}) \times \delta(t - t_0) dt = u(t_0 - \frac{t_0}{2}) = u(\frac{t_0}{2})$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \delta(\tau) dt = e^0 = 1$

(f) 0

2.12 根据本章的讨论，一个系统可能是或者不是：①瞬时的；②时不变的；③线性的；④因果的；⑤稳定的。对下列各方程描述的每个系统，判断这些性质中哪些成立，哪些不成立，说明理由。

(a) $y(t) = e^{x(t)}$ (b) $y(n) = x(n)x(n-1)$

(c) $y(n) = x(n-2)2x(n-17)$ (d) $y(t) = x(t-1) - x(1-t)$

(e) $y(t) = x(t) \times \sin 6t$ (f) $y(n) = nx(n)$

(g) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-100), & t \geq 0 \end{cases}$ (h) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$

(i) $y(n) = x(2n)$ (j) $y(t) = x(t/2)$

解： (a) 无记忆。∵ 输出只决定于当时的输入。

非线性。∵ $e^{x_1(t)+x_2(t)} = e^{x_1(t)} e^{x_2(t)} = y_1(t)y_2(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$

时不变。∵ $e^{x(t-t_0)} = y(t-t_0)$

因果。∵ 无记忆系统必然是因果的。

稳定。∵ 当 $|x(t)| \leq M$ 时， $|y(t)| = |e^{x(t)}| \leq e^{|x(t)|} \leq e^M$ 。

(b) 记忆。∵ 输出不只决定于当时的输入。

非线性。∵ 系统不满足可加性和齐次性。

时不变。∵ $x(n-n_0)x(n-n_0-1)=y(n-n_0)$ 。

因果。∵ 输出只与当时和以前的输入有关。

稳定。∵ 当 $x(n)$ 有界时， $x(n-1)$ 也有界，从而 $y(n)$ 必有界。

(c) 记忆。∵ $y(1)=x(-1)-2x(-16)$ ，输出与以前的输入有关。

时不变。∵ $x(n-n_0) \rightarrow x(n-n_0-2)-2x(n-n_0-17)=y(n-n_0)$ 。

? 线性。∵ 系统满足可加性和齐次性。

因果。∵ 输出只和以前的输入有关。

稳定。∵ 当 $x(n)$ 有界时， $y(n)$ 一定有界。

(d) 记忆。∵ $y(0)=x(-1)-x(1)$ ，输出与以前和以后的输入有关。

时变。∵ 令 $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$ ，其中 $y_1(t)=x(t-1)$ 是时不变的，而

$y_2(t)=-x(1-t)$ 是时变系统，∴ 整个系统是时变的。

线性。∵ 系统满足可加性和齐次性。

非因果。∵ $y_2(t)=-x(1-t)$ 是非因果的。

稳定。∵ $x(t)$ 有界时， $x(t-1)$ 和 $x(1-t)$ 都有界，从而 $y(t)$ 必有界。

(e) 无记忆。∵ $y(t)$ 只与当时的输入有关。

时变。∵ $(\sin 6t)x(t-t_0) \neq y(t-t_0)=[\sin 6(t-t_0)]x(t-t_0)$

线性。∵ 系统满足可加性和齐次性。

因果。∵ 无记忆系统必定是因果的。

稳定。∵ $\sin 6t$ 有界，当 $x(t)$ 有界时， $y(t)$ 必有界。

(f) 无记忆。∵ $y(n)$ 只与当时的输入有关。

时变。∵ $nx(n-n_0) \neq y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$ 。

线性。∵ 系统满足可加性和齐次性。

因果。∵ 无记忆系统必定是因果的。

不稳定。∵ $x(n)$ 有界但 $n \rightarrow \infty$ 时， $y(n) \rightarrow \infty$ 。

(g) 记忆。∵ $y(0)=x(0)+x(-100)$ ，输出与以前的输入有关。

时变。∵ 输入为 $x(t-T)$ 时，相应的输出为

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t-T) + x(t-T-100), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{而 } y(t-T) = \begin{cases} 0, & t < T \\ x(t-T) + x(t-T-100), & t \geq T \end{cases} \quad \text{显然 } y(t-T) \neq w(t)$$

线性。∵ 系统满足可加性和齐次性。

因果。∵ $y(t)$ 只和当时以及以前的输入有关。

稳定。∵ $x(t)$ 有界时, $x(t-100)$ 也有界, 从而 $y(t)$ 必有界。

(h) 记忆。∵ $x(t) \geq 0$ 时, $y(t)$ 不仅与当时的输入而且与以前的输入有关。

时不变。∵ 输入为 $x(t-T)$ 时, 相应的输出为

$$w(t) = \begin{cases} 0, & x(t-T) < 0 \\ x(t-T) + x(t-T-100), & x(t-T) \geq 0 \end{cases} = y(t-T)$$

非线性。∵ 若 $x_1(t) < 0, x_2(t) > 0, x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) < 0$

$$\text{则有 } y_1(t) = 0, y_2(t) = x_2(t) + x_2(t-100), y_3(t) = 0$$

显然, $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$, 系统不满足可加性。

因果。∵ $y(t)$ 只和当时以及以前的输入有关。

稳定。∵ $x(t)$ 有界时, $x(t-100)$ 也有界, 从而 $y(t)$ 必有界。

(i) 记忆。∵ $y(-1) = x(-2)$ 表明输出与以前的输入有关。

时变。∵ 输入为 $x(n-n_0)$ 时, 输出是 $x(n-n_0)$ 的偶数位。显然, 输出不等于

$$y(n-n_0)。$$

线性。∵ 系统满足可加性和齐次性。

非因果。∵ $y(1) = x(2)$, 表明输出与以后的输入有关。

稳定。∵ $x(n)$ 有界时, $x(2n)$ 也有界, 从而 $y(n)$ 必有界。

(j) 记忆。∵ $y(-1) = x(-\frac{1}{2})$ 表明输出与以后的输入有关。

时变。∵ 输入为 $x(t-t_0)$ 时, 系统的输出为

$$z(t) = x\left(\frac{t}{2} - t_0\right) = x\left[\frac{1}{2}(t - 2t_0)\right] = y(t - 2t_0) \neq y(t - t_0)$$

线性。∵ 系统满足可加性和齐次性。

非因果。∵ $y(t)$ 与以后的输入有关。

稳定。∵ $x(t)$ 有界时， $x(\frac{t}{2})$ 也有界，从而 $y(t)$ 必有界。

2.13 判断下列每个系统是否是可逆的。如果是可逆的，则写出其逆系统；如果不是，则找出使该系统具有相同输出的两个输入信号。

(a) $y(t) = x(t - 4)$

(b) $y(t) = \cos[x(t)]$

(c) $y(n) = nx(n)$

(d) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

(e) $y(n) = x(n)x(n-1)$

(f) $y(n) = x(1-n)$

(g) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

(h) $y(t) = x(2t)$

(i) $y(n) = x(2n)$

(j) $y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 偶} \\ 0, & n \text{ 奇} \end{cases}$

解：(a) 系统可逆。其逆系统为 $y(t) = x(t + 4)$ 。

(b) 系统不可逆。∵ 当 $x_1(t) = x(t) + 2k\pi$ 时，系统的输出为 $y_1(t) = \cos[x_1(t)] = \cos[x(t)] = y(t)$ 。这表明系统的输入与输出不是单纯一一对应的。

(c) 系统不可逆。∵ 当输入为 $\delta(n)$ 或 $2\delta(n)$ 时，系统的输出都为零。

(d) 系统可逆。其逆系统为 $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ 。

(e) 系统不可逆。∵ 当输入为 $\delta(n)$ 或 $\delta(n+1)$ 时，系统的输出都为零。

(f) 系统可逆。其逆系统为 $y(n) = x(1-n)$ 。

(g) 系统不可逆。∵ 当 $x(t)$ 为任意常数时， $y(t)$ 均为零。

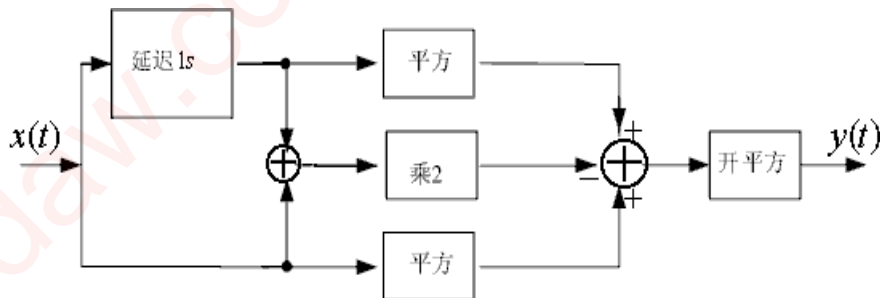
(h) 系统可逆。其逆系统为 $y(t) = x(\frac{t}{2})$ 。

(i) 系统不可逆。∵ 只要 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的偶数位相同，就会产生相同的输出。

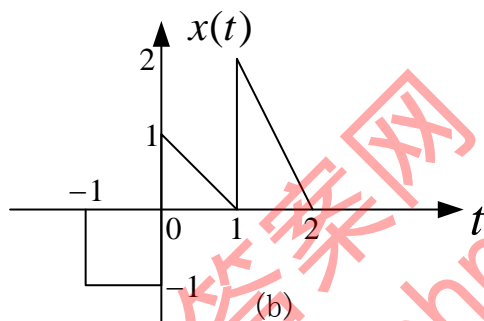
(j) 系统可逆。其逆系统为 $y(n) = x(2n)$ 。

2.14 对图 P2.14(a) 所示的系统（图中开平方运算产生正的平方根）。

- (a) 求出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的函数关系。
- (b) 判断该系统的线性和时不变性。
- (c) 当输入 $x(t)$ 如图 P2.14(b) 所示时，响应 $y(t)$ 是什么？



(a)



(b)

解：(a) 由图 P2.14 可得出

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x^2(t-1) - 2x(t)x(t-1)} = |x(t) - x(t-1)|$$

(b) 由(a)知，系统的输入输出不满足可加性，故系统是非线性的。

由(a)可看出，当输入为 $x(t-t_0)$ 时，输出为 $y(t-t_0)$ ，故该系统是时不变的。

(d) 由(a)可得出响应 $y(t)$ 如图 PS2.14 所示。

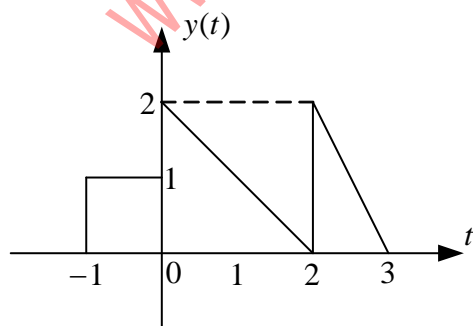


图 PS2.14

2.15 判断下列说法是否正确，并说明理由：

- (a) 两个线性时不变系统的级联仍然是线性时不变系统。
- (b) 两个非线性系统的级联仍然是非线性系统。

解：(a) 结论正确。设两线性时不变系统如图 PS2.15 所示级联。当 $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ 时，

则有 $w(t) = aw_1(t) + bw_2(t)$ ，于是 $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ ，因此整个系统是线性的。

若输入为 $x(t-t_0)$ ，则由于时不变性可知系统 1 的输出为 $w(t-t_0)$ ，这正是系统 2 的输入，因此总输出为 $y(t-t_0)$ 。即整个系统是时不变的。

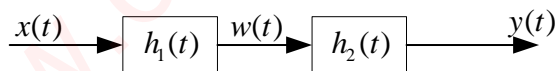


图 PS2.15

(b) 结论不对。如系统 1 为 $w(t) = x(t) + 3t$ ，系统 2 为 $y(t) = w(t) - 3t$ 。虽然两系统都不是线性的，但它们的级联 $y(t) = x(t)$ 却是线性的。

2.16 对图 P2.16 所示的级联系统，已知其 3 个子系统的输入-输出方程由下列各式给出：

系统 1: $y(n) = x(-n)$

系统 2: $y(n) = ax(n-1) + bx(n) + cx(n+1)$

系统 3: $y(n) = x(-n)$

其中: a, b, c 都是实数。

- (a) 求整个互联系统的输入-输出关系；
- (b) 当 a, b, c 满足什么条件时，整个系统是线性时不变的；
- (c) 当 a, b, c 满足什么条件时，总的输入-输出关系与系统 2 相同；
- (d) 当 a, b, c 满足什么条件时，整个系统是因果系统。

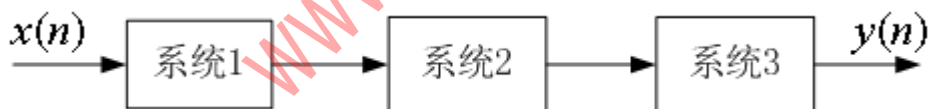


图 P2.16

解: (a) $y(n) = z(-n) = aw(-n-1) + bw(-n) + cw(-n+1)$

$$= ax(n+1) + bx(n) + cx(n-1)$$

- (b) 对任意实数 a, b, c ，整个系统都是 LTI 系统。
- (c) 当 $a = c$ 时，总的输入输出关系与系统 2 相同。
- (d) 当 $a = 0$ 时，整个系统是因果的。

2.17 已知某线性时不变系统对图 P2.17(a) 所示信号 $x_1(t)$ 的响应是图 P2.17(b) 所示的 $y_1(t)$ 。分别确定该系统对图 P2.17(c) 和(d) 所示输入 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的响应 $y_2(t)$ 和

$y_3(t)$ ，并画出其波形图。

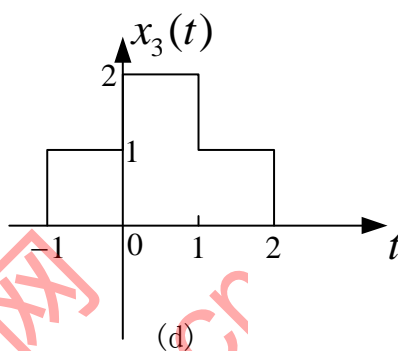
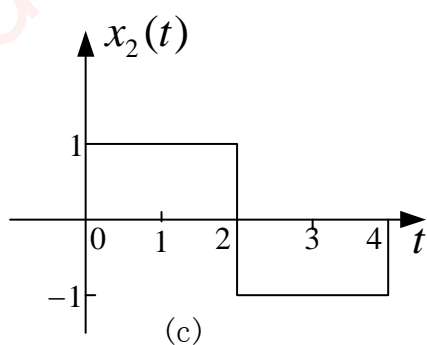
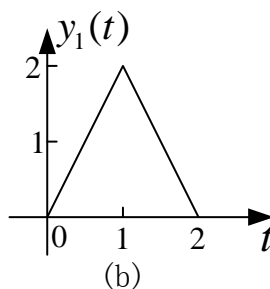
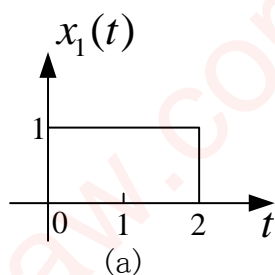


图 P2.17

解： (a) $\because x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2) \therefore y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$ 如图 PS2.17(a) 所示。

(b) $\because x_3(t) = x_1(t+1) + x_1(t) \therefore y_3(t) = y_1(t+1) + y_1(t)$ 如图 PS2.17(b) 所示。

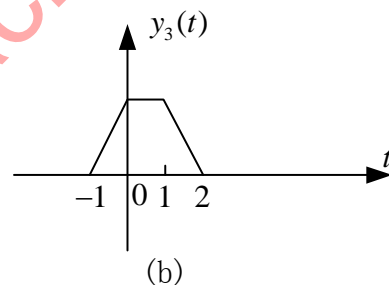
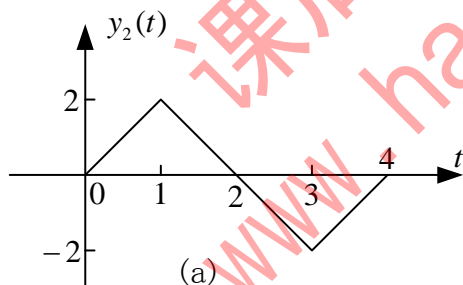


图 PS2.17

2.18 (a) 某离散时间线性系统对输入 $x_1(n)$, $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 分别有响应 $y_1(n)$, $y_2(n)$ 和 $y_3(n)$ 如图 P2.18(a) 所示。如果该系统的输入为图 P2.18(b) 所示的 $x(n)$ ，求系统的输出 $y(n)$ 。

(b) 如果一个离散时间线性时不变系统对图 P2.18(a) 所示的输入 $x_1(n)$ 有响应 $y_1(n)$ ，那么该系统对 $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 的响应是什么？

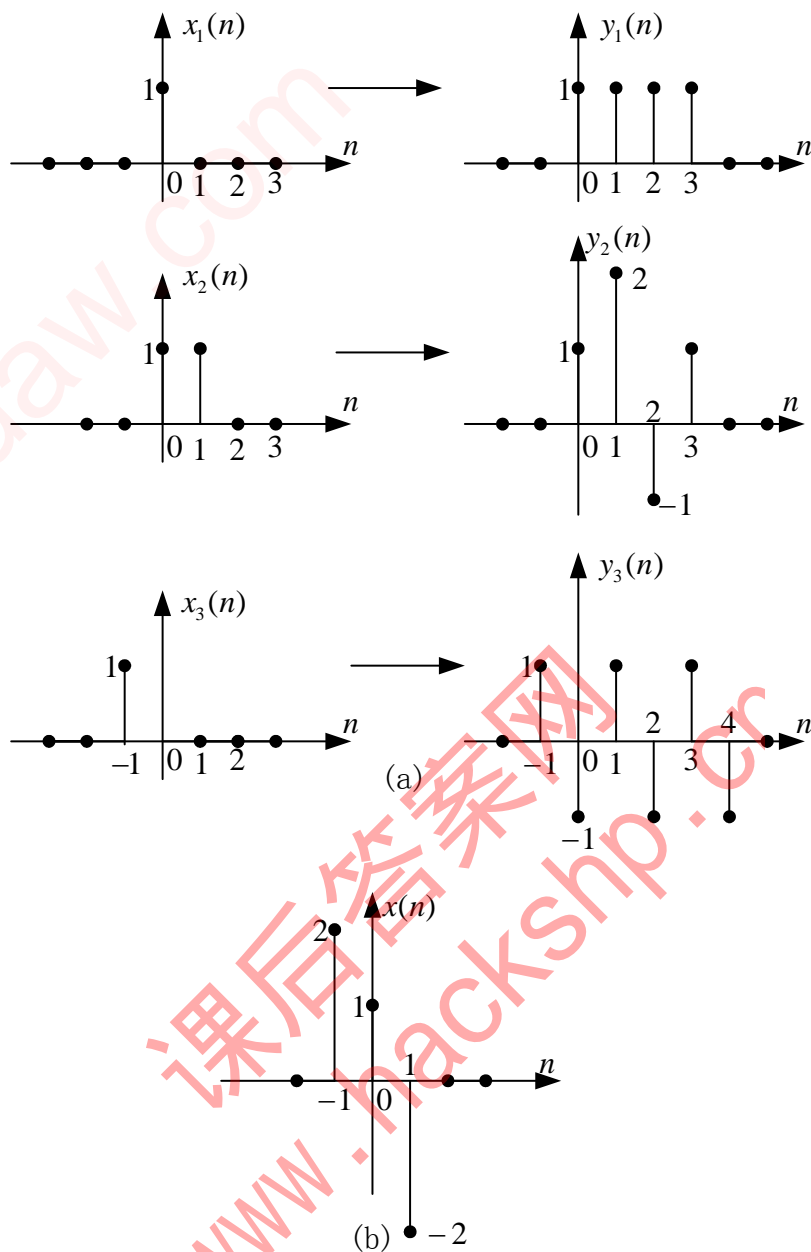


图 P2.18

解：(a) $\because x(n) = 3x_1(n) - 2x_2(n) + 2x_3(n) \therefore y(n) = 3y_1(n) - 2y_2(n) + 2y_3(n)$ 如图 PS2. 18(a)所示。

(b) $\because x_2(n) = x_1(n) + x_1(n-1) \therefore y_2(n) = y_1(n) + y_1(n-1)$ 如图 PS2. 18(b)所示。

$\because x_3(n) = x_1(n+1) \therefore y_3(n) = y_1(n+1)$ 如图 PS2. 18(c)所示。

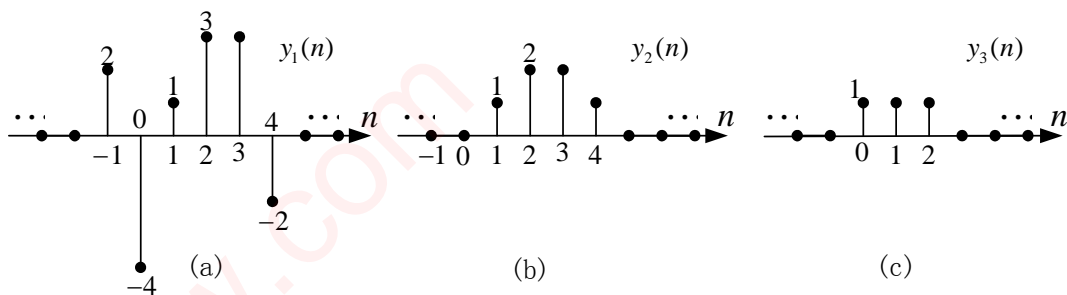


图 PS2.18

2.19 对图 P2.19 所示的反馈系统，假定 $n < 0$ 是， $y(n] = 0$ 。

(a) 当 $x_1(n) = \delta(n)$ 时，求输出 $y_1(n)$ ，并画出其波形图。

(b) 当 $x_2(n) = u(n)$ 时，求输出 $y_2(n)$ ，并画出其波形图。

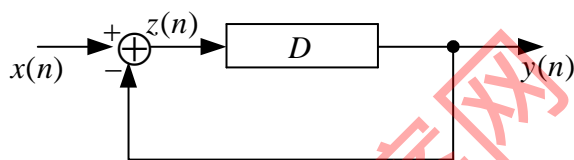


图 P2.19

解： 由图 P2.19 可得出 $y(n+1) + y(n) = x(n)$

(a) 当 $x_1(n) = \delta(n)$ 时，由递推可得 $y_1(n)$ 如图 PS2.19(a) 所示。

(b) 当 $x_2(n) = u(n)$ 时，由递推可得 $y_2(n)$ 如图 PS2.19(b) 所示。

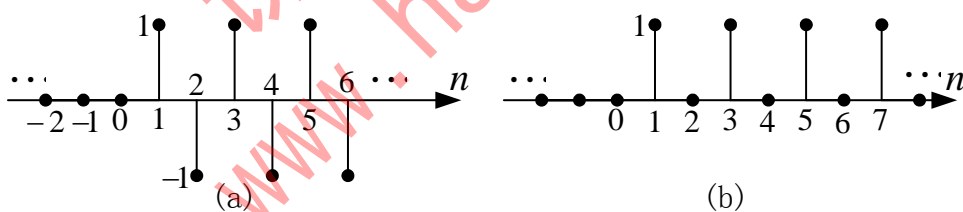


图 PS2.19

2.20 某线性时不变系统，当输入为图 P2.20(a) 所示的 $x_1(t)$ 时，输出 $y_1(t)$ 如图 P2.20(b)

所示。试求当输入为 P2.20(c) 所示的 $x_2(t)$ 时，系统的输出 $y_2(t)$ 。

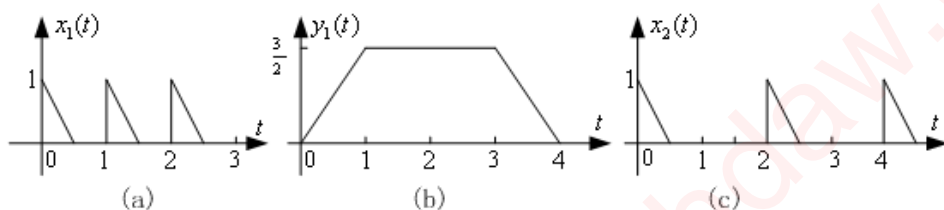
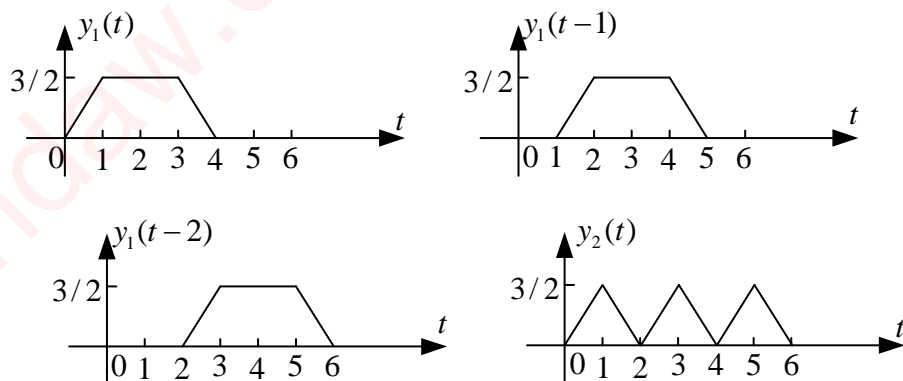


图 P2.20

解：由观察可知 $x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-1) + x_1(t-2)$

\therefore 当输入为 $x_1(t)$ 时，输出为 $y_1(t)$

\therefore 由 LTI 系统性质可知当输入为 $x_2(t)$ 时，输出 $y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-1) + y_1(t-2)$ 。



2.21 试写出图 P2.21 所示模拟图对应的微分或差分方程。

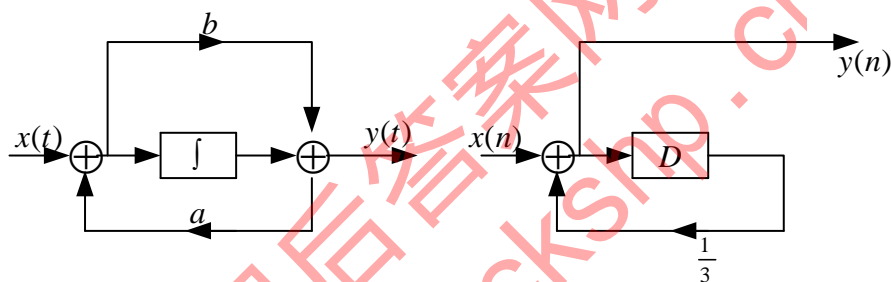


图 P2.21

解：(a) 由图 P2.21 (a) 可得（设积分器前输入端为 $y_1(t)$ ）

$$\begin{cases} x(t) + ay(t) = y_1(t) \\ by_1(t) + \int y_1(t)dt = y(t) \text{ 或 } b \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = \frac{dy(t)}{dt} \end{cases}$$

消去 $y_1(t)$ 可得

$$b \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = (1-ab) \frac{dy(t)}{dt} - ay(t)$$

(b) 由图 P2.21 (b) 可得

$$x(n) + \frac{1}{3}y(n-1) = y(n)$$

$$\text{即 } y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + x(n)$$

第三章习题答案

3.1 计算下列各对信号的卷积积分 $y(t) = x(t) * h(t)$:

(a) $x(t) = e^{\alpha t} u(t)$ $h(t) = e^{\beta t} u(t)$ (对 $\alpha \neq \beta$ 和 $\alpha = \beta$ 两种情况都做)。

(b) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$ $h(t) = e^{2t}$

(c) $x(t) = e^{-3t} u(t)$ $h(t) = u(t-1)$

(d) $x(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0 \\ e^{5t} - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$ $h(t) = u(t) - u(t-1)$

(e) $x(t) = \sin \pi t [u(t) - u(t-2)]$ $h(t) = u(-2-t)$

(f) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P3.1(a)所示。

(g) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P3.1(b)所示。

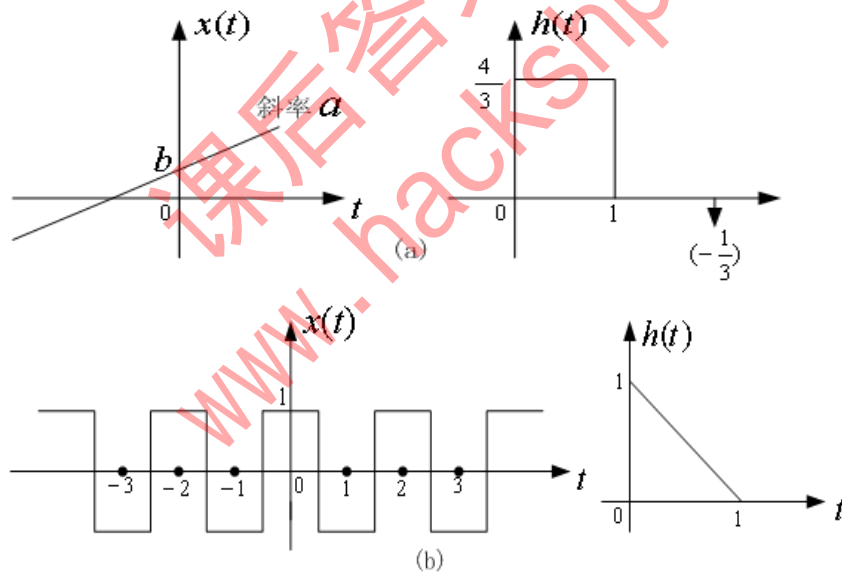


图 P3.1

解: (a) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t e^{-\alpha \tau} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau = e^{-\beta t} \int_0^t e^{-(\alpha-\beta)\tau} d\tau \quad (t > 0)$

当 $\alpha \neq \beta$ 时, $y(t) = \frac{e^{-(\alpha-\beta)t} - 1}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} u(t)$

当 $\alpha = \beta$ 时, $y(t) = t e^{-\alpha t} u(t)$

(b) 由图 PS3.1(a)知,

$$\text{当 } t \leq 1 \text{ 时, } y(t) = \int_0^2 e^{2(t-\tau)} d\tau - \int_2^5 e^{2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2} [e^{2t} - 2e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)}]$$

$$\text{当 } 1 \leq t \leq 3 \text{ 时, } y(t) = \int_{t-1}^2 e^{2(t-\tau)} d\tau - \int_2^5 e^{2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2} [e^2 - 2e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)}]$$

$$\text{当 } 3 \leq t \leq 6 \text{ 时, } y(t) = -\int_{t-1}^5 e^{2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2} [e^{2(t-5)} - e^2]$$

$$\text{当 } t > 6 \text{ 时, } y(t) = 0$$

(c) 由图 PS3.1(b)知, 当 $t \leq 1$ 时, $y(t) = 0$

$$\text{当 } t > 1 \text{ 时, } y(t) = \int_0^{t-1} e^{-3\tau} d\tau = \frac{1}{3} [1 - e^{-3(t-1)}]$$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{3} [1 - e^{-3(t-1)}] u(t-1)$$

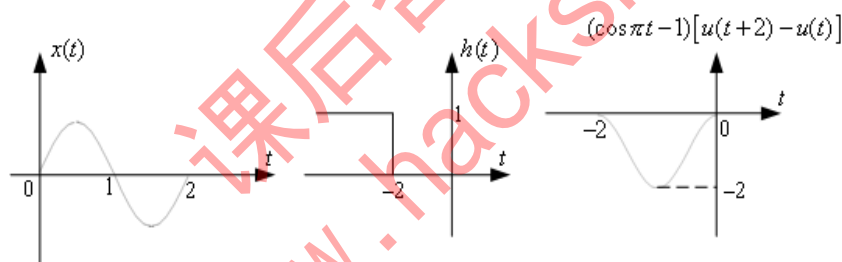
(d) 由图 PS3.1(d)知:

$$\text{当 } t \leq 0 \text{ 时, } y(t) = \int_{t-1}^t e^{\tau} d\tau = e^t - e^{t-1}$$

$$\text{当 } 0 < t \leq 1 \text{ 时, } y(t) = \int_{t-1}^0 e^{\tau} d\tau + \int_0^t (e^{5\tau} - 2e^{-\tau}) d\tau = 2e^{-t} + \frac{1}{5} e^{5t} - e^{-(t-1)} - \frac{4}{5}$$

$$\text{当 } t > 1 \text{ 时, } y(t) = \int_{t-1}^t (e^{5\tau} - 2e^{-\tau}) d\tau = \frac{1}{5} e^{5t} - \frac{1}{5} e^{5(t-1)} + 2e^{-t} - 2e^{-(t-1)}$$

(e) 如下图所示:



$$(f) \text{ 令 } h(t) = h_1(t) + \left[-\frac{1}{3} \delta(t-2) \right], \text{ 则 } y(t) = x(t) * h_1(t) - \frac{1}{3} x(t-2)$$

$$\text{由图 PS3.1(h)知, } y(t) = x(t) * h_1(t) = \int_{t-1}^t \frac{4}{3} (a\tau + b) d\tau = \frac{2}{3} a(2t-1) + \frac{4}{3} b$$

$$\therefore y(t) = \frac{2a}{3} (2t-1) + \frac{4}{3} b - \frac{1}{3} a(t-2) - \frac{1}{3} b = at + b = x(t)$$

(g) $\because x(t)$ 是周期信号, 由此可推知 $y(t) = x(t) * h(t)$ 也是周期的, 且周期也为 2。因

此只需求出 $y(t)$ 的一个周期。由图 PS3.1(j)可知:

$$\text{当 } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } y(t) = \int_{t-1}^{-\frac{1}{2}} -(1-t+\tau) d\tau + \int_{-\frac{1}{2}}^t (1-t+\tau) d\tau = \frac{1}{4} + t + t^2$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \text{ 时, } y(t) = \int_{t-1}^{\frac{1}{2}} (1-t+\tau) d\tau - \int_{\frac{1}{2}}^t (1-t+\tau) d\tau = t^2 - 3t + \frac{7}{4}$$

$\therefore y(t)$ 的一个周期为

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} + t - t^2, & (-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ t^2 - 3t + \frac{7}{4}, & (\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}) \end{cases}$$

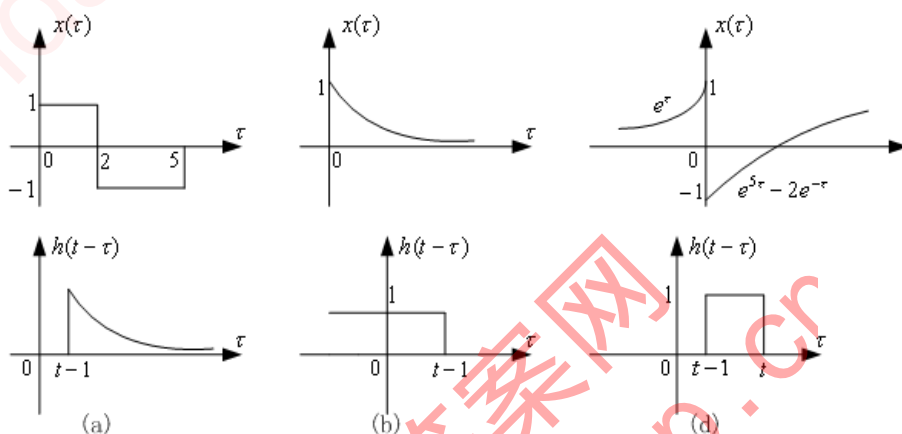


图 PS3.1

3.2 计算下列各对信号的卷积和 $y(n) = x(n) * h(n)$:

(a) $x(n) = \alpha^n u(n)$ $h(n) = \beta^n u(n)$ $\alpha \neq \beta$

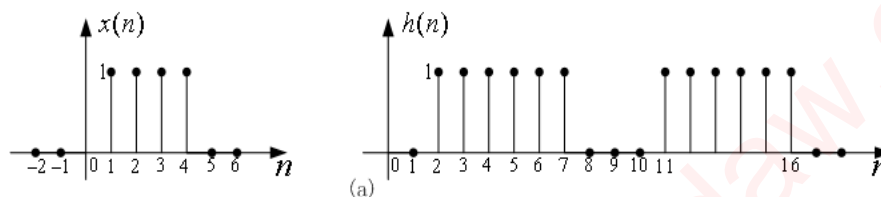
(b) $x(n) = 2^n u(-n)$ $h(n) = u(n)$

(c) $x(n) = (-1)^n [u(-n) - u(-n-8)]$ $h(n) = u(n) - u(n-8)$

(d) $x(n)$ 和 $h(n)$ 如图 P3.2(a)所示。

(e) $x(n)$ 和 $h(n)$ 如图 P3.2(b)所示。

(f) $x(n)$ 和 $h(n)$ 如图 P3.2(c)所示。



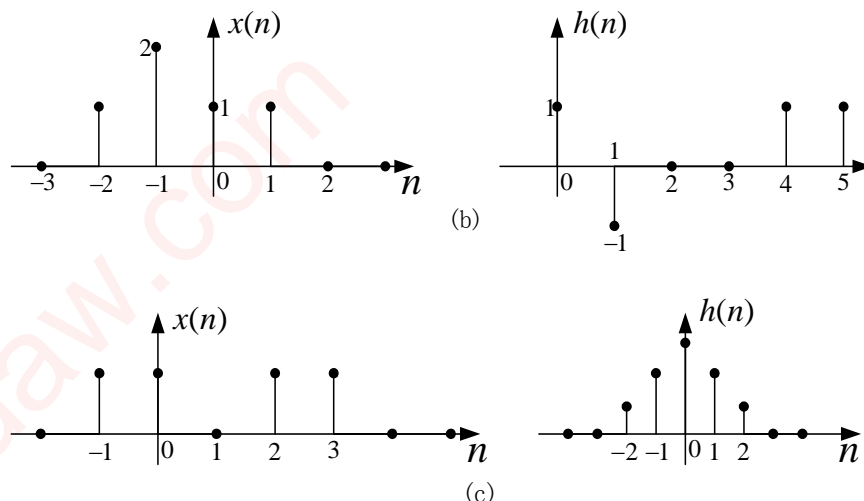


图 P3.2

解: (a) $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_k x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} u(n)$

$$= \beta^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k u(n) = \left[\frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \right] u(n)$$

(b) 当 $n \leq 0$ 时, $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n 2^k = \sum_{m=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^{1+n}$

当 $n > 0$ 时, $y(n) = \sum_{k=-\infty}^0 2^k = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2$

$$\therefore y(n) = 2u(n-1) + 2^{n+1}u(-n)$$

(c) 由图 PS3.2(a)知, 当 $n \leq -8$ 或 $n \geq 8$ 时, $y(n) = 0$

当 $-8 < n \leq 0$ 时, $y(n) = \sum_{k=-7}^n (-1)^k = \frac{1}{2} \left[(-1)^7 - (-1)^{n+1} \right] = \frac{1}{2} \left[(-1)^n - 1 \right]$

当 $0 \leq n < 8$ 时, $y(n) = \sum_{k=n-7}^0 (-1)^k = \frac{1}{2} \left[1 - (-1)^{n-6} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - (-1)^n \right]$

(d) 由图 PS3.2(b)知, 当 $n \leq 1$ 或 $n \geq 21$ 时, $y(n) = 0$

当 $1 < n \leq 6$ 时, $y(n) = \sum_{k=2}^n (1)^k = n-1$

当 $6 < n \leq 10$ 时, $y(n) = \sum_{k=n-4}^7 (1)^k = 12-n$

当 $n=11$ 时, $y(n)=2$

当 $12 \leq n \leq 15$ 时, $y(n) = \sum_{k=11}^n (1)^k = n-10$

当 $16 \leq n \leq 20$ 时, $y(n) = \sum_{k=n-4}^{16} (1)^k = 16-(n-4)+1=21-n$

(e) 利用列表法计算, 由表 3.2-1 可得:

$y(-2)=1, y(-1)=2-1=1, y(0)=1-2=-1, y(1)=1-1=0,$
 $y(2)=-1+1=0, y(3)=1+2=3, y(4)=1+2=3, y(5)=1+1=2,$
 $y(6)=1,$ 当 $n < -2$ 或 $n > 6$ 时, $y(n)=0$

(f) 由表 3.2-2 可得, 当 $n < -3$ 或 $n > 5$ 时, $y(n)=0$

$y(-3)=1, y(-2)=2+1=3, y(-1)=3+2=5, y(0)=2+3+1=6,$
 $y(1)=1+2+2+1=6, y(2)=1+3+2=6, y(3)=2+3=5,$
 $y(4)=1+2=3, y(5)=1$

表 3.2-1

$x(n)$	$x(-2)$	$x(-1)$	$x(0)$	$x(1)$	
$h(n)$	1	2	1	1	
$h(0)$	1	1	2	1	1
$h(1)$	-1	-1	-2	-1	-1
$h(2)$	0	0	0	0	0
$h(3)$	0	0	0	0	0
$h(4)$	1	1	2	1	1
$h(5)$	1	1	2	1	1

表 3.2-2

$x(n)$	$x(-1)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$
$h(n)$	1	1	0	1	1
$h(-2)$	1	1	0	1	1
$h(-1)$	2	2	0	2	2
$h(0)$	3	3	0	3	3
$h(1)$	2	2	0	2	2
$h(2)$	1	1	0	1	1

3.3 各信号波形如图 P3.3 所示, 求下列卷积:

(a) $x_1(t) * x_2(t)$

(b) $x_1(t) * x_3(t)$

(c) $x_1(t) * x_4(t)$

(d) $x_1(t) * x_2(t) * x_3(t)$

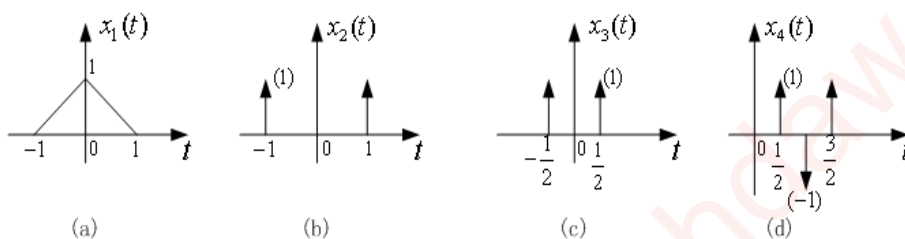


图 P3.3

解:

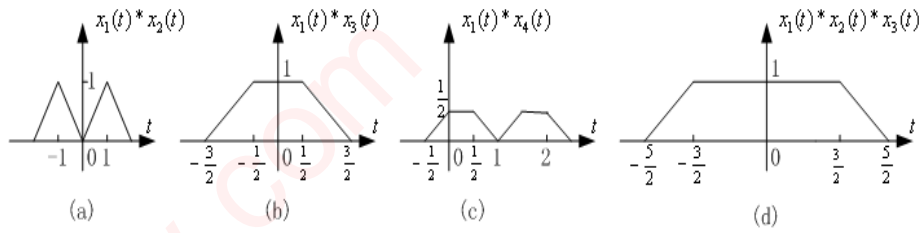


图 PS3.3

3.4 某 LTI 系统的单位冲激响应为 $h_0(t)$ ，当输入为 $x_0(t)$ 时，输出为 $y_0(t)$ (如图 P3.4 所示)。

现给出以下各组单位冲激响应 $h(t)$ 和输入 $x(t)$ ，分别求 $y(t) = x(t) * h(t)$ (用 $y_0(t)$ 表示即可)，并画出 $y(t)$ 的波形图。

(a) $x(t) = 2x_0(t)$ $h(t) = h_0(t)$

(b) $x(t) = x_0(t) - x_0(t-2)$ $h(t) = h_0(t)$

(c) $x(t) = x_0(t-2)$ $h(t) = h_0(t+1)$

(d) $x(t) = x_0(-t)$ $h(t) = h_0(-t)$

(e) $x(t) = \dot{x}_0(t)$ $h(t) = \dot{h}_0(t)$

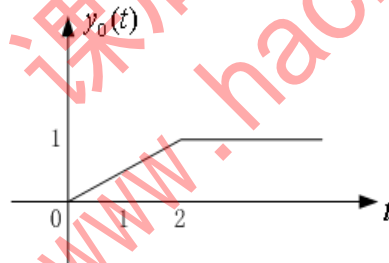


图 P3.4

解: (a) $\because x(t) = 2x_0(t)$, $h(t) = h_0(t)$

$$\therefore y(t) = 2x_0(t) * h_0(t) = 2y_0(t) \quad \text{如图 PS3.4(a)所示。}$$

(b) $\because x(t) = x_0(t) - x_0(t-2)$, $h(t) = h_0(t)$

$$\therefore y(t) = y_0(t) - y_0(t-2) \quad \text{如图 PS3.4(b)所示。}$$

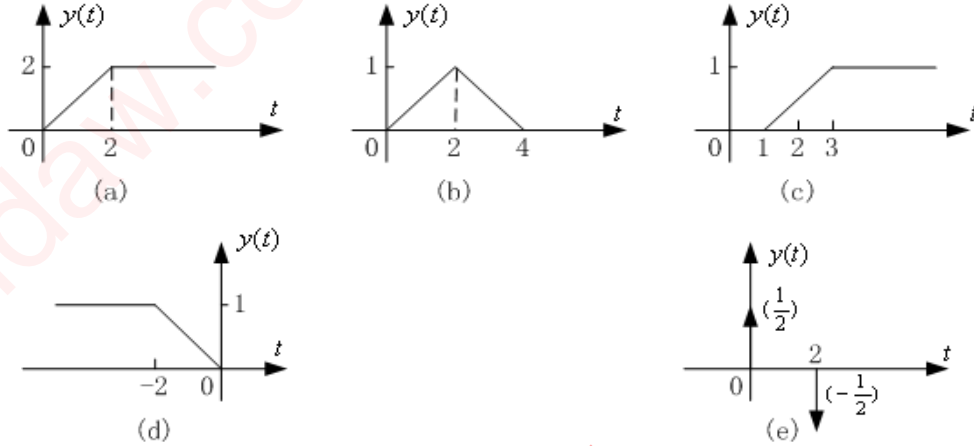
(c) $\because x_0(t) * h_0(t+1) = y_0(t+1)$, $x_0(t-2) * h_0(t+1) = y_0(t-1)$

$$\therefore y(t) = x_0(t-2) * h_0(t+1) = y_0(t-1) \quad \text{如图 PS3.4(c)所示。}$$

$$(d) \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(-\tau)h_0(\tau-t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(\tau)h_0(-t-\tau)d\tau = y_0(-t)$$

如图 PS3.4(d)所示。

$$(e) \quad y(t) = x_0'(t) * h_0'(t) = y_0''(t) \quad \text{如图 PS3.4(e)所示。}$$



图PS3. 4

3.5 对图 P3.5 所示的两个 LTI 系统的级联，已知：

$$h_1(n) = \sin 8n$$

$$h_2(n) = a^n u(n), |a| < 1$$

输入为 $x(n) = \delta(n) - a\delta(n-1)$

求输出 $y(n)$ 。

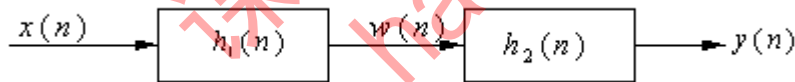


图 P3.5

$$\text{解: } y(n) = x(n) * h_1(n) * h_2(n) = (x(n) * h_2(n)) * h_1(n)$$

$$\because x(n) * h_2(n) = a^n u(n) - a \cdot a^{n-1} u(n-1) = a^n \delta(n) = \delta(n)$$

$$\therefore y(n) = h_1(n) * \delta(n) = h_1(n) = \sin 8n$$

3.6 对图 P3.6-1 所示的 LTI 系统的互联：

(a) 用 $h_1(n), h_2(n), h_3(n), h_4(n), h_5(n)$ 表示总的单位脉冲响应 $h(n)$ ；

$$(b) \text{ 当 } h_1(n) = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n [u(n) - u(n-3)]$$

$$h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$$

$$h_4(n) = \delta(n-1)$$

$$h_5(n) = \delta(n) - 4\delta(n-3)$$

时, 求 $h(n)$ 。

(c) $x(n]$ 如图 P3.6-2 所示, 求(b)中所给系统的响应, 并画出响应的波形图。

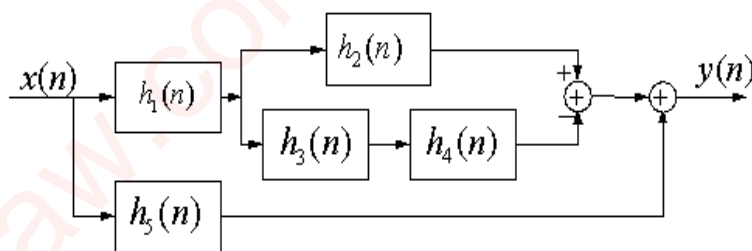


图 P3.6-1

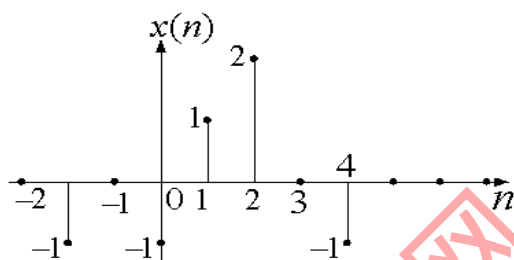


图 P3.6-2

解: (a) $h(n) = h_5(n) + h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n) * h_4(n)]$

$$= h_5(n) + h_1(n) * h_2(n) - h_1(n) * h_3(n) * h_4(n)$$

$$(b) \because h_3(n) * h_4(n) = (n+1)u(n) * \delta(n-1) = nu(n-1)$$

$$h_2(n) - nu(n-1) = (n+1)u(n) - nu(n-1) = u(n)$$

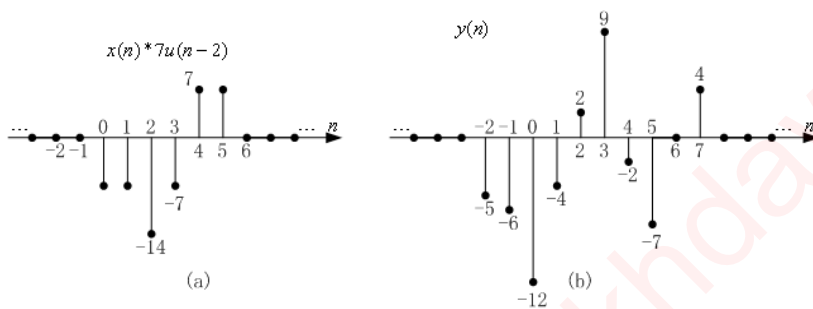
$$h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n) * h_4(n)] = h_1(n) * u(n)$$

$$= \sum_{k=0}^n 4 \left(\frac{1}{2} \right)^k u(n) - \sum_{k=3}^n 4 \left(\frac{1}{2} \right)^k u(n-3) = 4\delta(n) + 6\delta(n-1) + 7u(n-2)$$

$$\therefore h(n) = 5\delta(n) + 6\delta(n-1) - 4\delta(n-3) + 7u(n-2)$$

$$(c) y(n) = x(n) * h(n) = 5x(n) + 6x(n-1) - 4x(n-3) + 7 \sum_k x(k)u(n-k-2)$$

其中 $x(n) * 7u(n-2)$ 如图 PS3.6(a)所示, $y(n)$ 如图 PS3.6(b)所示。



图PS3. 6

3.7 某线性时不变系统的输入输出关系由下式表示：

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) d\tau$$

(a) 该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 是什么？

(b) 当 $x(t)$ 如图 P3.7 所示时，确定系统的响应 $y(t)$ 。

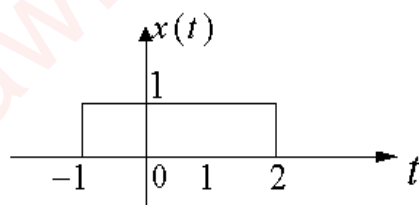


图 P3.7

解：(a) $\because y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) d\tau = \int_{-\infty}^{t-2} x(\sigma) e^{-(t-\sigma-2)} d\sigma = x(t) * e^{-(t-2)} u(t-2)$

$$\therefore h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$$

(b) 由图 PS3.7 知，当 $t \leq 1$ 时， $y(t) = x(t) * h(t) = 0$

$$\text{当 } 1 < t \leq 4 \text{ 时， } y(t) = \int_2^{t+1} e^{-(\tau-2)} d\tau = 1 - e^{-(t-1)}$$

$$\text{当 } t > 4 \text{ 时， } y(t) = \int_{t-2}^{t+1} e^{-(\tau-2)} d\tau = e^{-(t-4)} - e^{-(t-1)}$$



图 PS3.7

3.8 某 LTI 互联系统如图 P3.8 所示，已知：

$$h_0(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$$

(a) 求互联系统总的单位冲激响应；

(c) 当输入 $x(t)$ 如图 P3.7 所示时，求系统的输出响应。

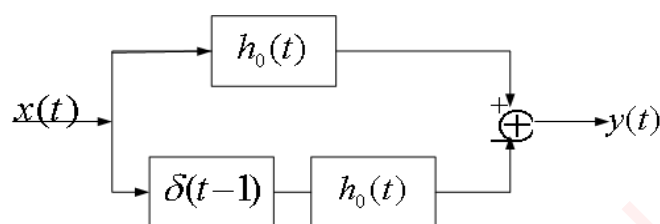


图 P3.8

解：(a) $h_0(t) = h(t) - h(t-1) = e^{-(t-2)} u(t-2) - e^{-(t-3)} u(t-3)$

由图 PS3.8 知, 当 $t \leq 1$ 时, $y_0(t) = x(t) * h_0(t) = 0$

$$\text{当 } 1 < t \leq 2 \text{ 时, } y_0(t) = \int_2^{t+1} e^{-(\tau-2)} d\tau = 1 - e^{-(t-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 2 < t \leq 4 \text{ 时, } y_0(t) &= \int_2^3 e^{-(\tau-2)} d\tau + \int_3^{t+1} [e^{-(\tau-2)} - e^{-(\tau-3)}] d\tau \\ &= (1 - e^{-1}) + [e^{-1} - e^{-(t-1)} + e^{-(t-2)} - 1] = e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 4 < t \leq 5 \text{ 时, } y_0(t) &= \int_3^{t+1} [e^{-(\tau-2)} - e^{-(\tau-3)}] d\tau + \int_{t-2}^3 e^{-(\tau-2)} d\tau \\ &= e^{-(t-4)} + e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{当 } t > 5 \text{ 时, } y_0(t) = \int_{t-2}^{t+1} [e^{-(\tau-2)} - e^{-(\tau-3)}] d\tau = e^{-(t-4)} + e^{-(t-2)} - e^{-(t-5)} - e^{-(t-1)}$$

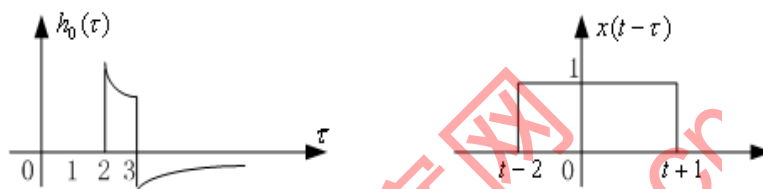


图 PS3.8

$$(b) \quad y_0(t) = x(t) * h_0(t) = x(t) * h(t) - x(t) * h(t-1) = y_b(t) - y_b(t-1)$$

其中 $y_b(t)$ 即为 3.7(b) 中所求得响应。

$$\therefore \text{当 } t \leq 1 \text{ 时, } y_0(t) = 0$$

$$\text{当 } 1 < t \leq 2 \text{ 时, } y_0(t) = 1 - e^{-(t-1)}$$

$$\text{当 } 2 < t \leq 4 \text{ 时, } y_0(t) = 1 - e^{-(t-1)} - [1 - e^{-(t-2)}] = e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)}$$

$$\text{当 } 4 < t \leq 5 \text{ 时, } y_0(t) = e^{-(t-4)} + e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} - 1$$

$$\text{当 } t > 5 \text{ 时, } y_0(t) = e^{-(t-4)} - e^{-(t-1)} - e^{-(t-5)} + e^{-(t-2)}$$

3.9 判断下列说法是否正确。对你认为是正确的加以证明, 对你认为是错误的举出反例。

$$(a) \quad x(n) * [h(n) \times g(n)] = [x(n) * h(n)] \times g(n)$$

$$(b) \quad a^n x(n) * a^n h(n) = a^n [x(n) * h(n)]$$

$$(c) \quad \text{如果 } y(t) = x(t) * h(t), \text{ 则 } y(2t) = 2x(2t) * h(2t)$$

$$(d) \quad \text{如果 } y(n) = x(n) * h(n), \text{ 则 } y(2n) = 2x(2n) * h(2n)$$

(e) 如果 $x(t)$ 和 $h(t)$ 都是奇函数, 则 $y(t) = x(t) * h(t)$ 是偶函数。

解: (a) 错误。例如, 当 $x(n) = u(n)$, $h(n) = a^n u(n)$, $(0 < a < 1)$, $g(n) = \delta(n)$ 时, 有

$$h(n) \times g(n) = \delta(n), \text{ 从而 } x(n) * [h(n) \times g(n)] = x(n) * \delta(n) = x(n)$$

$$\text{而 } [x(n) * h(n)] \times g(n) = \left(\sum_{k=0}^n a^k u(n) \right) \delta(n) = \delta(n) \neq x(n)。$$

(b) 正确。

证明:

$$a^n x(n) * a^n h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k x(k) a^{n-k} h(n-k) = a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = a^n [x(n) * h(n)]$$

(c) 正确。

$$\begin{aligned} \text{证明: } 2x(2t) * h(2t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2x(2\tau) h[2(t-\tau)] d\tau, \text{ 令 } 2\tau = \lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(2t-\lambda) d\lambda = y(2t) \end{aligned}$$

(d) 错误。例如, 当 $x(n) = \delta(n)$, $h(n) = u(n)$ 时, 有

$$x(2n) = \delta(n), \quad h(2n) = u(n), \text{ 从而可得}$$

$$2x(2n) * h(2n) = 2\delta(n) * u(n) = 2u(n)$$

$$\text{但 } y(n) = x(n) * h(n) = u(n), \quad \therefore y(2n) = u(n); \quad 2x(2n) * h(2n) \neq y(2n)$$

(e) 正确。

$$\text{证明: } \because y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau, \text{ 且 } x(t) \text{ 与 } h(t) \text{ 均为奇函数}$$

$$\begin{aligned} \therefore y(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(-t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h[-(t+\tau)] d\tau, \text{ 令 } -\tau = \lambda \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t+\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) h(t+\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda = y(t), \text{ 即 } y(t) \text{ 是偶函数。} \end{aligned}$$

3.10 判断下列说法是否正确, 并说明理由:

- (a) 如果 $h(t)$ 是一个 LTI 系统的单位冲激响应, 且 $h(t)$ 是周期性的非零函数, 那么该系统是不稳定的。
- (b) 一个因果 LTI 系统的逆系统也是因果的。
- (c) 如果对任何 n 有 $|h(n)| \leq K$, 其中 K 是一个给定的数, 那么以 $h(n)$ 为单位脉冲响应的 LTI 系统是稳定的。

(d) 如果一个离散时间 LTI 系统具有有限持续期单位脉冲响应 $h(n)$ ，则该系统是稳定的。

(e) 如果一个 LTI 系统是因果的，则该系统是稳定的。

(f) 一个非因果系统和一个因果系统的级联必定是非因果的。

(g) 对一个连续时间 LTI 系统来说，当且仅当它的阶跃响应 $S(t)$ 绝对可积，也就是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)| dt < \infty$$

时，该系统是稳定的。

(h) 对一个离散时间 LTI 系统来说，当且仅当对 $n < 0$ 它的阶跃响应 $S(n)$ 为零时，该系统是因果的。

解：(a) 正确。 $\because h(t)$ 为周期性非零函数时， $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$ 。

(b) 错误。若系统的冲激响应为 $\delta(t - t_0)$, $t_0 > 0$ ，则其逆系统的冲激响应为 $\delta(t + t_0)$ ，显然是非因果的。

(c) 错误。若 $h(n) = u(n)$ ，显然 $|h(n)| \leq 1$ ；但 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$ ，因此系统不稳定。

(d) 正确。 $\because h(n)$ 为有限长时，必然有 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ 。

(e) 错误。若 $h(t) = u(t)$ ，显然系统是因果的，但由于 $\int_0^{\infty} |h(t)| dt = \infty$ ，因此系统不稳定。

(f) 错误。若系统 A 的冲激响应 $h_A(t) = \delta(t + 3)$ ，系统 B 的冲激响应 $h_B(t) = \delta(t - 5)$ ；

系统 A 非因果，系统 B 因果；但它们级联后有 $h(t) = h_A(t) * h_B(t) = \delta(t - 2)$ ，显然是因果的。

(g) 错误。若某系统的 $h(t) = e^{-t}u(t)$ ，显然该系统稳定，但其阶跃响应

$$S(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = (1 - e^{-t})u(t) \text{ 并不绝对可积。}$$

(h) 正确。 $\because u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k)$, $S(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n - k)$ ，如果 $n < 0$ 时， $S(n) = 0$ ，则

必有 $n < 0$ 时， $h(n) = 0$ ，从而系统是因果的。反之，若系统因果，则 $n < 0$ 时，

$$h(n) = 0, \text{ 从而必有 } n < 0, \quad s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) = 0。$$

3.11 判断下列每一个系统的稳定性和因果性。

$$(a) \quad h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad (b) \quad h(n) = (0.99)^n u(n+3)$$

$$(c) \quad h(n) = (0.99)^n u(-n) \quad (d) \quad h(n) = (4)^n u(2-n)$$

$$(e) \quad h(t) = e^{-3t} u(t-1) \quad (f) \quad h(t) = e^{-3t} u(1-t)$$

$$(g) \quad h(t) = e^{-4|t|} \quad (h) \quad h(t) = te^{-t} u(t)$$

解: (a) $\because n < 0$ 时, $h(n) = 0$, \therefore 系统是因果的。

$$\text{又} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \quad \therefore \text{系统是稳定的。}$$

(b) $\because n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, \therefore 系统是非因果的。

$$\text{又} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-2}^{\infty} (0.99)^n = 100 + (0.99)^{-1} + (0.99)^{-2} + (0.99)^{-3} < \infty$$

\therefore 系统是稳定的。

(c) $\because n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, $n > 0$ 时, $h(n) = 0$, \therefore 系统反因果。

$$\text{又} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^0 (0.99)^n = \infty, \quad \therefore \text{系统不稳定。}$$

(d) $\because n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, \therefore 系统非因果。

$$\text{又} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^2 (4)^n = \frac{64}{3} < \infty, \quad \therefore \text{系统稳定。}$$

(e) $\because t < 0$ 时, $h(t) = 0$, \therefore 系统是因果的。

$$\text{又} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_1^{\infty} e^{-3t} dt < \infty, \quad \therefore \text{系统稳定。}$$

(f) $\because t < 0$ 时, $h(t) \neq 0$, \therefore 系统非因果。

$$\text{又} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^1 e^{-3t} dt = \infty, \quad \therefore \text{系统不稳定。}$$

(g) $\because t < 0$ 时, $h(t) \neq 0$, \therefore 系统非因果。

$$\text{又} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \therefore \text{系统稳定。}$$

(h) $\because t < 0$ 时, $h(t) = 0$, \therefore 系统是因果的。

$$\text{又} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} te^{-t} dt < \infty, \quad \therefore \text{系统稳定。}$$

3.12 对图 P3.12 所示的级联系统，已知系统 A 是 LTI 系统，系统 B 是系统 A 的逆系统。设

$y_1(t)$ 表示系统 A 对 $x_1(t)$ 的响应， $y_2(t)$ 是系统 A 对 $x_2(t)$ 的响应。

(a) 系统 B 对输入 $ay_1(t) + by_2(t)$ 的响应是什么？这里 a 和 b 是常数。

(b) 系统 B 对输入 $y_1(t - \tau)$ 的响应是什么？

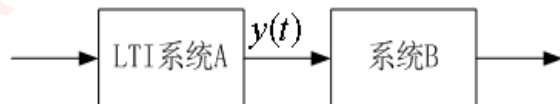


图 P3.12

解：(a) \because 系统 B 是系统 A 的逆系统， \therefore 图 P3.12 所示的整个系统是恒等系统。系统 A 对

$ax_1(t) + bx_2(t)$ 的响应为 $ay_1(t) + by_2(t)$ ，因此系统 B 对输入 $ay_1(t) + by_2(t)$ 的响

应为 $ax_1(t) + bx_2(t)$ 。

(b) \because 系统 A 对 $x_1(t - \tau)$ 的响应是 $y_1(t - \tau)$ ，

\therefore 系统 B 对 $y_1(t - \tau)$ 的响应是 $x_1(t - \tau)$ 。

3.13 已知图 P3.13(a)所示的连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应为：

$$S_1(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)。$$

现对图 P3.13(b)所示的系统，如果 $x(t) = u(t) - u(t-2)$ ，求

系统响应 $y(t)$ ，并绘出 $y(t)$ 的波形图。

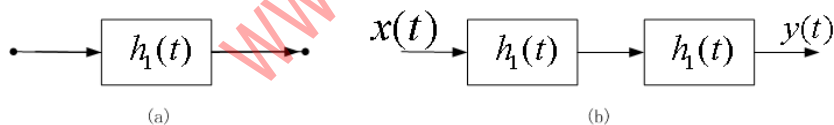
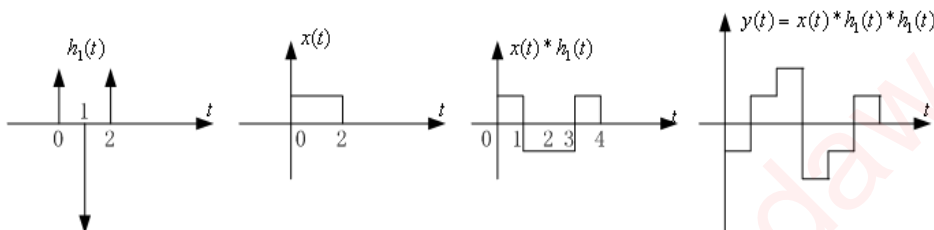


图 P3.13

解： $h_1(t) = S_1'(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$



3.14 已知某连续时间 LTI 系统当输入为图 P3.14(a)的所示的 $x_1(t)$ 时，输出为图 P3.14(b)所示

的 $y_1(t)$ 。现若给该系统施加的输入信号为 $x_2(t) = (\sin \pi t)[u(t) - u(t-1)]$ ，求系统的输出响应 $y_2(t)$ 。

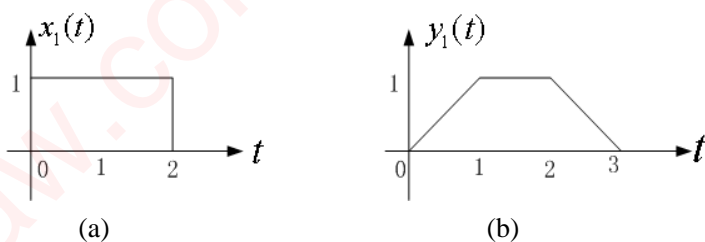
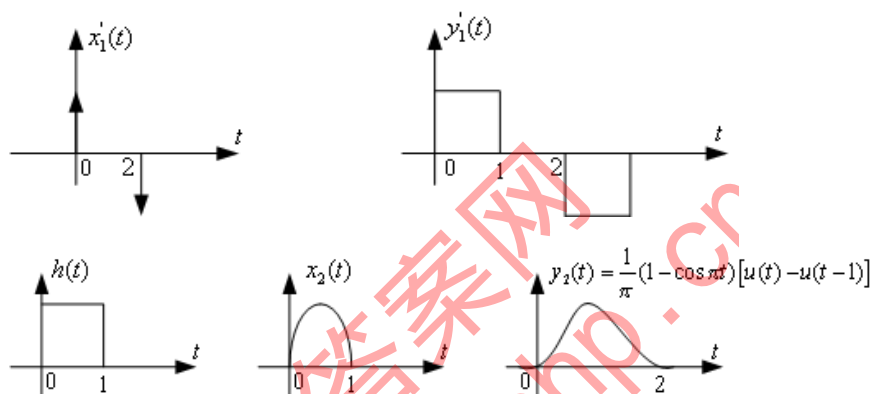


图 P3.14

解：



3.15 一个零初始状态的 LTI 系统由以下差分方程描述：

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n) + 2x(n-2)$$

现已知 $x(n]$ 如图 P3.15 所示，用递归法解差分方程，求出系统的响应 $y(n)$ 。

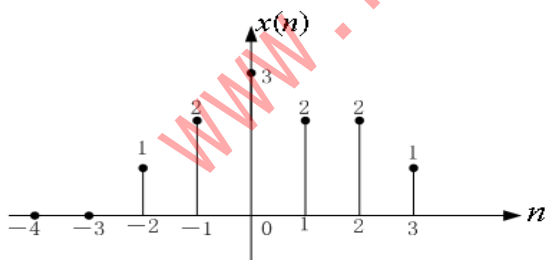


图 P3.15

解： \because 系统最初松弛， \therefore 当 $n \leq -3$ 时， $y(n) = 0$

由 $y(n) = x(n) + 2x(n-2) - 2y(n-1)$ 可递推得出

$$\begin{aligned}
y(-2) &= x(-2) + 2x(-4) - 2y(-3) = 1 \\
y(-1) &= x(-1) + 2x(-3) - 2y(-2) = 0, \\
y(0) &= x(0) + 2x(-2) - 2y(-1) = 5, \\
y(1) &= x(1) + 2x(-1) - 2y(0) = -4, \\
y(2) &= x(2) + 2x(0) - 2y(1) = 16, \\
y(3) &= x(3) + 2x(1) - 2y(2) = -27, \\
y(4) &= x(4) + 2x(2) - 2y(3) = 58, \\
y(5) &= x(5) + 2x(3) - 2y(4) = -114,
\end{aligned}$$

$$n \geq 6 \text{ 时, } y(n) = -114(-2)^{n-5}$$

3.16 用直接 II 型结构实现下列每个连续时间 LTI 系统，假定这些系统都是最初松弛的。

$$(a) \quad 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - 3 \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$(b) \quad \frac{d^4 y(t)}{dt^4} = x(t) - 2 \frac{dx(t)}{dt}$$

$$(c) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt} + 3 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

解：(a) 直接 II 型结构如图 PS3.16(a)所示。

(b) 直接 II 型结构如图 PS3.16(b)所示。

(c) 将方程两边微分一次得

$$y''(t) + 2y'(t) - 2y(t) = x'(t) + x''(t) + 3x(t)$$

其直接 II 型结构如图 PS3.16(c)所示。

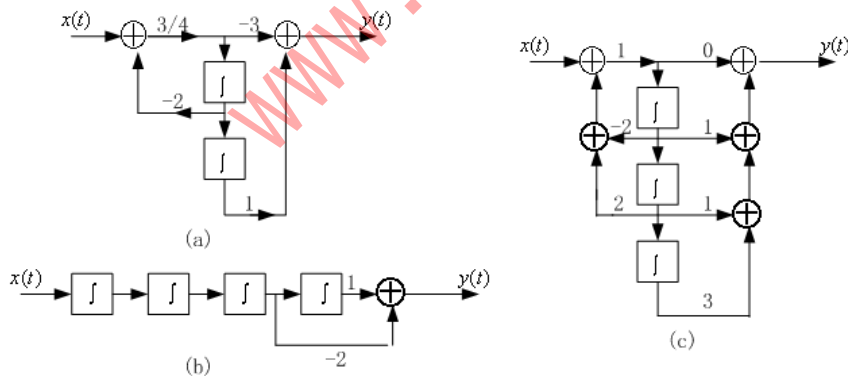


图 PS3.16

3.17 用直接 II 型结构实现下列每个离散时间 LTI 系统，假定这些系统都是最初松弛的

$$(a) \quad 2y(n) - y(n-1) + y(n-3) = x(n) - 5x(n-4)$$

$$(b) \quad y(n] = x(n) - x(n-1) + 2x(n-3) - 3x(n-4)$$

解：(a) 直接 II 型结构如图 PS3.17(a)所示。

(b) 直接 II 型结构如图 PS3.17(b)所示。

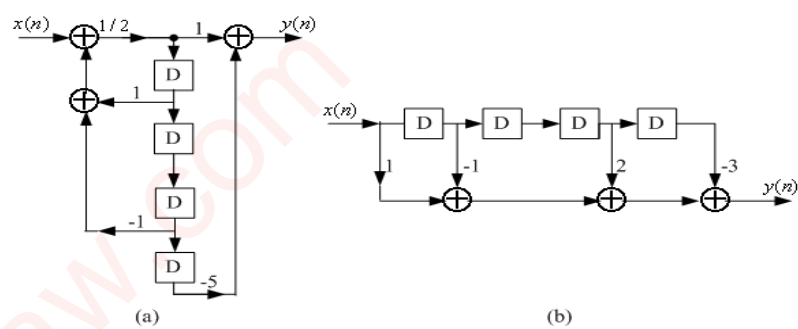


图 PS3.17

第四章习题答案

4.1 由于复指数函数是 LTI 系统的特征函数，因此傅里叶分析法在连续时间 LTI 系统分析中具有重要价值。在正文已经指出：尽管某些 LTI 系统可能有另外的特征函数，但复指数函数是唯一能够成为一切 LTI 系统特征函数的信号。在本题中，我们将验证这一结论。

(a) 对单位冲激响应 $h(t) = \delta(t)$ 的 LTI 系统，指出其特征函数，并确定相应的特征值。

(b) 如果一个 LTI 系统的单位冲激响应为 $h(t) = \delta(t - T)$ ，找出一个信号，该信号不具有 e^{st} 的形式，但却是该系统的特征函数，且特征值为 1。再找出另外两个特征函数，它们的特征值分别为 1/2 和 2，但不是复指数函数。
提示：可以找出满足这些要求的冲激串。

(c) 如果一个稳定的 LTI 系统的冲激响应 $h(t)$ 是实、偶函数，证明 $\cos \Omega t$ 和 $\sin \Omega t$ 是该系统的特征函数。

(d) 对冲激响应为 $h(t) = u(t)$ 的 LTI 系统，假如 $\phi(t)$ 是它的特征函数，其特征值为 λ ，确定 $\phi(t)$ 应满足的微分方程，并解出 $\phi(t)$ 。

此题各部分的结果就验证了正文中指出的结论。

解：(a) $\because h(t) = \delta(t)$ 的 LTI 系统是恒等系统，所以任何函数都是它的特征函数，其特征值为 1。

(b) $\because h(t) = \delta(t - T)$ ， $\therefore x(t) \rightarrow x(t - T)$ 。如果 $x(t)$ 是系统的特征函数，且特征值为

1，则应有 $x(t) = x(t - T)$ 。满足这一要求的冲激序列为 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ 。

若要找出特征值为 1/2 或 2 的这种特征函数，则可得：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t - kT), \quad \text{特征值为 } 1/2。$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \delta(t - kT), \quad \text{特征值为 } 2。$$

$$(c) \cos \Omega t = \frac{1}{2}(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})$$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \times \frac{1}{2} [e^{j\Omega(t-\tau)} + e^{-j\Omega(t-\tau)}] d\tau \\ &= \frac{1}{2} e^{j\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau + \frac{1}{2} e^{-j\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\Omega \tau} d\tau \end{aligned}$$

$\therefore h(t)$ 为实、偶函数

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{2} (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = \cos \Omega t \cdot H(j\Omega)$$

同理可证 $\sin \Omega t$ 。

(d) $\therefore h(t) = u(t)$

$$\therefore y(t) = \int x(t) dt$$

$$\therefore \begin{cases} y'(t) = \phi(t) \\ y(t) = \lambda \phi(t) \end{cases}$$

于是 $\phi(t) = ce^{\frac{t}{\lambda}}$

4.2 求下列信号的傅里叶级数表示式。

(a) $x(t) = \cos 4t + \cos 6t$

(b) $x(t)$ 是以 2 为周期的信号，且 $x(t) = e^{-t}$, $-1 < t < 1$

(c) $x(t)$ 如图 P4.2(a)所示。

(d) $x(t)$ 如图 P4.2(b)所示。

(e) $x(t)$ 如图 P4.2(c)所示。

(f) $x(t)$ 如图 P4.2(d)所示。

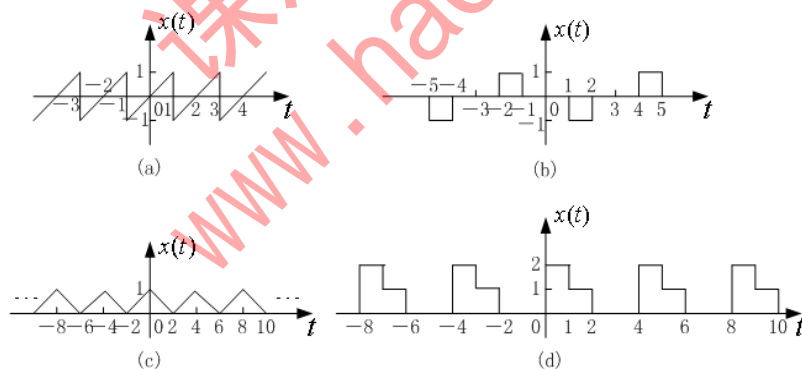


图 P4.2

解: (a) $\cos 4t + \sin 6t = \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2j} e^{j6t} - \frac{1}{2j} e^{-j6t}$, 取 $\omega_0 = 2$, 则有

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{2j}; a_{-3} = -\frac{1}{2j}; a_k = 0 \quad (k \neq \pm 2, \pm 3)$$

(b) $T = 2$, $\omega_0 = \pi$, 则

$$a_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-t} e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2(1+jk\pi)} \left[e^{(1+jk\pi)} - e^{-(1+jk\pi)} \right] = \frac{(-1)^k}{2(1+jk\pi)} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

$$\therefore x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^2 - 1)}{2e(1+jk\pi)} e^{jk\pi t}$$

(c) $T = 2$, $\because x(t)$ 是奇函数, $\therefore a_0 = 0$

$$a_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t e^{-jk\pi t} dt = -\frac{1}{2jk\pi} \left[t e^{-jk\pi t} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi t} \Big|_{-1}^1 \right] = \frac{j(-1)^k}{k\pi}, (k \neq 0)$$

$$\therefore x(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{j(-1)^k}{k\pi} e^{jk\pi t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j(-1)^k}{k\pi} e^{jk\pi t}$$

(d) $T = 6$, $\omega_0 = \pi/3$, 可求得

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{6} \int_{-2}^{-1} e^{-jk\frac{\pi}{3}t} dt - \frac{1}{6} \int_1^2 e^{-jk\frac{\pi}{3}t} dt \\ &= -\frac{1}{2jk\pi} e^{-jk\frac{\pi}{3}t} \Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{2jk\pi} e^{-jk\frac{\pi}{3}t} \Big|_1^2 = \frac{-2}{jk\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{6}, (k \neq 0) \end{aligned}$$

$$\because x(t) = -x(-t) \quad \therefore a_0 = 0; \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

(e) $T = 4$, $\omega_0 = \pi/2$, $\because x(t)$ 是偶函数, $\therefore a_0 = \frac{1}{2}$

$$a_k = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^0 \left(1 + \frac{t}{2}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \int_0^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \right] = \frac{1}{k\pi} + \frac{1 - \cos k\pi}{k^2\pi^2}$$

(f) $T = 4$, $\omega_0 = \pi/2$, 可求得

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{4} \int_0^1 2e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \frac{1}{4} \int_1^2 e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \\ &= -\frac{1}{jk\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \Big|_0^1 - \frac{1}{2jk\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \Big|_1^2 = \frac{j}{2k\pi} (e^{-jk\pi} + e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 2), (k \neq 0) \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{3}{4}; \quad \therefore a_k = \frac{1}{4} s_a\left(\frac{\pi}{4}k\right) e^{-jk\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} s_a\left(\frac{\pi}{2}k\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}}; \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}t}$$

4.3 已知某 LTI 系统的单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-4t} u(t)$$

对下列输入信号, 求输出响应 $y(t)$ 的傅里叶级数表示式。

(a) $x(t) = \cos 2\pi t$

$$(b) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

$$(c) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$$

(d) $x(t)$ 如图 P4.3 所示。

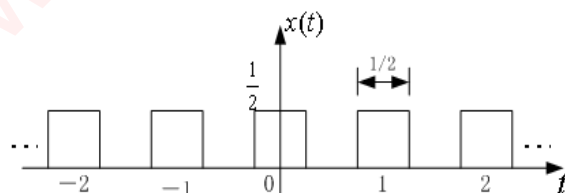


图 P4.3

解：设 $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$, 则 $b_k = a_k H(k\omega_0)$; 其中 a_k 、 b_k 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶级数系数。

$$(a) x(t) = \cos 2\pi t, \omega_0 = 2\pi; a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}, \text{其余 } a_k = 0$$

$$\therefore b_1 = a_1 H(\omega_0) = \frac{1}{4(2+j\pi)}, b_{-1} = b_1^* = \frac{1}{4(2-j\pi)}, \text{其余 } b_k = 0$$

$$(b) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n); T=1, \omega_0 = 2\pi; \therefore a_k = 1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{4+j2k\pi} \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(c) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n); T=2, \omega_0 = \pi;$$

$$a_k = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\delta(t) - \delta(t-1)] e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} (1 - e^{jk\pi}) = \begin{cases} 0, & k \text{ 偶} \\ 1, & k \text{ 奇} \end{cases}$$

$$\therefore b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ 偶} \\ \frac{1}{4+jk\pi}, & k \text{ 奇} \end{cases}$$

(d) 由图 P4.3 所示 $x(t)$ 可得: $T=1, \omega_0 = 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_k = \frac{1}{2} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\therefore b_0 = \frac{1}{8}, b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ 偶}, k \neq 0 \\ \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi(4+j2k\pi)}, & k \text{ 奇} \end{cases}$$

4.4 (a) 证明:以 T 为周期的信号 $x(t)$ 如果是偶函数,即 $x(t) = x(-t)$,则其三角函数形式的傅里叶级数表示式中只含有余弦分量;如果 $x(t)$ 是奇信号,即 $x(t) = -x(-t)$,则其三角函数形式的傅里叶级数中只含有正弦分量。

(b) 如果以 T 为周期的信号 $x(t)$ 同时满足

$$x(t) = x\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

则称 $x(t)$ 为偶谐信号;如果同时满足

$$x(t) = -x\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

则称 $x(t)$ 为奇谐信号。证明偶谐信号的傅里叶级数中只包含偶次谐波;奇谐信号的傅里叶级数只包含奇次谐波。

(c) 如果 $x(t)$ 是周期为 2 的奇谐信号,且 $x(t) = t, 0 < t < 1$,画出 $x(t)$ 的波形,并求出它的傅里叶级数系数。

解: (a) $a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt, a_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt$

若 $x(t) = x(-t)$, 则 $a_k = a_{-k}$

$$\begin{aligned} \therefore x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} + a_{-k} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t \end{aligned}$$

若 $x(t) = -x(-t)$, 则 $a_k = -a_{-k}$

$$\therefore x(t) = 2j \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \frac{2\pi k}{T} t$$

$$(b) a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt + \int_{T/2}^T x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \right]$$

$$\text{若 } x(t) = x\left(t - \frac{T}{2}\right), \text{ 则 } a_k = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt + (-1)^{k\pi} \int_0^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \right]$$

当 k 为偶数时,
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$$

当 k 为奇数时, $a_k = 0$

∴ 只有偶次谐波

同理可证奇谐信号只包含奇次谐波。

(c) $x(t): T=2$, 奇谐信号, $x(t) = -x(t - \frac{T}{2})$

$$\therefore x(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ -(1+t), & -1 < t < 0 \end{cases}$$

$x(t)$ 如图 PS4.4 所示。

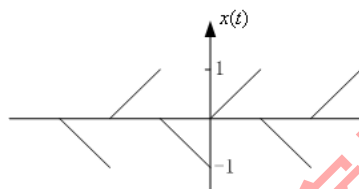


图 PS4.4

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 t e^{-jk\pi t} dt = -\frac{1}{jk\pi} \left[t e^{-jk\pi t} + \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi t} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{jk\pi} - \frac{2}{(k\pi)^2}, \quad (k \text{ 为奇数}) \\ a_k &= 0, \quad (k \text{ 为偶数}) \end{aligned}$$

4.5 假如图 P4.5 所示的信号 $x(t)$ 和 $z(t)$ 有如下三角函数形式的傅里叶级数表示式

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) - C_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) \right] \\ z(t) &= d_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[E_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) - F_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

画出信号

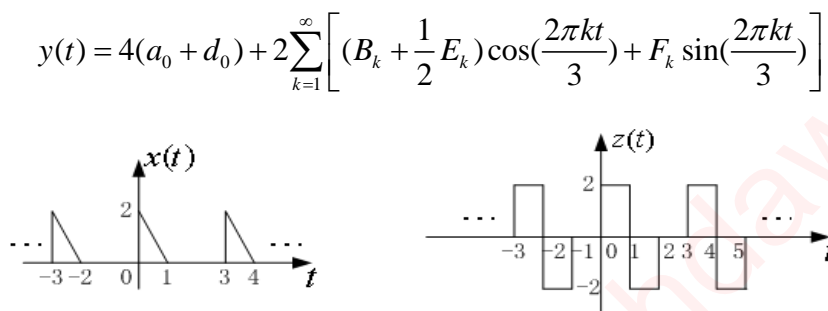
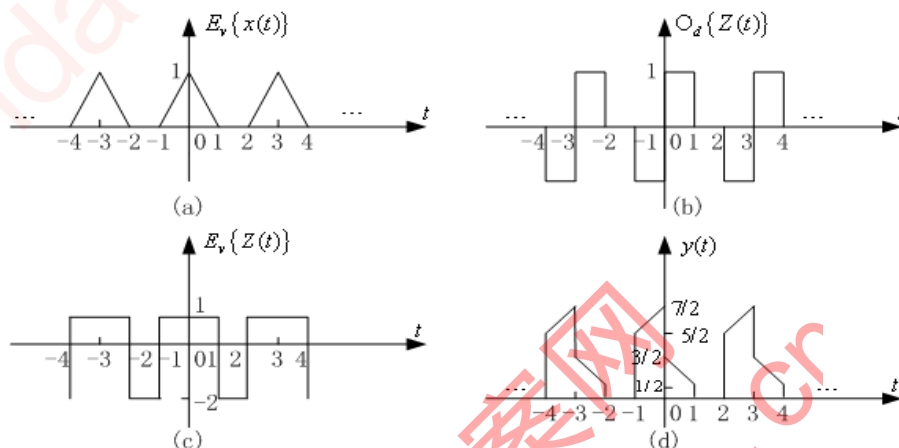


图 P4.5

解: $\because a_0 = \frac{1}{3}; d_0 = 0;$ 而 $a_0 + 2B_k \rightarrow E_v \{x(t)\}; d_0 + 2E_k \rightarrow E_v \{z(t)\};$

$$-2F_k \rightarrow O_d \{z(t)\}$$

$$\begin{aligned} \therefore y(t) &= 4(a_0 + d_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(B_k + \frac{1}{2}E_k) \cos(\frac{2\pi kt}{3}) + F_k \sin(\frac{2\pi kt}{3}) \right] \\ &= 1 + E_v \{x(t)\} + \frac{1}{2} E_v \{z(t)\} - O_d \{z(t)\} \end{aligned}$$



4.6 设 $x(t)$ 是一个周期信号, 其基波周期为 T_0 , 傅里叶级数的系数为 \dot{A}_k , 用 \dot{A}_k 表示下列信号的傅里叶级数系数。此题证明了表 4.2 中所列的傅里叶级数的有关性质。

(a) $x(t - t_0)$

(b) $x(-t)$

(c) $x^*(t)$

(d) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, (假设 $\dot{A}_0 = 0$)

(e) $\frac{dx(t)}{dt}$

(f) $x(at), a > 0$, (要先确定该信号的周期)

解: (a) $\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t - t_0) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t - t_0) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2k\pi}{T}(t+t_0)} dt$

$$= \frac{1}{T_0} e^{-j\frac{2k\pi}{T}t_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt = e^{-j\frac{2k\pi}{T}t_0} A_k$$

(b) $\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(-t) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j\frac{2k\pi}{T}t} dt = A_{-k}$

(c) $\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^*(t) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt = \left[\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{j\frac{2k\pi}{T}t} dt \right]^* = A_{-k}^*$

(d) $\int_{-\infty}^{t+T} x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \int_t^{t+T} x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + T_0 \dot{A}_0$

$$\because \dot{A}_0 = 0 \quad \therefore \int_{-\infty}^{t+T} x(\tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad \text{为 } T_0 \text{ 周期信号}$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^T \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \left[\int_0^T \int_{\tau}^T x(\tau) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt d\tau \right] + \frac{1}{T_0} \left[\int_{-\infty}^{\tau} \int_0^T x(\tau) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt d\tau \right] \\ &= \frac{1}{T_0} \left[\int_0^T x(\tau) \int_{\tau}^T e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt d\tau \right] + 0 \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^T x(\tau) \frac{e^{-j\frac{2k\pi}{T}\tau}}{j\frac{2k\pi}{T}} d\tau \\ &= \frac{A_k}{j\frac{2k\pi}{T}} \end{aligned}$$

$$(e) \quad \frac{dx(t+T)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{因此以 } T \text{ 为周期}$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= \int_0^T \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt = \int_0^T e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dx(t) \\ &= x(t) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} \Big|_0^T + \int_0^T x(t) j\frac{2k\pi}{T} e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt \\ &= j\frac{2k\pi}{T} A_k \end{aligned}$$

$$(f) \quad \because x\left[a\left(t + \frac{T_0}{a}\right)\right] = x(at + T_0) = x(at)$$

$$\therefore \text{该信号周期为 } T = \frac{T_0}{a}$$

$$\dot{A}_k = \frac{a}{T} \int_0^{\frac{T}{a}} x(at) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt = \frac{a}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\frac{2k\pi}{T/a}t/a} dt \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt = A_k$$

4.7 已知某周期信号的前四分之一周期的波形如图 P4.7 所示。就下列情况画出一个周期 ($0 < t < T$) 内完整的波形。

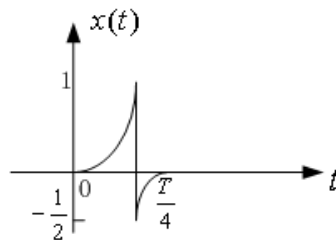


图 P4.7

(a) $x(t)$ 是偶函数，只含有偶次谐波。

(b) $x(t)$ 是偶函数，只含有奇次谐波。

(c) $x(t)$ 是偶函数，含有奇次和偶次谐波。

(d) $x(t)$ 是奇函数，只含有偶次谐波。

(e) $x(t)$ 是奇函数，只含有奇次谐波。

(f) $x(t)$ 是奇函数，含有偶次和奇次谐波。

解：(a) $x(t) = x(-t)$ 且 $x(t + \frac{T}{2}) = x(t)$ ，如图 PS4.7(a)所示。

(b) $x(t) = x(-t)$ 且 $x(t - \frac{T}{2}) = -x(t)$ ，如图 PS4.7(b)所示。

(c) $x(t) = x(-t)$ ，如图 PS4.7(c)所示。

(d) $x(t) = -x(-t)$ 且 $x(t + \frac{T}{2}) = x(t)$ ，如图 PS4.7(d)所示。

(e) $x(t) = -x(-t)$ 且 $x(t - \frac{T}{2}) = -x(t)$ ，如图 PS4.7(e)所示。

(f) $x(t) = -x(-t)$ ，如图 PS4.7(f)所示。

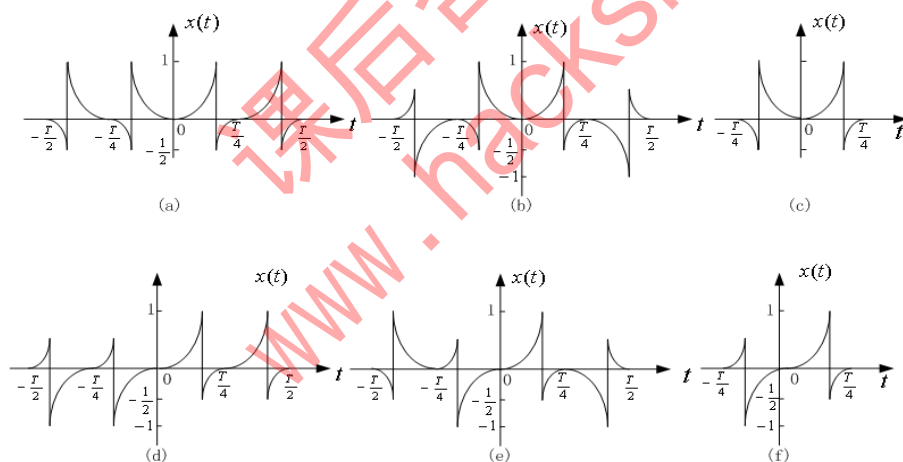


图 PS4.7

4.8 计算下列信号的傅里叶变换：

(a) $x(t) = e^{-3t} [u(t+2) - u(t-3)]$

(b) $x(t) = u_1(t) + 2\delta(3-2t)$ ，其中 $u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$

(c) $x(t)$ 如图 P4.8(a)所示。

(d) $x(t)$ 如图 P4.8(b)所示。

$$(e) \quad x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(f) $x(t)$ 如图 P4.8(c) 所示。

(g) $x(t)$ 如图 P4.8(d) 所示。

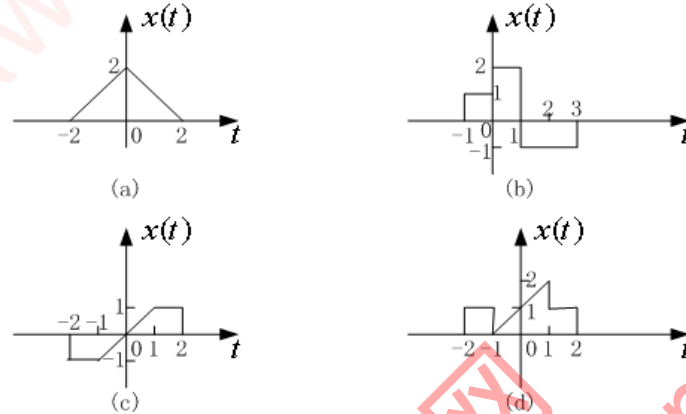


图 P4.8

解: (a) $\because e^{-3t} [u(t+2) - u(t-3)] = e^6 e^{-3(t+2)} u(t+2) - e^{-9} e^{-3(t-3)} u(t-3)$

$$e^{-3t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{3+j\Omega} \quad e^{-3(t+2)} u(t+2) \leftrightarrow \frac{e^{j2\Omega}}{3+j\Omega} \quad e^{-3(t-3)} u(t-3) \leftrightarrow \frac{e^{-j3\Omega}}{3+j\Omega}$$

$$\therefore e^{-3t} [u(t+2) - u(t-3)] \leftrightarrow \frac{1}{3+j\Omega} (e^{6+j2\Omega} - e^{-9-j3\Omega})$$

$$(b) \quad \because u_1(t) \leftrightarrow j\Omega, \quad \delta(3-2t) = \frac{1}{2} \delta(t - \frac{3}{2}) \leftrightarrow \frac{1}{2} e^{-j\frac{3}{2}\Omega}$$

$$\therefore u_1(t) + 2\delta(3-2t) \leftrightarrow j\Omega + e^{-j\frac{3}{2}\Omega}$$

$$(c) \quad X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-2}^0 (t+2) e^{-j\Omega t} dt + \int_0^2 (2-t) e^{-j\Omega t} dt = \frac{2}{\Omega} - \frac{2 \cos 2\Omega}{\Omega^2}$$

$$(d) \quad x(t) = u(t+1) + u(t) - 3u(t-1) + u(t-3)$$

$$\therefore X(\Omega) = \left(\frac{1}{j\Omega} + \pi j \delta(0) \right) (e^{j\Omega} + 1 - 3e^{-j\Omega} + e^{-j3\Omega})$$

$$(e) \quad x(t) \leftrightarrow \int_{-1}^1 (1 + \cos \pi t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-j\Omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [e^{j(\pi-\Omega)t} + e^{-j(\pi+\Omega)t}] dt$$

$$= \frac{2}{\Omega} \sin \Omega + \frac{\sin(\pi-\Omega)}{\pi-\Omega} + \frac{\sin(\pi+\Omega)}{\pi+\Omega}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad X(\Omega) &= \int_{-2}^{-1} (-1)e^{-j\Omega t} dt + \int_{-1}^1 te^{-j\Omega t} dt + \int_1^2 e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{2j}{\Omega} (\cos 2\Omega - \cos \Omega) + j \frac{2 \cos \Omega}{\Omega} + \frac{-2j \sin \Omega}{\Omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad X(\Omega) &= \int_{-2}^{-1} e^{-j\Omega t} dt + \int_{-1}^1 (t+1)e^{-j\Omega t} dt + \int_1^2 e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{2(\sin 2\Omega - \sin \Omega)}{\Omega} + \frac{2je^{-j\Omega}}{\Omega} - \frac{2j \sin \Omega}{\Omega^2} \end{aligned}$$

4.9 确定下列傅里叶变换所对应的连续时间信号：

(a) $X(\Omega) = \cos(4\Omega + \pi/3)$

(b) $X(\Omega) = 2[\delta(\Omega - 1) + \delta(\Omega + 1)] + 3[\delta(\Omega - 2\pi) + \delta(\Omega + 2\pi)]$

(c) $X(\Omega) = \frac{2 \sin[3(\Omega - 2\pi)]}{(\Omega - 2\pi)}$

(d) $X(\Omega)$ 如图 P4.9(a)所示。

(e) $X(\Omega)$ 如图 P4.9(b)所示。

(f) $X(\Omega)$ 的模和相位如图 P4.9(c)(d)所示。

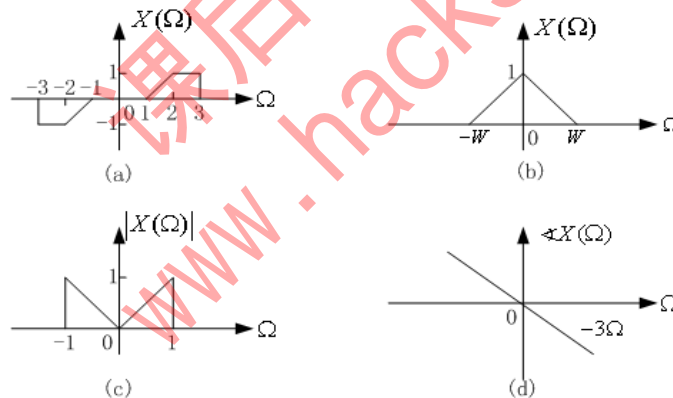


图 P4.9

解： (a) 设
$$X(t) = \cos(4t + \pi/3) = \frac{1}{2} \left(e^{j4t} \cdot e^{j\pi/3} + e^{-j4t} \cdot e^{-j\pi/3} \right)$$

$$\therefore X(t) \leftrightarrow \pi e^{j\pi/3} \delta(\Omega - 4) + \pi e^{-j\pi/3} \delta(\Omega + 4) = \hat{x}(\Omega)$$

$$\therefore X(\Omega) \leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \hat{x}(-t)$$

即
$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\pi/3} \delta(-t - 4) + \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} \delta(-t + 4)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\pi/3} \delta(t+4) + \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} \delta(t-4)$$

$$(b) \because \sin t \leftrightarrow \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega-1) - \delta(\Omega+1)]; \quad \cos t \leftrightarrow \pi [\delta(\Omega-1) + \delta(\Omega+1)]$$

$$\therefore \frac{2j}{\pi} \sin t \leftrightarrow 2 [\delta(\Omega-1) - \delta(\Omega+1)]; \quad \frac{3}{\pi} \cos 2\pi t \leftrightarrow 3 [\delta(\Omega-2\pi) + \delta(\Omega+2\pi)]$$

$$\text{故有} \quad x(t) = \frac{2j}{\pi} \sin t + \frac{3}{\pi} \cos 2\pi t$$

$$(c) \because \frac{2 \sin 3\Omega}{\Omega} \leftrightarrow u(t+3) - u(t-3)$$

$$\therefore \frac{2 \sin 3(\Omega-2\pi)}{\Omega-2\pi} \leftrightarrow x(t) = e^{j2\pi t} [u(t+3) - u(t-3)]$$

$$\text{即} \quad x(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t}, & |t| < 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-3}^{-2} (-1) e^{j\Omega t} d\Omega + \int_{-2}^{-1} (\Omega+1) e^{j\Omega t} d\Omega + \int_{-1}^2 (\Omega-1) e^{j\Omega t} d\Omega + \int_2^3 e^{j\Omega t} d\Omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2j(\cos 2t - \cos 3t)}{t} + \frac{2j(\cos 2t - \cos t)}{t} + \frac{2(e^{-j2t} - e^{-jt})}{jt} + \frac{e^{-jt} - e^{-j2t}}{t^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e) \quad x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-W}^0 \left(1 + \frac{\Omega}{W}\right) e^{j\Omega t} d\Omega + \int_0^W \left(1 - \frac{\Omega}{W}\right) e^{j\Omega t} d\Omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-W}^W e^{j\Omega t} d\Omega + \int_{-W}^0 \frac{\Omega}{W} e^{j\Omega t} d\Omega - \int_0^W \frac{\Omega}{W} e^{j\Omega t} d\Omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 \sin Wt}{t} - \frac{W \cos Wt}{t} - \frac{\sin Wt}{t^2} \right) \end{aligned}$$

$$(f) \text{ 由图 P4.9(c)、(d)知, } X(\Omega) = |\Omega| e^{-j3\Omega}, \quad |\Omega| < 1$$

$$\begin{aligned} \therefore x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 -\Omega e^{-j3\Omega} e^{j\Omega t} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \Omega e^{-j3\Omega} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(t-3)}{t-3} + \frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2} \right] \end{aligned}$$

4.10 先求出图 P4.10 所示各信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\Omega)$ ，再用 $X(\Omega)$ 表示图中信号

$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$ 的频谱。

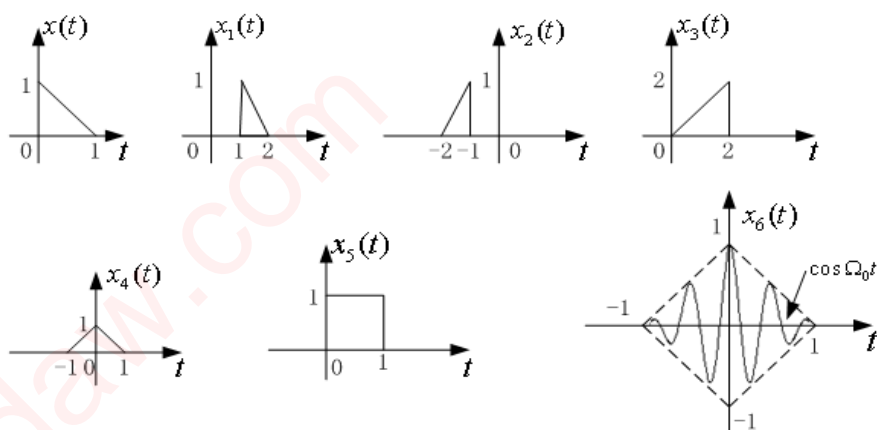


图 P4.10

解: $X(\Omega) = \int_0^1 (1-t)e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{j\Omega} + \frac{1-e^{-j\Omega}}{\Omega^2}$

$$x_1(t) = x(t-1) \leftrightarrow X_1(\Omega) = e^{-j\Omega} \left(\frac{1}{j\Omega} + \frac{1-e^{-j\Omega}}{\Omega^2} \right) = e^{-j\Omega} X(\Omega)$$

$$x_2(t) = x[-(t+1)] \leftrightarrow X_2(\Omega) = e^{j\Omega} X(-\Omega)$$

$$x_3(t) = 2x\left(\frac{t}{2}\right) \leftrightarrow X_3(\Omega) = 4X(2\Omega)$$

$$x_4(t) = x(t) + x(-t) \leftrightarrow X_4(\Omega) = X(\Omega) + X(-\Omega)$$

$$x_5(t) = x(t) + x[-(t-1)] \leftrightarrow X_5(\Omega) = X(\Omega) + e^{-j\Omega} X(-\Omega)$$

$$x_6(t) = [x(t) + x(-t)] \cos \Omega_0 t \leftrightarrow$$

$$X_6(\Omega) = \frac{1}{2} [X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)] + \frac{1}{2} [X(-\Omega + \Omega_0) + X(-\Omega - \Omega_0)]$$

4.11 设 $X(\Omega)$ 是图 P4.11 所示信号 $x(t)$ 的频谱, 不求出 $X(\Omega)$ 而完成下列计算:

(a) 求 $X(0)$

(b) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) d\Omega$

(c) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \frac{2 \sin \Omega}{\Omega} e^{j2\Omega} d\Omega$

(d) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$

(e) 画出 $\text{Re}\{X(\Omega)\}$ 对应的信号。

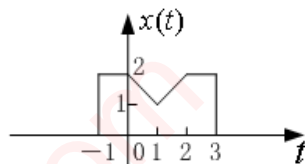


图 P4.11

解: (a) $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 8 - 1 = 7$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) d\Omega = 2\pi x(0) = 4\pi$

(c) $\because 2 \frac{\sin \Omega}{\Omega} \leftrightarrow u(t+1) - u(t-1)$

$2 \frac{\sin \Omega}{\Omega} e^{j2\Omega} \leftrightarrow u(t+3) - u(t+1) = x_1(t)$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \frac{2 \sin \Omega}{\Omega} e^{j2\Omega} d\Omega &= 2\pi \cdot x(t) * x_1(t) \Big|_{t=0} \\ &= 2\pi \int_{-1}^3 x(t) dt = 2\pi \left(4 - \frac{1}{2} \right) = 7\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 4\pi \left[4 + \int_0^1 (t^2 - 4t + 4) dt \right] \\ &= 4\pi \left(4 + \frac{7}{3} \right) = \frac{76}{3} \pi \end{aligned}$$

(e) $\Re_e \{X(\Omega)\} \leftrightarrow x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$, 如图 PS4.11 所示。

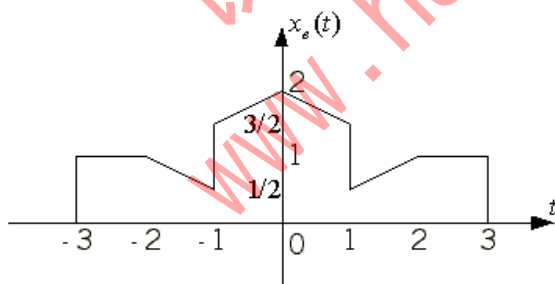


图 PS4.11

4.12 一个实连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\Omega)$ 且 $\ln |X(\Omega)| = -|\Omega|$, 如果已知 $x(t)$

是

(a) 偶时间函数;

(b) 奇时间函数。

求 $x(t)$ 。

解: (a) $x(t) = x(-t) \Rightarrow X(\Omega) = X(-\Omega) \quad X(\Omega) = X^*(\Omega)$

$$\ln|X(\Omega)| = -|\Omega| \Rightarrow \ln|X(\Omega)| = \begin{cases} -\Omega, & \Omega \geq 0 \\ \Omega, & \Omega < 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \ln X^2(\Omega) = \begin{cases} -\Omega, & \Omega \geq 0 \\ \Omega, & \Omega < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\Omega) = \pm e^{-|\Omega|}$$

$$\begin{aligned} \therefore x(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega + \int_0^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \pm e^{\Omega} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_0^{\infty} \pm e^{-\Omega} e^{j\Omega t} d\Omega \right] \\ &= \pm \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1+jt} - \frac{1}{1-jt} \right) = \frac{\mp jt}{\pi(1+t^2)} \end{aligned}$$

$$(b) \quad x(t) = -x(-t) \Rightarrow X(\Omega) = -X(-\Omega) \quad X(\Omega) = X^*(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \therefore x(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega + \int_0^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(\Omega) (e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}) d\Omega \\ &= \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\Omega} (e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}) d\Omega \\ &= \pm \frac{jt}{\pi(1+t^2)} \end{aligned}$$

4.13 如果图 P4.13 所示的实信号 $x(t)$ 存在傅里叶变换 $X(\Omega)$ ，试判断哪些信号的傅里叶变换满足下列性质之一。

$$(a) \operatorname{Re}\{X(\Omega)\} = 0$$

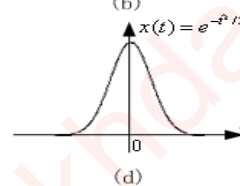
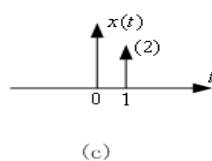
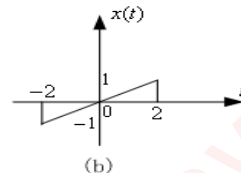
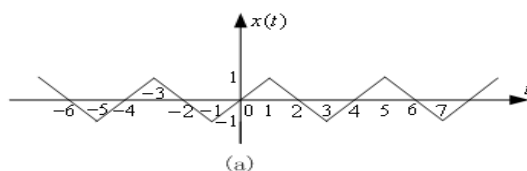
$$(b) \operatorname{Im}\{X(\Omega)\} = 0$$

(c) 可以找到一个实数 a ，使得 $X(\Omega)e^{ja\Omega}$ 是实函数。

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) d\Omega = 0$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} \Omega X(\Omega) d\Omega = 0$$

(f) $X(\Omega)$ 是周期的。



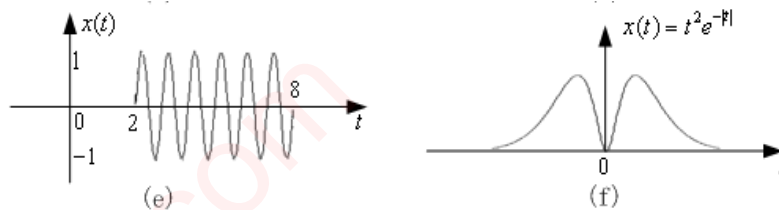


图 P4.13

解: (a) $\because \operatorname{Re}\{X(\Omega)\} = 0 \quad \therefore x(t)$ 为奇函数

因而图 P4.13(a),(b)满足条件。

(b) $\because \operatorname{Im}\{X(\Omega)\} = 0 \quad \therefore x(t)$ 为偶函数

因而图 P4.13(d),(f)满足条件。

(c) 由已知可得, $x(t)$ 平移 a 后为偶函数

因而图 P4.13(a),(c),(d),(f)满足条件。

(d) $\because \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) d\Omega = 0 \quad \therefore x(0) = 0$

因而图 P4.13(a),(b),(c),(e),(f)满足条件。

(e) $\because \int_{-\infty}^{\infty} \Omega X(\Omega) d\Omega = 0 \quad \therefore x'(0) = 0$

因而图 P4.13 (c),(d),(e),(f)满足条件。

(f) 由条件可知(c)满足。

4.14 求图 P4.14 所示周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换。

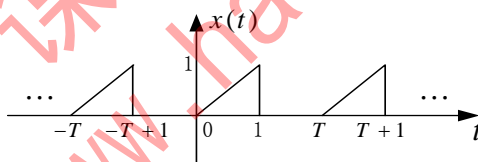


图 P4.14

$$\text{解: } a_k = \frac{1}{T} \int_0^1 t e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt = \frac{jT}{2\pi k} e^{-j\frac{2\pi k}{T}} + \frac{T^2}{4k^2\pi^2} \left(e^{-j\frac{2\pi k}{T}} - 1 \right) \quad (k \neq 0)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2T}$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2k\pi}{T}t} \Rightarrow X(\Omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2k\pi}{T})$$

4.15 假设周期信号 $x(t)$ 是某个 LTI 系统的输入, $x(t)$ 的傅里叶级数表示式为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{|k|} e^{jk\frac{\pi}{4}t}$$

系统的频率响应为

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$

为了该系统的输出至少具有 $x(t)$ 在一个周期内平均能量的 90%， W 必须取多大？

解： 根据帕斯瓦尔定理，可得信号 $x(t)$ 的平均能量为：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{2|k|} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{-2k} = \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

设 W 的取值使系统能通过 $x(t)$ 的第 N 次谐波，则系统输出的平均能量为

$$\sum_{k=-N}^N \alpha^{2|k|} = \sum_{k=0}^N \alpha^{2k} + \sum_{k=-N}^{-1} \alpha^{-2k} = \frac{1+\alpha^2-2\alpha^2\alpha^{2N}}{1-\alpha^2}$$

由题意应有

$$\frac{1+\alpha^2-2\alpha^2\alpha^{2N}}{1-\alpha^2} \geq 0.9 \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \quad \text{即：} \quad \alpha^{2N} \leq \frac{0.1(1+\alpha^2)}{2\alpha^2}$$

$$\therefore N \geq \frac{\lg[0.1(1+\alpha^2)] - \lg 2\alpha^2}{2\lg \alpha} \quad \text{即：} \quad \frac{\pi N}{4} < W < \frac{\pi}{4}(N+1)$$

能保证输出至少具有 $x(t)$ 一个周期平均能量的 90%。

$$\text{本题中 } \alpha = \frac{1}{2}, \text{ 得 } N \geq \frac{\lg\left[0.1\left(1+\frac{1}{4}\right)\right] - \lg \frac{1}{2}}{2\lg \frac{1}{2}}$$

4.16 (a) 如果信号 $x(t)$ 满足 $x(-t) = x^*(t)$ ，那么 $x(t)$ 的傅里叶变换具有什么性质？

(b) 如果一个系统的输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ ，且 $y(t) = \operatorname{Re}\{x(t)\}$ ，试用 $x(t)$ 的傅

里叶变换表示 $y(t)$ 的傅里叶变换

(c) 如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个任意信号，其傅里叶变换分别为 $X(\Omega)$ 和 $Y(\Omega)$ ，证明帕

斯瓦尔定理的一般形式

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)Y^*(\Omega)d\Omega$$

解： (a) 设 $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$ ，由共轭对称性有 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\Omega)$

由尺度变换性有 $x(-t) \leftrightarrow X(-\Omega)$

而 $x(-t) = x^*(t)$, $\therefore X^*(-\Omega) = X(\Omega)$ 表明 $X(\Omega)$ 是实函数。

(b) 设 $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$, $y(t) \leftrightarrow Y(\Omega)$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(t)] = \operatorname{Re}\{x(t)\}$$

$$\therefore Y(\Omega) = \frac{1}{2} [X(\Omega) + X^*(-\Omega)]$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) y^*(t) e^{j\Omega t} d\Omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) d\Omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\Omega t} dt \right]^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) Y^*(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

4.17 在第 3 章我们指出 LTI 系统可以由它的单位冲激响应完全表征。在本章中我们又指出 LTI 系统可以由它的频率响应 $H(\Omega)$ 完全表征。但这并不意味着单位冲激响应或频率响应不同的 LTI 系统, 对任何同样的输入信号所产生的响应都一定不同。

(a) 为了说明这一点, 可以证明 3 个 LTI 系统对 $x(t) = \cos t$ 具有完全相同的输出响应,

这 3 个系统的单位冲激响应分别为:

$$h_1(t) = u(t); \quad h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t); \quad h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$$

(b) 找出对 $\cos t$ 也会产生同样响应的另一个 LTI 系统的单位冲激响应。

解: (a) $x(t) = \cos t$, $X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega-1) + \delta(\Omega+1)]$

$$h_1(t) = u(t), \quad H_1(\Omega) = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t), \quad H_2(\Omega) = -2 + \frac{5}{2+j\Omega} = \frac{1-2j\Omega}{2+j\Omega}$$

$$h_3(t) = 2te^{-t}u(t) \quad H_3(\Omega) = \frac{2}{(1+j\Omega)^2}$$

$$\therefore Y_1(\Omega) = X(\Omega)H_1(\Omega) = \pi[\delta(\Omega-1) + \delta(\Omega+1)] \left[\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \right]$$

$$= \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega-1) - \delta(\Omega+1)]$$

$$\therefore y_1(t) = \sin t$$

$$\therefore Y_2(\Omega) = X(\Omega)H_2(\Omega) = \pi[\delta(\Omega-1) + \delta(\Omega+1)] \cdot \frac{1-2j\Omega}{2+j\Omega}$$

$$= \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega - 1) - \delta(\Omega + 1)]$$

$$\therefore y_2(t) = \sin t$$

$$\begin{aligned} \therefore Y_3(\Omega) &= X(\Omega)H_3(\Omega) = \pi [\delta(\Omega - 1) + \delta(\Omega + 1)] \cdot \frac{2}{(2 + j\Omega)^2} \\ &= \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega - 1) - \delta(\Omega + 1)] \end{aligned}$$

$$\therefore y_3(t) = \sin t$$

可见, $y_1(t) = y_2(t) = y_3(t) = \sin t$

- (b) 由(a)可知, 只要把(a)中三个系统的冲激响应线性组合起来, 就可以构成满足题
意要求的 LTI 系统。例如:

$$h_4(t) = \frac{1}{2} [h_1(t) + h_2(t)]$$

就是满足要求的另一个 LTI 系统。同样地,

$$h_5(t) = \frac{1}{2} [h_1(t) + h_3(t)]; \quad h_6(t) = \frac{1}{2} [h_2(t) + h_3(t)];$$

$$h_7(t) = \frac{1}{2} [h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)] \text{ 等等, 都是满足要求的 LTI 系统。}$$

4.18 (1) 假定信号

$$x(t) = \cos 2\pi t + \sin 6\pi t$$

是对具有如下单位冲激响应的 LTI 系统的输入, 试确定每种情况下的输出。

$$(a) \quad h(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t}$$

$$(b) \quad h(t) = \frac{(\sin 4\pi t)(\sin 8\pi t)}{\pi t^2}$$

$$(c) \quad h(t) = \frac{(\sin 4\pi t)(\cos 8\pi t)}{\pi t}$$

(2) 某 LTI 系统的冲激响应为

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

对下列输入信号 $x_i(t)$, 分别求系统的输出 $y_i(t)$ 。

(a) $x_1(t)$ 是图 P4.18(a)所示的周期性方波信号。

(b) $x_2(t)$ 是图 P4.18(b)所示的方波信号。

(c) $x_3(t) = x_1(t) \cos 5\pi t$

$$(d) \quad x_4(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{10}{3}k\right)$$

(e) $x_5(t)$ 是实信号, $X_5(\Omega)$ 的模对 $\Omega > 0$ 如图 P4.18(c) 所示, $\angle X_5(\Omega)$ 对 $\Omega > 0$

有恒定相位 $\frac{\pi}{2}$ 。

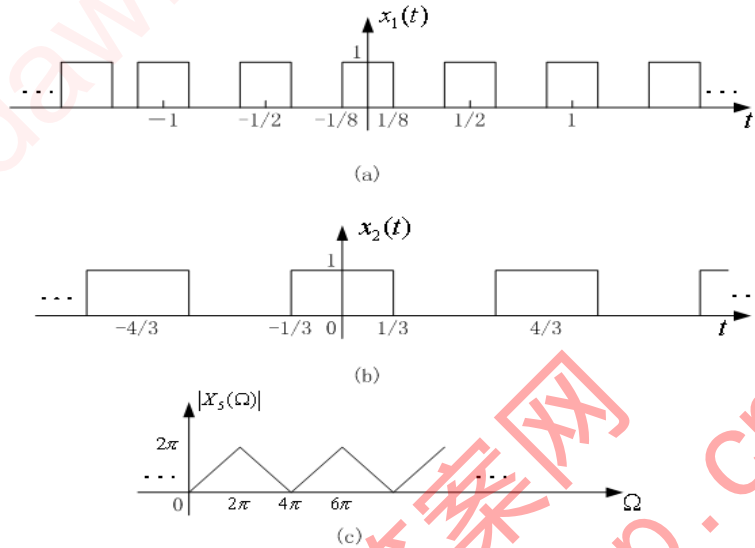


图 P4.18

解: (1) $X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - 2\pi) + \delta(\Omega + 2\pi)] + \frac{\pi}{j}[\delta(\Omega - 6\pi) - \delta(\Omega + 6\pi)]$

$$(a) \quad H(\Omega) = u(\Omega + 4\pi) - u(\Omega - 4\pi)$$

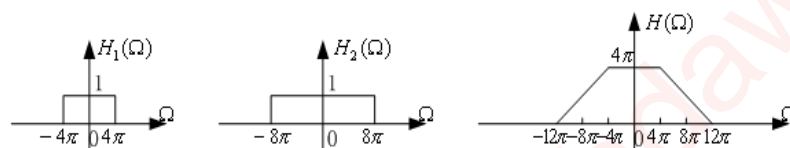
$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - 2\pi) + \delta(\Omega + 2\pi)]$$

$$\therefore y(t) = \cos 2\pi t$$

$$(b) \quad h(t) = \left[\frac{\sin 4\pi t}{\pi t} \right] \left[\frac{\pi \sin 8\pi t}{\pi t} \right] = h_1(t)h_2(t) \cdot \pi, \text{ 则有}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{2} H_1(\Omega) * H_2(\Omega), \text{ 如图 PS4.18-1 所示。}$$

其中: $H_1(\Omega) = u(\Omega + 4\pi) - u(\Omega - 4\pi)$, $H_2(\Omega) = u(\Omega + 8\pi) - u(\Omega - 8\pi)$



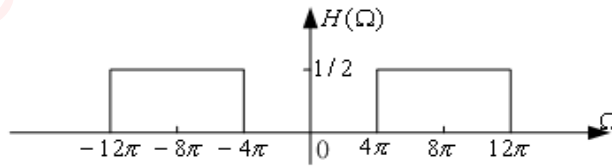
图PS4.18-1

$$\therefore Y(\Omega) = 4\pi^2 [\delta(\Omega - 2\pi) + \delta(\Omega + 2\pi)] + \frac{3\pi^2}{j} [\delta(\Omega - 6\pi) - \delta(\Omega + 6\pi)]$$

$$y(t) = 4\pi \cos 2\pi t + 3\pi \sin 6\pi t$$

$$(c) \quad h(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin 4\pi t}{\pi t} (e^{j8\pi t} + e^{-j8\pi t}), \text{ 则有}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{2} [H_1(\Omega - 8\pi) + H_1(\Omega + 8\pi)]. \text{ 如图 PS4.18-2 所示。}$$



图PS4.18-2

$$\text{其中: } H_1(\Omega) = u(\Omega + 4\pi) - u(\Omega - 4\pi)$$

$$\therefore Y(\Omega) = \frac{\pi}{2j} [\delta(\Omega - 6\pi) - \delta(\Omega + 6\pi)]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin 6\pi t$$

$$(2) \quad H(\Omega) = u(\Omega + 2\pi) - u(\Omega - 2\pi)$$

$$(a) \quad X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{k_1} \delta(\Omega - 4\pi k)$$

其中 X_{k_1} 为 $\tilde{x}_1(t)$ 的傅里叶级数系数,

$$X_{k_1} = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi k}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k}$$

$$\therefore Y_1(\Omega) = X_1(\Omega)H(\Omega) = \pi\delta(\Omega)$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad X_2(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{k_2} \delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{2}k\right), \text{ 其中 } X_{k_2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k}$$

$$\therefore Y_2(\Omega) = \pi\delta(\Omega) + 2\left[\delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \frac{3\pi}{2} t$$

$$(c) X_3(\Omega) = \frac{1}{2} X_1(\Omega - 5\pi) + \frac{1}{2} X_1(\Omega + 5\pi)$$

$$\therefore Y_3(\Omega) = X_3(\Omega)H(\Omega) = \delta(\Omega - \pi) + \delta(\Omega + \pi)$$

$$y_3(t) = \frac{1}{\pi} \cos \pi t$$

$$(d) X_4(\Omega) = \frac{3\pi}{5} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{5} k\right)$$

$$\therefore Y_4(\Omega) = X_4(\Omega)H(\Omega) = \frac{3\pi}{5} \sum_{k=-3}^3 \delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{5} k\right)$$

$$y_4(t) = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{3\pi}{5} t + \cos \frac{6\pi}{5} t + \cos \frac{9\pi}{5} t \right)$$

(e) 由图 P4.18(C) 及相位条件, 可得出 $X_5(\Omega)$ 的一个周期为:

$$X_5(\Omega) = j\Omega, |\Omega| < 2\pi$$

$$\therefore Y_5(\Omega) = X_5(\Omega)H(\Omega) = j\Omega H(\Omega)$$

$$y_5(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin 2\pi t}{t} \right) = \frac{2 \cos 2\pi t}{t} - \frac{\sin 2\pi t}{\pi t^2}$$

4.19 图 P4.19 所示 4 个 LTI 系统互联, 其中:

$$h_1(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin \Omega_c t}{2\pi t} \right]; H_2(\Omega) = e^{-j2\pi\Omega/\Omega_c}; h_3(t) = \frac{\sin 3\Omega_c t}{\pi t}; h_4(t) = u(t)$$

(a) 确定 $H_1(\Omega)$, 并粗略画出其图形。

(b) 求整个系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

(c) 当输入为 $x(t) = \sin 2\Omega_c t + \cos \frac{1}{2}\Omega_c t$ 时, 求系统输出 $y(t)$ 。

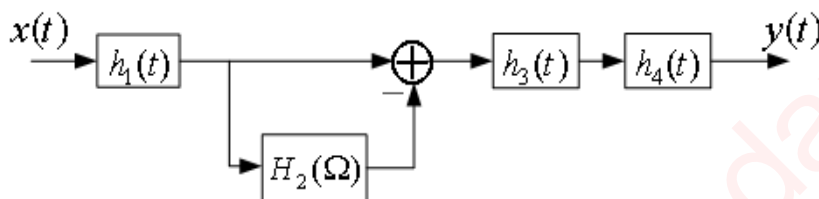


图 P4.19

解: (a) $\because h_1(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin \Omega_c t}{2\pi t} \right]; \quad \frac{\sin \Omega_c t}{2\pi t} \leftrightarrow \frac{1}{2} [u(\Omega + \Omega_c) - u(\Omega - \Omega_c)]$

$\therefore H_2(\Omega) = \frac{1}{2} j\Omega, \quad |\Omega| < \Omega_c, \quad \text{如图 PS4.19 所示。}$

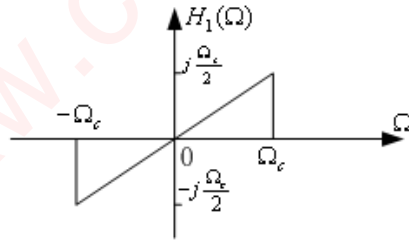


图 PS4.19

(b) $H_3(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < 3\Omega_c \\ 0, & |\Omega| > 3\Omega_c \end{cases}; \quad H_4(\Omega) = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$

$H(\Omega) = H_1(\Omega)(1 - e^{-j2\pi\Omega/\Omega_c})H_3(\Omega)H_4(\Omega)$

而 $H_1(\Omega)H_3(\Omega) = H_1(\Omega)$

$\therefore H_1(\Omega)H_3(\Omega)H_4(\Omega) = H_1(\Omega)H_4(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$

$$h(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \Omega_c t}{\pi t} - \frac{\sin \Omega_c \left(t - \frac{2\pi}{\Omega_c} \right)}{\pi \left(t - \frac{2\pi}{\Omega_c} \right)} \right] = -\frac{\sin \Omega_c t}{\Omega_c t \left(t - \frac{2\pi}{\Omega_c} \right)}$$

(c) $X(\Omega) = \frac{\pi}{j} \left[\delta(\Omega - 2\Omega_c) - \delta(\Omega + 2\Omega_c) \right] + \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\Omega_c}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\Omega_c}{2}\right) \right]$

利用(b)的结果, 由 $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$ 可得

$$Y(\Omega) = -\begin{cases} \frac{\pi}{2} (1 - e^{-j2\pi\Omega/\Omega_c}) \left[\delta\left(\Omega - \frac{\Omega_c}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\Omega_c}{2}\right) \right], & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

也就是: $Y(\Omega) = \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\Omega_c}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\Omega_c}{2}\right) \right]$

$\therefore y(t) = \cos \frac{\Omega_c}{2} t$

4.20 对图 P4.20 所示电路，求出系统的传输函数 $H(\Omega) = U(\Omega)/I(\Omega)$ ，欲使该系统不失真传输信号，试确定 R_1 和 R_2 。

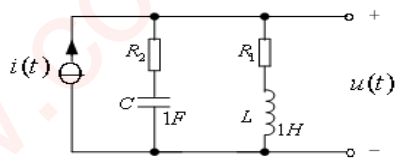


图 P4.20

解:
$$R_{\text{并}} = \frac{\left(R_2 + \frac{1}{j}\right)(R_1 + j)}{\left(R_2 + \frac{1}{j} + R_1 + j\right)}$$

$$\therefore u(t) = i(t) \cdot R_{\text{并}}$$

$$\therefore H(\Omega) = \frac{U(\Omega)}{I(\Omega)} = R_{\text{并}} = \frac{\left(R_2 + \frac{1}{j}\right)(R_1 + j)}{\left(R_2 + \frac{1}{j} + R_1 + j\right)}$$

4.21 (1) 已知 $x(t)$ 的频谱为 $X(\Omega)$ ， $p(t)$ 是一个周期信号，其傅里叶级数表示式为

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

其中， Ω_0 为基波频率。如果 $y(t) = x(t)p(t)$ ，试问 $y(t)$ 的傅里叶变换是什么？

(2) 如果 $X(\Omega)$ 如图 P4.21(a)所示，对下列 $p(t)$ 画出 $y(t) = x(t)p(t)$ 的频谱。

(a) $p(t) = \cos t$

(b) $p(t) = \cos \frac{t}{2}$

(c) $p(t) = \cos 2t$

(d) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \pi n)$

(e) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4\pi n)$

(f) $p(t)$ 如图 P4.21(b)所示。

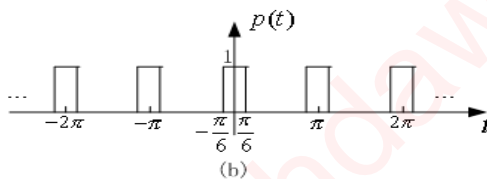
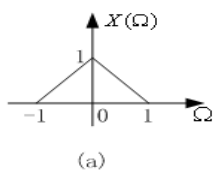


图 P4.21

解: (1) $p(t) \leftrightarrow P(\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(\Omega - n\Omega_0)$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega) = X(\Omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(\Omega - n\Omega_0)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X(\Omega - n\Omega_0)$$

(2) (a) $P(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - 1) + \delta(\Omega + 1)]$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2}[X(\Omega - 1) + X(\Omega + 1)], \text{ 如图 PS4.21(a)所示。}$$

(b) $P(\Omega) = \pi\left[\delta\left(\Omega - \frac{1}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{1}{2}\right)\right]$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2}\left[X\left(\Omega - \frac{1}{2}\right) + X\left(\Omega + \frac{1}{2}\right)\right], \text{ 如图 PS4.21(b)所示。}$$

(c) $P(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - 2) + \delta(\Omega + 2)]$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2}[X(\Omega - 2) + X(\Omega + 2)], \text{ 如图 PS4.21(c)所示。}$$

(d) $P(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n)$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - n), \text{ 如图 PS4.21(d)所示。}$$

(e) $P(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{n}{2}\right)$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - \frac{n}{2}\right), \text{ 如图 PS4.21(e)所示。}$$

(f) $P(\Omega) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n} \delta(\Omega - 2n)$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n} X(\Omega - 2n) = \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n\pi/3} X(\Omega - 2n), \text{ 如图}$$

PS4.21(f)所示。

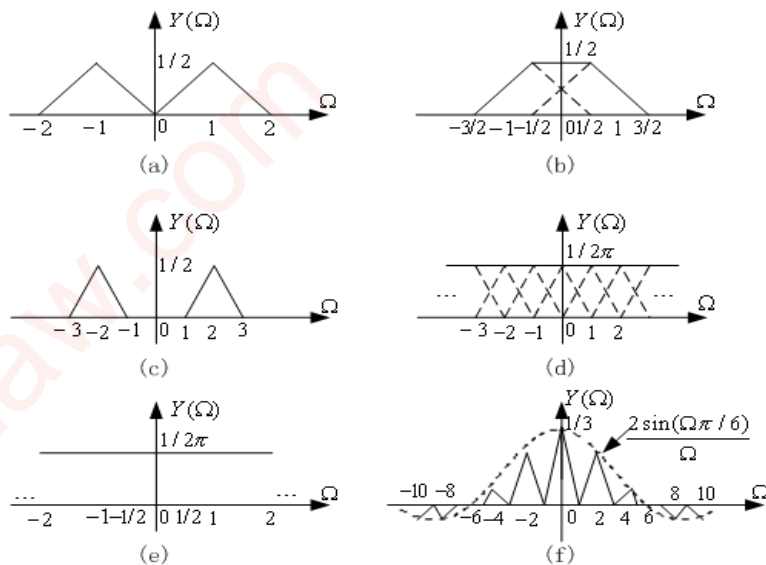


图 PS4.21

4.22 (a) 如果单位冲激响应为 $h(t)$ 和 $g(t)$ 的两个 LTI 系统是彼此互逆的，它们的频率响应

分别为 $H(\Omega)$ 和 $G(\Omega)$ ，试问 $H(\Omega)$ 与 $G(\Omega)$ 之间有什么关系。

(b) 逆系统被广泛用于干扰抵消。假定一个有回声的大厅，将其声学结构作为一个 LTI 系统来建立其模型。该系统的单位冲激响应由一系列冲激组成，其中第 k 个冲激表示第 k 次反射。在此情况下，单位冲激响应表示为

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-kT} \delta(t - kT)$$

其中 e^{-kT} 表示第 k 次反射时的阻尼。为了获得高质量的音响效果，必须对检测到的声音进行处理，借以消除回波的干扰。假定 $G(\Omega)$ 代表 LTI 系统的频率响应，

该系统被用来处理检测到的音响信号，试确定 $G(\Omega)$ ，使得回波干扰能完全消除。

(c) 一个最初松弛且由下列微分方程描述的 LTI 系统

$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = x''(t) + 3x'(t) + 2x(t)$$

该系统的逆系统也是最初松弛的，求出描述该逆系统的微分方程。并求出原系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和逆系统的单位冲激响应 $g(t)$ 。

解： (a) 若 $h(t)$ 和 $g(t)$ 互逆，则有 $h(t) * g(t) = \delta(t)$

$$\therefore H(\Omega)G(\Omega) = 1, \quad H(\Omega) = 1/G(\Omega)$$

$$(b) H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-kT} e^{-j\Omega T} = \frac{1}{1 - e^{-(1+j\Omega)T}}$$

$$G(\Omega) = \frac{1}{H(\Omega)} = 1 - e^{-(1+j\Omega)T}$$

(c) 两边傅里叶变换

$$-\Omega^2 Y(\Omega) + 6j\Omega Y(\Omega) + 9Y(\Omega) = -\Omega^2 X(\Omega) + 3j\Omega X(\Omega) + 2X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{-\Omega^2 + 3j\Omega + 2}{-\Omega^2 + 6j\Omega + 9} = \frac{(\Omega - 2j)(\Omega - j)}{(\Omega - 3j)^2} = 1 - \frac{3}{3 + j\Omega} + \frac{2}{(3 + j\Omega)^2}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{H(\Omega)} = \frac{-\Omega^2 + 6j\Omega + 9}{-\Omega^2 + 3j\Omega + 2} = \frac{(\Omega - 3j)^2}{(\Omega - 2j)(\Omega - j)} = 1 - \frac{1}{2 + j\Omega} + \frac{4}{1 + j\Omega}$$

$$h(t) = \delta(t) - 3e^{-3t}u(t) + 2te^{-3t}u(t)$$

$$g(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t) + 4e^{-t}u(t)$$

$$\text{逆微分方程: } \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 6 \frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$$

4.23 (a) 某连续时间 LTI 系统的频率响应为

$$H(\Omega) = \frac{a - j\Omega}{a + j\Omega}$$

其中, $a > 0$, 求出 $|H(\Omega)|$ 和相位 $\theta(\Omega)$, 并求出系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。这样的系统称为全通系统。

(b) 如果对(a)中所给的系统输入信号为

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0$$

当 $b \neq a$ 时, 输出 $y(t)$ 是什么? 当 $b = a$ 时, $y(t)$ 又是什么?

比较 $y(t)$ 与 $x(t)$, 即可看出尽管系统对输入信号的各个频率分量在幅度上一视同仁,

但由于系统相位特性的非线性, 致使不同频率的分量产生不同的时延, 从而导致输出信号发生了失真。这种失真即是所谓的相位失真。

$$\text{解: (a) } |H(\Omega)| = [H(\Omega)H^*(\Omega)]^{1/2} = \left[\frac{(a - j\Omega)(a + j\Omega)}{(a + j\Omega)(a - j\Omega)} \right]^{1/2} = 1$$

$$\angle H(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{\Omega}{a} - \tan^{-1} \frac{\Omega}{a} = -2 \tan^{-1} \frac{\Omega}{a}$$

$$H(\Omega) = \frac{a - j\Omega}{a + j\Omega} = -1 + \frac{2a}{a + j\Omega}, \quad \therefore h(t) = -\delta(t) + 2ae^{-at}u(t)$$

(b) $X(\Omega) = \frac{1}{b + j\Omega}$; 当 $b \neq a$ 时有

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{a - j\Omega}{(a + j\Omega)(b + j\Omega)} = \frac{2a/(b-a)}{a + j\Omega} + \frac{(a+b)/(a-b)}{b + j\Omega}$$

$$\therefore y(t) = \frac{2a}{b-a} e^{-at} u(t) + \frac{a+b}{a-b} e^{-bt} u(t)$$

当 $b = a$ 时, $Y(\Omega) = \frac{a - j\Omega}{(a + j\Omega)^2} = -\frac{1}{a + j\Omega} + \frac{2a}{(a + j\Omega)^2}$

$$\therefore y(t) = 2ate^{-at} u(t) - e^{-at} u(t)$$

4.24 某 LTI 系统对输入信号

$$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

的响应为

$$y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t)$$

- 求该系统的频率响应。
- 求该系统的单位冲激响应。
- 写出描述系统的微分方程, 并用直接 II 型结构实现该系统。

解: (a) $X(\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega} + \frac{1}{3 + j\Omega} = \frac{4 + 2j\Omega}{(j\Omega)^2 + 4j\Omega + 3}$

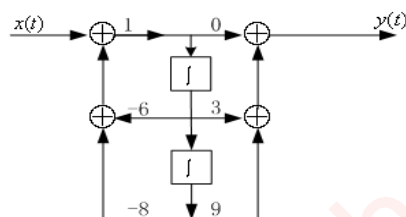
$$Y(\Omega) = \frac{2}{1 + j\Omega} - \frac{2}{4 + j\Omega} = \frac{6}{(j\Omega)^2 + 5j\Omega + 4}$$

$$\therefore H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{3(j\Omega + 3)}{(j\Omega + 2)(j\Omega + 4)} = \frac{3/2}{j\Omega + 2} + \frac{3/2}{j\Omega + 4}$$

(b) $h(t) = \frac{3}{2} [e^{-2t} + e^{-4t}] u(t)$

(c) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$

其直接 II 型结构如图 PS4.24 所示。



图PS4.24

4.25 某因果 LTI 系统由下列微分方程描述

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

(a) 确定该系统的频率响应 $H(\Omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。

(b) 如果 $x(t) = e^{-t}u(t)$ ，求系统的输出响应 $y(t)$ 。

(c) 如果输入 $x(t)$ 的傅里叶变换分别为：

$$X(\Omega) = \frac{1+j\Omega}{2+j\Omega}; \quad X(\Omega) = \frac{3+j\Omega}{1+j\Omega}; \quad X(\Omega) = \frac{1}{(1+j\Omega)(2+j\Omega)}$$

重新求系统的输出响应 $y(t)$ 。

解： (a) $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{2+j\Omega}$

$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

(b) $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega} \cdot \frac{1}{2+j\Omega} = 2 \left(\frac{1}{1+j\Omega} - \frac{1}{2+j\Omega} \right)$

$$y(t) = 2e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

(c) $X(\Omega) = \frac{1+j\Omega}{2+j\Omega}$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1+j\Omega}{2+j\Omega} \cdot \frac{1}{2+j\Omega} = \frac{1}{(2+j\Omega)^2} + \frac{j\Omega}{(2+j\Omega)^2}$$

$$y(t) = e^{-2t}u(t) - te^{-2t}u(t)$$

$$X(\Omega) = \frac{3+j\Omega}{1+j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{3+j\Omega}{1+j\Omega} \cdot \frac{1}{2+j\Omega} = \frac{2}{1+j\Omega} - \frac{1}{2+j\Omega}$$

$$y(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1+j\Omega)(2+j\Omega)}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(1+j\Omega)(2+j\Omega)} \cdot \frac{1}{2+j\Omega}$$

$$= \frac{1}{1+j\Omega} - \frac{1}{2+j\Omega} - \frac{1}{(2+j\Omega)^2}$$

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) - te^{-2t}u(t)$$

4.26 如果连续时间 LTI 系统的冲激响应 $h(t)$ 是实、因果函数，其频率响应 $H(\Omega)$ 可以完全由它的实部来确定；如果 $h(t)$ 是实因果函数，且在 $t=0$ 不包含奇异函数，那么 $H(\Omega)$ 也可以由它的虚部完全确定。本体研究的就是这一特性。

(a) 考查 $h(t)$ 的偶部 $h_e(t)$ ，指出如何由 $h_e(t)$ 得到 $h(t)$ ，进而证明 $H(\Omega)$ 可以完全由它的实部来确定。

(b) 如果因果系统的频率响应的实部为 $\cos \Omega$ ，试确定 $h(t)$ ，并进而确定 $H(\Omega)$ 。

(c) 如果 $h(t)$ 在 $t=0$ 不包含任何奇异函数，由于 $h(t)$ 是因果的，除了 $t=0$ 以外，

$$\text{有} \quad h(t) = h(t)u(t)$$

且上式两边的傅里叶变换必然恒等，根据傅里叶变换的调制特性，证明：

$$H(\Omega) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\eta)}{\Omega - \eta} d\eta$$

(d) 利用上式导出用 $H(\Omega)$ 的虚部 $H_I(\Omega)$ 表示实部 $H_R(\Omega)$ 以及用 $H_R(\Omega)$ 表示 $H_I(\Omega)$ 的关系式。

这表明，因果 LTI 系统的冲激响应是实信号时（这正是工程实际中应用的情况），系统频率响应的实部和虚部是互相制约的。从而系统的幅频特性与相频特性也是相互制约的。由 $H_I(\Omega)$ 和 $H_R(\Omega)$ 互相表示的这种约束关系称为希尔伯特（Hilbert）变换。

解：(a) $\because h_e(t) = \frac{1}{2}[h(t) + h(-t)]$ ，且 $h_e(t)$ 为实函数。

$$h_e(t) \leftrightarrow H_e(\Omega) = \frac{1}{2}[H(\Omega) + H(-\Omega)] = \frac{1}{2}[H(\Omega) + H^*(\Omega)] = \text{Re}\{H(\Omega)\}$$

又 $h(t)$ 是因果的， $\therefore h(t) = 2h_e(t)u(t)$ ， $h(0) = h_e(0)$

\therefore 由 $H(\Omega)$ 的实部可完全确定 $h_e(t)$ ；由 $h_e(t)$ 又可完全确定 $h(t)$ 。从而 $H(\Omega)$ 可以完全由它的实部来确定。

$$(b) \because \quad \text{Re}\{H(\Omega)\} = \cos \Omega = \frac{1}{2}(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega})$$

$$\therefore \quad h_e(t) = \frac{1}{2}[\delta(t-1) + \delta(t+1)], \quad h(t) = \delta(t-1), \quad H(\Omega) = e^{j\Omega}$$

(c) $\therefore h_o(t) = \frac{1}{2}[h(t) - h(-t)]$, 当 $h(t)$ 为因果函数时有

$$h(t) = 2h_o(t), t > 0$$

因此, 除了 $t=0$ 一点外, 可以由 $h_o(t)$ 得到 $h(t)$ 。

如果 $h(t)$ 在 $t=0$ 不包含奇异函数, 而且 $h(0) = A$, 则有

$$\int_{0^-}^{0^+} h(t)e^{-j\Omega t} dt = 0 = \int_{0^-}^{0^+} 0e^{-j\Omega t} dt$$

因而 $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\Omega t} dt = H(\Omega)$ 将不会因为 $h(0)$ 为任何有限值而改变。这表明

$H(\Omega)$ 与 $h(0)$ 的值无关。

由 $h_o(t) = \frac{1}{2}[h(t) - h(-t)]$ 可得

$$H_o(\Omega) = \frac{1}{2}[H(\Omega) - H^*(\Omega)] = j\text{Im}\{H(\Omega)\}$$

于是, 由 $\text{Im}\{H(\Omega)\}$ 可以确定 $h_o(t)$ 。再根据 $h(t) = 2h_o(t)u(t)$ (除 $t=0$ 外),

可由 $h(t)$ 求得 $H(\Omega)$ 。因此 $H(\Omega)$ 可以完全由其虚部确定。

$$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} H(\Omega) * \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega) \right] = \frac{1}{2} H(\Omega) + \frac{1}{2\pi j} \left(H(\Omega) * \frac{1}{\Omega} \right) \quad \text{由此得}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{j\pi} \left[H(\Omega) * \frac{1}{\Omega} \right] = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\eta)}{\Omega - \eta} d\eta$$

(d) 令 $H(\Omega) = H_R(\Omega) + jH_I(\Omega)$, 则有

$$jH_R(\Omega) - H_I(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\eta)}{\Omega - \eta} d\eta + j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_I(\eta)}{\Omega - \eta} d\eta$$

$$\therefore H_I(\Omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\eta)}{\Omega - \eta} d\eta, \quad H_R(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_I(\eta)}{\Omega - \eta} d\eta$$

4.27 在图 P4.27 所示系统中 $H(\Omega)$ 是理想低通滤波器, 其截止频率为 Ω_c , 群时延 t_d 为常

数, 试对 $\Omega_c \geq \frac{1}{2}$ 和 $\Omega_c < \frac{1}{2}$ 两种情况求输入为 $x(t) = \frac{2\sin(t/2)}{t}$ 时, 系统的输出响

应 $y(t)$ 。

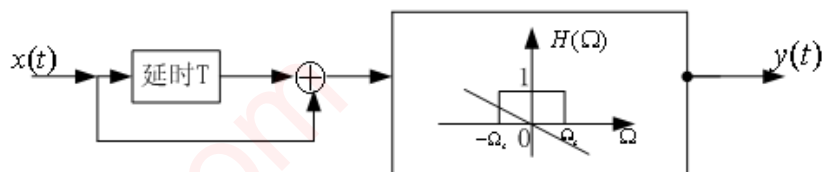


图 P4.27

解: $H'(\Omega) = (1 + e^{-j\Omega T})H(\Omega)$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H'(\Omega)$$

而 $X(\Omega) = \begin{cases} 2\pi, & |\Omega| < \frac{1}{2} \\ 0, & \Omega \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

因此, 当 $\Omega_c \geq \frac{1}{2}$ 时, $Y(\Omega) = \begin{cases} 2\pi(1 + e^{-j\Omega T}), & |\Omega| < \frac{1}{2} \\ 0, & \Omega \geq \frac{1}{2} \end{cases} \therefore y(t) = x(t) + x(t-T)$

当 $\Omega_c < \frac{1}{2}$ 时, $Y(\Omega) = \begin{cases} 2\pi(1 + e^{-j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$

$$\therefore y(t) = \frac{2\sin\Omega_c t}{t} + \frac{2\sin\Omega_c(t-T)}{t-T}$$

4.28 求图 P4.28 所示已调信号的频谱。

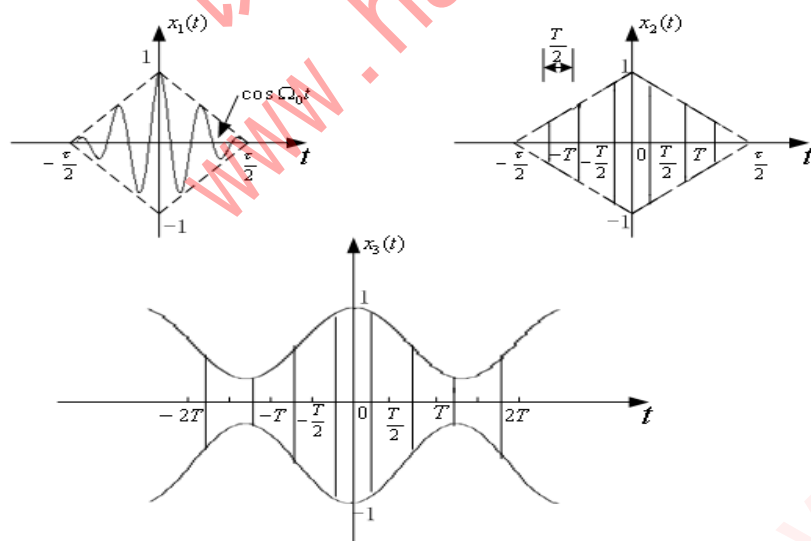


图 P4.28

解: $x_1(t) = x_{10}(t) \cdot \cos\Omega_0 t$, 其中 $x_{10}(t)$ 如图 PS4.28 所示。

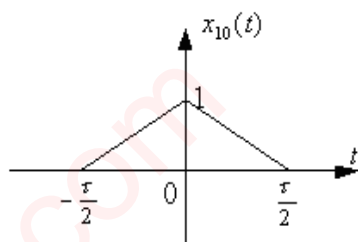


图 PS4.28

$$X_1(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_{10}(\Omega) * \pi [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

$x_2(t)$: 调制周期为 T 的方波, $x_{20}(t)$ 同 $x_{10}(t)$

$x_3(t)$: 调制周期为 T 的方波, $x_{30}(t) = \cos \frac{\pi}{T} t + m$

同 $X_1(\Omega)$, 可计算 $X_2(\Omega)$ 及 $X_3(\Omega)$ 。

4.29 图 P4.29 所示系统中, 已知输入信号的频谱为 $X(\Omega)$, 如图所示。试确定并粗略画出 $y(t)$ 的频谱 $Y(\Omega)$ 。

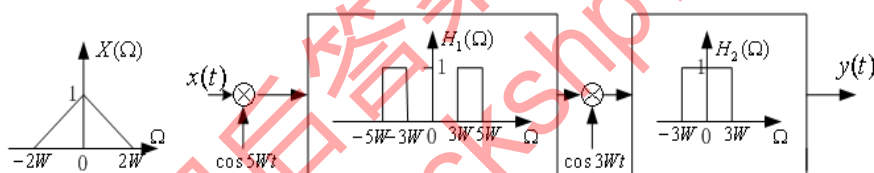
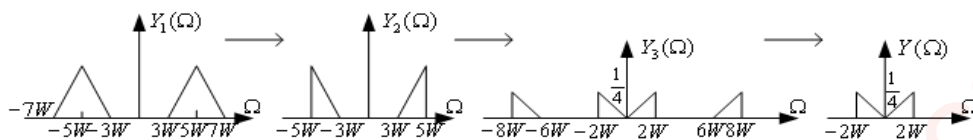


图 P4.29

$$\begin{aligned} \text{解: } Y(\Omega) &= \left\{ X(\Omega) * \frac{1}{2} (\delta(\Omega - 5W) + \delta(\Omega + 5W)) \right\} \cdot H_1(\Omega) \\ &\quad * \frac{1}{2} [\delta(\Omega - 3W) + \delta(\Omega + 3W)] \cdot H_2(\Omega) \\ &= \frac{1}{4} \{ [X(\Omega - 5W) + X(\Omega + 5W)] \cdot H_1(\Omega) \} * [\delta(\Omega - 3W) + \delta(\Omega + 3W)] \cdot H_2(\Omega) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{其中: } Y_1(\Omega) &= \frac{1}{2} [X(\Omega - 5W) + X(\Omega + 5W)] \\ Y_2(\Omega) &= Y_1(\Omega) \cdot H_1(\Omega) \\ Y_3(\Omega) &= Y_2(\Omega) * \frac{1}{2} [\delta(\Omega - 3W) + \delta(\Omega + 3W)] \\ Y(\Omega) &= Y_3(\Omega) \cdot H_2(\Omega) \end{aligned}$$

4.30 在 4.8 节讨论同步解调时, 我们从频谱图直观地说明了调制器和解调器所用的载波应该同频。由于通信系统中调制和解调常常是在相距很远的两地进行的, 因此做到这一点比较困难。本题讨论两个载波不同频但频率同步的情况。假定在 DSB 调制中, 载

波频率为 Ω_c ，解调器的载波频率为 Ω_d ，它们的频率差为 $\Delta\Omega = \Omega_d - \Omega_c$ ，同时假定 $x(t)$ 是带限的，即 $|\Omega| > \Omega_M$ 时， $X(\Omega) = 0$ ；同步解调时理想低通滤波器的截止频率 W 满足下列条件：

$$(\Omega_M + \Delta\Omega) < W < (2\Omega_c + \Delta\Omega - \Omega_M)$$

(a) 证明此时解调器中理想低通滤波器的输出正比于

$$x(t) \cos(\Delta\Omega t)$$

如果 $\Delta\Omega$ 不随时间变化，即 Ω_c 和 Ω_d 是同步的，我们就可以通过二次解调得到 $x(t)$ 。

(b) 如果 $x(t)$ 的频谱如图 P4.30 所示，请绘出同步解调器输出的频谱。

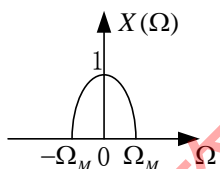


图 P4.30

解： 设解调器输出为 $\hat{x}(t)$

$$w(t) = x(t) \cos \Omega_c t \cos \Omega_d t = \frac{1}{2} x(t) \cos \Delta\Omega t + \frac{1}{2} \cos(\Omega_d + \Omega_c) t$$

$\because x(t)$ 带限于 Ω_M ， \therefore 上式第二项的频谱在频率范围

$$\Omega_d + \Omega_c - \Omega_M \leq \Omega \leq \Omega_d + \Omega_c + \Omega_M$$

即： $2\Omega_c + \Delta\Omega - \Omega_M \leq \Omega \leq 2\Omega_c + \Delta\Omega + \Omega_M$

而 $(\Omega_M + \Delta\Omega) < W < (2\Omega_c + \Delta\Omega - \Omega_M)$ ，因此频谱完全在低通滤波器的通带之外。

但 $\frac{1}{2} x(t) \cos \Delta\Omega t$ 的频谱位于 $\Delta\Omega - \Omega_M \leq \Omega \leq \Delta\Omega + \Omega_M$ 范围内，因此完全在低通滤波器通带中，由此可得

$$\hat{x}(t) = x(t) \cos \Delta\Omega t$$

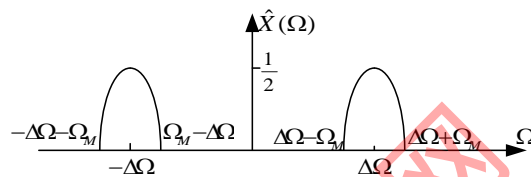
这就证明了：解调器的输出正比于 $x(t) \cos \Delta\Omega t$ 。

二次解调有

$$\begin{aligned}
& [x(t) \cos \Delta \Omega t] \cdot [\cos \Omega_c t \cos \Omega_d t] \\
&= x(t) \cos \Delta \Omega t \cdot \frac{1}{2} [\cos \Delta \Omega t + \cos (\Omega_c + \Omega_d) t] \\
&= \frac{1}{2} x(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \Delta \Omega t \right] + \frac{1}{2} x(t) \left[\frac{1}{2} \cos (\Delta \Omega + \Omega_c + \Omega_d) + \frac{1}{2} (\Omega_c + \Omega_d - \Delta \Omega) \right] \\
&= \frac{1}{4} x(t) [1 + \cos 2 \Delta \Omega t] + \frac{1}{4} x(t) [\cos 2 \Omega_d t + \cos 2 \Omega_c t] \\
&= \frac{1}{4} x(t) + \frac{1}{4} x(t) \cos 2 \Delta \Omega t + \frac{1}{4} x(t) \cos 2 \Omega_d t + \frac{1}{4} x(t) \cos 2 \Omega_c t
\end{aligned}$$

因此，可以得到 $\frac{1}{4} x(t)$ ，即得到 $x(t)$ 。

(b) 如图 PS4.30 所示。



图PS4.30

- 4.31 在讨论幅度调制时，调制和解调都是由乘法器完成的，但在工程实际中，由于乘法器往往难以实现，所以很多实际系统中都采用非线性器件。图 P4.31 给出了这样一个幅度调制系统。假定 $x(t)$ 是带限的，当 $|\Omega| > \Omega_M$ 时， $X(\Omega) = 0$ ，试确定带通滤波器的参量 A, Ω_l 和 Ω_h ，使得 $y(t) = x(t) \cos \Omega_0 t$ ，并给出 Ω_0 和 Ω_h 的必要约束条件。

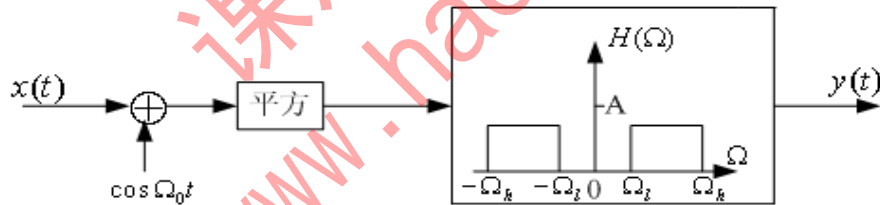


图 P4.31

解： $\because [x(t) + \cos \Omega_0 t]^2 = x^2(t) + 2x(t) \cos \Omega_0 t + \cos^2 \Omega_0 t$

\therefore 为了使 $y(t) = x(t) \cos \Omega_0 t$ ，就必须使带通滤波器滤除 $x^2(t) + \cos^2 \Omega_0 t$ ，且要求参

量 $A = \frac{1}{2}$

$\because x(t)$ 带限于 Ω_M ， $x^2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * X(\Omega)$

$\therefore x^2(t)$ 带限于 $2\Omega_M$ 。

而 $\cos^2 \Omega_0 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Omega_0 t)$ ，其频谱位于 $\Omega = 0$ 和 $\Omega = \pm 2\Omega_0$ 处； $x(t) \cos \Omega_0 t$ 的

频谱位于 $\Omega_0 - \Omega_M < \Omega < \Omega_0 + \Omega_M$ 范围内，因此，带通滤波器应满足如下要求：

$$2\Omega_M < \Omega_l < \Omega_0 - \Omega_M, \quad \Omega_0 + \Omega_M < \Omega_h < 2\Omega_0$$

欲使这两个条件都满足，对 Ω_0 和 Ω_M 应有如下约束：

$$\Omega_M < \Omega_0/3$$

4.32 图 P4.32 所示的调制解调系统中，解调器所用的载波是一个方波信号，它与调制器的载波具有相同的零点，如图所示。 $x(t)$ 是带限信号，其最高频率 $\Omega_M < \Omega_0$ ，频谱的实部和虚部如图所示。

- (a) 分别画出 $z(t)$, $p(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换 $Z(\Omega)$, $P(\Omega)$ 和 $Y(\Omega)$ 的实部与虚部，并加以标注。
- (b) 画出使 $\hat{x}(t) = x(t)$ 的滤波器的 $H(\Omega)$ ，并加以标注。

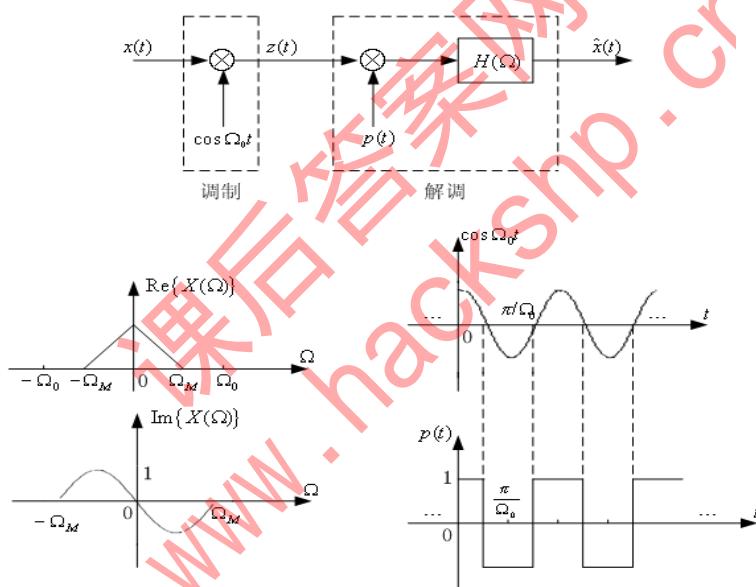


图 P4.32

解： (a) 由图 P4.32 可得： $Z(\Omega) = \frac{1}{2} X(\Omega - \Omega_0) + \frac{1}{2} X(\Omega + \Omega_0)$ 如图 PS4.32-1 所示。

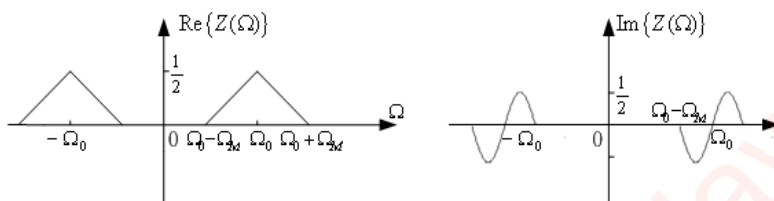


图 PS4.32-1

由图 P4.32 可求得 $p(t)$ 的傅里叶级数系数为

$$a_k = \frac{4 \sin \frac{\pi}{2} k}{2\pi k}, \quad (k \neq 0); \quad a_0 = 0$$

$$\therefore p(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin \frac{\pi}{2} k}{k} \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (k \neq 0)$$

如图 PS4.32-2 所示。

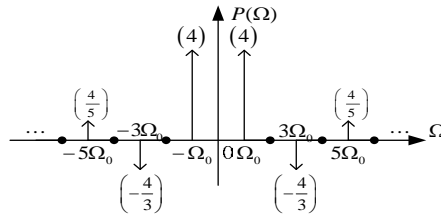


图 PS4.32-2

$$\therefore Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} Z(\Omega) * P(\Omega)$$

$$\therefore \operatorname{Re}\{Y(\Omega)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} Z(\Omega) * P(\Omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\{Z(\Omega)\} * P(\Omega)$$

$$\operatorname{Im}\{Y(\Omega)\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi} Z(\Omega) * P(\Omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}\{Z(\Omega)\} * P(\Omega)$$

如图 PS4.32-3 所示。

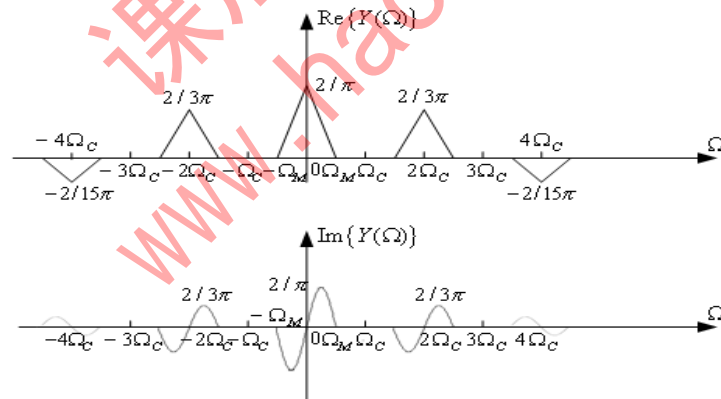


图 PS4.32-3

(b) 由 $Y(\Omega)$ 可以得出：使 $\hat{x}(t) = x(t)$ 的滤波器的 $H(\Omega)$ 应如图 PS4.32-4 所示。

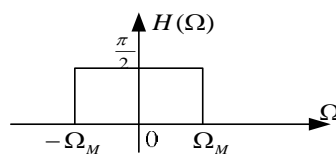


图 PS4.32-4

4.33 在 DSB 调制中, 已调信号的带宽是原始信号带宽的两倍, 我们把高于载频的部分称为上边带, 低于载频的部分称为下边带。由于上下边带是以载频对称的, 这在频带利用上是不经济的。为了更充分地利用频带, 在通信中还采用单边带调制(SSB)技术。图 P4.33 给出了利用移相法产生单边带信号的系统。

(a) 绘出图中 $x_p(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ 的频谱示意图。

(b) 绘出 $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ 的频谱, 说明此时 $y(t)$ 是只保留了下边带的信号; 如

果 $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$, 则 $y(t)$ 只保留了上边带。

(c) 从频域分析单边带信号如何同步解调, 绘出解调系统及相关的频谱图。

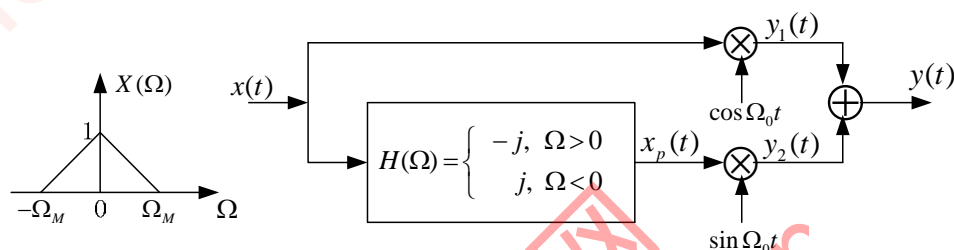


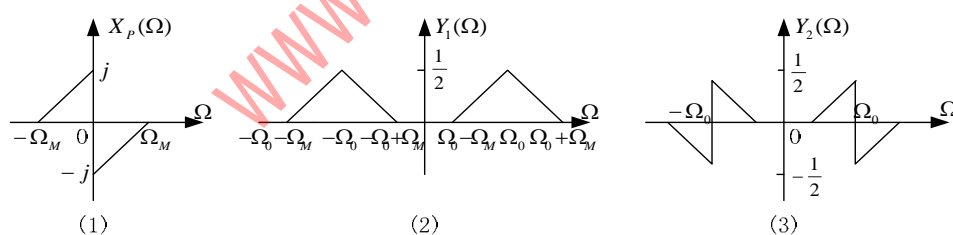
图 P4.33

解: (a) $X_p(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$

$$Y_1(\Omega) = \frac{1}{2} [X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)];$$

$$Y_2(\Omega) = \frac{1}{2j} [X_p(\Omega - \Omega_0) - X_p(\Omega + \Omega_0)]$$

各频谱分别如图 PS4.33(a)-(1)、(2)、(3)所示。

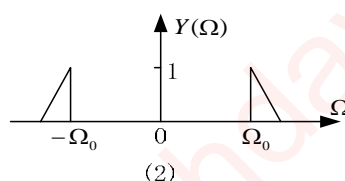
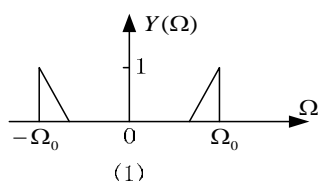


图PS4. 33(a)

(b) 如图 PS4.33(b)-(1)、(2)所示。

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

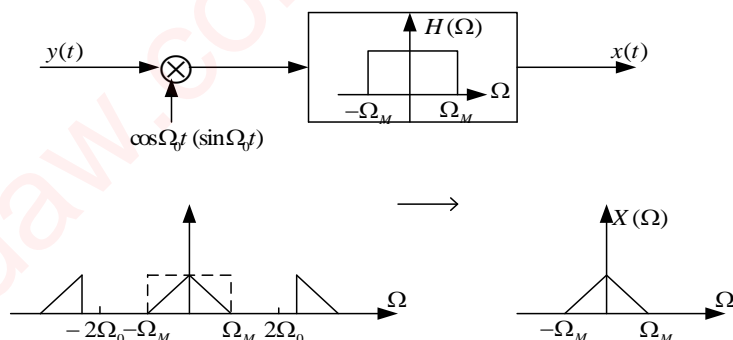
$$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$



图PS4. 33(b)

(c)

单边带信号 $[y(t) \times \cos \Omega_0] * h(t)$



图PS4.33 (c)

4.34 一个 AM 调幅波为

$$x(t) = (1 + 0.3 \cos \Omega_1 t + 0.1 \cos \Omega_2 t) \sin \Omega_0 t$$

其中: $\Omega_1 = 2\pi \times 5 \times 10^3 \text{ rad/s}$; $\Omega_2 = 2\pi \times 3 \times 10^3 \text{ rad/s}$;

$\Omega_0 = 2\pi \times 45 \times 10^6 \text{ rad/s}$; $A = 100V$ 。求:

- 该调幅波的幅度调制指数 m 。
- 如果我们对调制信号的各个谐波分量分别定义调制指数, 并将其称为部分调幅指数, 试求该调幅波的部分调幅指数。
- 绘出调制信号与已调信号的频谱图。此调幅波的带宽是多少?

解: (a) $m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{1.4 - 0.6}{1.4 + 0.6} = \frac{0.8}{2} = 0.4$

(b) $m_1 = \frac{1.3 - 0.7}{1.3 + 0.7} = 0.3$; $m_2 = \frac{1.1 - 0.9}{1.1 + 0.9} = 0.1$

(c) 频谱图如图 PS4.34 所示。带宽 $= 2\Omega_0 + 2\Omega_1$

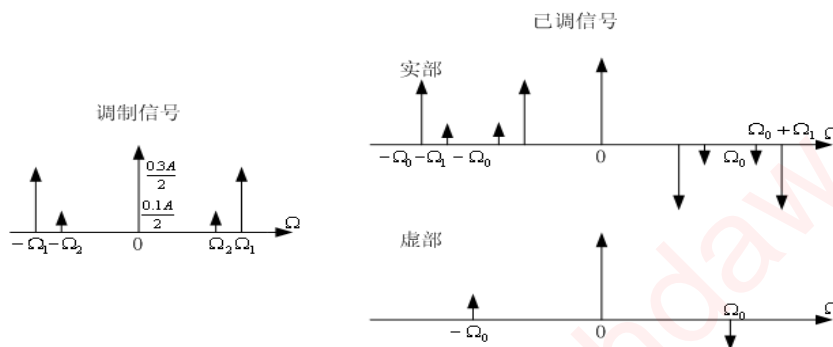


图 PS4.34

4.35 图 P4.35 是一个脉冲幅度调制 (PAM) 系统, 该系统的输出 $r(t)$ 是 PAM 信号。

(a) 假定 $x(t)$ 是一个带限于 π/T 的信号, $X(\Omega)$ 如图所示, 试确定图中 $x_p(t)$ 和

$r(t)$ 的频谱。

(b) 求出 Δ 的最大允许值, 使得 $r(t)$ 经过一个适当的滤波器 $M(\Omega)$ 后, 有

$\hat{x}(t) = x(t)$ 。

(c) 这个适当的滤波器的频率响应 $M(\Omega)$ 应该如何确定? 并绘出 $M(\Omega)$ 的示意图。

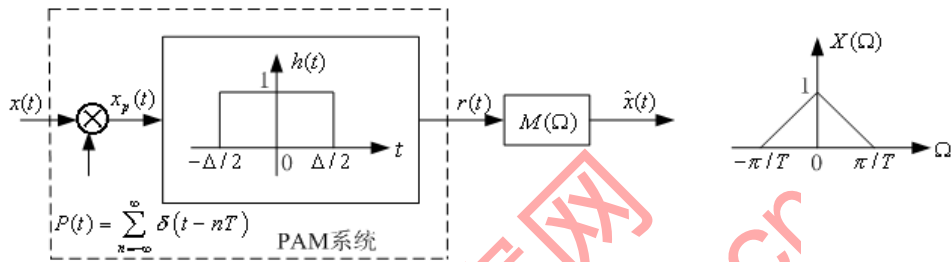


图 P4.35

解: (a) $\because P(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$, $x_p(t) = x(t)p(t)$

$\therefore X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - \frac{T}{2\pi}k\right)$, 如图 PS4.35(a)所示。

$\therefore H(\Omega) = \Delta \frac{\sin\left(\frac{\Omega\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\Delta}{2}}$ 如图 PS4.35(b)所示,

$$R(\Omega) = X_p(\Omega)H(\Omega) = \frac{\Delta}{T} \frac{\sin\left(\frac{\Omega\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\Delta}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

当 $\Delta = T$ 时, $R(\Omega)$ 如图 PS4.35(c)所示。

(b) 欲使 $r(t)$ 经过一个适当的滤波器后能恢复成 $x(t)$, 就必须保证在 $|\Omega| \leq \frac{\pi}{T}$ 范围内

有 $R(\Omega) = \frac{1}{T} X(\Omega)H(\Omega)$ 。因此, 可以看出必须有 $\frac{2\pi}{\Delta} \geq \frac{\pi}{T}$, 即 $\Delta \leq 2T$, 从

而有 $\Delta_{\max} = 2T$ 。

(c) 为了使 $\hat{x}(t) = x(t)$ ，必须有 $R(\Omega)M(\Omega) = X(\Omega)$ ，于是得 $M(\Omega) = \frac{T}{H(\Omega)}$

$|\Omega| \leq \frac{\pi}{T}$ 时，而在 $|\Omega| > \frac{\pi}{T}$ 时应有 $M(\Omega) = 0$ ，如图 PS4.35(d) 所示。

$$M(\Omega) = \begin{cases} \frac{T\Omega}{2 \sin \frac{\Omega\Delta}{2}}, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

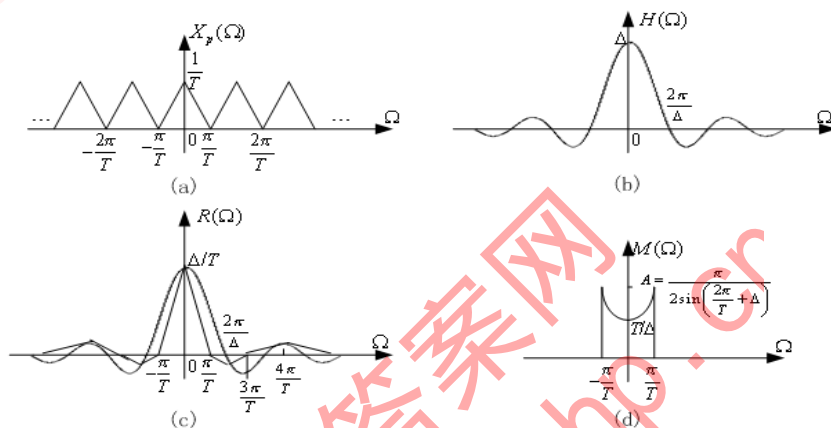


图 PS4.35

4.36 已知信号 $x_1(t)$ 带限于 Ω_1 ， $x_2(t)$ 带限于 Ω_2 ， $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 相乘之后被理想抽样。

试确定允许的最大抽样间隔 T ，使抽样后的信号能够通过理想低通滤波器不失真地恢复成原始信号。

解： $x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$ 频带范围为 $[-(\Omega_1 + \Omega_2), (\Omega_1 + \Omega_2)]$

若不失真恢复，则 $\frac{2\pi}{T} \geq 2(\Omega_1 + \Omega_2)$ 即 $T \leq \frac{\pi}{\Omega_1 + \Omega_2}$

4.37 如果信号 $x_1(t)$ 的最高频率为 500Hz， $x_2(t)$ 的最高频率为 1500Hz，下列信号是由 $x_1(t)$

和 $x_2(t)$ 构成的，试确定对每一个信号进行理想抽样时，所允许的最大抽样间隔 T 。

(a) $f_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$

(b) $f_2(t) = x_1(t) * x_2(t)$

(c) $f_3(t) = x_1(t/2)$

(d) $f_4(t) = x_2(3t)$

(e) $f_5(t) = x_1(t-5)$

(f) $f_6(t) = x_1(t)x_2(t/3)$

解： (a) $|f| \leq 1500$ $\frac{2\pi}{T} \geq 3000$ $T \leq \frac{2\pi}{3000} = \frac{\pi}{1500}$

- (b) $|f| \leq 500 \quad \frac{2\pi}{T} \geq 1000 \quad T \leq \frac{\pi}{500}$
- (c) $|f| \leq 250 \quad \frac{2\pi}{T} \geq 500 \quad T \leq \frac{\pi}{250}$
- (d) $|f| \leq 4500 \quad \frac{2\pi}{T} \geq 9000 \quad T \leq \frac{\pi}{4500}$
- (e) $|f| \leq 500 \quad \frac{2\pi}{T} \geq 1000 \quad T \leq \frac{\pi}{500}$
- (f) $|f| \leq (500 + 4500) \quad \frac{2\pi}{T} \geq 10000 \quad T \leq \frac{\pi}{5000}$

4.38 在实际工程中，常常采用零阶保持抽样。它可以等价为图 P4.38 所示的系统，在理想抽样之后经过一个零阶保持系统。

(a) 求出零阶保持系统的单位冲激响应。

(b) 绘出 $x(t)$ 和 $r(t)$ 的波形示意图。

(c) 如果 $x(t)$ 是带限于 Ω_M 的信号，抽样间隔 T 满足抽样定理的要求，为了能从 $r(t)$ 恢复成 $x(t)$ ，应该让 $r(t)$ 通过一个什么样的系统，确定该系统的频率响应并绘出其幅频特性和相频特性的略图。

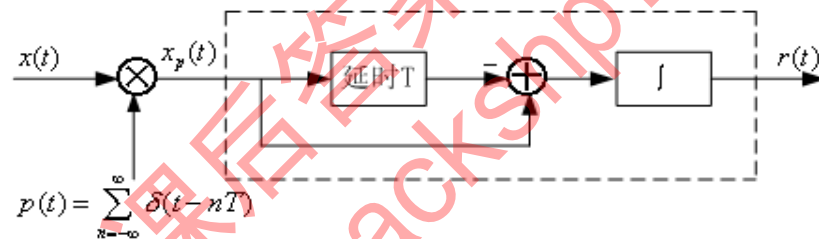


图 P4.38 零阶保持抽样

4.39 设连续时间信号 $x(t)$ 带限于 Ω_M ，现在以 T 为间隔对其理想抽样，然后将各样点用直线连接起来构成折线信号 $\hat{x}(t)$ 。这一过程可以等效为理想抽样后，再经过一个 LTI 系统。试确定该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。该系统称为一阶保持系统。如果要从一阶保持系统的输出 $\hat{x}(t)$ 恢复成 $x(t)$ ，还需要级联一个什么样的系统，确定该系统的频率响应，并绘出略图。

4.40 已知连续时间信号 $x(t)$ 被图 P4.40 所示的窄脉冲串抽样， $x(t)$ 的频谱为 $X(\Omega)$ ， $p(t)$ 的频谱为 $P(\Omega)$ 。

(a) 证明抽样后信号 $x_p(t)$ 的频谱为

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - \frac{2\pi}{T}k) P(\frac{2\pi}{T}k)$$

(b) 为了能够从 $x_p(t)$ 恢复原信号 $x(t)$ ，需要满足哪些条件？

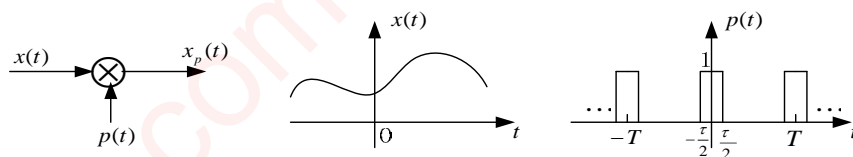


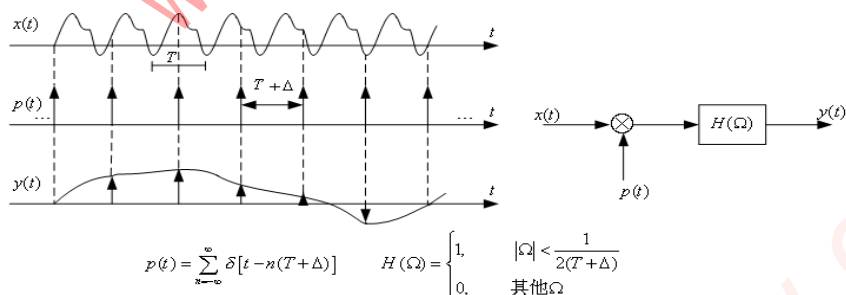
图 P4.40

4.41 根据抽样定理，如果 $x(t)$ 带限于 Ω_M ，抽样频率 $\Omega_s = 2\pi/T$ ，且大于 $2\Omega_M$ ，理想低通滤波器截止频率 $\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2} = \pi/T$ ，通带增益为 T 。那么经过理想低通重建的信号

$x_r(t)$ 将完全等于 $x(t)$ 。如果 Ω_s 不满足上述要求，即欠抽样的情况下，则 $x_r(t)$ 将不等于 $x(t)$ 。但只要有 $\Omega_c = \Omega_s/2$ ，无论抽样间隔等于多少， $x_r(t)$ 和 $x(t)$ 在抽样时刻总是相等的。即 $x_r(kT) = x(kT), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。试证明这一结论。

4.42 在正文中我们提到取样示波器用了欠抽样的效果，本题对这一问题进一步讨论。假定 $x(t)$ 是一个频率很高的带限信号。我们对 $x(t)$ 抽样时，抽样间隔为 $T + \Delta$ ，其中 T 是信号 $x(t)$ 的周期， Δ 是根据 $x(t)$ 的带宽适当选择的间隔增量。如图 P4.42 所示。只要将抽样所得到的冲激串通过一个适当的低通内插滤波器，那么恢复的信号 $y(t)$ 将正比于 $x(at)$ ，其中 $a < 1$ 。

若 $x(t) = A + B \cos\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + \theta\right]$ ，求 Δ 的取值范围，使图 P4.42 中的 $y(t)$ 正比于 $x(at)$ ，其中 $a < 1$ ，并用 T 和 Δ 确定 a 的值。



$x(t)$ 周期为 T ，当 $|\Omega| > W$ 时， $X(\Omega) = 0$

图 P4.42

解：由 $X(\Omega) = 2A\pi\delta(\Omega) + b\pi e^{j\theta}\delta(\Omega - \frac{2\pi}{T}) + b\pi e^{-j\theta}\delta(\Omega + \frac{2\pi}{T})$

$P(\Omega) = \frac{2\pi}{T+\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi}{T+\Delta}k)$ 可得 $p(t)x(t)$ 的频谱如图 PS4.42 所示。要使

$y(t)$ 正比于 $x(at)$, $a < 1$, 就必须有

$$\frac{2\pi\Delta}{T(T+\Delta)} \leq \frac{1}{2(T+\Delta)} \quad \text{即} \quad \Delta \leq \frac{T}{4\pi}$$

由 $\frac{2\pi\Delta}{T(T+\Delta)} / a = \frac{2\pi}{T}$ 得 $a = \frac{\Delta}{T+\Delta}$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{T+\Delta} x(at)$$

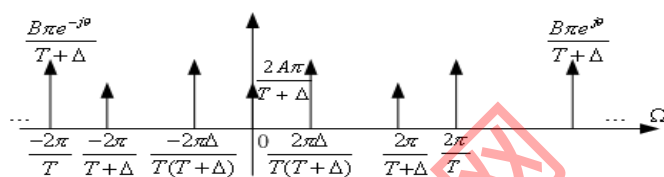


图 PS4.42

- 4.43 只要平均抽样密度为每秒 $2W$ 个样点, 则带限于 W 的信号就可以从非均匀抽样的样本得到恢复。图 P4.43 就是一个非均匀间隔抽样的系统。在图中假定 $x(t)$ 是带限于 W 的信号, 即 $|\Omega| > W$ 时, $X(\Omega) = 0$; $p(t)$ 是如图所示的非均匀间隔的周期性冲激串; $f(t)$ 是周期性波形, 其周期为 $2\pi/T$ 。 $f(0) = a$, $f(\Delta) = b$, $H_1(\Omega)$ 是 90° 相移器,

$$H_1(\Omega) = \begin{cases} j, & \Omega > 0 \\ -j, & \Omega < 0 \end{cases}$$

$H_2(\Omega)$ 是理想低通滤波器

$$H_2(\Omega) = \begin{cases} K, & 0 < \Omega < W \\ K^*, & -W < \Omega < 0 \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$

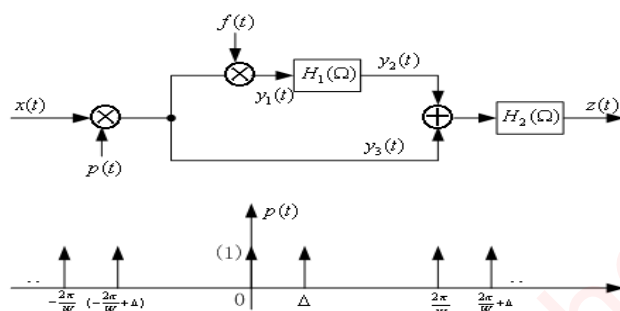


图 P4.43

其中, K 为常数, 也可以是复数。在此条件下就以下各题:

- 求 $p(t)$ 的傅里叶变换 $P(\Omega)$ 。
- 求 $g(t) = p(t)f(t)$ 的傅里叶变换 $G(\Omega)$, 用参数 a, b 表示。
- 在 $0 < \Omega < W$ 区间, 求 $y_1(t) = x(t)p(t)f(t) = x(t)g(t)$ 地频谱 $Y_1(\Omega)$ 。
- 在 $0 < \Omega < W$ 区间, 求 $y_2(t)$ 地频谱 $Y_2(\Omega)$ 。
- 在 $0 < \Omega < W$ 区间, 求 $y_3(t)$ 地频谱 $Y_3(\Omega)$ 。
- 作为 Δ 的函数, 求出实参量 a 和 b 以及复增益 K 的值, 使得对任何带限信号 $x(t)$

和任何 Δ , $0 < \Delta < \frac{\pi}{W}$, 都有 $z(t) = x(t)$ 。

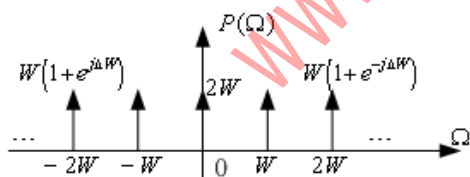
解: (a) 由图 P4.43 可以写出

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\frac{2\pi}{W}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \Delta - n\frac{2\pi}{W}\right)$$

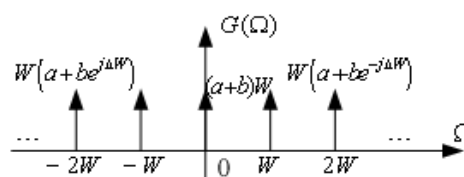
$$\therefore P(\Omega) = (1 + e^{-j\Delta\Omega})W \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - nW) \text{ 如图 PS4.43-1 所示。}$$

$$(b) \text{ 令 } g(t) = p(t)f(t), \text{ 则 } g(t) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\frac{2\pi}{W}\right) + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \Delta - n\frac{2\pi}{W}\right)$$

$$\therefore G(\Omega) = W(a + be^{-j\Delta\Omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - kW) \text{ 如图 PS4.43-2 所示。}$$



图PS4. 43-1



图PS4. 43-2

(c) 由图 P4.43 可得: $y_1(t) = x(t)p(t)f(t) = x(t)g(t)$

$$\therefore Y_1(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * G(\Omega)$$

在区间 $0 < \Omega < W$ 内, 由于 $x(t)$ 带限于 W

$$\text{故 } Y_1(\Omega) = \frac{W}{2\pi} (a + b)X(\Omega) + \frac{W}{2\pi} (a + be^{-j\Delta W})X(\Omega - W)$$

(d) 由图 P4.43 知 $Y_2(\Omega) = Y_1(\Omega)H(\Omega)$

在区间 $0 < \Omega < W$ 内有 $Y_2(\Omega) = jY_1(\Omega)$

(e) 由图 P4.43 知 $y_3(t) = x(t)p(t)$

$$\therefore Y_3(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega)$$

在区间 $0 < \Omega < W$ 内, 由于 $x(t)$ 带限于 W

$$\text{故 } Y_3(\Omega) = \frac{W}{2\pi} [2WX(\Omega) + (1 + e^{-j\Delta W})X(\Omega - W)]$$

(f) $Z(\Omega) = [Y_2(\Omega) + Y_3(\Omega)]H_2(\Omega) = K[Y_2(\Omega) + Y_3(\Omega)], 0 < \Omega < W$

欲使 $0 < \Delta < \pi/W$ 时, $z(t) = x(t)$, 就要求 $K[Y_2(\Omega) + Y_3(\Omega)] = X(\Omega)$

$$\begin{aligned} \text{即: } \frac{W}{2\pi} [2 + j(a+b)]X(\Omega) + \frac{W}{2\pi} [(1 + e^{-j\Delta W}) + j(a + be^{-j\Delta W})]X(\Omega - W) \\ = \frac{1}{K} X(\Omega) \end{aligned}$$

为此必须有 $1 + e^{-j\Delta W} + j(a + be^{-j\Delta W}) = 0$

$$\text{即: } \begin{cases} 1 + \cos \Delta W + b \sin \Delta W = 0 \\ a + b \cos \Delta W - \sin \Delta W = 0 \end{cases} \quad \text{由此可解得}$$

$$\begin{cases} a = \sin \Delta W - b \cos \Delta W = \operatorname{ctg} \Delta W \\ b = -\frac{1 + \cos \Delta W}{\sin \Delta W} \end{cases}$$

$$\therefore K = \frac{\frac{2\pi}{W}}{2 + j(a+b)} = \frac{2\pi}{W} \frac{\sin \Delta W}{2 \sin \Delta W - j}$$

4.44 图 P4.44 所示的 $X(\Omega)$ 由于能量集中在某一频带内, 因而这种信号通常称为带通信

号。如果对 $x(t)$ 进行抽样, 按照抽样定理就应该使抽样频率 $\Omega_s \geq 2\Omega_2$ 。但实际上, 对带通信号可以用低于两倍最高频率的速率抽样, 这就是所谓的带通抽样。假定图示系统中, $\Omega_1 > \Omega_2 - \Omega_1$, 求出 T 的最大值和常数 A, Ω_a, Ω_b 的值, 使得 $\hat{x}(t) = x(t)$ 。

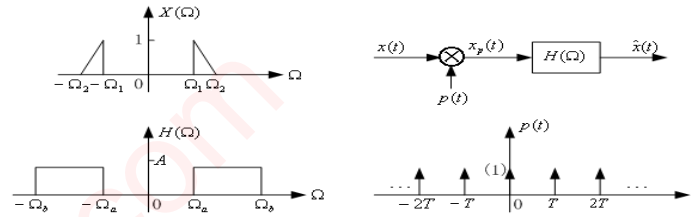


图 P4.44

解：由图 P4.44 知 $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$, $\therefore P(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\frac{2\pi}{T})$

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - n\frac{2\pi}{T})$$

要在低于 $2\Omega_2$ 的抽样频率下使 $\hat{x}(t) = x(t)$, 就必须保证 $X_p(\Omega)$ 在区间 $[\Omega_1, \Omega_2]$ 不发生频谱混迭。

令 $\Omega_2 - \Omega_1 = B$, 当 $\frac{\Omega_1}{B} = k$ 为正整数时, 在以最低频率抽样而不发生频谱混迭的情况下, $X_p(\Omega)$ 如图 PS4.44(a)所示。

此时应有

$$\begin{aligned} k\Omega_s - \Omega_1 &\leq \Omega_1 \\ (k+1)\Omega_s - \Omega_2 &\geq \Omega_2 \end{aligned}$$

即
$$\frac{2\Omega_2}{k+1} \leq \Omega_s \leq \frac{2\Omega_1}{k}$$

$$\therefore \Omega_s = 2B = 2(\Omega_2 - \Omega_1)$$

在这种情况下, 最大抽样间隔为 $T_{\max} = \frac{\pi}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{\pi}{B}$

当 $\frac{\Omega_1}{B}$ 不是整数时, 设 N 是小于 $\frac{\Omega_1}{B}$ 的最大整数, 则有 $\Omega_1 = kB + aB$, 其中

$0 < a < 1$; 此时若仍以 $\Omega_s = 2B$ 抽样, 则 $X(\Omega - k\Omega_s - \Omega_s)$ 与 $X(\Omega)$ 必在 $[\Omega_1, \Omega_2]$

区间混迭, 如图 PS4.44(b)所示。

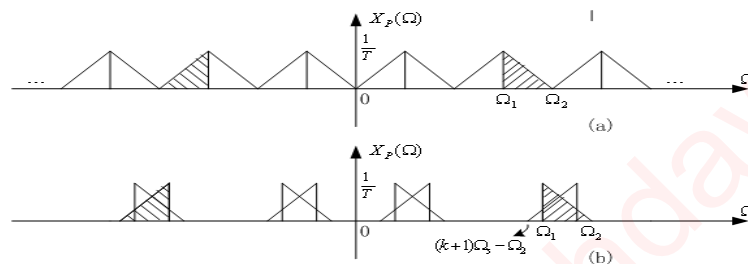


图 PS4.44

为了避免混迭现象，必须调整 Ω_s 使得

$$\begin{aligned} k\Omega_s - \Omega_1 &\leq \Omega_1 \\ (k+1)\Omega_s - \Omega_2 &\geq \Omega_2 \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

由此可得带通信号抽样时，所允许地抽样频率

$$\frac{2\Omega_2}{k+1} \leq \Omega_s \leq \frac{2\Omega_1}{k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

最低抽样频率为 $\Omega_s = \frac{2\Omega_2}{N+1} = 2B(1 + \frac{a}{N+1})$

最大抽样间隔为 $T_{\max} = \frac{\pi}{B(1 + \frac{a}{N+1})} = \frac{\pi(N+1)}{\Omega_2}$

根据图 P4.44, $\hat{X}_o(\Omega) = X_p(\Omega)H(\Omega)$, 为了恢复 $x(t)$ 应有

$$A = T; \Omega_b = \Omega_2; \Omega_a = \Omega_1$$

4.45 图 P4.45 所示的信号 $x(t)$ 是一个时限信号，其时域持续区间为 $(T_0, T_0 + 2T_m)$, $X(\Omega)$

代表它的频谱。如果对 $X(\Omega)$ 进行频域抽样，在频域有 $\tilde{X}_p(\Omega) = X(\Omega)P(\Omega)$, 其中

$$P(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

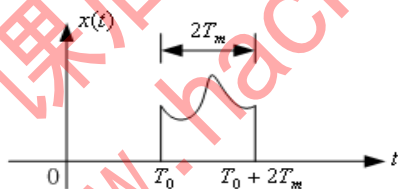


图 P4.45

(a) 如果 $\frac{2\pi}{\Omega_0} > 2T_m$, 粗略画出 $\tilde{X}_p(\Omega)$ 的傅里叶反变换 $\tilde{x}_p(t)$ 。

(b) 在 $\frac{2\pi}{\Omega_0} > 2T_m$ 的情况下，可以通过对加窗口函数恢复出 $x(t)$, 即 $x(t) = \tilde{x}_p(t)w(t)$ 。

试去定并画出 $w(t)$ 。

本题所得到的结论是对 4.10 节所讨论的情况的更一般的推广。

解: (a) $P(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)$

$$\therefore p(t) = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{2\pi}{\Omega_0} k)$$

$$\tilde{x}_p(t) = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - \frac{2\pi}{\Omega_0} k)$$

如图 PS4.45-1 所示。

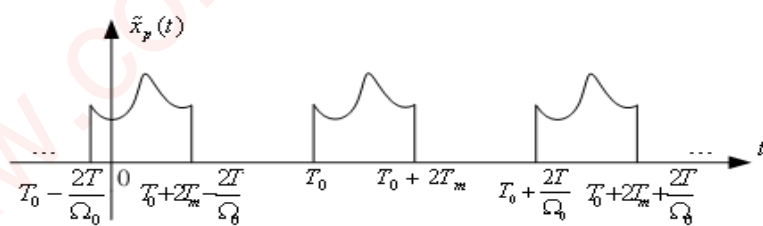


图 PS4.45-1

$$\because \frac{2\pi}{\Omega_0} > 2T_m$$

\therefore 不发生信号混叠。

(b) 用以恢复 $x(t)$ 的时窗为

$$w(t) = \begin{cases} \Omega_0, & T_0 \leq t \leq T_0 + 2T_m \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如图 PS4.45-2 所示。

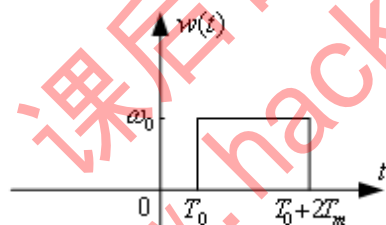


图 PS4.45-2

第五章习题答案

1. 对下面离散时间周期信号，确定其离散时间傅立叶级数的系数 A_k 。

(a) $x(n) = \cos(2\pi n/3) + \sin(2\pi n/7)$

(b) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $-2 \leq n \leq 3$, 且 $x(n)$ 以 6 为周期。

(c) $x(n) = 1 - \sin(\pi n/4)$, $0 \leq n \leq 3$, 且 $x(n)$ 以 4 为周期。

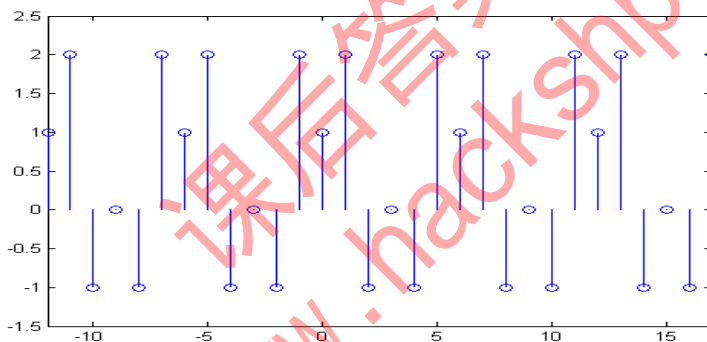
(d) $x(n) = 1 - \sin(\pi n/4)$, $0 \leq n \leq 11$, 且 $x(n)$ 以 12 为周期。

(e) $x(n)$ 如图 P5.1(a)所示。

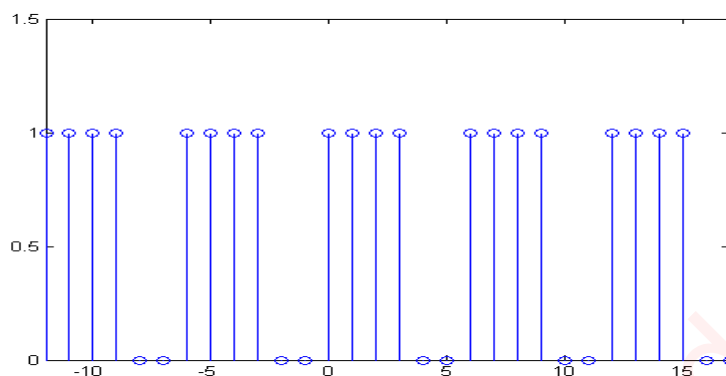
(f) $x(n)$ 如图 P5.1(b)所示。

(g) $x(n)$ 如图 P5.1(c)所示。

(h) $x(n)$ 如图 P5.1(d)所示。



(a)



(b)

$$(c) \quad x[n] = 1 - \sin \frac{\pi n}{4} = 1 - \frac{1}{2j} (e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}), \quad (0 \leq n \leq 3)$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^8 e^{-j\frac{\pi}{2}kn} - \frac{1}{8j} \sum_{n=0}^8 e^{-j\frac{\pi}{2}n(k-\frac{1}{2})} + \frac{1}{8j} \sum_{n=0}^8 e^{-j\frac{\pi}{2}n(k+\frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}k}} - \frac{1}{8j} \cdot \frac{1-e^{-j2\pi(k-\frac{1}{2})}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}(k-\frac{1}{2})}} + \frac{1}{8j} \cdot \frac{1-e^{-j2\pi(k+\frac{1}{2})}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}k}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{2\cos\frac{\pi}{2}k - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{即: } a_0 = 1 - \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2}) = \frac{3 - \sqrt{2}}{4},$$

$$a_k = \frac{1}{4}(-1)^{k+1}(1 + \sqrt{2}\cos\frac{k\pi}{2}), \quad k=1,2,3$$

$$\begin{aligned} (d) \quad a_k &= \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{11} e^{-j\frac{\pi}{6}kn} - \frac{1}{24j} \sum_{n=0}^{11} e^{-j\frac{\pi}{6}n(k-\frac{3}{2})} + \frac{1}{24j} \sum_{n=0}^{11} e^{-j\frac{\pi}{6}n(k+\frac{3}{2})} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{6}k}} - \frac{1}{24j} \cdot \frac{1-e^{-j2\pi(k-\frac{3}{2})}}{1-e^{-j\frac{\pi}{6}(k-\frac{3}{2})}} + \frac{1}{24j} \cdot \frac{1-e^{-j2\pi(k+\frac{3}{2})}}{1-e^{-j\frac{\pi}{6}(k+\frac{3}{2})}} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{6}k}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{2\cos\frac{\pi}{6}k - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{即: } a_0 = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{11 - \sqrt{2}}{12}$$

$$a_k = -\frac{1}{12} \frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\pi}{6}k - \sqrt{2}} = -\frac{1}{12} \frac{\sqrt{2}\cos\frac{k\pi}{6} + 1}{\cos\frac{\pi}{3}k}, \quad 1 \leq k \leq 11$$

$$(e) \quad a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n]e^{-j\frac{\pi}{3}kn} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 e^{-j\frac{\pi}{3}kn} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1-e^{-j4\pi k/3}}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} \sin \frac{2\pi}{3}k}{\sin \frac{\pi}{6}k} \quad 1 \leq k \leq 5; \quad a_0 = \frac{2}{3}$$

$$(f) \quad a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^{n=2} x[n] e^{-j\frac{\pi}{3}kn} = \frac{1}{6} [-e^{j\frac{2\pi}{3}k} + 2e^{j\frac{\pi}{3}k} + 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}k} - e^{-j\frac{2\pi}{3}k}]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{3}k - \frac{1}{3} \cos \frac{2\pi}{3}k, \quad 0 \leq k \leq 5$$

$$(g) \quad a_k = \frac{1}{5} \sum_{n=-2}^2 x[n] e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} = \frac{1}{5} [2e^{-j\frac{4\pi}{5}k} + e^{j\frac{2\pi}{5}k} - e^{-\frac{2\pi}{5}k} - 2e^{j\frac{4\pi}{5}k}]$$

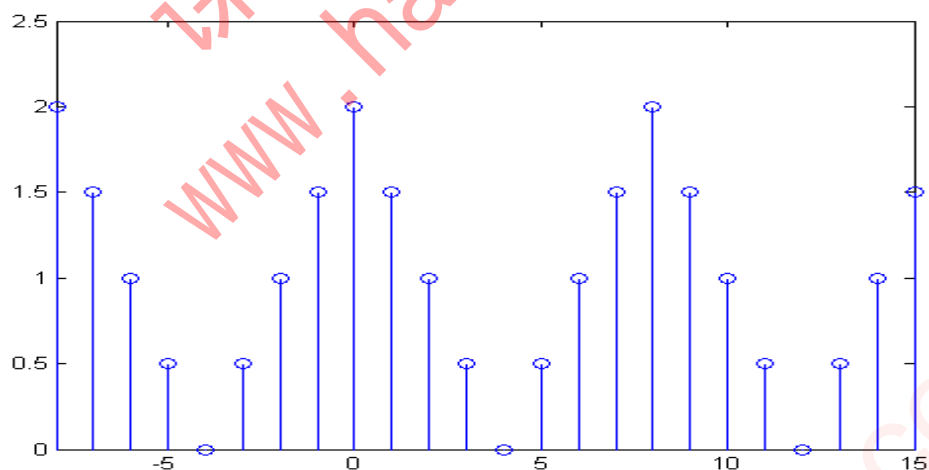
$$= -\frac{2j}{5} (\sin \frac{2\pi}{5}k + 2 \sin \frac{4\pi}{5}k), \quad (0 \leq k \leq 4)$$

$$(h) \quad a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-j\frac{\pi}{3}kn} = \frac{1}{6} (1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + 2e^{-j\frac{\pi}{3}k}), \quad 0 \leq k \leq 5$$

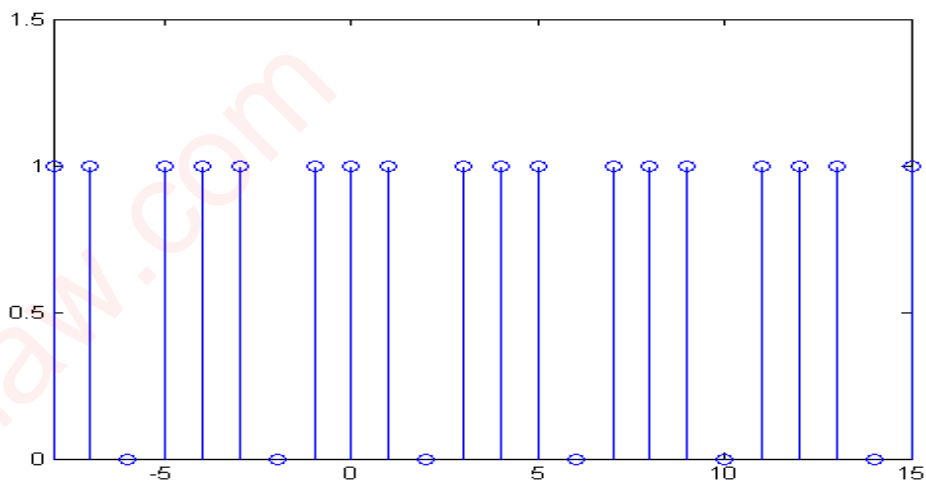
2. 已知周期为 8 的离散时间信号具有如下傅立叶技术系数，试确定信号 $x(n)$ 。

(a) $A_k = \cos(\frac{\pi k}{4}) + \sin(\frac{3\pi k}{4})$ (b) A_k 如图 P5.2(a)所示。

(b) $A_k = \begin{cases} \sin(\frac{\pi k}{3}), & 0 \leq k \leq 6 \\ 0, & k = 7 \end{cases}$ (d) A_k 如图 P5.2(b)所示。



(a)



(b)

解: (a) $a_k = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k} + \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}8k} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}8k}, \quad N=8$

$\therefore x[n] = 4\delta[n-1] + 4\delta[n+1] + 4j\delta[n-3] - 4j\delta[n+4], \quad -3 \leq n \leq 4$

$\bar{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+8r],$ 即为所求周期信号。

(b)

$$a_k = 2\delta[k] + \delta[k+1] + \delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+2] + \frac{1}{2}\delta[k-2] + \frac{1}{4}\delta[k+3] + \frac{1}{4}\delta[k-3]$$

$\therefore x[n] = \sum_{k=-3}^4 a_k e^{j\frac{\pi}{4}kn} = 2 + 2\cos\frac{\pi}{4}n + \cos\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}n, \quad (0 \leq n \leq 7)$

$\bar{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+8r]$ 即为所求周期信号。

(c)

$$a_k = 2\delta[k] + \frac{3}{2}\delta[k+1] + \frac{3}{2}\delta[k-1] + \delta[k+2] + \delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k+3] + \frac{1}{2}\delta[k-3]$$

$\therefore x[n] = \sum_{k=-3}^4 a_k e^{j\frac{\pi}{4}kn} = 2 + 2\cos\frac{\pi}{4}n + \cos\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}n, \quad 0 \leq n \leq 7$

$$\bar{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+8r] \text{ 即为所求周期信号。}$$

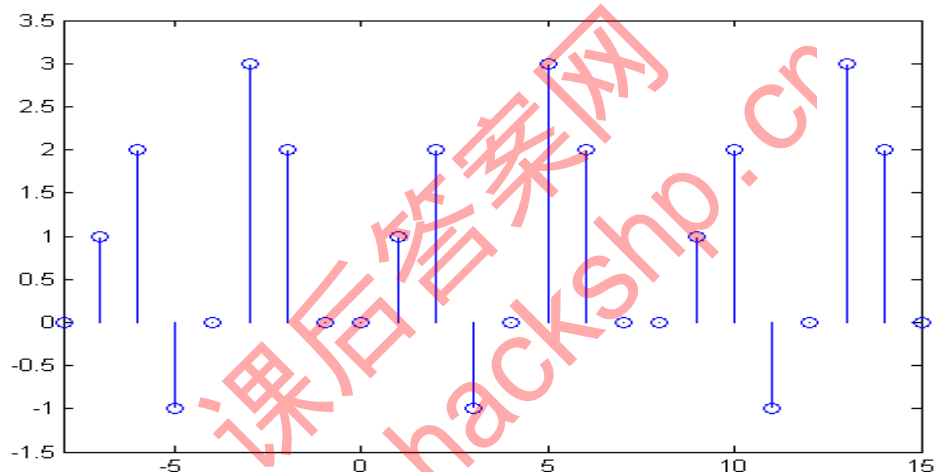
(d)

$$a_k = \delta[k] + \delta[k+1] + \delta[k-1] + \delta[k+3] + \delta[k-3] + \delta[k-4], (-3 \leq k \leq 4)$$

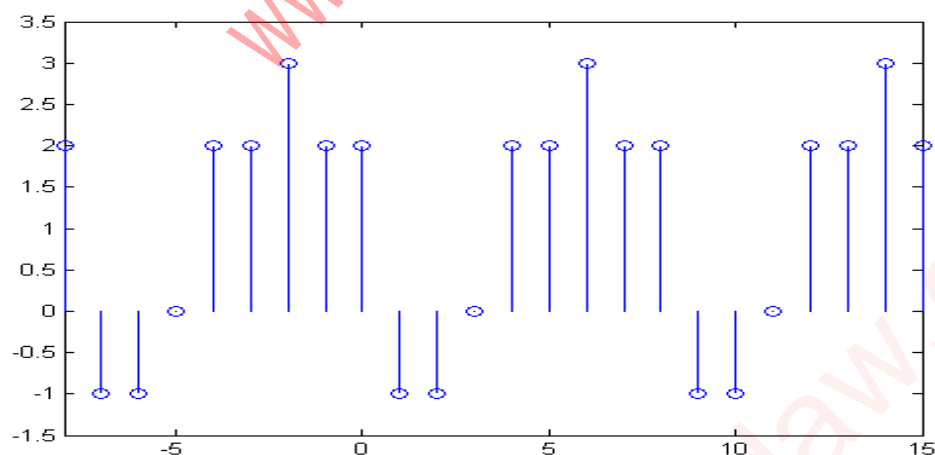
$$\therefore x[n] = \sum_{k=-3}^4 a_k e^{j\frac{\pi}{4}kn} = 1 + 2\cos\frac{\pi}{4}n + (-1)^n + 2\cos\frac{3\pi}{4}n, \quad (0 \leq n \leq 7)$$

$$\bar{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+8r] \text{ 即为所求周期信号。}$$

3. 如图 $x(n)$ 是以 N 为周期的实信号，其傅立叶级数系数为 $A_k = a_k + jb_k$ ，其中 a_k 和 b_k 均为实数。



(a)



(b)

- (a) 证明 $A_k = A_{-k}^*$ 。进而推出 a_k 与 a_{-k} ， b_k 与 b_{-k} 之间的关系。

(b) 证明当 N 为偶数时, $A_{N/2}$ 是实数, $A_{N/2}$ 是实数, $A_{N/2} = a_{N/2}$ 。

(c) 证明 $x(n)$ 能够表示为三角函数形式的傅立叶级数, 即 N 为奇数时

$$x(n) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} [a_k \cos(2\pi kn/N) - b_k \sin(2\pi kn/N)]$$

N 为偶数时

$$x(n) = [a_0 + (-1)^n a_{N/2}] + 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} [a_k \cos(2\pi kn/N) - b_k \sin(2\pi kn/N)]$$

(d) 若 $A_k = A_k e^{j\theta_k}$, 其中 $A_k = |A_k|$, θ_k 是 A_k 的相角, 证明三角函数形式的傅立叶级数

也可以表示为如下形式:

N 为奇数时:

$$x(n) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k \cos(2\pi kn/N + \theta_k)$$

N 为偶数时:

$$x(n) = [a_0 + (-1)^n a_{N/2}] + 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} [A_k \cos(2\pi kn/N + \theta_k)]$$

(e) 如果 P5.3 所示信号 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的三角函数形式傅立叶级数为:

$$x(n) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^8 [a_k \cos(2\pi kn/7) - b_k \sin(2\pi kn/7)]$$

$$y(n) = b_0 + 2 \sum_{k=1}^8 [d_k \cos(2\pi kn/7) - f_k \sin(2\pi kn/7)]$$

试画出 $z(n)$ 的图形

$$z(n) = (a_0 - d_0) + 2 \sum_{k=1}^8 [d_k \cos(2\pi kn/7) + (f_k - b_k) \sin(2\pi kn/7)]$$

解: (a) $\because x[n]$ 是实信号, $\therefore x^*[n] = x[n]$

$$\text{而 } x^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^* e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_{-k}^* e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = x[n]$$

$$= x^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$\therefore a_k = a_{-k}^* \text{ 或写为 } a_k^* = a_{-k}$$

$$\text{令 } a_k = b_k + jc_k, \text{ 则有 } a_{-k} = b_{-k} + jc_{-k}, \text{ 从而有}$$

$$b_k = b_{-k}, \quad c_k = -c_{-k}$$

(b) 当 N 为偶数时, $\frac{N}{2}$ 为一整数。

$$a_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \pi n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n]$$

显然, $a_{N/2}$ 是一个实数。

(c) 设 $a_k = b_k + j c_k$, 由傅立叶级数综合公式有。

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{k=0}^{N-1} (b_k + j c_k) e^{j k \frac{2\pi}{N} n}$$

当 N 为奇数时, 上式可写为:

$$\begin{aligned} x[n] &= a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (a_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n} + a_{N-k} e^{j \frac{2\pi}{N} (N-k)n}) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (a_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n} + a_k^* e^{j \frac{2\pi}{N} (N-k)n}) \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (b_k \cos \frac{2\pi}{N} kn - c_k \sin(\frac{2\pi}{N} kn)) \end{aligned}$$

当 N 为偶数时, 相应地有

$$\begin{aligned} x[n] &= a_0 + a_{N/2} (-1)^n + \sum_{k=1}^{(N)/2-1} (a_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n} + a_{N-k} e^{j \frac{2\pi}{N} (N-k)n}) \\ &= a_0 + a_{N/2} (-1)^n + \sum_{k=1}^{(N)/2-1} (a_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n} + a_k^* e^{j \frac{2\pi}{N} (N-k)n}) \\ &= a_0 + a_{N/2} (-1)^n + 2 \sum_{k=1}^{(N)/2-1} (b_k \cos \frac{2\pi}{N} kn - c_k \sin(\frac{2\pi}{N} kn)) \end{aligned}$$

(d) 由(c)知, 当 $a_k = A_k e^{j \theta_k}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \text{N 为奇数时: } x[n] &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \operatorname{Re}\{a_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n}\} \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (A_k \cos(\frac{2\pi}{N} kn + \theta_k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N \text{ 为偶数时: } x[n] &= a_0 + a_{N/2}(-1)^n + 2 \sum_{k=1}^{(N)/2-1} \operatorname{Re}\{a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\} \\ &= a_0 + a_{N/2}(-1)^n + 2 \sum_{k=1}^{(N)/2-1} A_k \cos(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k) \end{aligned}$$

$$(e) \because y(n) = (a_0 - d_0) + 2 \sum_{k=1}^8 [d_k \cos(2\pi kn/7) + (f_k - c_k) \sin(2\pi kn/7)]$$

$$\ell_v\{x[n]\} = a_0 + 2 \sum_{k=1}^8 b_k \cos \frac{2\pi}{7} kn$$

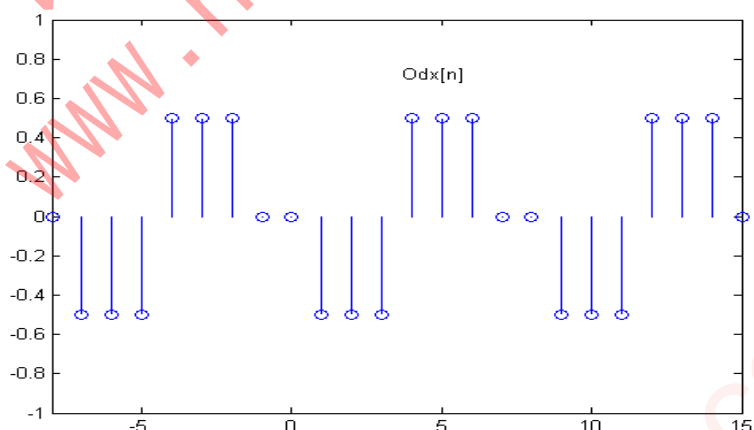
$$\wp_d\{x[n]\} = -2 \sum_{k=1}^8 c_k \sin \frac{2\pi}{7} kn$$

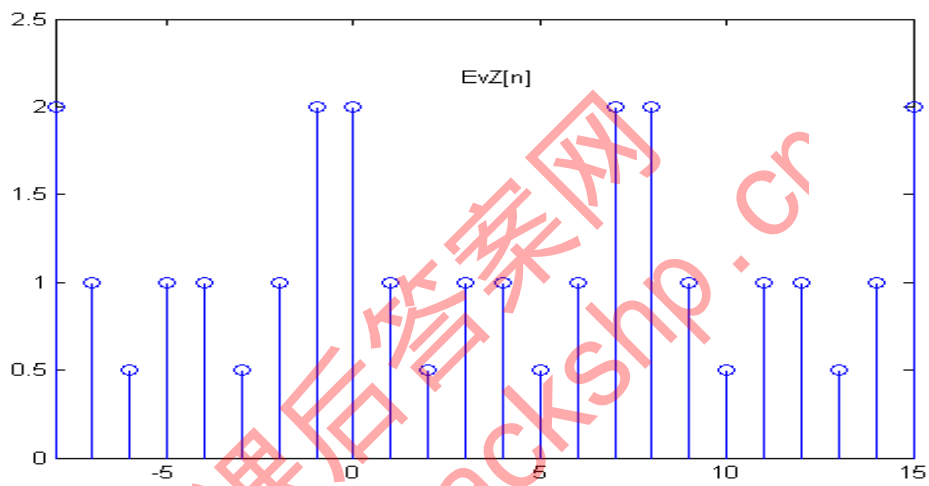
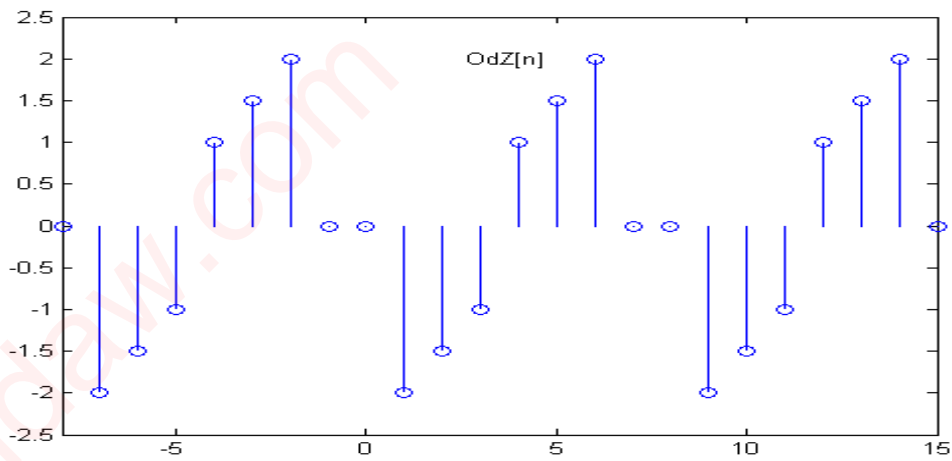
$$\ell_v\{z[n]\} = d_0 + 2 \sum_{k=1}^8 d_k \cos \frac{2\pi}{7} kn$$

$$\wp_d\{z[n]\} = -2 \sum_{k=1}^8 f_k \sin \frac{2\pi}{7} kn$$

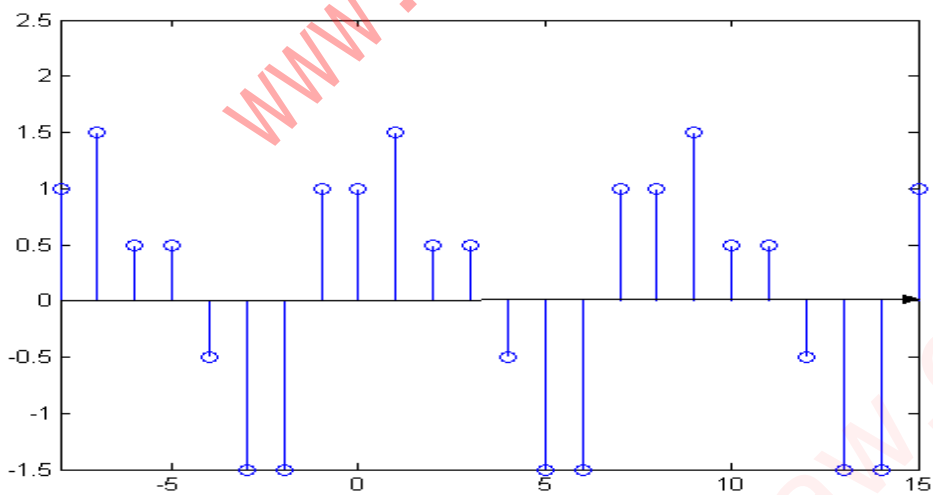
$$\therefore y(n) = a_0 - 2d_0 + \ell_v\{z[n]\} + \wp_d\{x[n]\} - \wp_d\{z[n]\}$$

而 $a_0 = 1, d_0 = 1$; $\wp_d\{z[n]\}, \ell_v\{z[n]\}, \wp_d\{x[n]\}$ 分别如图 PS5.3-1 所示, 因此 $y[n]$ 如图 PS5.3-2 所示。





PS5.3-1



PS5.3-2

4. 已知 $x[n]$ 是以 N 为周期得序列，其傅立叶级数表示式为 $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j2\pi kn/N}$, 试用 A_k

表示下列信号得傅立叶级数系数

(a) $x(n-n_0)$ (b) $x(n)-x(n-1)$ (c) $x^*(n)$ (d) $(-1)^N x(n)$ 设 N 为偶数

(e) $(-1)^N x(n)$ (假定 N 为奇数, 此时该信号得周期为 $2N$).

(f) $x_{(m)}(n) = \begin{cases} x(n/m), n \text{ 为 } m \text{ 得倍数} \\ 0, \text{ 其他 } n \end{cases}$

解: (a) $\hat{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n-n_0] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} x[m] e^{-jk \frac{2\pi}{N} m} \bullet e^{-jk \frac{2\pi}{N} n_0} = a_k e^{-jk \frac{2\pi}{N} n_0}$

(b) $\hat{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} (x[n]-x[n-1]) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = a_k - a_k e^{-jk \frac{2\pi}{N}}$

(c) $\hat{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^*[-n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=\langle N \rangle} x[-n] e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \right]^* = a_k^*$

(d) $\hat{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} (-1)^n x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j(k-\frac{N}{2}) \frac{2\pi}{N} n} \right] = a_{(k-\frac{N}{2})}$

($k=0,1,2,\dots,N-1$)

(e) $\hat{a}_k = \frac{1}{2N} \sum_{n=\langle 2N \rangle} (-1)^n x[n] e^{-jk \frac{\pi}{N} n} = \frac{1}{2N} \sum_{n=\langle 2N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{\pi}{N} n} \bullet e^{j\pi n}$
 $= \frac{1}{2N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} n (\frac{k-N}{2})} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} n (\frac{k-N}{2})} \right]$
 $= \frac{1}{2N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} n (\frac{k-N}{2})} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n+N] e^{-j \frac{2\pi}{N} n (\frac{k-N}{2})} \bullet e^{-j\pi(k-N)} \right]$
 $= \frac{1}{2} a_{(k-N)/2} (1 + e^{-j\pi(k-N)})$
 $= \begin{cases} a_{(k-N)/2}, & k \text{ 为奇数} \\ 0, & k \text{ 为偶数} \end{cases}$

(f) $\because x_m[n]$ 是以 mN 为周期的序列,

$\therefore \hat{a}_k = \frac{1}{mN} \sum_{n=\langle mN \rangle} x_{(m)}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} n} = \frac{1}{mN} \sum_{n=\langle mN \rangle} x[n/m] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} n}$
 $= \frac{1}{mN} \sum_{n=\langle r \rangle} x[r] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} mr} = \frac{1}{m} a_k, (k=0,1,2,\dots,mN-1)$

5. (a) 如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都是以 N 为周期的, 它们的傅立叶级数系数分别为 \dot{A}_k 和 \dot{B}_k , 试推

倒离散时间傅立叶级数的调制特性。即证明 $x(n)y(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{C}_k e^{j(2\pi/N)kn}$ ，其中

$$\dot{C}_k = \sum_{l=\langle N \rangle} \dot{A}_l \dot{B}_{k-l} = \sum_{l=\langle N \rangle} \dot{A}_{k-l} \dot{B}_l$$

(b) 利用调制特性求下列信号的傅立叶级数表达式，其中 $x(n)$ 的傅立叶级数系数的 \dot{A}_k 。

1. $x[n] \cos(6\pi n/N)$

2. $x[n] \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(n-KN)$

(c) 如果 $x[n] = \cos(\pi n/3)$ ， $y(n)$ 的周期为 12，且

$$y[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 8 \end{cases}$$

求 $x(n)y(n)$ 的傅立叶级数表达式。

解：

$$\begin{aligned} \text{a. } \because \sum_{k=\langle N \rangle} \left(\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} \right) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_l \left(\sum_{l=\langle N \rangle} b_{k-l} \right) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \sum_{l=\langle N \rangle} a_l \cdot \sum_{m=\langle N \rangle} b_m e^{jm \frac{2\pi}{N} n} \cdot e^{jl \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \sum_{l=\langle N \rangle} a_l e^{jl \frac{2\pi}{N} n} \cdot \sum_{m=\langle N \rangle} b_m e^{jm \frac{2\pi}{N} n} = x[n]y[n] \end{aligned}$$

$$\therefore x[n]y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, \quad \text{其中 } c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$$

同样可以证明：

$$c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_{k-l} b_l$$

b (i) $\cos \frac{6\pi n}{N} = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{N} 3n} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi}{N} 3n}$ 得： $b_3 = b_{-3} = \frac{1}{2}$ ；其余 $b_k = 0$

$$\therefore c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_{k-l} b_l = \frac{1}{2} a_{k-3} + \frac{1}{2} a_{k+3}$$

$$\begin{aligned} x[n] \cos \frac{6\pi n}{N} &= \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{2} (a_{k-3} + a_{k+3}) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{2} (a_{k-3} + a_{k+3-N}) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ 令 } \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN] = \sum_{k=\langle N \rangle} b_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, \text{ 其中}$$

$$b_k = \sum_{n=\langle N \rangle} \delta[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N}$$

$$\therefore c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_{k-l} b_l = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{l-k} = \frac{1}{N} \sum_{i=\langle N \rangle} a_i$$

$$x[n] \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN] = \sum_{k=\langle N \rangle} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=\langle N \rangle} a_i \right) e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$(c) \quad x[n] = \cos \frac{\pi}{3} n = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{6} n} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi}{6} n},$$

$$\therefore a_2 = a_{-2} = a_{10} = \frac{1}{2}, \text{ 其余 } a_k = 0$$

$$b_k = \frac{1}{12} \sum_{n=-8}^8 e^{-j \frac{\pi}{6} kn} = \frac{1}{12} \frac{e^{j \frac{\pi}{2} k} (1 - e^{-j \frac{7\pi}{6} k})}{1 - e^{-j \frac{\pi}{6} k}} = \frac{1}{12} \frac{\sin \frac{7\pi}{12} k}{\sin \frac{\pi}{12} k} \quad (0 \leq k \leq 11)$$

$$c_k = \sum_{l=\langle 12 \rangle} a_l b_{k-l} = \frac{1}{24} \frac{\sin \frac{7\pi}{12} (k-2)}{\sin \frac{\pi}{12} (k-2)} + \frac{1}{24} \frac{\sin \frac{7\pi}{12} (k-10)}{\sin \frac{\pi}{12} (k-10)} \quad (0 \leq k \leq 11)$$

6. 求下列信号的离散时间傅立叶变换:

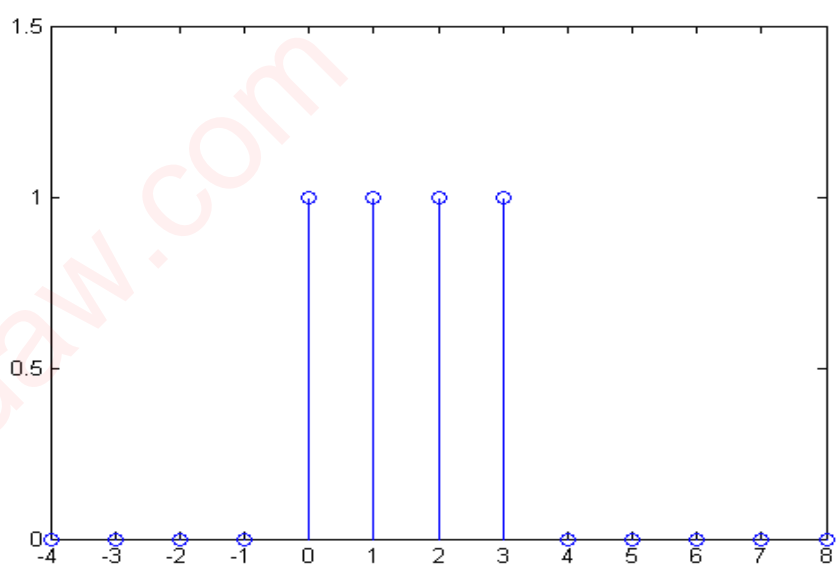
$$(a) \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-2) \quad (b) 2^n u(-n) \quad (c) (a^n \cos \omega_0 n) u(n), |a| < 1$$

$$(d) (a^{|n|} \sin \omega_0 n), |a| < 1 \quad (e) \delta(5-3n) \quad (f) n \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

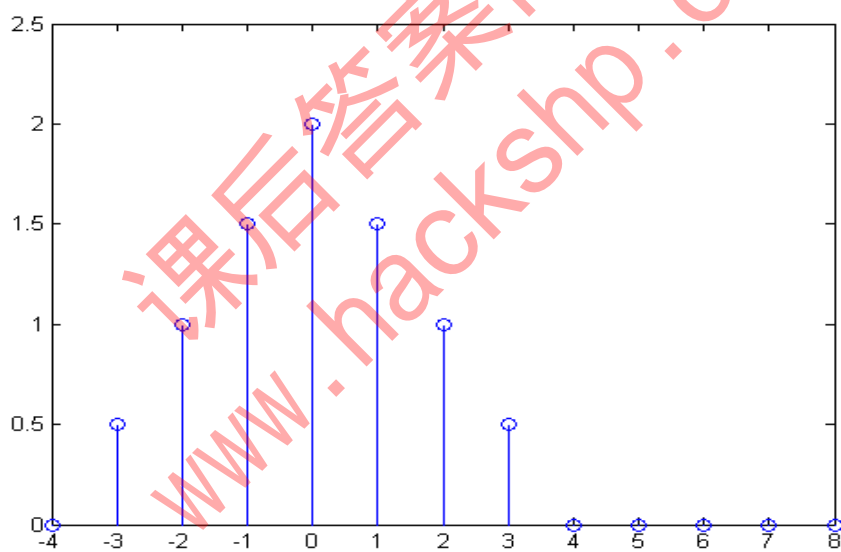
$$(g) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta(n-3k) \quad (h) \cos(18\pi n/7) + \sin(2n) \quad (i) \left[\frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n} \right] \left[\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} \right]$$

$$(j) \quad x(n) = \begin{cases} \cos(\pi n/3), & -4 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (k) \quad x(n) \text{ 如图 P5.6(a) 所示。} \quad (l) \quad x(n) \text{ 如图 P5.6(b) 所示}$$

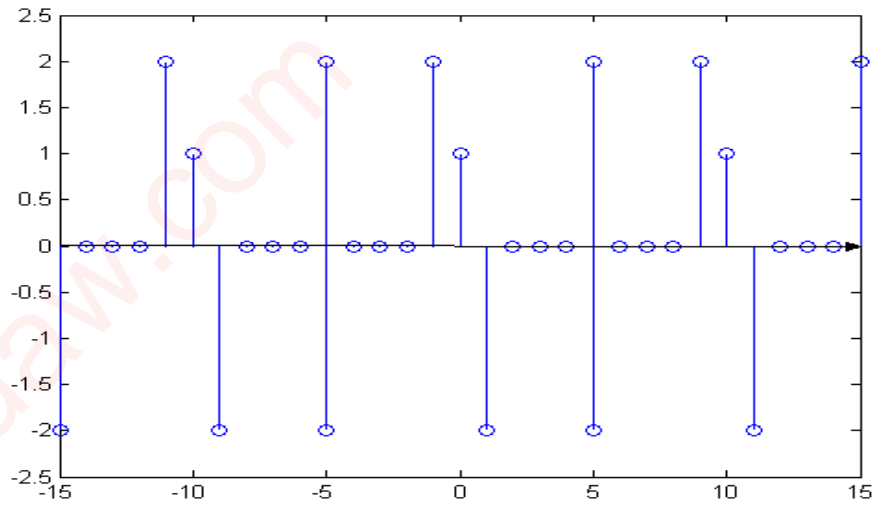
$$(m) \quad x(n) \text{ 如图 P5.6(c) 所示} \quad (n) \quad x(n) \text{ 如图 P5.6(d) 所示}$$



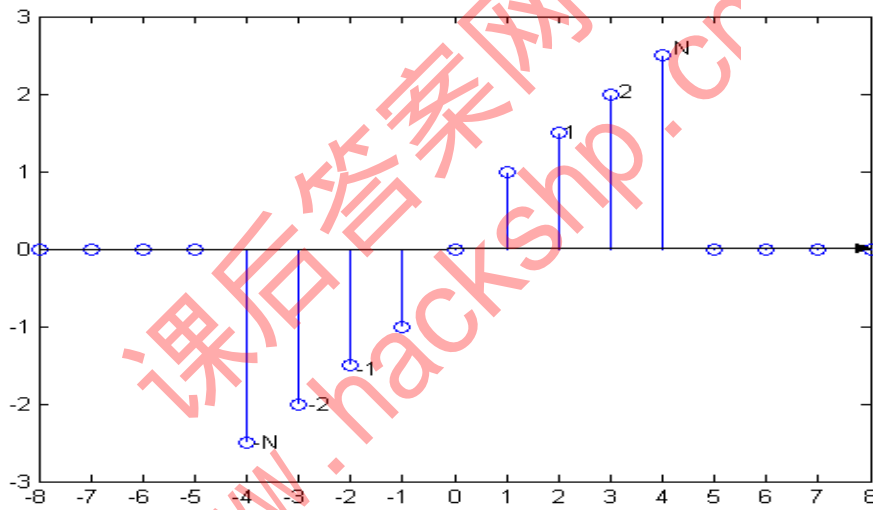
(a)



(b)



(c)



(d)

解: (a)
$$x(\Omega) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\Omega n} = \frac{\left(\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}{1 - \frac{1}{4}e^{j\Omega}} = \frac{\frac{1}{16}e^{-j2\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

(b)
$$x(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^0 (2)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}}$$

(c)
$$x[n] = [a^n \cos \Omega_0 n] u(n) = \frac{1}{2} a^n [e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n}] u[n]$$

$$\begin{aligned}
 x(\Omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (a)^n e^{-j(\Omega-\Omega_0)n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j(\Omega+\Omega_0)n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-ae^{-j(\Omega-\Omega_0)}} + \frac{1}{1-ae^{-j(\Omega+\Omega_0)}} \right) \\
 &= \frac{1-ae^{-j\Omega} \cos \Omega_0}{1-2a \cos \Omega_0 e^{-j\Omega} + a^2 e^{-j2\Omega}}
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
 x(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (a)^{-n} \sin(\Omega_0 n) e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(\Omega_0 n) e^{-j\Omega n} \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1-ae^{-j(\Omega-\Omega_0)}} - \frac{1}{1+ae^{-j(\Omega-\Omega_0)}} \right] + \frac{1}{2j} \left[\frac{ae^{j(\Omega-\Omega_0)}}{1-ae^{j(\Omega-\Omega_0)}} - \frac{ae^{j(\Omega+\Omega_0)}}{1-ae^{j(\Omega+\Omega_0)}} \right] \\
 &= \frac{2ja(a^2-1) \sin \Omega_0 \sin \Omega}{(1+2a^2 \cos \Omega_0)^2 - 4a(1+a^2) \cos \Omega_0 \cos \Omega + 2a^2 \cos 2\Omega}
 \end{aligned}$$

(e) $\sigma(6-3n) \quad \therefore x(\Omega) = e^{-j2\Omega}$

(f) 令 $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$, 则有:

$$\begin{aligned}
 x_1(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos \Omega} \\
 \therefore x(\Omega) &= j \frac{d}{d\Omega} X_1(\Omega) = -j \frac{\frac{3}{4} \sin \Omega}{\left(\frac{5}{4} - \cos \Omega\right)^2}
 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned}
 x(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \sigma[n-3k] e^{-j\Omega n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{3k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma[n-3k] e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{3k} e^{-j3k\Omega} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4} e^{-j\Omega}\right)^3}
 \end{aligned}$$

(h)
$$\cos\left(\frac{18\pi}{7}n\right) + \sin 2n = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{18\pi}{7}n} + e^{-j\frac{18\pi}{7}n} \right) + \frac{1}{2j} (e^{j2n} - e^{-j2n})$$

$$x(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\Omega - \frac{18}{7}\pi)n} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\Omega + \frac{18}{7}\pi)n} + \frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn(\Omega-2)} - \frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn(\Omega+2)}$$

=

$$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\sigma(\Omega - \frac{4\pi}{7} - 2k\pi) + \sigma(\Omega + \frac{4\pi}{7} - 2k\pi) - j\sigma(-2 - 2k\pi) + j\sigma(\Omega + 2 - 2k\pi)]$$

$$(i) \because \frac{\sin(n\pi/3)}{\pi n} \leftrightarrow X_1(\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| \leq \pi/3 \\ 0, \pi/2 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\frac{\sin(n\pi/4)}{\pi n} \leftrightarrow X_2(\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| \leq \pi/4 \\ 0, \pi/4 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

\therefore 如图 PS5.5 所示。

$$\begin{aligned} (j) \quad X(\Omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-4}^4 e^{-jn(\Omega - \frac{\pi}{3})} + \frac{1}{2} \sum_{n=-4}^4 e^{-jn(\Omega + \frac{\pi}{3})} \\ &= \frac{e^{j4(\Omega - \frac{\pi}{3})} - e^{-j6(\Omega - \frac{\pi}{3})}}{2[1 - e^{-j(\Omega - \frac{\pi}{3})}]} + \frac{e^{j4(\Omega + \frac{\pi}{3})} - e^{-j5(\Omega + \frac{\pi}{3})}}{2[1 - e^{-j(\Omega + \frac{\pi}{3})}]} \quad s \\ &= -\frac{e^{j3\Omega} + e^{j4\Omega} + e^{-j5\Omega} + e^{-j6\Omega}}{2(1 - e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega})} \end{aligned}$$

$$(k) \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j5\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

$$(l) \quad X(\Omega) = \sum_{n=-3}^{+3} x(n)e^{-j\Omega n} = 2 + 3\cos\Omega + 2\cos 2\Omega + \cos 3\Omega$$

(m) $x[n]$ 是以 6 为周期的序列，因此有

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=-1}^1 x(n)e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6}(1 + 4j\sin\frac{\pi}{3}k)$$

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^5 a_k \delta(\Omega - \frac{\pi}{3}k - 2\pi l)$$

$$= \frac{\pi}{3} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^5 (1 + 4j \sin \frac{\pi}{3}k) \delta(\Omega - \frac{\pi}{3}k - 2\pi l)$$

$$(n) \quad X(\Omega) = \sum_{n=-N}^{+N} x(n) e^{-j\Omega n} = -2N \sin(\Omega N) - 2(N-1) \sin[\Omega(N-1)] - \cdots - 2 \sin \Omega$$

$$=$$

$$-N e^{j\Omega N} - (N-1) e^{j\Omega(N-1)} - \cdots - e^{j\Omega} + 0 + e^{-j\Omega} + 2e^{-2j\Omega} + \cdots +$$

$$(N-1) e^{-j\Omega(N-1)} + N e^{-j\Omega N}$$

$$= -N(e^{j\Omega N} - e^{-j\Omega N}) - (N-1)(e^{j\Omega(N-1)} - e^{-j\Omega(N-1)}) - \cdots - (e^{j\Omega} - e^{-j\Omega})$$

$$= -2N \sin(\Omega N) - 2(N-1) \sin[\Omega(N-1)] - \cdots - 2 \sin \Omega$$

7. 已知离散时间信号的傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 求信号 $x(n)$.

$$(a) \quad X(e^{j\omega}) = 1 - 3e^{-j\omega} + 2e^{j2\omega} + 4e^{-j4\omega}$$

$$(b) \quad X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$(c) \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(\omega - \frac{\pi}{2}k)$$

$$(d) \quad X(e^{j\omega}) = \cos(\frac{\omega}{2}) + j \sin \omega$$

$$(e) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

$$(f) \quad X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| \leq \pi/3 \\ 1, & \pi/3 < |\omega| \leq 2\pi/3 \\ 0, & 2\pi/3 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

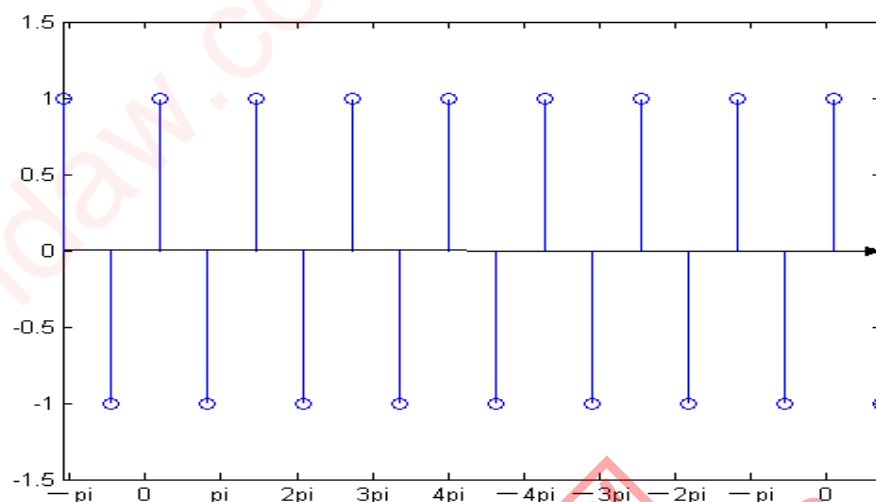
(g) $X(e^{j\omega})$ 如图 P5.7(a)所示

(h) $X(e^{j\omega})$ 如图 P5.7(b)所示

解: (a) $x(n) = 2\pi[\delta(n) - 3\delta(n-1) + 2\delta(n+2) + 4\delta(n-4)]$

$$(b) \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} e^{jwn} dw = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

(c) $X(\Omega)$ 如图 PS5.7-1 所示, 在一个周期内可表示为



PS5.7-1

$$X(\Omega) = \delta(\Omega) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{2}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{2}) + \delta(\Omega - \pi)$$

$$\therefore x[n] = \frac{1}{2\pi} (1 + e^{j\pi n} - e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}) = \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi n}{2} (1 - e^{j\frac{\pi}{2}n})$$

$$(d) \quad \because X(\Omega) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\Omega}{2}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\Omega}{2}} + \frac{1}{2} e^{j\Omega} - \frac{1}{2} e^{-j\Omega} \quad (-\pi \leq \Omega \leq \pi)$$

$$\therefore x[n] = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2} + e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

=

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{j(n + \frac{1}{2})} e^{j\Omega(n + \frac{1}{2})} + \frac{1}{j(n - \frac{1}{2})} e^{j\Omega(n - \frac{1}{2})} + \frac{1}{j(n + 1)} e^{j\Omega(n + 1)} - \frac{1}{j(n - 1)} e^{j\Omega(n - 1)} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin \pi(n + \frac{1}{2})}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\sin \pi(n - \frac{1}{2})}{n - \frac{1}{2}} + \pi \delta(n + 1) - \pi \delta(n - 1) \right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi(n^2 - \frac{1}{4})} + \frac{1}{2} \delta[n + 1] - \frac{1}{2} \delta[n - 1]$$

$$(e) \frac{1}{\pi n} (\sin \frac{3\pi}{8} n - \sin \frac{5\pi}{8} n)$$

$$\therefore x[n] = \frac{6}{5} (\frac{1}{3})^n u[n] - \frac{6}{5} (-\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$(f) x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} e^{j2\Omega} e^{j\Omega n} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi/3}^{-\pi/3} e^{j2\Omega} e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2j\pi(n+2)} e^{j\Omega(n+2)} \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} + \frac{1}{2j\pi(n+2)} e^{j\Omega(n+2)} \Big|_{-2\pi/3}^{-\pi/3}$$

$$= \frac{1}{\pi(n+2)} [\sin \frac{2\pi}{3} (n+2) - \sin \frac{\pi}{3} (n+2)]$$

$$(g) x[n] = \frac{1}{2\pi} [\int_0^\pi (\frac{\omega}{\pi} + 1) e^{j\omega n} d\omega + \int_{-\pi}^0 (\frac{\omega}{\pi}) e^{j\omega n} d\omega]$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{2jn\pi}$$

(h) 令 $X(\Omega) = X_1(\Omega) + X_2(\Omega)$, 其中 $X_1(\Omega)$ 和 $X_2(\Omega)$ 如图 PS5.15-2 所示。

$$\frac{1}{\pi n} (\sin \frac{\pi}{8} n - \sin \frac{7\pi}{8} n)$$

$$= \frac{1}{2\pi jn} [e^{j\Omega n} \Big|_{-\pi}^{-5\pi/8} + e^{j\Omega n} \Big|_{-3\pi/8}^{3\pi/8} + e^{j\Omega n} \Big|_{5\pi/8}^{\pi}]$$

$$= \frac{1}{\pi n} (\sin \frac{3\pi}{8} n - \sin \frac{5\pi}{8} n)$$

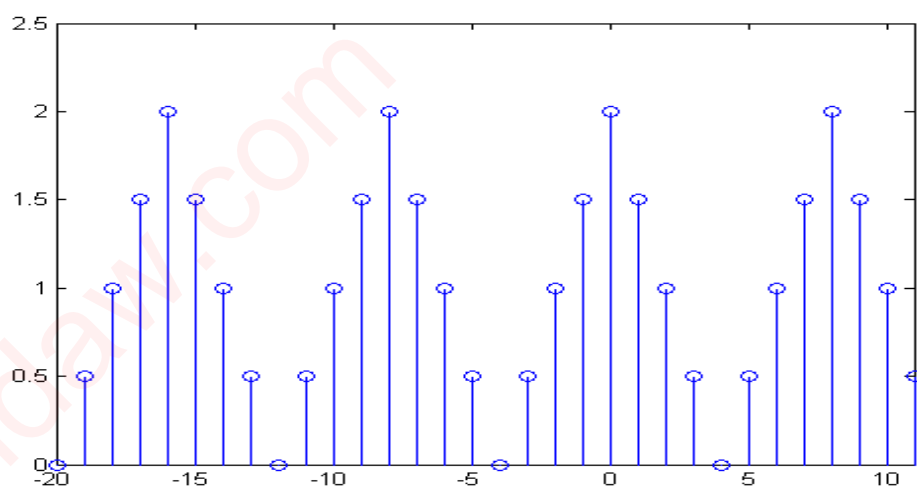
$$x_2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-7\pi/8} e^{j\Omega n} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} e^{j\Omega n} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{7\pi/8}^{\pi} e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi jn} [e^{j\Omega n} \Big|_{-\pi}^{-7\pi/8} + e^{j\Omega n} \Big|_{-\pi/8}^{\pi/8} + e^{j\Omega n} \Big|_{7\pi/8}^{\pi}]$$

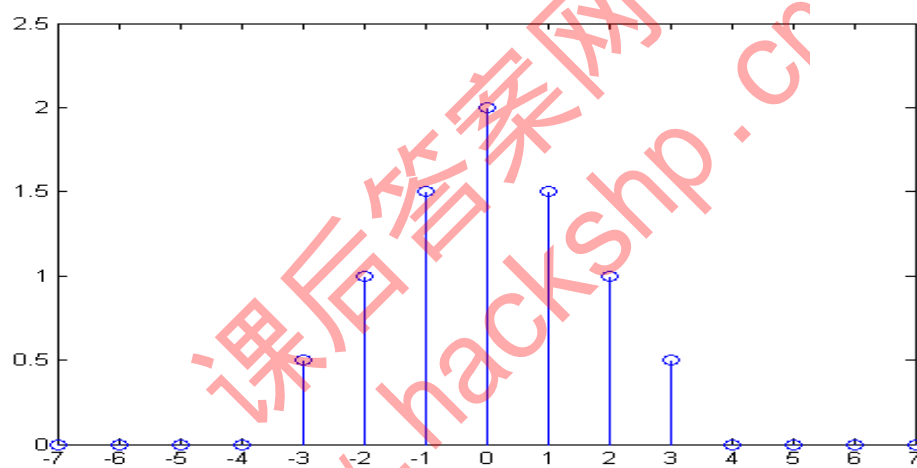
$$= \frac{1}{\pi n} (\sin \frac{\pi}{8} n - \sin \frac{7\pi}{8} n)$$

$$\frac{1}{8} (2 + 3 \cos \omega + 2 \cos 2\omega + \cos 3\omega)$$

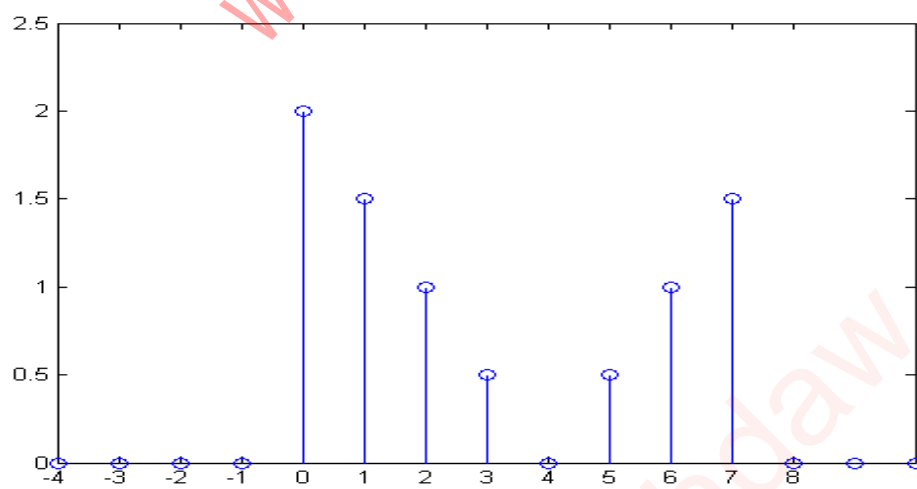
8. 已知 $\tilde{x}(n)$ 如图 P5.8(a) 所示得周期信号, $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别是从小 $\tilde{x}(n)$ 中截取一个周期所得得非周期信号, 如图 P5.8(b),(c) 所示。



(a)



(b)



(c)

(a) 求出 $\tilde{x}(n)$ 得离散时间傅立叶级数得系数 \dot{A}_k

(b) 分别求出 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 。在这里可以看到，由于截取一个周期时，截取得

方式不同，因而所得到得非周期信号具有不同得傅立叶变换。

(c) 证明无论怎样截取，下列关系总是成立得：

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \bigg|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

$$\text{解: (a) } \dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} x(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} = \frac{1}{8} \sum_{n=-3}^3 x(n) e^{-j(\frac{\pi}{4})kn}$$

$$= \frac{1}{8} (2 + 3 \cos(\frac{\pi}{4}k) + 2 \cos \frac{\pi}{2}k + \cos \frac{3\pi}{4}k)$$

$$\therefore a_0 = 1 \quad a_3 = a_5 = \frac{2-\sqrt{2}}{8} \quad a_1 = a_7 = \frac{2+\sqrt{2}}{8}, a_2 = a_6 = 0, a_4 = 0$$

$$(b) X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-4}^3 x(n) e^{-j\omega n} = 2 + 3 \cos \omega + 2 \cos 2\omega + \cos 3\omega$$

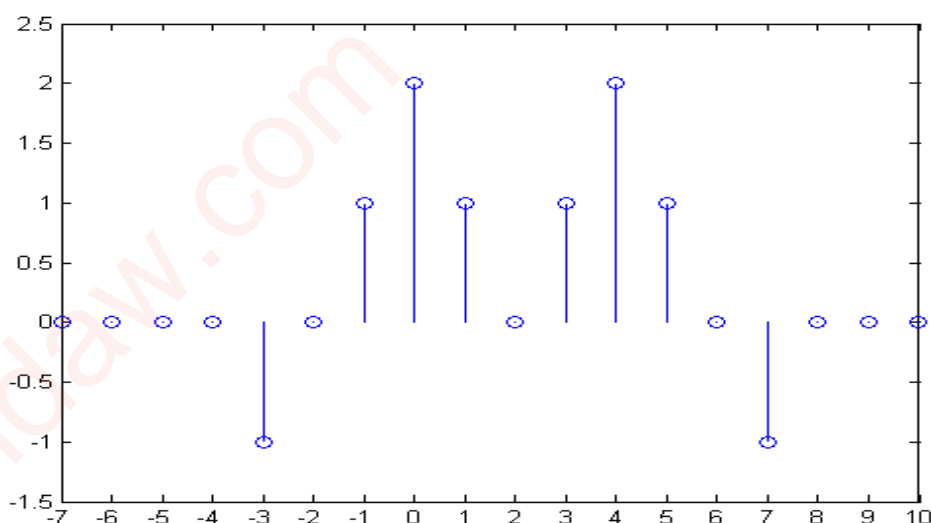
$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j\omega n} = 2 + \frac{3}{2} e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \frac{1}{2} e^{-j3\omega} + 0 + \frac{1}{2} e^{-j5\omega} + e^{-j6\omega} + \frac{3}{2} e^{-j7\omega}$$

显然 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 不同。

$$(c) \text{ 由(a)与(b)可以看出。} \dot{A}_k = \frac{1}{8} x_1(e^{j\omega}) \bigg|_{\omega = \frac{2\pi}{8}k}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{1}{8} x_1(e^{j\omega}) \bigg|_{\omega = \frac{2\pi}{8}k} &= \frac{1}{8} [2 + \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}k} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{3\pi}{4}k} + \\ &e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{5\pi}{4}k} + e^{-j\frac{6\pi}{4}k} + \frac{3}{2} e^{-j\frac{7\pi}{4}k}] \\ &= \frac{1}{8} (2 + 3 \cos \omega + 2 \cos 2\omega + \cos 3\omega) \end{aligned}$$

9. 如果 $X(e^{j\omega})$ 是图 P5.9 所示信号 $x(n)$ 的傅立叶变换，不求出 $X(e^{j\omega})$ 而完成下列计算。



5.9

a) 求 $X(e^{j0})$ (b) 求 $X(e^{j\omega})$ 的相位 $\theta(e^{j\omega})$ 。(c) 求 $X(e^{j\pi})$ 的值。

(d) 计算 $\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ (e) 计算 $\int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$ 和 $\int_{-\pi}^{+\pi} |dX(e^{j\omega})/d\omega|^2 d\omega$ 。

解:

$$(a) \because X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}, \therefore X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 6$$

$$(b) \because x[n+2] \text{ 是一个偶实序列, } x[n+2] \longleftrightarrow X(\Omega)e^{j2\Omega}$$

而偶实序列的频谱为偶实函数。即 $\angle X(\Omega) + 2\Omega = \theta(\Omega)$

$\therefore \angle X(\Omega) = -2\Omega + \theta(\Omega)$, 其中 $\theta(\Omega)$ 是 $x[n+2]$ 的相位频谱。

$$(c) X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] = (1-1+2-1-1+2-1+1) = 2$$

(d)

$$\because x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{+\pi} X(\Omega) d\Omega = 2\pi x[0] = 4\pi$$

(e) (i) 由 Parseval 定理有

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 2\pi(1+1+4+1+1+4+1+1) = 28\pi$$

(ii)

$$\because \frac{d}{d\Omega} X[\Omega] \xleftrightarrow{\zeta} -jnx[n]$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \right|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |-jnx[n]|^2 = 2\pi(9+1+1+9+64+25+49) = 316\pi$$

10. 确定图 P5.10 所示信号中哪些信号的傅立叶变换满足下列条件之一：

(a) $\text{Re}[X(e^{j\omega})] = 0$ (b) $\text{Im}[X(e^{j\omega})] = 0$ (c) 存在一个实数 a , 使得 $X(e^{j\omega})e^{ja\omega}$ 是实函数。

(d) $\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})d\omega = 0$ (e) $X(e^{j0}) = 0$

解： 满足(a)的有 b, g。满足(b)的有 d, e。满足(c)的有 a b e d f。满足(d)的有 d, b, e, f, g。满足(e)的有 b, c, g

11. 如果 P5.11(a)所示的 $X(e^{j\omega})$ 是信号 $x(n)$ 的离散时间傅立叶变换, 试用 $x(n)$ 表示图 P5.11 中其他傅立叶变换所对应的信号。

解： 由调制性质考虑 $x(n)e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\xi} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

取 $\omega_0 = \pi$ 可知 $x(n)(-1)^n \xleftrightarrow{\xi} X(e^{j(\omega-\pi)})$ 即为图(b)

$$\therefore (b) \quad x_1(n) = x(n)(-1)^n$$

$$\text{易知} \quad \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{2}{\pi} x_2(e^{j\omega})$$

$$\text{即} \quad X_2(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{2} \frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$\text{又} \quad nx(n) \xleftrightarrow{\xi} j \frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$\therefore (-j) \frac{\pi}{2} nx(n) \xleftrightarrow{\xi} j \cdot (-j) \cdot \frac{\pi}{2} \frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega} = X_2(e^{j\omega})$$

$$\text{即} \therefore (-j) \frac{\pi}{2} nx(n) \xleftrightarrow{\xi} X_2(e^{j\omega})$$

$$(c) \quad x_2(n) = -j \frac{\pi}{2} nx(n)$$

$$X_3(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})$$

$$(d) \quad \therefore x_3(n) = x_2(n) + x(n) = (1 - j \frac{\pi}{2} n)x(n)$$

$$(e) \quad X_4(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + X_1(e^{j\omega})$$

$$\therefore x_4(n) = x(n) + x_1(n) = [1 + (-1)^n]x(n)$$

$$(f) X_5(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - X_2(e^{j\omega})$$

$$\therefore x_5(n) = -x_2(n) + x(n) = (1 + j\frac{\pi}{2}n)x(n)$$

12. 如果离散时间信号 $x(n]$ 的傅立叶变换如图 P5.12 所示, 请粗略画出下列连续时间周期信号的波形, 并加以标注。

$$(a) x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{j(\pi/5)nt} \quad (b) x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n)e^{j(\pi/5)nt}$$

$$(c) x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} O_d(-n)e^{j(\pi/5)nt} \quad (d) x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_v(-n)e^{j(\pi/3)nt}$$

$$\text{解: (a)} \because x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{jn\frac{\pi}{5}t}; X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$\therefore x_1(t) = X(\Omega) \Big|_{\Omega = -\frac{\pi}{5}t} \text{。其实部与虚部如图 PS5.12-1 所示。}$$

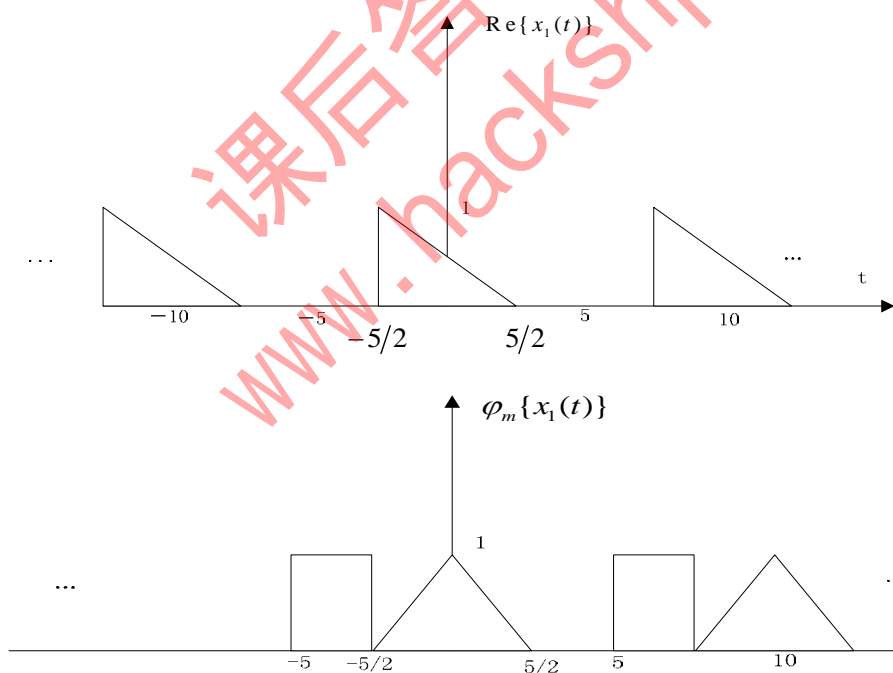
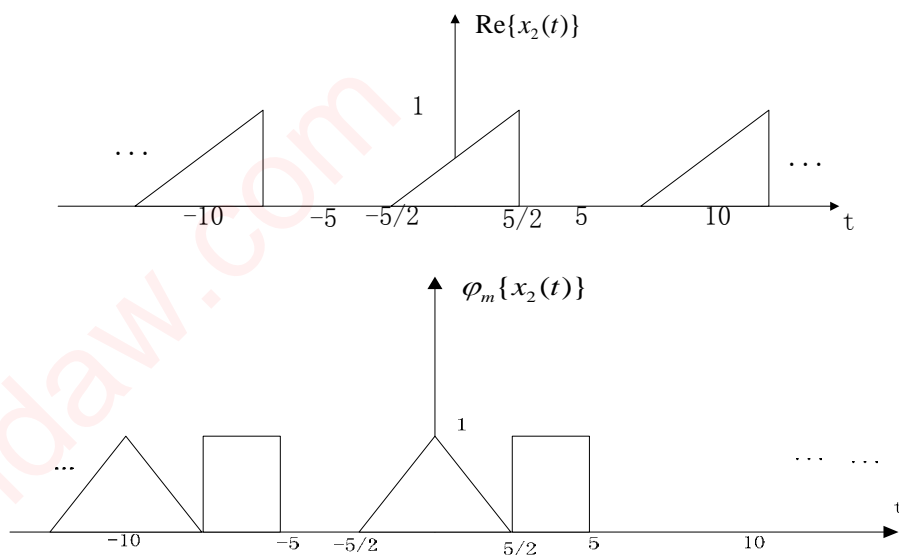


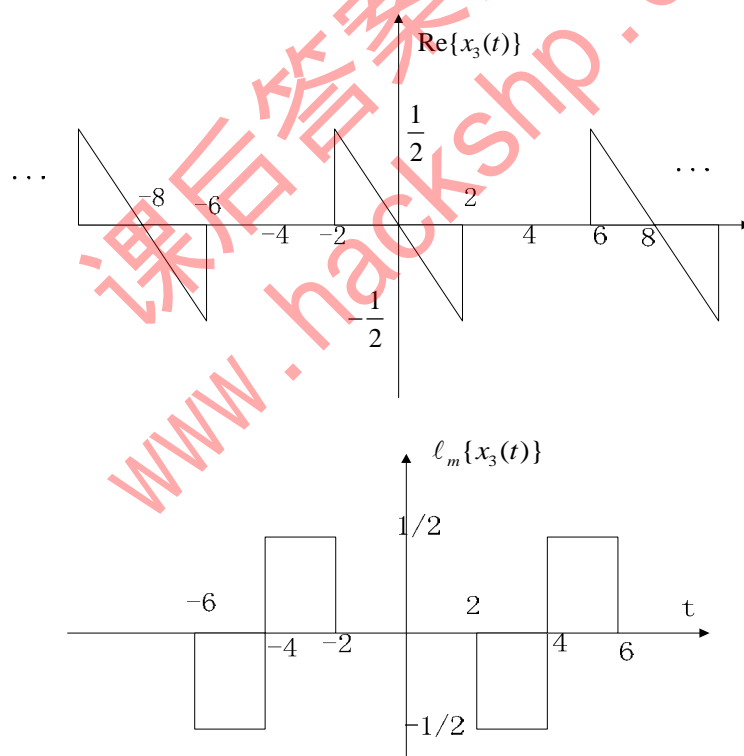
图 PS5.12-1

$$(b) x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{jn\frac{2\pi}{10}t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-jm\frac{2\pi}{10}t} = x_1(-t) \text{ 如图 PS5.12-2 所示。}$$



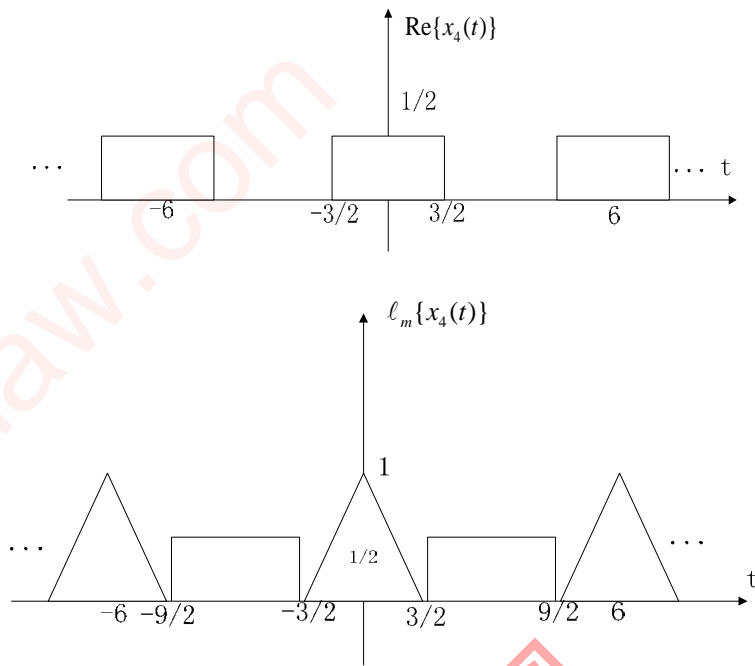
PS5.12-2

(c) $x_3(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{jn\frac{2\pi}{8}t} - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{jn\frac{2\pi}{8}t} = \frac{1}{2} X(-\frac{\pi}{4}t) - \frac{1}{2} X(\frac{\pi}{4}t)$ 如图 PS5.12-3 所示:



PS5.12-

(d) $x_4(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{jn\frac{2\pi}{6}t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{jn\frac{2\pi}{6}t} = \frac{1}{2} X(-\frac{\pi}{3}t) + \frac{1}{2} X(\frac{\pi}{3}t)$ 如图, PS5.12-4 所示:



PS5.12-4

13. 已知 $\tilde{x}(n)$ 是以 8 为周期的离散时间方波信号，且

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

求 $\tilde{x}(n)$ 的 $\tilde{X}(k)$ ，其中 $\tilde{X}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$

$$\text{解: } \tilde{X}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = e^{-j\frac{3\pi}{8}k} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)}$$

14. 如果 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{y}(n)$ 都是以 8 为周期的序列，且

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其他}n \end{cases} \quad \tilde{y}(n) = \begin{cases} 1, & 4 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{其他}n \end{cases}$$

求 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{y}(n)$ 得周期卷积 $\tilde{f}(n) = \tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n)$ ，并求出相应的 $\tilde{F}(k)$ 。

$$\text{解: } \tilde{f}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m) = \begin{cases} 3-n, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & n=3 \\ n-3, & 4 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

$$f(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + 0\delta(n-3) + \delta(n-4) + 2\delta(n-5) + 3\delta(n-6)$$

$$\tilde{f}(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f(n+7r)$$

$$\tilde{x}(k) = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{7}kn} = e^{-j\frac{3\pi}{7}k} \frac{\sin(\frac{4\pi}{7}k)}{\sin(\frac{\pi}{7}k)}$$

$$\tilde{y}(k) = \sum_{n=4}^6 e^{-j\frac{2\pi}{7}kn} = e^{-j\frac{10\pi}{7}k} \frac{\sin(\frac{3\pi}{7}k)}{\sin(\frac{\pi}{7}k)}$$

$$\therefore \tilde{F}(k) = \tilde{x}(k)\tilde{y}(k) = e^{-j\frac{13\pi}{7}k} \frac{\sin(\frac{4\pi}{7}k)\sin(\frac{3\pi}{7}k)}{\sin^2(\frac{\pi}{7}k)}$$

5.15 求下列有限长序列地 DFT，并用闭式表示：

(a) $x(n) = R_N(n)$ 。 (b) $x(n) = \sin(\omega_0 n)R_N(n)$ (c) $x(n) = e^{j\omega_0 n}R_N(n)$

(d) $x(n) = \cos(\omega_0 n)R_N(n)$ (e) $x(n) = nR_N(n)$ (f) $x(n) = a^n R_N(n)$

解：(a)

$$x(n) = R_N(n)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \begin{cases} N, K = 0 \\ 0, 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

(b) $x(n) = \sin \omega_0 n R_N(n)$

$$\because \sin \omega_0 n = \text{Im}[e^{j\omega_0 n}] \quad \text{由关系 } \text{Im}[x(n)] \longleftrightarrow \frac{1}{2j}[X(k) - X^*(-k)]$$

$$\text{有 } X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \left[\frac{1}{2j} \frac{1 - e^{j\omega_0 n}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k} - \frac{1}{2j} \frac{1 - e^{-j\omega_0 n}}{1 - e^{-j\omega_0} W_N^k} \right] R_N(k)$$

$$= \frac{W_N^k \sin \omega_0 - \sin \omega_0 N - \sin(N-1)\omega_0 W_N^k}{1 - 2 \cos \omega_0 W_N^k + W_N^{2k}} R_N(k)$$

(c) $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 N} W_N^{kn} R_N(k) = \frac{1 - e^{j\omega_0 N} W_N^{kN}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k} R_N(k)$$

$$= e^{j(\frac{\pi}{N}k + \frac{N-1}{2}\omega_0)} \frac{\sin(\frac{\omega_0}{2}N)}{\sin(\frac{\omega_0}{2} - \frac{\pi k}{N})} R_N(k)$$

(d) $x(n) = \cos \omega_0 n R_N(n)$

$\because \cos(\omega_0 n) = \text{Re}[e^{j\omega_0 n}]$ 由关系: $\text{Re}[x(n)] \longleftrightarrow \frac{1}{2}[x(k) + x^*(-k)]$

有

$$X(k) = DFT[x(n)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k} + \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j\omega_0} W_N^k} \right] R_N(k)$$

$$= \frac{1 - \cos(\omega_0 N) - W_N^k \cos \omega_0 + W_N^k \cos(N-1)\omega_0}{1 - 2 \cos \omega_0 W_N^k + W_N^{2k}} R_N(k)$$

(e) $x(n) = n R_N(n)$

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} n W_N^{kn} R_N(k) = [W_N^k \frac{d \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn}}{dx}] R_N(k)$$

$$= e^{j(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{N}k)} \frac{N}{2 \sin(\frac{\pi k}{N})} R_N(k)$$

(f)

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} a^N W_N^{kn} R_N(k) = \frac{1 - (a W_N^{kn})^N}{1 - a W_N^k} R_N(k)$$

$$= \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j \frac{2\pi}{N}k}} R_N(k)$$

其中 $R_N(n) \longleftrightarrow R_N(k) = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = \frac{1 - e^{-jkN \frac{2\pi}{N}}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} = \begin{cases} n, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$

16. 已知有限长序列地 DFT 为 $X(k)$, 求 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)]$ 。

(a) $X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j0}, k = m \\ \frac{N}{2} e^{-j0}, k = N - m \\ 0, \text{其他} k \end{cases}$ (b) $X(k) = \begin{cases} -\frac{N}{2} e^{j0}, k = m \\ \frac{N}{2} j e^{-j0}, k = N - m \\ 0, \text{其他} k \end{cases}$

其中 m 为正整数且 $0 < m < N/2$.

解: (a)

$$\begin{aligned} x(n) &= IDFT[\dot{X}(K)] = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(K) W_N^{-kn} \right) k_N(n) \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{j\theta} W_N^{-mn} + \frac{1}{2} e^{-j\theta} W_N^{-(N-m)n} \right) k_N(n) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{j\theta} e^{j \frac{2\pi mn}{N}} + e^{-j\theta} e^{-j \frac{2\pi mn}{N}} \right) R_N(\theta) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi m}{N} n + \theta\right) R_N(n) \end{aligned}$$

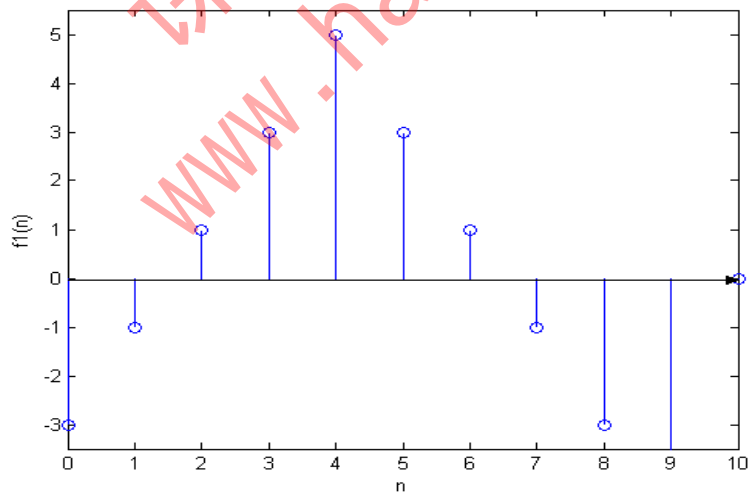
(b)

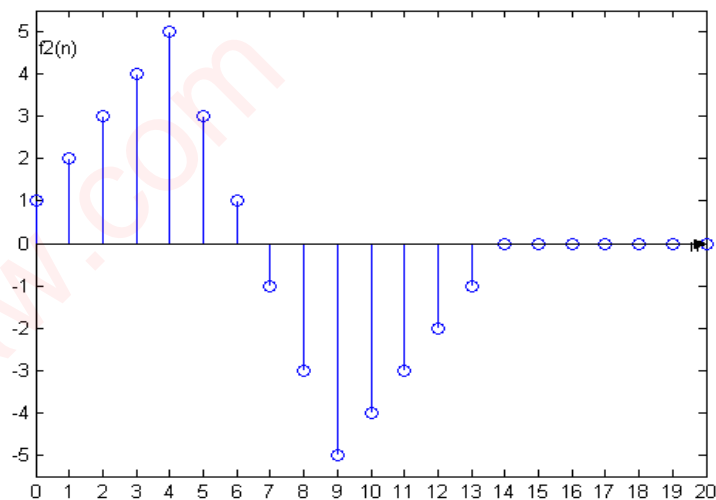
$$\begin{aligned} x(n) &= IDFT[\dot{X}(K)] = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(K) W_N^{-kn} \right) k_N(n) \\ &= \left(-\frac{j}{2} e^{j\theta} W_N^{-mn} + \frac{j}{2} e^{-j\theta} W_N^{-(N-m)n} \right) k_N(n) \\ &= \frac{1}{2j} \left(e^{j\theta} e^{j \frac{2\pi mn}{N}} - e^{-j\theta} e^{-j \frac{2\pi mn}{N}} \right) R_N(\theta) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi m}{N} n + \theta\right) R_N(n) \end{aligned}$$

17. 如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都是 $N=10$ 的有限长序列, 且

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他} n \end{cases} \quad y(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ -1, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

解:





18. 已知 $x(n)$ 是一个 8 点的序列，其 8 点 DFT 为 $X(k)$ ，如图 P5.18(a)所示。 $y(n)$ 是一个 16 点的序列，且

$$y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

试从图 P5.18(b)~(d) 中选出相当于 $y(n)$ 的 16 点 DFT 的略

如果 $y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq 7 \\ 0, & 8 \leq n \leq 15 \end{cases}$ 则在图中找哪一个相当于 $y(n)$ 的 16 点 DFT?

解：(c) (d)

19. 证明若 $x(n)$ 实偶对称，即 $x(n) = x(N-n)$ ，则 $X(K)$ 也实偶对称。

证明：

(1)

$$x(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(N-n)) = \frac{1}{2}(x(n) + x^*(N-n))$$

实函数

$$X(k) = \frac{1}{2}X(k) + \frac{1}{2}X^*(k) = \text{Re}[X(k)]$$

又

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n)W_N^{kn}R_N(k) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{-km}R_N(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{-km}R_N(k) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{(N-k)m}R_N(k) = X(N-k), \text{ 偶对称} \end{aligned}$$

(2)

$$x(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(N-n)) = \frac{1}{2}(x(n) - x^*(N-n))$$

$$X(k) = \frac{1}{2}(X(k) - X^*(k)) = j\text{Im}[X(k)], \text{纯虚数}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}R_N(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} x(N-n)W_N^{kn}R_N(k) \\ &= -\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{(N-k)m}R_N(k) = -X(N-k), \text{奇对称} \end{aligned}$$

20. 如果 $x(n)$ 实 N 点有限长序列, $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 分别实 $x(n)$ 的圆周共轭偶部和圆周共轭奇部分。即

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

解:

$$\begin{aligned} DFT[x_e(n)] &= \frac{1}{2}DFT[x(n)] + \frac{1}{2}DFT[X^*(N-n)] \\ &= \frac{1}{2}X(k) + \frac{1}{2}X^*(N-N+k) = \frac{1}{2}X(k) + \frac{1}{2}X^*(k) \\ &= \text{Re}[X(k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DFT[x_o(n)] &= \frac{1}{2}DFT[x(n)] - \frac{1}{2}DFT[X^*(N-n)] \\ &= \frac{1}{2}X(k) - \frac{1}{2}X^*(N-N+k) = \frac{1}{2}X(k) - \frac{1}{2}X^*(k) \\ &= j\text{Im}[X(k)] \end{aligned}$$

21. 如果 $x(n)$ 是 N 点的序列, 它的 N 点 DFT 为 $X(K)$

(a) 证明当 $x(n) = -X(N-1-n)$ 时, $X(0) = 0$

(b) 证明当 N 为偶数, 且 $x(n) = x(N-1-n)$ 时, $X(N/2) = 0$

解:

$$(a) \text{要证明 } X(0) = 0, \text{需证明 } \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \Big|_{k=0} = 0,$$

$$\text{即需证明 } \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 0$$

当 N 为偶数时, $\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) + x(N-1-n) = 0$

当 N 为奇数时,

$$\because x(n) = -x(N-1-n)$$

$$\therefore x\left(\frac{N-1}{2}\right) = -x\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

$$\therefore x\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \left(\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} x(n) + x(N-1-n) \right) + x\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

当 N 为偶数和奇数时, 都有: $X(0) = 0$

(b)

$$X\left(\frac{N}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{\frac{N}{2}n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [(-1)^n x(n) + (-1)^{N-1-n} x(N-1-n)]$$

$\because x(n) = x(N-1-n)$, 且 N 为偶数, 则:

$$(-1)^n x(n) + (-1)^{N-1-n} x(N-1-n) = 0$$

$$\therefore X\left(\frac{N}{2}\right) = 0$$

22. 如果 $X(K)$ 是 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT, 则 $X(K)$ 也是一个 N 点有限长序列。若对 $X(K)$

再做 DFT 运算, 得到序列 $\tilde{x}(n)$, 试用 $x(n)$ 表示 $\tilde{x}(n)$

解:

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, 0 \leq k \leq N-1$$

$$N\tilde{x}(n) = Nx((n))_N = \sum_{k=0}^{N-1} X(K) W_N^{-kn}$$

上式中: 令: $k=m, -n=k$

$$\text{则 } Nx((-k))_N = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{km}$$

那么

$$N\tilde{x}(n) = DFT[x(n)]$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} DFT[x(n)]$$

23. 假定 $x(n)$ 是有限长序列, 当 $n < 0$ 和 $n \geq N$ 时, $x(n)=0$, 其中 N 为偶数。图 P5.23(a) 绘出了 $x(n)$ 的包络。由 $x(n)$ 构成 7 个序列 $g_1(n) \sim g_7(n)$, 如图 P5.23(b) 中所示。在表 P5.23-1 中的给出了九个 DFT 表达式, 请对图 P5.23(b) 中的每一个信号在表 P5.23-1 中找出它的 DFT。这里 DFT 的点数不少于每个序列的长度。

解:

$$(1) \quad g_1(n) = x(N-1-n)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} g_1(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(N-1-n)W_N^{kn} \end{aligned}$$

做变量代换 $i = N-1-n$, 上式变为:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=N-1}^0 x(i)W_N^{k(N-1-i)} \\ &= \sum_{i=N-1}^0 x(i)W_N^{-ki}W_N^{-k} \\ &= W_N^{-k} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)W_N^{-ki} \\ &= e^{j\frac{2\pi k}{N}} X(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}) \\ &= H_7(k) \end{aligned}$$

$$(2) \quad g_2(n) = (-1)^n x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2} n} x(n)$$

$$\text{故 } DFT[g_2(n)] = H_8(k)$$

$$\begin{aligned} (3) \quad DFT[g_3(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{\pi}{N}k(n+N)} \end{aligned}$$

当 N 为奇数时, 上式=0;

当 N 为偶数时, 上式 $= 2X(e^{j\frac{2\pi k}{2N}})$

故 $DFT[g_3(n)] = H_3(k)$.

$$(4) \quad DFT[g_4(n)] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x(n + \frac{N}{2})] e^{-j\frac{4\pi}{N}kn}$$

令 $n' = n + \frac{N}{2}$, 则:

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) e^{-j\frac{4\pi}{N}kn} = \sum_{n'=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n') e^{-j\frac{4\pi}{N}k(n' - \frac{N}{2})} = \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{4\pi}{N}kn}$$

$$\text{故 } DFT[g_4(n)] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) e^{-j\frac{4\pi}{N}kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{4\pi}{N}kn} = X(e^{j\frac{4\pi k}{N}}) = H_6(k)$$

$$(5) \quad DFT[g_5(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} = H_2(k)$$

$$(6) \quad DFT[g_6(n)] = \sum_{n=0}^{2N-1} g_6(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} \\ = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki}$$

当 $0 \leq k \leq N-1$ 时, $DFT[g_6(n)] = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$;

当 $N \leq k \leq 2N-1$ 时, $DFT[g_6(n)] = X(e^{j\frac{2\pi}{N}(k-N)})$

故 $DFT[g_6(n)] = H_5(k)$

(7)

24. 如果 $x(n)$ 是一个无限长序列, 它的离散时间傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 。 $x_1(n)$ 是一个 N 点的序列, 它的 N 点 DFT 为 $X_1(K)$, 且 $X_1(K) = X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$, $k=0,1,2,3,\dots,N-1$ 。试确定 $x(n)$ 与 $x_1(n)$ 的关系。

解: $\because X_1(k)$ 相当于对 $x(n)$ 的离散时间傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ 进行频域采样, 根据频域采样

$$\text{理论有: } x_1(n) = (\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN)) R_N(n)$$

25. 已知 $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$ ，它的离散时间傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 。 $y(n)$ 是一个 10 点的序列，即当 $n < 0$ 和 $n \geq 10$ 时 $y(n) = 0$ 。 $Y(k)$ 是 $y(n)$ 的 10 点 DFT，且 $Y(k)$ 就等于 $X(e^{j\omega})$ 的 10 个等间隔样本，即：

$$Y(k) = X(e^{j\frac{2\pi k}{10}}), k = 0, 1, 2, \dots, 9$$

求 $y(n)$

解：根据题 24 可知：

$$\begin{aligned} y(n) &= \left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+10r) \right) R_{10}(n) \\ &= \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+10r} \right) R_{10}(n) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10}} R_{10}(n) \end{aligned}$$

26. 已知 $x(n)$ 是 N 点有限长序列， $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ，现用以下方法将 $x(n)$ 的长度扩大 rN ，得到 rN 点的序列 $y(n)$ 。求出 $y(n)$ 的 rN 点 DFT 与 $X(k)$ 的关系。

$$(a) \quad y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases} \quad (b) \quad y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{r}), & n = ir, i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

解：(a) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{\frac{k}{r}n} = X\left(\frac{k}{r}\right)$$

(b)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{kn} = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) W_N^{ki} = X(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

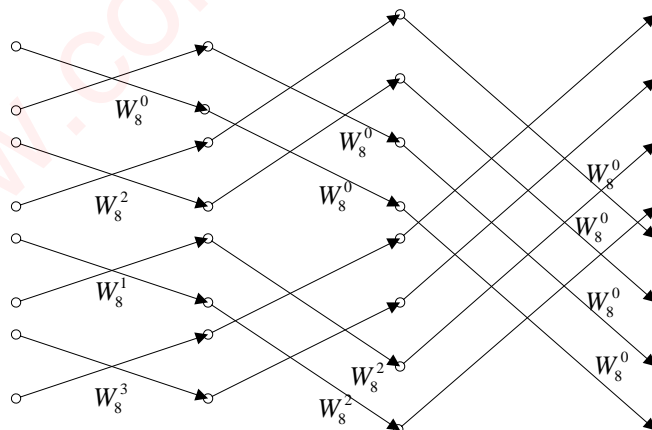
当 $k = (r-1)N, \dots, rN-1$ 时， $Y(k) = X(k-rN)$

27. 图 P5.27 是一个 8 点 FFT 流程，其输入是顺序排列的，而输出是码位倒置的，试判断该流程是 DIT 算法还是 DIF 算法，为什么？

解：是 DFT 算法。因为蝶形结表示 DFT 的运算在第一级蝶形完成，以后各级只是完成了

由 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 组合 N 点 OFT 的工作。

28. 设计一个 DIF 算法的 8 点 FFT 流程, 使输入码位倒置输出顺序排列。
解:



29. 设 $x(n)$ 是一个 M 点有限长序列, 即除 $0 \leq n \leq M-1$ 外, $x(n)=0$. $x(n)$ 的傅立叶变换为

$X(e^{j\omega})$, 今欲计算 $X(e^{j\omega})$ 的 N 个等间隔样本的值, $X(e^{j2\pi k/N}), 0 \leq k \leq N-1$, 问在

(a) $N \leq M$ (b) $N > M$

解:

(a) 先构造序列 $x_1(n) = (\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN))R_N(n)$, 然后计算 $x_1(n)$ 的 N 点 FFT 即可.

(b) 先将序列添加一系列等于零的点, 使得

$$x_0(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

再计算 $x_0(n)$ 的 N 点 FFT 即 $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})|_{z=z_k} = \sum x_0(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, 0 \leq k \leq N-1$ 即可

30. 用一个 N 点复序列的 FFT 运算可以一次完成两个 N 点实序列或一个 $2N$ 点实序列 DFT 运算。本题讨论这种算法。

(a) 假定 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是两个 N 点实序列, 我们构成复序列

$$h(n) = x(n) + jy(n)$$

(b) 如果 $x(n)$ 是一个 $2N$ 点实序列, 将其按奇偶位分组得到两个 N 点实序列, 其中:

$$x_1(n) = x(2n)$$

$$x_2(n) = x(2n+1), 0 \leq n \leq N-1$$

再组成 N 点复序列 $h(n) = x_1(n) + jx_2(n)$, 试用 $H(k)$ 表示 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 。如何从

$X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 得到全部的 $X(k)$?

解: (a) $H(k) = X(k) + jY(k)$

由于 $H^*(k) = X(k) - jY(k)$

$$\text{故 } X(k) = \frac{1}{2}[H(k) + H^*(k)]$$

$$Y(k) = \frac{1}{2j}[H(k) - H^*(k)]$$

当 $0 \leq k \leq N-1$ 时, $X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k)$

且有 $X(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k)$

$$\therefore X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k), & 0 \leq k \leq N-1 \\ X_1(k-N) + W_{2N}^k X_2(k-N), & N \leq k \leq 2N-1 \end{cases}$$

31. 有人提出了一种修正的 DFT, 它实际上是偏离开计算 DFT 的点来计算离散时间傅立叶变换的样本。也就是说, 如果 $X_M(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = (2\pi k/N) + \pi/N, k=0,1,2,\dots,N-1}$

假设 N 为偶数。

(a) 序列 $x(n)$ 的 N 点修正 DFT 相当于一个序列 $X_M(n)$ 的 N 点 DFT, 试由 $x(n)$ 构造出 $x_M(n)$ 。

(b) 如果 $x(n)$ 是实序列, 则其 DFT 的所有点并不都是独立的, 因为 DFT 具有共轭对称性。即 $X(k) = X^*((-k))_N R_N(k)$ 。因此, 当 $x(n)$ 是实序列时, 其修正 DFT 的所有点也不全是独立的, 试求出此时 $X_M(k)$ 中各点间的关系。

(c) 令 $R(k) = X_M(2k)$, 根据 (b) 中的结论证明可以从 $R(k)$ 确定出 $X_M(k)$ 。 $R(k)$ 可以看成是一个 $\frac{N}{2}$ 点的序列 $r(n)$ 的修正 DFT, 试求出联系 $r(n)$ 与 $x(n)$ 的表示式。

由此可以看出, 一个实序列 $x(n)$ 的修正 DFT 可以这样计算, 即先由 $x(n)$ 构造一个 $r(n)$, 然后计算 $r(n)$ 的 $\frac{N}{2}$ 点修正 DFT。

(d) 假定 $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ 都是长度为 N 的序列, $X_{1M}(k), X_{2M}(k), X_{3M}(k)$ 分别代表它们的修正 DFT, 如果

$$X_{3M}(k) = X_{1M}(k) X_{2M}(k)$$

试利用 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 表示 $x_3(n)$ 。所得到的 $x_3(n)$ 的表示式应该象圆周卷积的形式

那样（但并不相同）表示成 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的某种组合的单重和式。

(e) 上面所得的结果也可称为修正圆周卷积。如果 $n \geq \frac{N}{2}$ 时序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都等于

零，试证明 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的修正圆周卷积等于 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性卷积。

解：(a) $\because X_M(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}+\frac{\pi}{N}}, k=0,1,2,3,\dots,N-1$

$$\therefore X_M(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(\frac{2\pi k}{N}+\frac{\pi}{N})n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{\pi}{N}n} \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$\therefore X_M(n) = x(n) e^{-j\frac{\pi}{N}n}$$

(b) $X_M(k) = X_M^*(N-k-1)$

(c) $\because X_M(k) = X_M^*(N-k-1)$

\therefore 当 k 取偶数时，上式左边对应于序列的偶数点部分，右边对应于序列的奇数点部分，从而可以由序列的偶数点部分获取整个序列，从而由 $R(k)$ 确定出 $X_M(k)$ 。

因为 $R(k) = X_M(2k)$ ，所以 $R(k)$ 可以看成 $X_M(k)$ 的二抽取过程，频域的抽取导致时域的周期延拓。故

$$r(n) = \left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_M(n+rN/2) \right) R_{\frac{N}{2}}(n) = \left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN/2) e^{-j\frac{\pi}{N}(n+rN/2)} \right) R_{\frac{N}{2}}(n)$$

(d) 由于 $X_{1M}(k), X_{2M}(k), X_{3M}(k)$ 可以看成新的序列 $x_{1M}(n), x_{2M}(n), x_{3M}(n)$ 的

DFT，则根据 DFT 的性质，有：

$$x_3(n) e^{-j\frac{\pi}{N}n} = \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) e^{-j\frac{\pi}{N}m} \overline{x_2(n-m) e^{-j\frac{\pi}{N}(n-m)}} \right) R_N(n)$$

$$\therefore x_3(n) = \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) e^{j\frac{\pi}{N}(n-m)} (x_2(n-m) e^{-j\frac{\pi}{N}(n-m)}) \right) R_N(n)$$

$$\therefore x_2(n-m) e^{-j\frac{\pi}{N}(n-m)} \text{ 表示将序列 } x_2(n) e^{-j\frac{\pi}{N}n} \text{ 以 } N \text{ 为周期延拓后再移位 } m$$

个单位，故： $x_2(n-m)e^{-j\frac{\pi}{N}(n-m)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(n-kN-m)e^{-j\frac{\pi}{N}(n-kN-m)}$ ，从而有：

$$\begin{aligned} x_3(n) &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) e^{j\frac{\pi}{N}(n-m)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(n-kN-m) e^{-j\frac{\pi}{N}(n-kN-m)} \right) R_N(n) \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-kN-m) e^{-jk\pi} \right) R_N(n) \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-kN-m) (-1)^k \right) R_N(n) \end{aligned}$$

显然，上式可以看成某种组合的单重和式，与圆周卷积类似，但又不完全一样。

(e) 令 $f_L(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m)$ ，则：

$$x_3(n) = (f_L(n) - f_L(n-N) - f_L(n+N) + f_L(n-2N) + f_L(n+2N) + \dots) R_N(n)$$

由于 $n \geq \frac{N}{2}$ 时序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都等于零，故线性卷积 $f_L(n)$ 仅在 $0, \dots, N-1$ 上有非零值。故修正圆周卷积等于线性卷积。

32. 假设 $x_1(n), x_2(n), x_3(n), x_4(n)$ 是四个 N 点实序列，它们的 DFT 分别为 $X_1(k), X_2(k), X_3(k), X_4(k)$ 。如果 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 是圆周偶对称的； $x_3(n)$ 与 $x_4(n)$ 是圆周奇对称的，即：

$$x_1(n) = x_1((N-n))_N R_N(n), x_2(n) = x_2((N-n))_N R_N(n)$$

$$x_3(n) = -x_3((N-n))_N R_N(n), x_4(n) = -x_4((N-n))_N R_N(n)$$

我们可以通过一个 N 点复序列的 FFT 运算来计算上述四个序列的 DFT。本题就讨论这种算法。

(a) 由 $x_1(n)$ 和 $x_3(n)$ 构成序列 $y_1(n) = x_1(n) + x_3(n)$ ，如果 $Y_1(k)$ 是 $y_1(n)$ 的 DFT，试问如何从 $Y_1(k)$ 恢复 $X_1(k)$ 和 $X_3(k)$ 。

(b) 类似地，可以构成实序列 $y_2(n) = x_2(n) + x_4(n)$ ，并将 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 组合成、复序列

列 $y_3(n) = y_1(n) + jy_2(n)$ 。试问如何由 $Y_3(k)$ 求出 $Y_1(k)$ 和 $Y_2(k)$ ，再利用(a)的结果，

说明如何从 $Y_3(k)$ 分别求得 $X_1(k), X_2(k), X_3(k)$ 和 $X_4(k)$ 。

(c) 假定 4 个序列都是圆周偶对称的，即：

$$x_i(n) = x_i((N-n))_N R_N(n), i = 1, 2, 3, 4$$

如果将其中 $x_3(n)$ 按下列方法组成 $u_3(n)$:

$$u_3(n) = [x_3((n+1))_N - x_3((n-1))_N] R_N(n)$$

证明 $u_3(n)$ 是圆周奇对称的, 即: $u_3(n) = -u_3((N-n))_N R_N(n)$.

(d) 若 $U_3(k)$ 是 $u_3(n)$ 的 DFT, 试利用 $X_3(k)$ 求得 $U_3(k)$ 。

(e) 利用 (c) 的方法可以组成 N 点实序列 $y_1(n) = x_1(n) + u_3(n)$, 试确定如何从 $Y_1(k)$ 恢复 $X_1(k)$ 和 $X_3(k)$ 。

(f) 现在构成复序列 $y_3(n) = y_1(n) + jy_2(n)$, 其中:

$$y_1(n) = x_1(n) + u_3(n), y_2(n) = x_2(n) + u_4(n)$$

$$u_3(n) = [x_3((n+1))_N - x_3((n-1))_N] R_N(n)$$

$$u_4(n) = [x_4((n+1))_N - x_4((n-1))_N] R_N(n)$$

试确定如何从 $Y_3(k)$ 得到 $X_1(k), X_2(k), X_3(k)$ 和 $X_4(k)$ 。应当指出, 此时不能得到

$X_3(0)$ 和 $X_4(0)$ 。当 N 为偶数时, 也不能得到 $X_3(\frac{N}{2})$ 和 $X_4(\frac{N}{2})$ 。

(g) 证明不需要任何乘法就可以算出 $k=0$ 或 $k=\frac{N}{2}$ 时的 $X_3(k)$ 和 $X_4(k)$ 。

解: (a) $\because x_1(n) = x_1((N-n))_N R_N(n), x_3(n) = -X_3((N-n))_N R_N(n)$

$\therefore x_1(n)$ 的 DFT 为实数, $x_3(n)$ 的 DFT 为虚数。

故有:

$$x_1(n) = IDFT[\text{Re}(Y_1(k))]$$

$$x_3(n) = IDFT[\text{Im}(Y_1(k))]$$

(b) 构造 $Y_3(k)$ 的圆周共轭偶部和圆周共轭奇部, 有:

$$Y_{3e}(k) = \frac{1}{2}[Y_3(k) + Y_3^*(N-k)]$$

$$Y_{3o}(k) = \frac{1}{2}[Y_3(k) - Y_3^*(N-k)]$$

根据 DFT 的性质有:

$$IDFT[Y_{3e}(k)] = y_1(n)$$

$$IDFT[Y_{3o}(k)] = jy_2(n)$$

在获得 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 的值以后, 再利用 (a) 的结论可以获得

$X_1(k), X_2(k), X_3(k)$ 和 $X_4(k)$ 。

$$(c) \quad \because u_3(n) = [x_3((n+1))_N - x_3((n-1))_N]R_N(n)$$

$$\begin{aligned} \therefore u_3((N-n))_N R_N(n) &= [x_3((N-n+1))_N - x_3((N-n-1))_N]R_N(n) \\ &= [x_3((N-(n-1)))_N - x_3((N-(n+1)))_N]R_N(n) \end{aligned}$$

又 $\because x_3(n)$ 为圆周偶对称, 所以有:

$$u_3((N-n))_N R_N(n) = [x_3((n-1))_N - x_3((n+1))_N]R_N(n) = -u_3(n)$$

故 $u_3(n)$ 是圆周奇对称的。

$$(d) \quad U_3(k) = W_N^{-k} X_3(k) - W_N^k X_3(k)$$

(e) $y_1(n) = x_1(n) + u_3(n)$, 其中, $x_1(n)$ 为圆周偶对称序列, $u_3(n)$ 为圆周奇对称序列,

则根据 DFT 的性质有:

$$\operatorname{Re}(Y_1(k)) = X_1(k)$$

$$\operatorname{Im}(Y_1(k)) = U_3(k)$$

再利用 (d) 的性质可以获得 $X_3(k)$ 。

(f) 构造 $Y_3(k)$ 的圆周共轭偶部和圆周共轭奇部, 有:

$$Y_{3e}(k) = \frac{1}{2}[Y_3(k) + Y_3^*(N-k)]$$

$$Y_{3o}(k) = \frac{1}{2}[Y_3(k) - Y_3^*(N-k)]$$

则根据 DFT 的性质, 有: $Y_1(k) = Y_{3e}(k), Y_2(k) = Y_{3o}(k)$ 。

$$\text{又 } X_1(k) = \operatorname{Re}[Y_{3e}(k)], X_2(k) = \operatorname{Re}[Y_{3o}(k)]$$

$$U_3(k) = \operatorname{Im}[Y_{3e}(k)], U_4(k) = \operatorname{Im}[Y_{3o}(k)]$$

由 (d) 知:

$$X_3(k) = U_3(k)/(W_N^{-k} - W_N^k)$$

$$X_4(k) = U_4(k)/(W_N^{-k} - W_N^k)$$

当 $k=0$ 时, $W_N^{-k} - W_N^k = 0$;

当 $k = \frac{N}{2}$ 且 N 为偶数时也有 $W_N^{-k} - W_N^k = 0$ 。

故无法得到 $X_3(0), X_4(0), X_3(\frac{N}{2}), X_4(\frac{N}{2})$

(g) 当 $k = 0$ 时, $X_3(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$, 故不需要乘法。

当 $k = \frac{N}{2}$ 时, $X_3(\frac{N}{2}) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x_3(n)$, 也不需要乘法。

对 $X_4(k)$ 上述结论同样成立。

33. 如果一个 LTI 系统的单位脉冲响应为 $h(n) = (\frac{1}{2})^{|n|}$, 对下列输入信号求该系统响应 $y(n)$ 的傅立叶级数表达式:

(a) $x(n) = \sin(\frac{3\pi n}{4})$

(b) $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4k)$

(c) $x(n)$ 是周期为 6 的信号, 并且

$$x(n) = \begin{cases} 1, n = 0, \pm 1 \\ 0, n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$$

(d) $x(n) = (-1)^n + j^n$

解:

$$\because h[n] = (\frac{1}{2})^{|n|} = (\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{1}{2})^{-n} u[-n] - \delta[n]$$

$$\therefore H(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}} - 1$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} (e^{j\frac{3\pi}{4}n} - e^{-j\frac{3\pi}{4}n}), N = 8, \text{ 于是有}$$

(a) $a_3 = \frac{1}{2j}; a_{-3} = -\frac{1}{2j}$, 其余 $a_k = 0, (-3 \leq k \leq 4)$

$$\therefore y[n] = \frac{1}{2j} H(\frac{3\pi}{4}) e^{j\frac{3\pi}{4}n} - \frac{1}{2j} H(\frac{3\pi}{4}) e^{-j\frac{3\pi}{4}n} = \frac{3}{5+2\sqrt{2}} \sin(\frac{3\pi}{4}n)$$

(b) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4k], N = 4, \therefore a_k = \frac{1}{4} (0 \leq k \leq 3)$

令

$$y[n] = \sum_{k=0}^3 b_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}, \text{ 则可得}$$

$$b_k = a_k H(k\Omega_0) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}k}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}k}} - 1 \right), \Omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2 - \cos \frac{\pi}{2}k}{5 - 4 \cos \frac{\pi}{2}k} - 1 = \frac{3 + 3 \cos \frac{\pi}{2}k}{4 \cos \frac{\pi}{2}k - 5}$$

$$\therefore y[n] = \sum_{k=0}^3 b_k e^{jk\frac{\pi}{2}n} = -6 - \frac{3}{5}e^{j\frac{\pi}{2}n} - \frac{3}{5}e^{-j\frac{\pi}{2}n} = -6 - \frac{6}{5}\cos \frac{\pi}{2}n$$

$$(c) \quad a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=-1}^1 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6} (1 + e^{-j\frac{\pi}{3}k} + e^{j\frac{\pi}{3}k}) = \frac{1}{6} (1 + 2 \cos \frac{\pi}{3}k)$$

$$\therefore b_k = \frac{1}{6} (1 + 2 \cos \frac{\pi}{3}k) \left[\frac{4(2 - \cos \frac{\pi}{3}k)}{5 - \cos \frac{\pi}{3}k} - 1 \right]$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1 + 3 \cos \frac{\pi}{3}k + 2 \cos^2 \frac{\pi}{3}k}{\cos \frac{\pi}{3}k - 5}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^5 \frac{2}{3} \left[\frac{1 + 3 \cos \frac{\pi}{3}k + \cos^2 \frac{\pi}{3}k}{\cos \frac{\pi}{3}k - 5} \right] e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

(d)

$$\therefore x[n] = j^n + (-1)^n = e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\pi n}, N = 4$$

$$\therefore a_1 = 1, a_2 = 1, a_0 = a_3 = 0; \text{ 由 } b_k = a_k H(k\Omega_0) \text{ 可得}$$

$$b_0 = b_3 = 0, b_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/2}} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$b_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\pi}} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore y[n] = \frac{3}{5}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{3}e^{j\pi n} = \frac{3}{5}(j)^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

34. 已知某离散时间 LTI 系统得单位脉冲响应为 $h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, 对下列输入信号求该系统得输出响应 $y(n)$:

$$(a) x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) \quad (b) x(n) = (-1)^n \quad (c) x(n) = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \quad (d) x(n) = \cos(\pi n/2)$$

$$\text{解: (a) } x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \quad X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} \frac{1}{(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega})}$$

$$= \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{3}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore y(n) = [-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n]u[n]$$

$$(b) x[n] = (-1)^n = e^{j\pi n}, X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \pi - 2k\pi)$$

$$Y(\Omega) = \frac{4\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \pi - 2k\pi), \therefore y[n] = \frac{2}{3}(-1)^n$$

$$(c) \because \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} = X_1(\Omega)$$

$$n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \longleftrightarrow j \frac{d}{d\Omega} X_1(\Omega) \therefore X(\Omega) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$$

$$= \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})} - \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$$

$$\therefore y[n] = [4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n - (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n]u[n]$$

$$(d) \because h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \therefore H(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$x(n) = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n})$$

$$\therefore y(n) = \frac{1}{2}H\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}H\left(-\frac{\pi}{2}\right)e^{-j\frac{\pi}{2}n} = \frac{4\cos\frac{\pi}{2}n + 2\sin\frac{\pi}{2}n}{5}$$

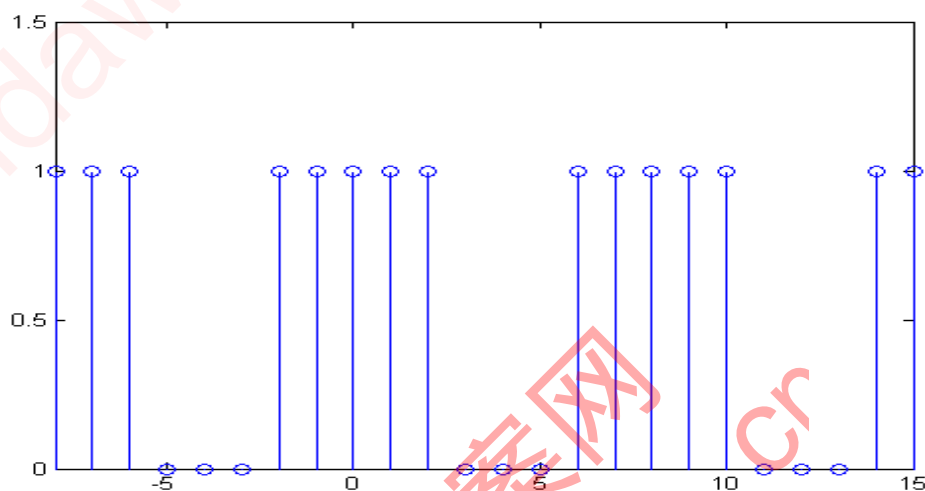
35. 某离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应为 $h(n) = \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}$ 。对下列每一个输入，求该

系统的输出。

$$(a) \quad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4k) \quad (b) \quad x(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$$

(c) $x(n)$ 为图 P5.35 所示的方波信号

(d) $x(n)$ 等于 $(-1)^n$ 乘以图 P5.35 所示的信号。



P5.35

解： (a) $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-8k)$, $N=8$, $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$; 同样只有直流分量与基波分量可以通过系统。

$$\therefore a_0 = \frac{1}{8}, a_1 = \frac{1}{8}. \quad \therefore y_2[n] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi n}{4}$$

$$(b) \quad y(n) + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) \quad (b)$$

$$X(\Omega) = e^{-j\Omega} + e^{j\Omega} = 2 \cos \Omega;$$

$$Y(\Omega) = \begin{cases} 2 \cos \Omega, & |\Omega| \leq \pi/3 \\ 0, & \frac{\pi}{3} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

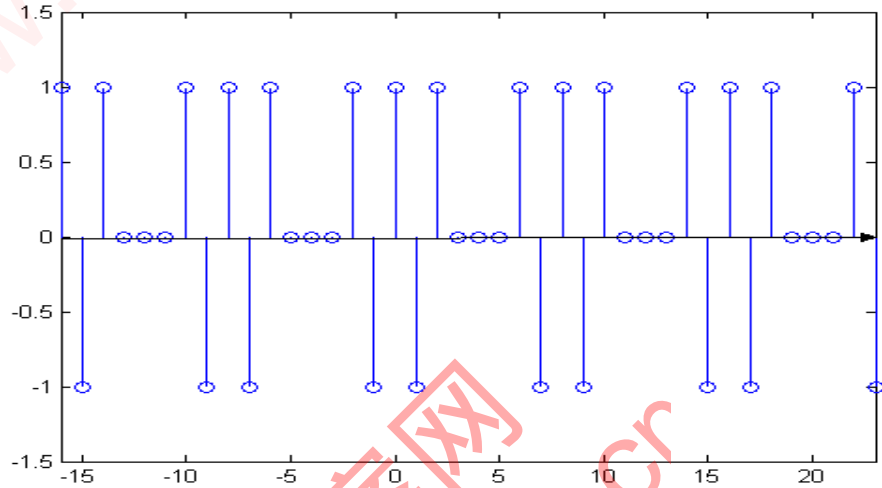
(c) $x(n)$ 的周期 $N=8$, $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$; \therefore 只有 $x[n]$ 的直流分量与基波分量可以通过系统。

$$\therefore a_1 = \frac{1}{8} \sum_{n=-2}^2 e^{-j\frac{\pi}{4}n} = \frac{e^{j\pi/2} - e^{-j3\pi/4}}{8(1 - e^{-j\pi/4})} = \frac{\sin 5\pi/8}{8 \sin \pi/6}$$

$$a_0 = \frac{5}{8}$$

$$\therefore y_1[n] = \frac{5}{8} + \frac{\sin(5\pi/8)}{4\sin(\pi/8)} \cos \frac{\pi n}{4}$$

(d) $x(n)$ 如图 P5.35-2 所示。 $N=8$, $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$; 只有直流分量与基波分量可以通过系统。



$$\therefore a_0 = \frac{1}{8}; a_1 = \frac{1}{8} \sum_{n=-2}^{+2} x[n] e^{-j\frac{\pi}{4}n} = \frac{1}{8} \frac{e^{j\pi/2} + e^{-j3\pi/4}}{1 + e^{-j\pi/4}} = \frac{1}{8} \frac{\cos(5\pi/8)}{\cos(\pi/8)}$$

$$\therefore y_3[n] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \frac{\cos 5\pi/8}{\cos(\pi/8)} \cos \frac{\pi n}{4}$$

36. 对下列差分方程所描述的因果 LTI 系统, 确定其逆系统的频率响应, 单位脉冲响应和描述逆系统的差分方程。

(a) $y(n) = x(n) - \frac{1}{4}x(n-1)$ (b) $y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$

(c) $y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{4}x(n-1)$

(d) $y(n) + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{4}x(n-1) - \frac{1}{8}x(n-2)$

(e) $y(n) + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n)$

(f) $y(n) + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$

解: (a) $y(n) = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1], H(\Omega) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}$

$$G(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}; g[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

逆系统的差分方程： $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$

$$(b) \quad y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], H(\Omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore G(\Omega) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}; g(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

逆系统的差分方程为： $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$

$$(d) \quad y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

$$H(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}{1 + \frac{5}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

$$\therefore G(\Omega) = \frac{1 + \frac{5}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}{(1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + 1$$

$$g[n] = \delta[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

逆系统的差分方程为：

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + \frac{5}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

(e)

$$y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n];$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 + \frac{5}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

$$\therefore G(\Omega) = 1 + \frac{5}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}$$

$$g[n] = \delta[n] + \frac{5}{4}\delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-2]$$

逆系统的差分方程为：

$$y[n] = x[n] + \frac{5}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

$$(f) \quad y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

$$H(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 + \frac{5}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

$$\therefore G(\Omega) = \frac{1 + \frac{5}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = 1 + \frac{7}{4}e^{-j\Omega} + \frac{\frac{3}{4}e^{-j2\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$g[n] = \delta[n] + \frac{7}{4}\delta[n-1] + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$$

逆系统的差分方程为：

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{5}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

37. 某离散时间 LTI 系统如图 P5.37(a)所示。其中 $h_1(n) = \delta(n) - \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$ 。 $H_2(e^{j\omega})$ 和

$H_3(e^{j\omega})$ 分别如图 P5.37(b),(c)所示, 如果该系统的输入具有图 P5.37(d) 所示的傅立叶变换,

求该系统的输出响应 $y(n)$ 。

解：根据图 P5.37-1(a)所得：

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] + (x[n] - x[n] * h_1[n]) * h_3[n]$$

$$\therefore Y(\Omega) = X(\Omega)H_1(\Omega)H_2(\Omega) + X(\Omega)[1 - H_1(\Omega)]H_3(\Omega)$$

$$\text{即 } \therefore Y(\Omega) = X(\Omega)[H_1(\Omega)H_2(\Omega) + [1 - H_1(\Omega)]H_3(\Omega)]$$

$$\because h_1[n] = \delta[n] - \frac{\sin \pi n/2}{\pi n}, \therefore H_1(\Omega) = 1 - [u(\Omega + \frac{\pi}{2}) - u(\Omega - \frac{\pi}{2})], |\Omega| \leq \pi$$

$$H_1(\Omega)H_2(\Omega) = 2H_1(\Omega), |\Omega| \leq \pi$$

$$H_1(\Omega)H_3(\Omega) = 0, |\Omega| \leq \pi$$

$\therefore H(\Omega)$ 如图 PS5.37-1 (a) 所示。

$Y(\Omega)$ 如图 PS5.37-1(b)所示。

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 4 - \Omega \cos \Omega n d\Omega + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (4 - \frac{4}{\pi}\Omega) \cos \Omega n d\Omega$$

$$= \frac{4}{n\pi^2} [\Omega \sin \Omega n + \frac{1}{n} \cos \Omega n] \Big|_0^{\pi/2} + \frac{4}{n\pi} \sin \Omega n \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$- \frac{4}{n\pi^2} [\Omega \sin \Omega n + \frac{1}{n} \cos \Omega n] \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= Y(\Omega) = 2aX_1(\Omega) + 2bX_2(\Omega) + ae^{-j\Omega}X_1(\Omega) + be^{-j\Omega}X_2(\Omega)$$

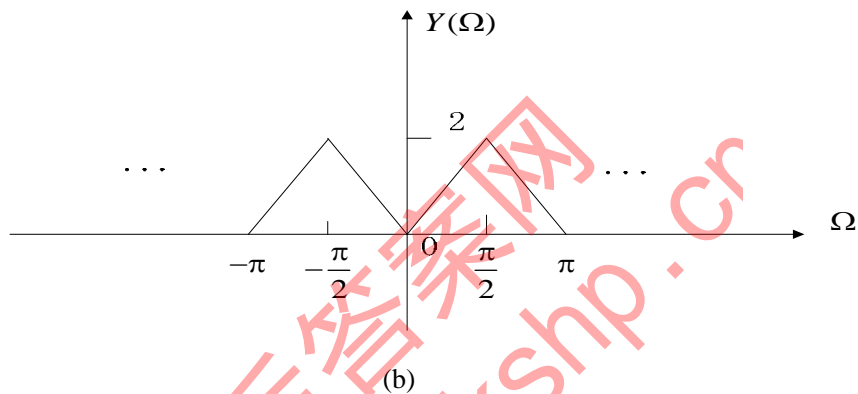
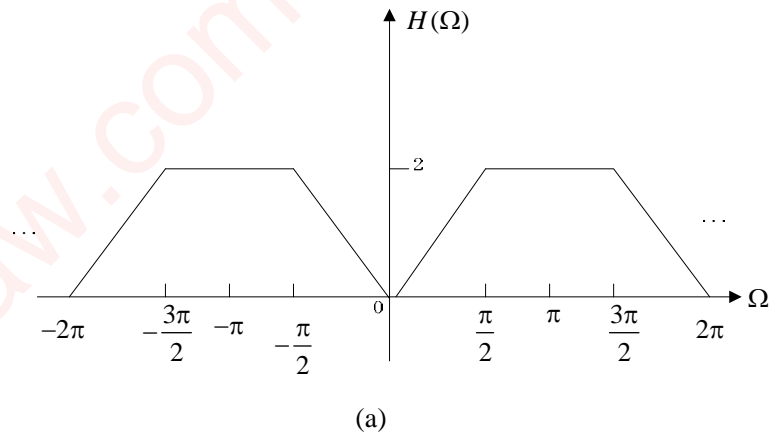


图 PS5.37-1

5.38 (1) 某离散时间系统得输入为 $x(n)$, 输出为 $y(n)$, 它们得傅立叶变换满足一下关系。

$$Y(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

(a) 该系统是线性得嘛? 为什么?

(b) 该系统是时不变得嘛? 为什么?

(c) 如果 $x(n) = \delta(n)$, 求 $y(n)$

(2) 如果一个离散时间系统得输入和输出得傅立叶变换满足以下关系:

$$Y(e^{j\omega}) = \int_{\omega-\pi/4}^{\omega+\pi/4} X(e^{j\omega}) d\omega$$

求出用 $x(n)$ 表示 $y(n)$ 得表达式。

解: (1) a. 设 $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, 则 $X(\Omega) = aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$, 代入 $Y(\Omega)$ 得:

$$Y(\Omega) = 2aX_1(\Omega) + 2bX_2(\Omega) + ae^{-j\Omega}X_1(\Omega) + be^{-j\Omega}X_2(\Omega)$$

$$Y(\Omega) = 2aX_1(\Omega) + 2bX_2(\Omega) + ae^{-j\Omega}X_1(\Omega) + be^{-j\Omega}X_2(\Omega)$$

$$-a \frac{dX_1(\Omega)}{d\Omega} - b \frac{dX_2(\Omega)}{d\Omega}$$

$$= aY_1(\Omega) + bY_2(\Omega);$$

∴ 系统是线性得

b. ∵ $x[n - n_0] \longleftrightarrow e^{-jn_0\Omega} X(\Omega)$, 代入 $Y(\Omega)$ 表达式中得到:

$$\hat{Y}(\Omega) = 2e^{-jn_0\Omega} X(\Omega) + e^{-jn_0(n_0+1)\Omega} X(\Omega) + jn_0e^{-jn_0\Omega} X(\Omega) - e^{-jn_0\Omega} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

$\neq Y(\Omega)e^{-jn_0\Omega}$, ∴ 系统是时变得。

c. 当 $x[n] = \delta[n]$ 时, $X(\Omega) = 1$; 代入 $Y(\Omega)$ 式中有

$$Y(\Omega) = 2 + e^{-j\Omega}; \therefore y[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1]$$

(2) 令 $Y(\Omega) = \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)H(\Omega - \theta)d\theta$, 可以看出:

当 $H(\Omega) = u(\Omega + \frac{\pi}{4}) - u(\Omega - \frac{\pi}{4})$ 时, 即有

$$Y(\Omega) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} X(\Omega)d\Omega \quad \therefore y[n] = 2\pi x[n] \cdot h[n]$$

$$\text{而 } h[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{4}n}{n\pi} \quad \therefore y[n] = \frac{2\pi x[n] \sin \frac{\pi}{4}n}{n}$$

39. (a) 如果一个离散时间 LTI 系统对输入信号

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

所产生得输出响应为: $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

求该系统得频率响应, 单位脉冲响应以及描述该系统得差分方程。

(b) 如果某离散时间 LTI 系统对输入 $(n+2)(1/2)^n u(n)$ 所产生得响应为 $(1/4)^n u(n)$, 为使该

系统产生得输出为 $\delta(n) - (-1/2)^n u(n)$, 应该给系统输入什么信号?

解: (a)

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}};$$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

(i)

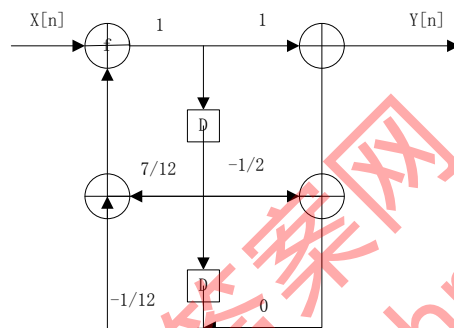
$$H(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore h[n] = [3(\frac{1}{4})^n - 2(\frac{1}{3})^n]u[n]$$

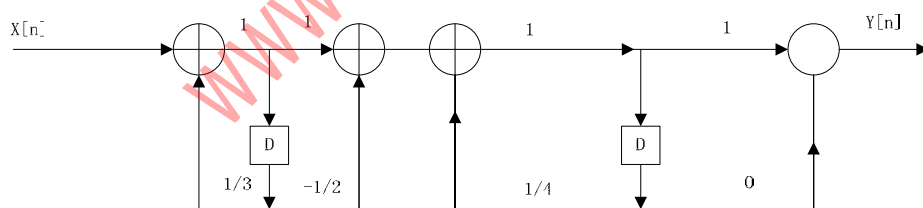
(ii) 由 $H(\Omega)$ 可得出差分方程:

$$y[n] - \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

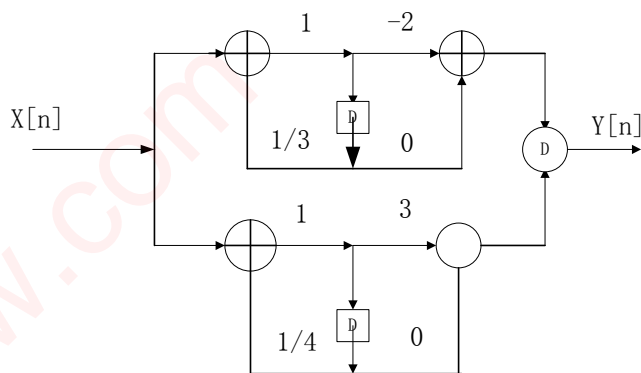
图 PS5.39



(a)



(b)



(c)

图 5.39

(b)

$$\therefore x_1[n] = (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\therefore X_1(\Omega) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \frac{2 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$Y_1(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}; \therefore H(\Omega) = \frac{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{2(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$$

$$\text{而 } Y(\Omega) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore X(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{H(\Omega)}$$

$$= \frac{e^{-j\Omega}(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}{4(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$= e^{-j\Omega} \left[\frac{9/16}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{5/16}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1/8}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2} \right]$$

$$x[n] = \left[\frac{9}{16} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{5}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{8} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] u(n-1)$$

40. 某因果 LTI 离散时间系统由下列差分方程描述

$$y(n) - ay(n-1) = bx(n) + x(n-1)$$

其中 a 是实数, 且 $|a| < 1$ 。

(a) 求 b 的值, 使该系统的频率响应对任何 ω 满足 $|H(e^{j\omega})| = 1$, 这样的系统称为全通系统。

(b) 当 $a = \frac{1}{2}$, b 取(a)中所求的值时, 概略画出 $0 \leq \omega \leq \pi$ 区间内 $H(e^{j\omega})$ 的相位曲线。

(c) 当 $a = -\frac{1}{2}$, b 取(a)中所求得的值时, 概略画出 $0 \leq \omega \leq \pi$ 区间内 $H(e^{j\omega})$ 的相位曲线。

(d) 如果输入为 $x(n) = (1/2)^n u(n)$, $a = -\frac{1}{2}$, b 取(a)中所求得的值时, 求该系统的输出, 并绘出输出的图形。从这里可以看出, 非线性相位对信号的影响。

解:

$$(a) \quad H(\Omega) = \frac{b + e^{-j\Omega}}{1 - ae^{-j\Omega}}, |H(\Omega)| = \sqrt{\frac{1 + b^2 + 2b \cos \Omega}{1 + a^2 - 2a \cos \Omega}}; \text{欲使对所有 } \Omega, |H(\Omega)| = 1, \text{ 则应有:}$$

$$b^2 + 2b \cos \Omega = a^2 - 2a \cos \Omega$$

\therefore 当 $b = -a$ 时, 可使 $|H(\Omega)| = 1$, 对所有 Ω 。

$$(b) \quad a = \frac{1}{2} \text{ 时, } b = -\frac{1}{2}; \quad H(\Omega) = \frac{-\frac{1}{2} + e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$\angle H(\Omega) = \tan^{-1} \frac{2 \sin \Omega}{1 - 2 \cos \Omega} - \tan^{-1} \frac{\sin \Omega}{2 - \cos \Omega}, \text{ 如图 PS5.40(a)所示。}$$

$$(c) \quad a = \frac{1}{2} \text{ 时, } b = -\frac{1}{2} \quad H(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

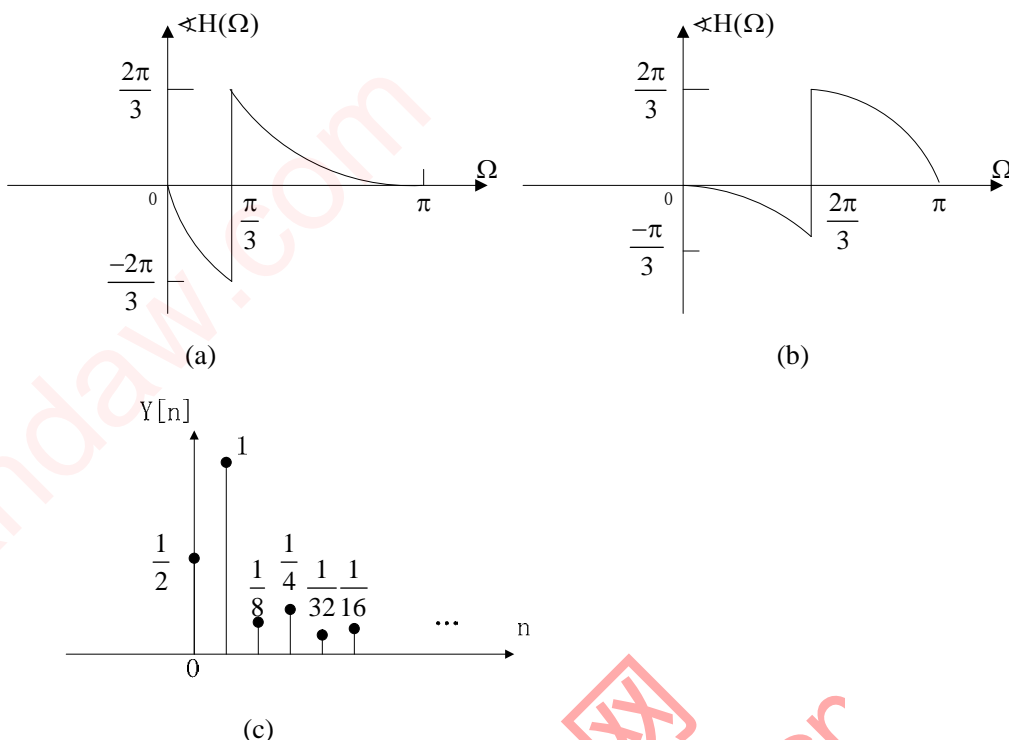
$$\angle H(\Omega) = \tan^{-1} \frac{\sin \Omega}{2 + \cos \Omega} - \tan^{-1} \frac{2 \sin \Omega}{1 + 2 \cos \Omega}, \text{ 如图 PS5.40(b)所示。}$$

$$(d) \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], a = -\frac{1}{2} \text{ 时, 有}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}, H(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{5/4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{3/4}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore y[n] = \left[\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}[5 - 3(-1)^n]u[n], \text{ 如图 PS5.40(c)所示。}$$



41. 两个离散时间 LTI 系统的频率响应分别为：

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1 + (1/2)e^{-j\omega}}{1 + (1/4)e^{-j\omega}} \quad H_2(e^{j\omega}) = \frac{(1/2) + e^{-j\omega}}{1 + (1/4)e^{-j\omega}}$$

- (a) 证明这两个系统的频率响应具有相同的模。即 $|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|$ ，但 $H_2(e^{j\omega})$ 的相位的绝对值大于 $H_1(e^{j\omega})$ 的相位的绝对值。
- (b) 求出这两个系统的单位脉冲响应和阶跃响应，并加以图示。
- (c) 证明 $H_2(e^{j\omega})$ 可表示为 $H_2(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})$ ，其中 $G(e^{j\omega})$ 是一个全通系统，频率响应为 $H_1(e^{j\omega})$ 形式的系统通常成为最小相移系统。这表明：非最小相位系统总可以分解成最小相移系统与全通系统的机联。

解：(a) $H_1(\Omega) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}, H_2(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$

$$|H_1(\Omega)| = \sqrt{\frac{5/4 + \cos \Omega}{17/16 + \frac{1}{2} \cos \Omega}}, |H_2(\Omega)| = \sqrt{\frac{5/4 + \cos \Omega}{17/16 + \frac{1}{2} \cos \Omega}}$$

$$\therefore |H_1(\Omega)| = |H_2(\Omega)|$$

$\therefore H_1(\Omega)$ 与 $H_2(\Omega)$ 的分母相同，只需比较它们的分子相角。显然有：

$$\angle H_1(\Omega)_N = \tan^{-1} \frac{\sin \Omega}{2 + \cos \Omega}; \angle H_2(\Omega)_N = \tan^{-1} \frac{\sin \Omega}{\frac{1}{2} + \cos \Omega}$$

在 $0 \leq \Omega \leq \pi$ 区间内, $2 + \cos \Omega > \frac{1}{2} + \cos \Omega$

$\therefore |\angle H_1(\Omega)_N| < |\angle H_2(\Omega)_N|$, 从而有

$$|\angle H_1(\Omega)_N| < |\angle H_2(\Omega)_N|$$

(b)

$$\therefore h_1[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] = 2\delta[n] - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$H_2(\Omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore h_2[n] = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] = 4\delta[n] - \frac{7}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

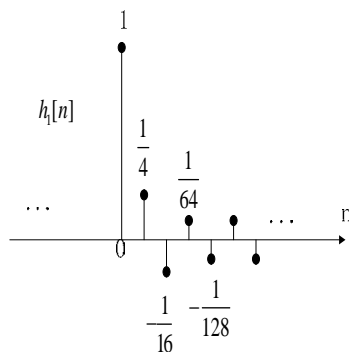
$$s_1[n] = \sum_{m=0}^n h_1[m] = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{4}} u[n] + \frac{1}{2} \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{4}} u[n-1]$$

$$= \left[\frac{6}{5} + \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] u[n]$$

$$s_2[n] = \sum_{m=0}^n h_2[m] = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{4}} u[n] + \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{4}} u[n-1]$$

$$= \left[\frac{6}{5} + \frac{14}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] u[n]$$

两系统的脉冲响应与阶跃响应如图 PS5.45 所示。



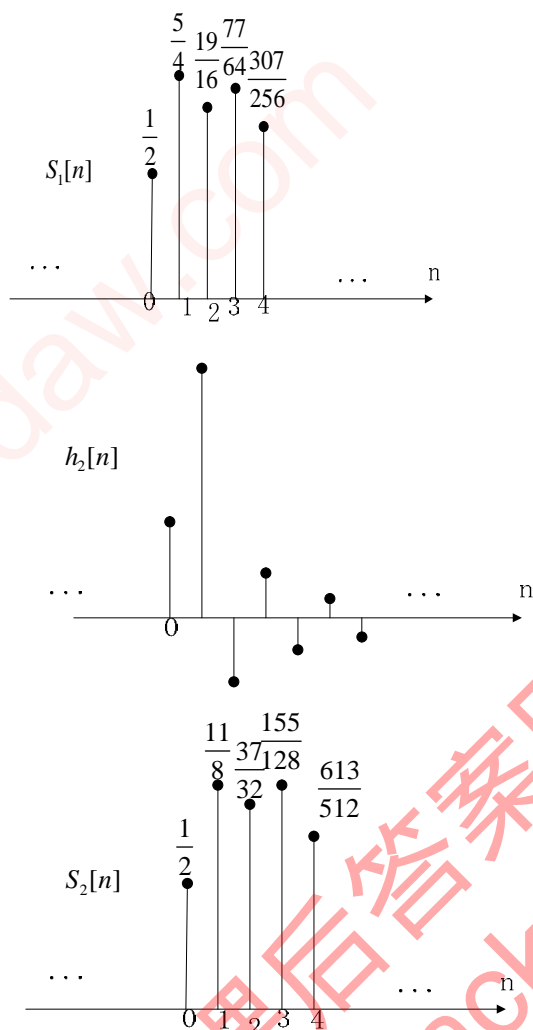


图 PS5.45

$$(c) \quad H_2(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = H_1(\Omega)G(\Omega)$$

$$\text{其中, } G(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$|G(\Omega)| = \sqrt{\frac{\frac{5}{4} + \cos \Omega}{\frac{5}{4} + \cos \Omega}} = 1$$

$\therefore G(\Omega)$ 是一个全通系统。这就证明了：非最小相移系统可以分解成最小相移系统与一个全通系统的级联

第六章习题答案

1. 用定义计算下列信号的拉氏变换及其收敛域，并画出零极点图和收敛域。

(a) $e^{at}u(t), a > 0$ (b) $te^{at}u(t), a > 0$ (c) $e^{-at}u(-t), a > 0$ (d) $[\cos(\Omega_c t)]u(-t)$

(e) $[\cos(\Omega_c t + \theta)]u(-t)$ (f) $[e^{-at} \sin(\Omega_c t)]u(t), a > 0$ (g) $\delta(at - b), a$ 和 b 为实数

(h) $x(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t > 0 \\ e^{3t}, & t < 0 \end{cases}$

解: (a) $\sigma \frac{1}{s-a}, \text{Re}\{s\} > a$, 见图(a)

(b) $\frac{1}{(s-a)^2}, \text{Re}\{s\} > a$, 见图(a)

(c) $-\frac{1}{s+a}, \text{Re}\{s\} < -a$, 见图(b)

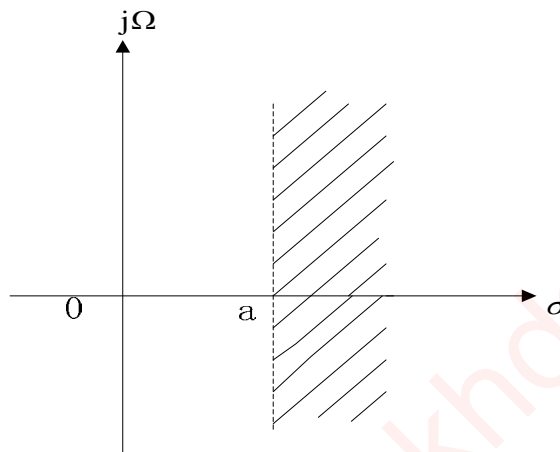
(d) $-\frac{s}{s^2 + \Omega_c^2}, \text{Re}\{s\} < -a$, 见图(c)

(e) $\frac{s \cos \theta - \Omega_c \sin \theta}{s^2 + \Omega_c^2}, \text{Re}\{s\} > 0$, 见图(d)

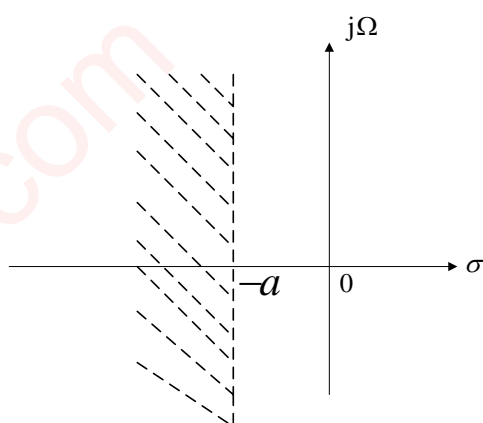
(f) $\frac{\Omega_c}{(a+s)^2 + \Omega_c^2}, \text{Re}\{s\} > -a$, 见图(e)

(g) $\frac{1}{|a|} e^{-\frac{sb}{a^2}}, \text{整个 } s \text{ 平面}$

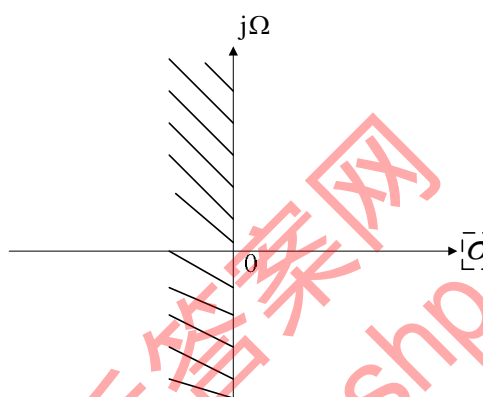
(h) $\frac{1}{3-s} + \frac{1}{2+s}, -2 < \text{Re}\{s\} < 3$, 见图(f)



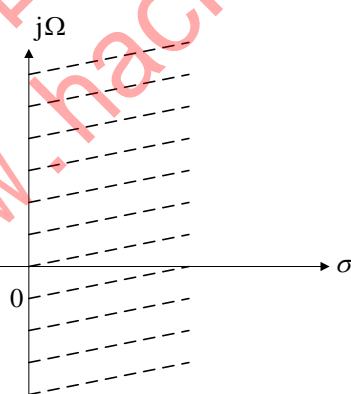
(a)



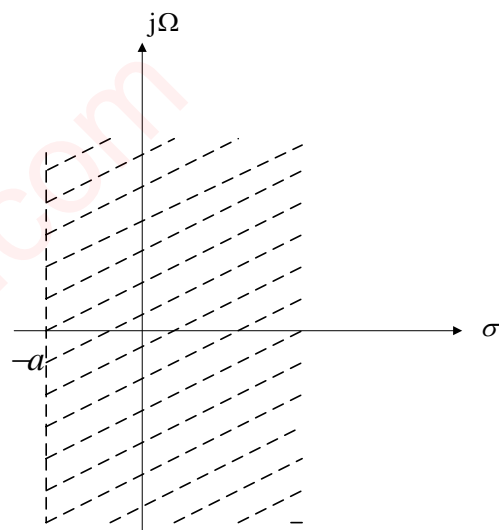
(b)



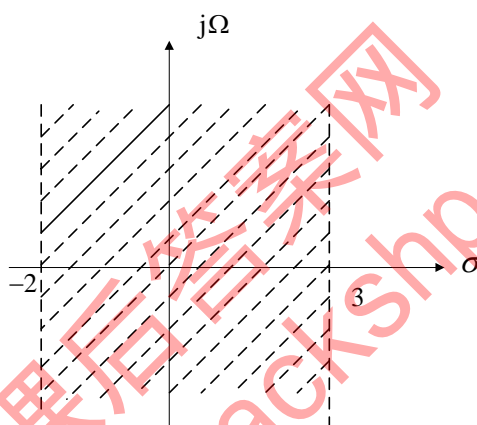
(c)



(d)

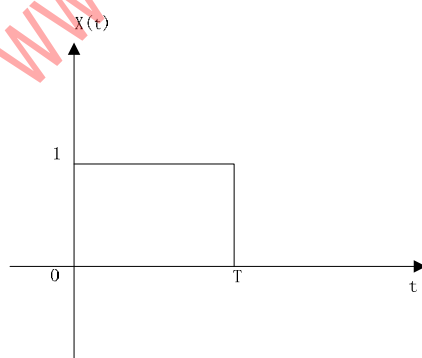


(e)

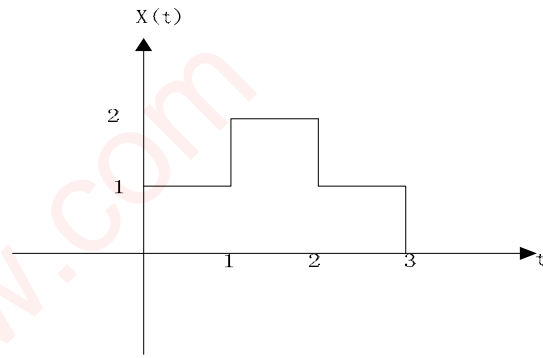


(f)

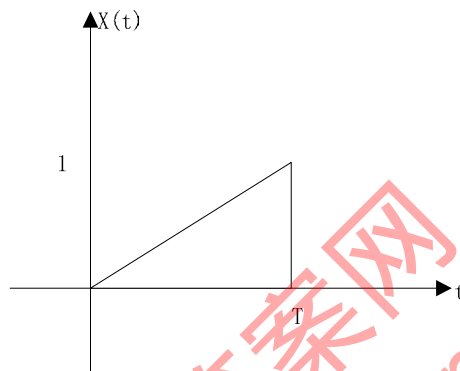
2. 用定义计算图 P6.2 所示各信号的拉氏变换式。



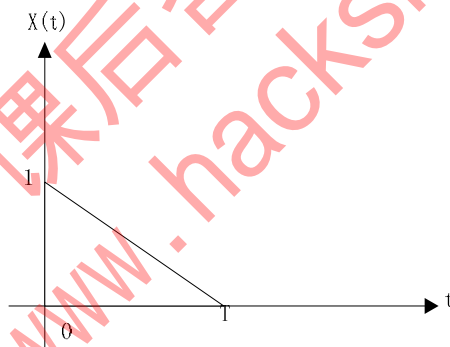
(a)



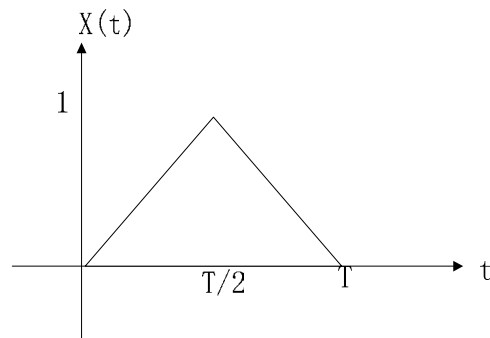
(b)



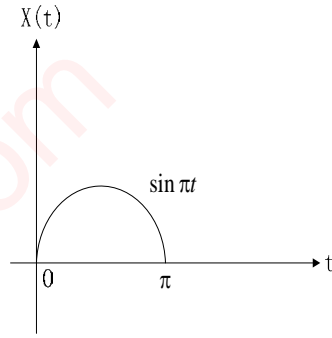
(c)



(d)



(e)



(f)

解:

(a)

$$\int_0^{\pi} \sin t e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t [u(t) - u(t - \pi)] e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-s\pi} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1 - e^{-s\pi}}{s^2 + 1} \int_0^T e^{-st} dt = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT})$$

(b)

$$\int_0^1 e^{-st} dt + 2 \int_1^2 e^{-st} dt + \int_2^3 e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} (1 - e^{-s}) + \frac{2}{s} (e^{-s} - e^{-2s}) + \frac{1}{s} (e^{-2s} - e^{-3s})$$

$$= \frac{1}{s} (1 + e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s})$$

(c) $\frac{1}{T} \int_0^T t e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{Ts^2} (1 - e^{-sT})$

(d)

$$\int_0^T (-\frac{1}{T}t + 1) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} e^{-sT} - \frac{1}{Ts^2} (1 - e^{-sT}) + \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{Ts^2} (1 - e^{-sT})$$

(e) $X(s) = -\frac{1}{s} e^{-\frac{sT}{2}} + \frac{2}{Ts^2} (1 - e^{-\frac{sT}{2}}) + e^{-2s} [\frac{1}{s} - \frac{2}{Ts^2} (1 - e^{-\frac{sT}{2}})]$

(f)

$$\int_0^{\pi} \sin t e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t [u(t) - u(t - \pi)] e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-s\pi} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1 - e^{-s\pi}}{s^2 + 1}$$

3. 对图 P6.3 所示的每一个零极点图, 确定满足下述情况的收敛域。

(a) $x(t)$ 的傅立叶变换存在。 (b) $x(t)e^{2t}$ 的傅立叶变换存在

(c) $x(t) = 0, t > 0$ (d) $x(t) = 0, t < 5$

解: (a) $x(t)$ 的傅立叶变换存在, 则 $s = j\Omega$ 应在 $X(s)$ 的收敛域内

图(a) $-1 < \operatorname{Re}\{s\} < 1$

图(b) $-3 < \operatorname{Re}\{s\} < 3$

图(c) $\operatorname{Re}\{s\} > -1$

(b) $x(t)e^{2t}$ 的傅立叶变换存在, 则 $s = -2$ 轴一定在 $x(s)$ 的收敛域内

图(a), $\operatorname{Re}\{s\} < -1$

图(b), $-3 < \operatorname{Re}\{s\} < 3$

图(c), $-3 < \operatorname{Re}\{s\} < -1$

(c) $x(t)=0, t>0$, 则 $x(t)$ 为左边信号

图(a), $\operatorname{Re}\{s\} < -1$

图(b), $\operatorname{Re}\{s\} < -3$

图(c), $\operatorname{Re}\{s\} < -3$

(d) $x(t)=0, t<5$, 则 $x(t)$ 为右边信号

图(a), $\operatorname{Re}\{s\} > 1$

图(b), $\operatorname{Re}\{s\} > 3$

图(c), $\operatorname{Re}\{s\} > -1$

4. 针对图 P6.4 所示的每一个信号的有理拉氏变换的零极点图, 确定:

(a) 拉氏变换式。

(b) 零极点图可能的收敛域, 并指出相应信号的特征。

解: 图(a) 拉氏变换为 $X(s) = k \cdot \frac{(s-1)}{(s+3)(s+1)}$, k 为常数。

收敛域 $\operatorname{Re}\{s\} < -3$ 时, 信号为左边信号

为 $\operatorname{Re}\{s\} < -1$ 时, 信号为右边信号。

为 $-3 < \operatorname{Re}\{s\} < -1$ 时, 信号为双边信号

图(b) 拉氏变换为 $X(s) = k \cdot \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)(s-1)}$

收敛域 $\operatorname{Re}\{s\} < -2$ 时, 信号为左边信号

为 $\text{Re}\{s\} > 1$ 时, 信号为右边信号。

为 $\left. \begin{array}{l} -2 < \text{Re}\{s\} < -1 \text{ 时} \\ -1 < \text{Re}\{s\} < 1 \text{ 时} \end{array} \right\}$ 信号为双边信号时, 信号为双边信号

5. 在正文中我们提到, 虽然拉氏变换的收敛性比傅立叶变换收敛性要强, 但并不是任何信号的拉氏变换都存在。对下列信号, 判断拉氏变换是否存在。若存在, 请求出其拉氏变换及其收敛域

(a) $tu(t)$ (b) $t'u(t)$ (c) $te^{-2t}u(t)$ (d) $e^{t^2}u(t)$ (e) $e^{e^t}u(t)$ (f) $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t < 0 \\ e^t, & t > 0 \end{cases}$

解: (a) 存在 $\frac{1}{s^2}, \text{Re}\{s\} > 0$

(b)

(c) 存在 $\frac{1}{(s+2)^2}, \text{Re}\{s\} > -2$

(d) (e) (f) 不存在

6. 若已知 $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, 收敛域为 $\text{Re}\{s\} > 0$, 试利用拉氏变换性质, 求下列信号的拉氏变换及其收敛域。

(a) $e^{-2t}u(t) [\cos(\Omega_c t)]u(t)$ (b) $[\sin(\Omega_c t) + \cos(\Omega_c t)]u(t)$ (c) $[e^{-\alpha t} \cos(\beta t)]u(t)$

(d) $[t \cos(\Omega_c t)]u(t)$ (e) $[te^{-\alpha t} \cos(\Omega_c t)]u(t)$ (f) $e^{-t}u(t-T)$

(g) $te^{-t}u(t-T)$ (h) $t\delta(t)$ (i) $t^2\delta(t)$ (j) $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t-kT)$ (k) $t^2u(t-1)$

(l) $e^{-t+t_0}u(t-T)$ (m) $[t^2 \cos(\Omega_c t)]u(t)$ (n) $[\sin(\Omega_c t)]u(t-T)$

(o) $\int_0^t \sin(\Omega_c \tau) d\tau$ (p) $t^{-1}(1-e^{-\alpha t})u(t)$

解: (a) $\frac{s}{s^2 + \Omega_c^2}, \text{Re}\{s\} > 0$

(b) $\frac{s + \Omega_c}{s^2 + \Omega_c^2}, \text{Re}\{s\} > 0$

(c) $\frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 + \Omega_c^2}, \text{Re}\{s\} > -\alpha$

(d) $\frac{s^2 - \Omega_c^2}{(s^2 + \Omega_c^2)^2}, \text{Re}\{s\} > 0$

$$(e) \frac{(s+\beta)^2 - \Omega_c^2}{(s+\beta)^2 + \Omega_c^2}, \operatorname{Re}\{s\} > -\beta$$

$$(f) \frac{e^{-(s+1)T}}{s+1} \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$(g) \frac{Ts+T+1}{(s+1)^2} e^{-(s+1)T}, \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$(h) -1, \operatorname{Re}\{s\} \in R$$

$$(i) 1, \operatorname{Re}\{s\} \in R$$

$$(j) \frac{1}{1-ae^{-sT}}, |s| > \frac{\ln a}{T}$$

$$(k) e^{-s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{2}{s^3} \right), \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(l) e^{-t_0} \cdot \frac{e^{-(s+1)T}}{s+1}$$

$$(m) \frac{2s(3\Omega_c^2 - s^2)}{(s^2 + \Omega_c^2)^3}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(n) \frac{e^{-sT}}{(s^2 + \Omega_c^2)} (\Omega_c \cos \Omega_c T + s \cos \Omega_c T), \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(o) \frac{\Omega_c}{s(s^2 + \Omega_c^2)}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(p) \frac{a(2s+a)}{s^2(s+a)^2}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

7. 求图 P6.7 所示信号的拉氏变换式及收敛域。

$$(a) \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s})(1 - e^{-2s}), \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(b) \frac{a}{s} (1 - e^{-s}) + ae^{-s} \frac{1}{s+1}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(c) \frac{1}{s^2} e^{-st_0}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(d) \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2(1 - e^{-4s})}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

(e)

$$\left[\frac{\Omega_c}{s^2 + \Omega_c^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2 + \Omega_c^2} (\Omega_c \cos \Omega_c T + s \sin \Omega_c T) \right] \bigg/ (1 - e^{-\frac{2\pi}{\Omega_c} s}), \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$= \left(\frac{\Omega_c}{s^2 + \Omega_c^2} + \frac{e^{-\frac{\pi}{\Omega_c} s}}{s^2 + \Omega_c^2} \Omega_c \right) \bigg/ (1 - e^{-\frac{2\pi}{\Omega_c} s})$$

$$= \frac{\Omega_c}{s^2 + \Omega_c^2} \cdot \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi}{\Omega_c} s}}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(f) \frac{(1 - e^{-\frac{T}{2}s})^2}{s(1 - e^{-Ts})} = \frac{1 - e^{-\frac{T}{2}s}}{s(1 + e^{-\frac{T}{2}s})}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(g) \frac{(1 - e^{-(s+\frac{1}{\tau})})(1 - e^{-2s})}{(s + \frac{1}{\tau})(1 - e^{-4s})} = \frac{1 - e^{-(s+\frac{1}{\tau})}}{(s + \frac{1}{\tau})(1 - e^{-2s})}$$

8. 计算下列 $X(s)$ 的拉氏反变换:

$$(a) \frac{3s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$(\cos t - \cos 2t)u(t)$$

$$(b) \frac{2s + 3}{s^2 + 4s + 3}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$-(\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t})u(-t)$$

$$(c) \frac{s^2}{(2s + 1)(s - 3)}, \frac{1}{2} < \operatorname{Re}\{s\} < 3$$

$$-\frac{1}{T} \left[\frac{1}{4} e^{-\frac{t}{2}} u(t) + \frac{5}{2} \delta(t) + 2\delta'(t) + 9e^{3t} u(-t) \right]$$

$$(d) \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}, \operatorname{Re}\{s\} < -3$$

$$-2e^{-3t} u(-t) + e^{-2t} u(-t)$$

$$(e) \frac{s^2 - s + 1}{s^3 - s^2}, \operatorname{Re}\{s\} > 1$$

$$(-t + e^t)u(t)$$

$$(f) \frac{s+1}{s^2+5s+6}, \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$[e^{-t} \cos(2t)]u(t)$$

$$(g) \frac{-s+1}{s^3+s^2+4s+4}, -1 < \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

$$-\frac{2}{5} \cos 2tu(t) + \frac{3}{10} \sin 2tu(-t) + \frac{2}{5} e^{-t} u(t)$$

$$(h) \frac{s^3+s^2+1}{s^2+3s+1}, \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$3e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t) - 2\delta(t) + \delta'(t)$$

$$(i) \frac{s+3}{s^3+2s^2+2s}, -1 < \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{3s+4}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{3}{2} u(-t) - \frac{3}{2} e^{-t} \cos tu(t) - \frac{1}{2} e^{-t} \sin tu(t) \end{aligned}$$

$$(j) \frac{1}{s^2+9}, \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

$$-\frac{1}{3} \sin 3tu(-t)$$

9. 已知 LTI 系统的系统函数 $H(s)$ 及输入 $x(t)$, 求系统的响应 $y(t)$.

$$(a) H(s) = \frac{2s+3}{s^2+6s+8}, x(t) = u(t)$$

$$(b) H(s) = \frac{s+4}{s(s^2+3s+2)}, x(t) = e^{-t}u(t)$$

$$(c) H(s) = \frac{s^2+2s}{s(s^2+9)}, x(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$(d) H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}, x(t) = te^{-t}u(t)$$

$$\text{解: (a) } H(s) = \frac{3}{8} \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} - \frac{5}{8} \frac{1}{s+4}$$

$$y(t) = \frac{3}{8} u(t) + \frac{1}{4} e^{-2t} u(t) - \frac{5}{8} e^{-4t} u(t)$$

$$(b) H(s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{3s}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = 2u(t) - e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) - 3te^{-t}u(t)$$

$$(c) y(t) = \frac{1}{3} \sin 3tu(t)$$

$$(d) y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

10. 计算下列微积分方程描述的因果系统的系统函数 $H(s)$ 。若系统最初是松弛的，而且

$x(t) = u(t)$ ，求系统的响应 $y(t)$ 。

$$(a) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$(b) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

如果 $x(t)$ 为 $e^{-t}u(t)$ ，系统的响应 $y(t)$ 又是什么？

解： (a) $H(s) = \frac{1}{s+3}$

$$y(t) = \frac{1}{3}u(t) - \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$(b) H(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 5}$$

$$y(t) = e^{-2t} \sin tu(t)$$

当输入 $e^{-t}u(t)$ 时，

$$(a) y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

$$(b) y(t) = \frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-2t} \cos tu(t) - e^{-2t} \sin tu(t)$$

11. 已知 LTI 因果系统的输入 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ，单位冲激响应 $h(t) = e^{-t}u(t)$ 。

(a) 用时域分析法求系统响应 $y(t)$ 。

(b) 用复频域分析法求系统响应 $y(t)$

解： (a)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-t+\tau}u(t-\tau)d\tau = e^{-t}(1-e^{-t})u(t)$$

(b)

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

12. 某 LTI 系统的有理系统函数 $H(s)$ 的零极点及收敛域如图 P6.12 所示, 若 $H(0)=1$ 。

求: (a) 求产生此输出的输入信号 $x(t)$ 。

(c) 若已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$, 求输出信号 $x(t)$ 。

(d) 已知一稳定系统, 当输出 $e^{-2t}u(t)$ 时, 输出为上述 $x(t)$ 中的一个, 确定是哪一个?

求出系统的单位冲激响应。

解: (a)

$$H(s) = \frac{-3(s+2)}{(s-1)(s+6)}$$

$$(b) H(s) = \frac{-10(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$(c) H(s) = \frac{-2}{(s-1)(s+2)}$$

$$(d) H(s) = \frac{2}{(s-1)(s-2)}$$

13. 已知因果全通系统的系统函数 $H(s) = \frac{s-1}{s+1}$, 输出信号 $y(t) = e^{-2t}u(t)$

(a) 求产生此输出的输入信号 $x(t)$ 。

(b) 若已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$, 求输出信号 $x(t)$ 。

(c) 已知一稳定系统当输入为 $e^{-2t}u(t)$ 时, 输出为上述 $x(t)$ 中的一个, 确定是哪一个? 求出系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

解: (a)

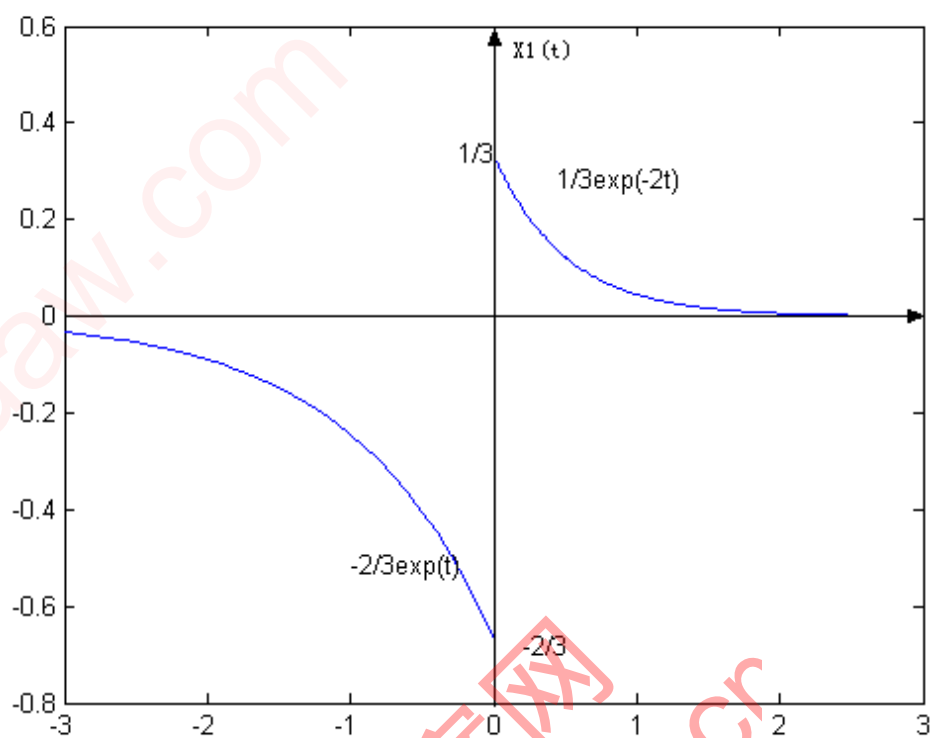
$$x_2(t) H(s) = \frac{1}{s+2}。 \text{Re}\{s\} > -2, X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

由于 $H(s)$ 的 ROC 为 $\text{Re}\{s\} > -1$, $\therefore X(s)$ 的 ROC 为 $-2 < \text{Re}\{s\} < 1$ 或 $\text{Re}\{s\} > 1$

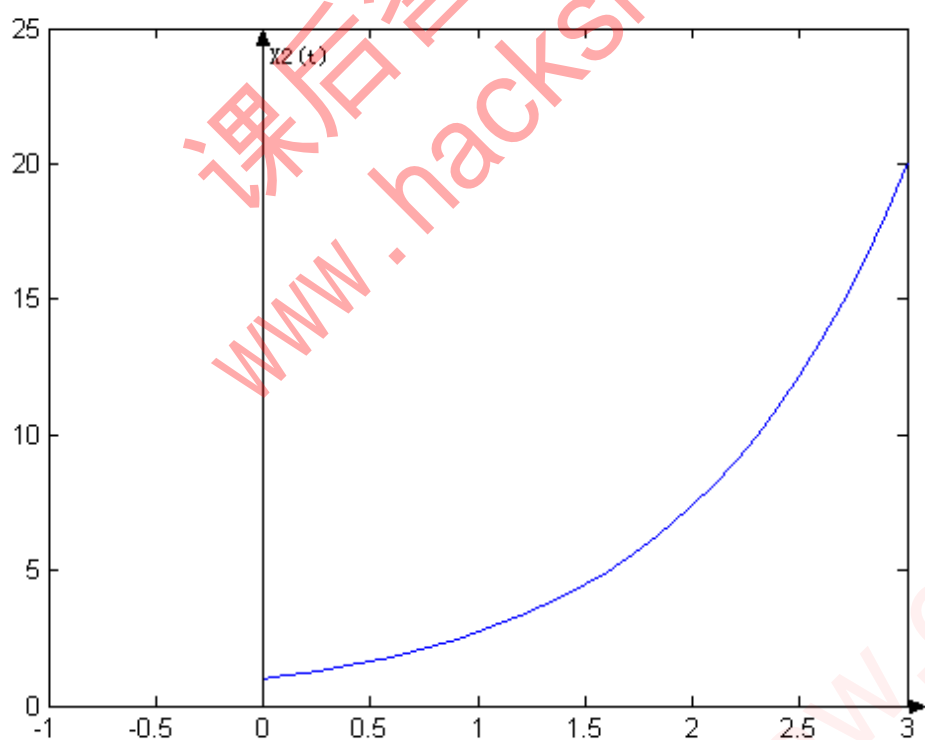
若 ROC_1 为 $-2 < \text{Re}\{s\} < 1$, 则 $x_1(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^t u(-t)$

若 ROC_2 为 $\text{Re}\{s\} > 1$, $x_2(t) = \frac{1}{3}(e^{-2t} + 2e^t)u(t)$

$x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别如图 PS6.13(a),(b)所示:



(a)



(b)

(b) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$, 则只能是 $x(t) = x_1(t)$

$$\text{即: } x(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^t u(-t)$$

$$(c) \quad X(s) = Y(s)H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}, \therefore H(s) = \frac{s+1}{s-1} \text{ 这就是(a)中系统的逆系统。}$$

由于系统稳定 $\therefore \text{ROC 为 } u_c(t) \text{ Re}\{s\} < 1$

$$h(t) = \delta(t) - 2e^t u(-t)$$

$\therefore Y(s)$ 的 ROC 为 $\text{Re}\{s\} > -2$, $\therefore X(s)$ 的 ROC 为 $-2 < \text{Re}\{s\} < 1$

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - 2e^t u(-t)$$

$$y(t) * h(t) = e^{-2t}u(t) - 2e^{-2t}u(t) * e^t u(-t)$$

$$\text{当 } t > 0 \text{ 时, } e^{-2t}u(t) * e^t u(-t) = \int_{-\infty}^0 e^{\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t)$$

$$\text{当 } t < 0 \text{ 时, } e^{-2t}u(t) * e^t u(-t) = \int_{-\infty}^t e^{\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{3}e^{-2t}u(-t)$$

$$\therefore y(t) * h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^t u(-t) = x(t)$$

从而证明该系统当输入为 $y(t)$, 输出为 $x(t)$

14. 某 LTI 系统的零极点如图 P6.14 所示。

(a) 指出与该零极点分布有关的所有可能的收敛域。

(b) 对(a)中所指出的每一个收敛域, 确定相应的系统是否稳定, 因果。

解:

(a) $(-\infty, -2); (-2, -1); (-1, 2); (2, +\infty)$

(b) 非因果, 稳定; 非因果, 不稳定; 非因果, 稳定; 因果, 不稳定;

15. 对一个 LTI 系统, 我们已知如下信息: 输入信号 $x(t) = 4e^{2t}u(-t)$; 输出响应

$$y(t) = e^{2t}u(-t) + e^{-2t}u(t)$$

(a) 确定系统的系统函数 $H(s)$ 及收敛域。

(b) 求系统的单位冲激响应 $h(t)$

(c) 如果输入信号 $x(t)$ 为 $x(t) = e^{-t}, -\infty < t < +\infty$ 求输出 $y(t)$ 。

$$\text{解: (a) } H(s) = \frac{1}{s+2}, \text{Re}\{s\} > -2$$

$$(b) \quad h(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$(c) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)} e^{-2\tau} u(\tau) d\tau = e^{-t}$$

16. 若系统的单位阶跃响应为 $s(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$ ，为使输出响应 $y(t) = (-e^{-2t} + e^{-t})u(t)$ ，求输出信号 $x(t)$ 。

解： $x(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$

17. 一个 LTI 系统的零极点如图 P6.17 所示。

(a) 确定该系统的逆系统的零极点图。

(b) 如果逆系统为稳定系统，求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

(c) 如果逆系统为因果系统，求逆系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

解： (a)

(b) $\delta(t) + e^{-t}u(t) + e^t u(-t)$

(c) $\delta(t) + (e^{-t} - e^t)u(t)$

18. 已知 $x(t)$ 的单位拉氏变换 $\mathfrak{R}(s)$ ，试用 $\mathfrak{R}(s)$ 表示下列信号的单边拉氏变换。

(a) $x(t-T)$ (b) $x(t)e^{s_0 t}$ (c) $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ (d) $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ (e) $x(at)$

(f) $tx(t)$

解： (a) $e^{-sT}\mathfrak{R}(s) + \int_{-T}^0 x(t)e^{-st}dt$

(b) $X(s-s_0)$

(c) 设 $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \tilde{\mathfrak{R}}(s)$ 则有

$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau + \int_0^t x(\tau)d\tau$ ，由时域积分性质得

$\tilde{\mathfrak{R}}(s) = \frac{1}{s}(\mathfrak{R}(s) + \int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau)$ ，也可由定义直接求得。

(d) $s^2\mathfrak{R}(s) - sX(0_+) - X'(0_+)$

(e) $\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$

(f) $\frac{d}{ds}X(s)$

19. 求下列由微分方程描述的增量线性系统的响应 $y(t)$ ：

(a) 确定该系统的逆系统的零极点图。

(b) 如果逆系统为稳定系统，求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

(c) 如果逆系统为因果系统，求逆系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

解： (a) $sY(s) - 1 + 2Y(s) = \frac{\Omega_c}{s^2 + \Omega_c^2}$

$$Y(s) = \frac{s^2 + \Omega_c^2 + \Omega_c}{s + 2}$$

$$y(t) = 4e^{-2t}u(t) - 2\delta(t) + \delta'(t) + (\Omega_c^2 + \Omega_c)e^{-2t}u(t)$$

$$(b) \quad s^2Y(s) - 2s + 8 + 3sY(s) - 6 + 2Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{3 + 4s + s^2}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{s + 1}{s(s + 2)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

$$(c) \quad s^2Y(s) - 2s + 8 + 3sY(s) - 6 + 2Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{2s^4 - 2s^3 + 3s + 2}{s^3(s^2 + 3s + 2)}$$

$$y(t) = [-3e^{-t} + \frac{11}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}]u(t)$$

$$(d) \quad s^3Y(s) - s^2 - s - 1 + 3s^2Y(s) - 3s - 3 + 2sY(s) - 2 = \frac{3}{s + 1}$$

$$Y(s) = \frac{-s^3 - 5s^2 - 6s - 7}{(s + 1)(s^3 + 3s^2 + 2s)} = -\frac{1}{s + 1} + \frac{5}{(s + 1)^2} - \frac{7}{s^2 + 2s}$$

$$y(t) = -e^{-t}u(t) - 5te^{-t}u(t) - \frac{7}{2}u(t) + \frac{7}{2}e^{-2t}u(t)$$

20. 图 P6.20 所示电路，在 $t=0$ 以前已经处于稳定状态。当 $t=0$ 时，开关 K 由“1”到“2”，试计算 $t > 0$ 时的 $u_c(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

解：(a) $u_c(\bar{0}) = 1$

$$3u(t) - u_c - \frac{du_c(t)}{dt} = u_c(t)$$

$$u_c(s) = \frac{3 + s}{s + 2}$$

$$u_c(t) = \delta(t) + e^{-2t}u(t)$$

$$(b) \quad 3u(t) - u_L(t) = \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = u_L(t)$$

$$\frac{3}{s} - u_L(s) + \frac{1}{s} u_L(s) + 2 = u_L(s)$$

$$u(s) = \frac{2s+3}{2s-1}$$

$$u_L(t) = \delta(t) + 2e^{\frac{t}{2}} u(t)$$

21. 对图 P6.21(a)所示电路, 起输入为图 P6.21(b)所示, 当 $t = 0^-$ 时 $u_c(0^-) = 1V$, $i_L(0^-) = 0$,

求 $t > 0$ 时的 $u_c(t)$ 。

解:

$$u_i(t) = -\frac{1}{2} \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{du_c(t)}{dt} + u_c$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s} = -\frac{1}{2} s^2 u_c(s) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} s u_c(s) + \frac{1}{2} + u_c(s)$$

$$u_c(s) = \frac{1-s-e^{-s}}{1-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}s^2}$$

$$u_c(t) = 2e^{-2t} u(t) + \frac{2}{3} e^{-(t-1)} u(t-1) - \frac{2}{3} e^{-2(t-1)} u(t-1)$$

22. 图 P6.22 所示电路, 在 $t < 0$ 时已处于稳定状态, 在 $t = 0$ 时, 开关 K 闭合, 试求 $t > 0$ 时的 $i_c(t)$ 及 $i_L(t)$

23. 某系统如图 P6.23 所示, 若电路达到稳定状态后, 开关 K 转换, 试求 K 转换后的响应 $u_c(t)$ 。

第七章习题答案

1. 用定义求下列信号的 z 变换及收敛域。

$$(a) \quad X_{\text{右}}(z) = X_1(z)X_2(z) \Big|_{z=a^{-1}z_0} = X_{\text{左}}(z) \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2) \quad (b) \quad u(n) + u(-n+3)$$

$$(c) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)$$

$$(d) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n) \quad (f) \quad e^{an} u(n) \quad (g) \quad x(n) = \begin{cases} n^2, & n=1,2,3 \\ 1, & n \geq 4 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

$$(h) \quad x(n) = \begin{cases} 2^n, & n=1,2,3 \\ \frac{1}{3}, & n \geq 0 \end{cases}$$

解: (a) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2)]z^{-n} = 1 - \frac{1}{2}z^{-2}$, 除去 $z=0$ 或 $|z|=\infty$ 的全部 z

$$(b) \quad \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{z^4}{1-z^{-1}}, \text{ 收敛域 } z \neq 0$$

$$(c) \quad \frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, z \neq 0, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(d) \quad \frac{-z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}$$

$$(e) \quad \frac{\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < 2, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(f) \quad \frac{1}{1-e^a z^{-1}}, |z| > e^a$$

$$(g) \quad \sum_{n=1}^3 n^2 z^{-n} + \sum_{n=4}^{\infty} z^{-n} = z^{-1} + 4z^{-2} + 9z^{-3} + \frac{z^{-4}}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

$$(h) \quad \frac{\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

2. 信号 $x(n]$ 的 z 变换的零极点如图 P7.2 所示, 试确定满足下述情况的 $x(n]$:

- (a) $x(n)$ 为左边序列;
 (b) $x(n)$ 为右边序列;
 (c) $x(n)$ 为右边序列;

$$\text{解: (a) } x(z) = \frac{z^{-1}}{(1 + \frac{3}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x(n) = \frac{1}{2}[-(\frac{1}{2})^n u(-n-1) + (-\frac{3}{2})^n u(-n-1)]$$

$$(b) x(n) = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2})^n u(n) - (-\frac{3}{2})^n u(n)]$$

$$(c) x(n) = \frac{1}{2}[-(\frac{1}{2})^n u(-n-1) - (-\frac{3}{2})^n u(n)]$$

3. 根据单位阶跃信号 $u(n)$ 的 z 变换 $U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$, 利用 z 变换的性质。(1)求下列信号的 z 变换及收敛域。(2)画出零极点图, 并标出收敛域。

$$(a) u(n) - u(n-4) \quad (b) \frac{1}{2}[1 - (-1)^n]u(n) \quad (c) (-\frac{1}{2})^n u(n) \quad (d) (n+1)u(n)$$

$$(e) (-1)^n nu(n) \quad (f) (n-1)^2 u(n-1) \quad (g) e^{-i\omega_0 n} u(n+1) \quad (h) n(n-1)u(-n-1)$$

$$(i) e^{an} u(-n) \quad (j) e^{i\omega_0 n} u(-n) \quad (k) (n-a^n)u(n), |a| < 1 \quad (l) nr^{n-1}u(n)$$

$$(m) \frac{1}{n}(a^n + n^2)u(n), |a| < 1 \quad (n) \sum_{k=0}^n k^2$$

$$\text{解: (a) } \frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

$$(b) x(z) = \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{1-z^{-1}}, n \text{ 为奇数} \end{cases}, |z| \neq 0$$

$$(c) x(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z| > 2$$

$$(d) \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

$$(e) \frac{z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}, |z| > 1$$

(f)

$$x_1(n) = u(n), x_2(n) = nu(n), x_3(n) = n^2u(n), x_4(n) = (n-1)^2u(n-1)$$

$$X_2(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$X_3(z) = -z \left(\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right)' = z \frac{z+1}{z-1}$$

$$X_4(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3}$$

$$(g) \frac{ze^{j\omega_0}}{1-z^{-1}e^{j\omega_0}}, |z| > 1$$

(h)

$$x(n) = n^2u(-n-1) - nu(-n-1)$$

$$X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z(z-1)}{(z-1)^3} = \frac{2z}{(z-1)^3}$$

$$(i) X(z) = \frac{-z}{1-e^a z^{-1}}, |z| < e^a$$

$$(j) X(z) = \frac{-z}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}}, |z| < 1$$

$$(k) X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < a$$

$$(l) \text{ 令 } x_1(n) = \frac{1}{n} a^n, X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} a^n z^{-n}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(z)}{dz} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} a^n z^{-n} \right)' \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} -a^n z^{-n} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-az^{-1}} \end{aligned}$$

$$X_1(z) = -\int \frac{1}{z(1-az^{-1})} dz = -\ln(z-a)$$

$$X(z) = -\ln(z-a) + \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$(n) x(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$X(z) = \frac{2z^3 + 7z^2 + 6z}{6(z-1)^3}, |z| < 1$$

4. 如果 $X(z)$ 代表 $x(n)$ 的 z 变换, R 代表它的收敛域, 试用 $X(z)$ 和 R 确定下面每个序列 $y(n)$ 的 z 变换和响应的收敛域:

解: (a) $Y(z) = X^*\left(\frac{1}{z}\right), z \neq 0, z \in R$ (收敛域)

$$(b) Y(z) = \frac{X(z) + X^*\left(\frac{1}{z}\right)}{2}, z \neq 0, z \in R$$

$$(c) \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}, z \neq 0$$

$$(d) Y(z) = \frac{1 - z^{-m}}{1 - z^{-1}}, R \cap \{z | |z| > 1\}$$

$$(e) Y(z) = \frac{X(z)}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})}, R \cap \{|z| > 1\} \cap \{|z| > a\}$$

$$(f) Y(z) = \frac{X\left(\frac{z}{a}\right)}{1 - az^{-1}}, |a| \in R \cap \{|z| > a\}$$

$$(g) z^2, R$$

$$(h) z^n, R$$

5. 已知因果序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$, 求序列 $x(n)$ 的初值与终值。

解: (a) $X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$

$$X(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 1, X(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) = 2$$

$$(b) X(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 1/2 z^{-1})}$$

$$x(0) = 1, x(\infty) = 6$$

$$(c) X(z) = \frac{2 - 3z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$x(0) = 2, x(\infty) = 0$$

$$(d) X(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 1/2 z^{-1})}$$

$$x(0) = 1, x(\infty) = 2$$

6. 用 z 变换证明以下各等式:

$$(a) [a^n u(n)] * [a^n u(n)] = (n+1) a^n u(n)$$

证明：两边取 z 变换，则左边的 z 变换 $= \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$ = 右边的 z 变换

$$(b) \left[\frac{1}{n!} u(n) \right] * \left[\frac{1}{n!} u(n) \right] = \frac{2^n}{n!} u(n)$$

$$X_{\text{左}}(z) = (e^{\frac{1}{z}})^2, X_{\text{右}}(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}} - e^{\frac{2}{z}}$$

$$(c) n[x_1(n) * x_2(n)] = x_1(n) * [nx_2(n)] + [nx_1(n)] * x_2(n)$$

$$X_{\text{左}}(z) = -z \frac{d(X_1(z) X_2(z))}{dz} = -z X_1(z) X_2'(z) - z X_1'(z) X_2(z),$$

$$X_{\text{右}}(z) = -z X_1(z) \frac{dX_2(z)}{dz} + (-z) \frac{dX_1(z)}{dz} X_2(z)$$

$$(d) [a^n x_1(n)] * [a^n x_2(n)] = a^n [x_1(n) * x_2(n)]$$

$$X_{\text{左}}(z) = X_1(a^{-1}z) X_2(a^{-1}z)$$

$$X_{\text{右}}(z) = X_1(z) X_2(z) \Big|_{z=a^{-1}z_0} = X_{\text{左}}(z)$$

7. 用幂级数展开法求下列各式的 z 反变换，计算前 4 个非零取样值。

$$(a) \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2} \quad (b) \frac{1 + z^{-2}}{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}, |z| < 2$$

$$(c) \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}, |z| > 2 \quad (d) \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, |z| < \frac{1}{4}$$

$$\text{解: (a)} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(b)

$$x(n) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$x(n) = -(-2)^n u(-n-1) + \frac{1}{2}(-4)^n u(-n-1) + 2(-4)^n u(-n-1)$$

$$(c) \quad X(z) = \frac{-1}{1+z^{-1}} + \frac{z^{-1}+2}{1+2z^{-1}}$$

$$x(n) = -u(n) + (-2)^{n-1}u(n-1) + 2 \cdot (-2)^n u(n)$$

$$(d) \quad -x(n) = [4(-\frac{1}{2})^n - 3(-\frac{1}{4})^n]u(n)$$

8. 先对 $X(z)$ 微分，再利用 z 变换的性质，确定下列 $X(z)$ 的反变换。

$$(a) \quad X(z) = \ln(1-2z), |z| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-2}{1-2z} \quad -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\text{而 } -z \frac{dX(z)}{dz} \longleftrightarrow nx(n)$$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

$$(b) \quad x(n) = -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

9. 对题 7.8 中的 $X(z)$ ，利用幂级数展开式

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}, |x| < 1, \text{ 确定其 } z \text{ 反变换。}$$

$$\text{解: (a) } x(n) = \frac{2^{-n}}{n} u(-n-1)$$

$$(b) \quad x(n) = -\frac{2^{-n}}{n} u(n-1)$$

10. 试用部分分式展开法求以下各式的 z 反变换。

$$(a) \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}$$

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(b) \quad \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(c) \frac{z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}, \frac{1}{2} < |z| < 1$$

$$x(n) = -2u(-n-1) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(d) \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}, |z| < 1$$

$$x(n) = (-1)^n u(-n-1) - 2^{n+1} u(-n-1)$$

$$(e) \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

$$x(n) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$(f) H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \frac{1 + z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, |z| > 1$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n u(n) - \frac{5}{6}(-1)^n u(-n-1) + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{5}{3}(-1)^{n-1} u(-n-2) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} u(n-2) - \frac{5}{6}(-1)^{n-2} u(-n-3)$$

$$(g) \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.6z^{-2}}, 0.6 < |z| < 1$$

$$(h) \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.4z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})}, |z| > 0.8$$

$$x(n) = -5(0.8)^n u(n) - 2(-0.4)^n u(n) + 7(0.6)^n u(n)$$

$$11. z \text{ 变换 } X(z) \text{ 为 } X(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{4}{3}z^{-1})}$$

- (a) 确定与 $X(z)$ 有关的所有可能的收敛域;
- (b) 求每种收敛域对应的离散时间序列;
- (c) 以上哪种序列存在离散时间傅立叶变换。

解: (a) 可能的收敛域 $|z| > \frac{4}{3}, |z| < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < |z| < \frac{4}{3}$

$$(b) |z| > \frac{4}{3}, x(n) = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{4}{5}\left(\frac{4}{3}\right)^n u(n)$$

$$|z| < \frac{1}{3}, x(n) = -\frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1) + \frac{4}{5} \left(\frac{4}{3}\right)^n u(-n-1)$$

$$\frac{1}{3} < |z| < \frac{4}{3}, x(n) = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{4}{5} \left(\frac{4}{3}\right)^n u(-n-1)$$

$$(c) \text{ 当 } \frac{1}{3} < |z| < \frac{4}{3}$$

12. 对下列差分方程所描述的 LTI 因果系统，求系统的系统函数及单位脉冲响应。

$$(a) \quad y(n] - \frac{1}{2} y(n-1) = x(n)$$

$$(b) \quad y(n] + 2y(n-1) + 2y(n-2) = x(n-1) + 2x(n-2)$$

$$(c) \quad y(n] - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n] - 3x(n-2)$$

$$(d) \quad y(n] + 3y(n-1) + 3y(n-2) + y(n-3) = x(n] + x(n-2) + x(n-3)$$

$$\text{解: (a) } H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(b) \quad H(z) = \frac{1 + 2z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$(c) \quad H(z) = \frac{1 - 3z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}$$

$$h(n) = (-2)^{n+1} u(n) + 3^n u(n) - 3(-2)^{n-1} u(n-2) - 3^{n-2} u(n-2)$$

$$(d) \quad H(z) = \frac{1 + z^{-2} + z^{-3}}{(1 + z^{-1})^3}$$

$$\therefore \frac{1}{(1+z)^3} \longleftrightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} (-1)^n u(n)$$

$$\therefore h(n) = \frac{(n+1)(n+1)}{2} (-1)^n u(n) + \frac{(n-1)n}{2} (-1)^n u(n-2) + \frac{(n-2)(n-1)}{2} (-1)^{n-3} u(n-3)$$

13. 画出系统函数 $H(z) = \frac{-3z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$ 的零极点图，写出与下列情况所对应的收敛域，并

求出相应的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

(a) 系统是因果的；(b) 系统为反因果的；(c) 系统是稳定的。

解: $H(z) = \frac{-2}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

(a) $x(n) = -2^{n+1}u(n) - (\frac{1}{2})^n u(n)$

(b) $x(n) = 2^{n+1}u(-n-1) + (\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

(c) $x(n) = 2^{n+1}u(-n-1) - (\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

14. 一个输入为 $x(n]$, 输出为 $y(n]$ 的离散时间 LTI 系统, 满足差分方程

$$y(n) + \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$

求满足该方程的所有可能的单位脉冲响应, 并指出它们的因果性与稳定性。

解: $H(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{-3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

当 $|z| > \frac{1}{2}$ 因果, 稳定。 $x(n) = -3(-\frac{1}{4})^n u(n) + 4(-\frac{1}{2})^n u(n)$

当 $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$ 。不因果, 稳定。 $x(n) = -3(-\frac{1}{4})^n u(n) - 4(-\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

当 $|z| < \frac{1}{4}$, 反因果, 不稳定。 $x(n) = 3(-\frac{1}{4})^n u(-n-1) + 4(-\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

15. 某离散时间 LTI 系统, 当输入 $x_1(n) = \frac{3}{4}u(n)$, 对应的响应 $y_1(n) = [-(\frac{1}{3})^{n+1} + 1]u(n)$,

若输入 $x_2(n) = [(\frac{1}{2})^n + (-1)^n]u(n)$, 问此时 $y_2(n) = ?$

解: $X_2(z)H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} X_2(z) = \frac{16}{27} (\frac{-\frac{7}{8}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{3}{8}}{1+z^{-1}})$

$$y_2(n) = \frac{16}{27} [(-\frac{7}{8})(\frac{1}{3})^n u(n) + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n u(n) + \frac{3}{8}(-1)^n u(n)]$$

7. 16 对差分方程

$$y(n) + \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

所描述的 LTI 稳定系统, 确定

(a) 系统函数; (b) 单位脉冲响应;

(c) 若系统输入 $x(n) = u(n)$, 求系统的响应 $y(n)$;

(d) 如果系统输出 $y(n) = [2(-\frac{1}{3})^n - 3(-\frac{1}{2})^n]u(n)$, 求系统输入信号 $x(n)$ 。

解: (a) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$

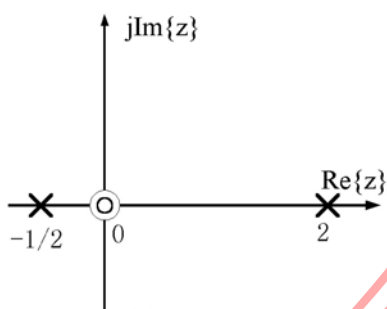
(b) $h(n) = (-\frac{1}{3})^n u(n)$

(c) $Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \right)$

$y(n) = \frac{3}{4}u(n) + \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n u(n)$

(d) ?

7.17 某离散时间 LTI 因果系统在 z 平面上的零极点如图 P7.17 所示。已知系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的初值 $h(0) = 1$ 。



图P7.17

- 确定系统函数;
- 求系统的单位脉冲响应;
- 写出系统的差分方程;
- 若系统的响应 $y(n) = (-\frac{1}{2})^n u(n)$, 求系统激励 $x(n)$;
- 求出一个满足该系统差分方程的稳定系统的单位脉冲响应。

解: (a) $H(z) = \frac{k}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$ $k = 1$. 由 $h(0) = 1$ 得

(b) $H(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{1 - 3z^{-1}} \right)$

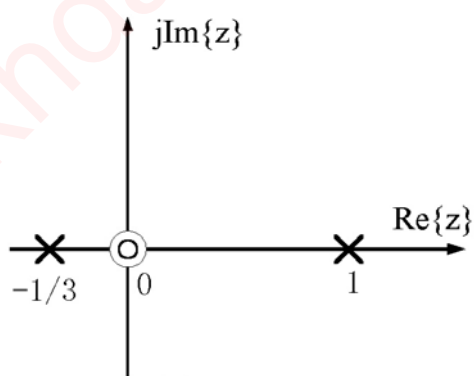
$h(n) = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2})^n u(n) + 2^n u(n)$

(c) $y(n) - \frac{3}{2}y(n-1) - y(n-2) = x(n)$

$$(d) \quad X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}}{\frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}} = 1 - 2z^{-1}$$

7.18 某一离散时间 LTI 因果系统的零极点如图 P7.18 所示，已知系统的单位脉冲响应 $h(n)$

的终值 $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 1$ 。



图P7.18

- 确定系统函数；
- 求系统的单位脉冲响应；
- 写出系统的差分方程；
- 若系统的激励 $x(n) = (-2)^n u(n)$ ，求系统响应 $y(n)$ ；
- 求出一个满足该系统差分方程的非因果系统的单位脉冲响应。

$$\text{解: (a) } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}{\frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}} = \frac{-\frac{7}{3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$(b) \quad \because H(z) = z^{-2} \left(\frac{\frac{3}{16}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{9}{16}}{1 - z^{-1}} \right)$$

$$\therefore h(n) = \frac{3}{16} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n-2) + \frac{9}{16} u(n-2)$$

$$(c) \quad y(n) - \frac{2}{3}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) = \frac{3}{4}x(n-2)$$

$$(d) Y(z) = H(z)X(z) = \frac{\frac{3}{4}z^{-2}}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

(e) ?

7.19 某离散时间 LTI 系统，当输入 $x(n] = (\frac{1}{3})^n u(n) + \frac{1}{4}(\frac{1}{3})^{n-1} u(n-1)$ 时，输出

$$y(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)。$$

(a) 确定系统函数 $H(z)$ ；

(b) 求系统单位脉冲响应 $h(n)$ ；

(c) 计算系统的频率特性 $H(e^{j\omega})$ ；

(d) 写出系统的差分方程。

$$\text{解: (a) } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}{\frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{-\frac{7}{3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$(b) h(n) = -\frac{7}{3}(-\frac{1}{2})^n u(n) + \frac{10}{3}(-\frac{1}{4})^n u(n)$$

$$(c) H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$(d) y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{3}x(n-1)$$

7.20 某离散时间 LTI 因果系统如图 P7.20 所示。

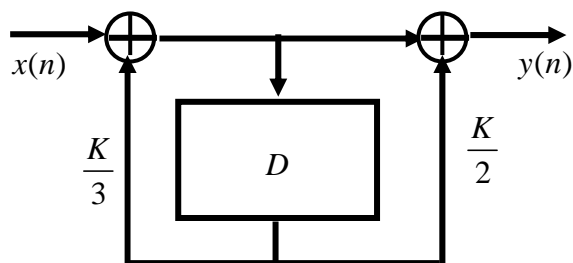


图 P7.20

(a) 试求该系统的系统函数

$H(z)$ ；

(b) K 为何值时，系统是稳定的？

(c) 如果 $K=1$ ，系

统输入 $x(n] = \delta(n) - (\frac{1}{4})^n u(n)$ ，求系统输入 $y(n)$

解: (a) $\frac{K}{3}y(n-1) - y(n) = x(n) - \frac{K}{4}x(n-1)$

$$\therefore H(z) = \frac{1 - \frac{K}{4}z^{-1}}{1 + \frac{K}{3}z^{-1}} \quad |z| > \frac{|K|}{3}$$

(b) $\frac{|K|}{3} < 1 \quad |K| < 3$

(c) $y(n) = \frac{5}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

7.21 序列 $y(n]$ 是某一离散时间 LTI 系统当输入为 $x(n]$ 时的输出, 该系统由下列差分方程描述:

$$y(n) = x(n) + \frac{3}{2}x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2)$$

(a) 确定系统函数 $H_1(z)$, 在 z 平面上画出它的零极点, 并指出其收敛域;

(b) 若要用一个离散时间 LTI 系统从 $y(n]$ 恢复 $x(n]$, 求该系统的系统函数 $H_2(z)$;

(c) 若 $H_2(z)$ 所表征的系统的稳定的, 求其单位脉冲响应 $h_2(n]$ 。

解: (a) $H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 2\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + z^{-1}}\right)$

(b) $H_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})} \quad |z| > 1$

(c) $h_2(n) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2(-1)^n u(n)$

7.22 某离散时间 LTI 系统的差分方程为

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) - bx(n-1)$$

试确定使此系统成为一全通系统时的 b 值 ($b \neq a$)。

解: $H(z) = \frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}}$

7.23 对于图 P 7.23 所示的连续时间 LTI 系统, 其单位冲激响应为 $h_c(t)$, 频率响应为 $H_c(\Omega)$,

系统的微分方程为

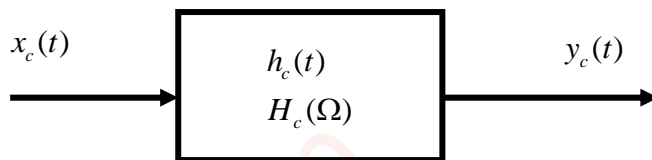


图 P7.23

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y_c(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x_c(t)}{dt^k}$$

假若我们要用一个离散时间系统来近似这个系统。微分运算被近似为后向差分，也就是

$$\left. \frac{dx_c(t)}{dt} \right|_{t=nT} \approx \frac{x_c(nT) - x_c(nT - T)}{T} = \frac{x(n) - x(n-1)}{T}$$

我们定义 $x(n)$ 的一阶后向差分为

$$\nabla^{(1)} \{x(n)\} = \frac{x(n) - x(n-1)}{T}$$

而 $x(n)$ 的 k 阶后向差分为

$$\nabla^{(k)} \{x(n)\} = \nabla^{(k-1)} \{ \nabla^{(1)} \{x(n)\} \}$$

其中 $\nabla^0 \{x(n)\} = x(n)$ 。于是，该离散时间系统的差分方程可以表示为

$$\sum_{k=0}^n a_k \nabla^{(k)} \{y(n)\} = \sum_{k=0}^m b_k \nabla^{(k)} \{x(n)\}$$

(a) 如果 $h_c(t)$ 的拉氏变换 $H_c(s)$ 为 $H_c(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)}$ ，确定该离散时间系统的

系统函数 $H_d(z)$ 。

(b) 一般来说， $H_c(s)$ 和 $H_d(z)$ 之间的关系是什么？

(c) 通过差分变换能把 s 平面上的 $j\Omega$ 轴近似映射为 z 平面上的什么闭合围线？

(d) 如果连续时间系统 $H_c(s)$ 是稳定的，此时离散时间系统 $H_d(z)$ 是稳定的吗？

(假定两个系统都是因果的)。

解：(a) 由 $H_c(s)$ 知，连续时间系统可由如下 LCCDE 描述：

$$\frac{d^2}{dt^2} y_c(t) + 4 \frac{d}{dt} y_c(t) + 3 y_c(t) = \frac{d}{dt} x_c(t) + 2 x_c(t)$$

相应的离散时间系统可由前向差分方程描述

$$\nabla^{(2)} y_d[n] + 4\nabla^{(1)} y_d[n] + 3y_d[n] = \nabla^{(1)} x_d[n] + 2x_d[n]$$

$$\because \nabla^{(1)} x_d[n] = \frac{1}{T}(x_d[n+1] - x_d[n]) \longleftrightarrow \frac{1}{T}(z-1)X_d(z)$$

$$\nabla^{(2)} x_d[n] = \nabla^{(1)}(\nabla^{(1)} x_d[n]) \longleftrightarrow \frac{1}{T^2}(z-1)^2 X_d(z)$$

对前向差分方程两边作 z 变换有

$$\frac{1}{T^2}(z-1)^2 Y_d(z) + \frac{4}{T}(z-1)Y_d(z) + 3Y_d(z) = \frac{1}{T}(z-1)X_d(z) + 2X_d(z)$$

$$\therefore H_d(z) = \frac{\frac{1}{T}(z-1) + 2}{\frac{1}{T^2}(z-1)^2 + \frac{4}{T}(z-1) + 3}$$

(b) 对比 $H_d(z)$ 和 $H_c(s)$ 可以看出 $H_d(z) = H_c(s)|_{s=\frac{1}{T}(z-1)}$

(c) 由 $s = \frac{1}{T}(z-1)$ 得: $\sigma + j\omega = \frac{1}{T}(z-1) \therefore z = 1 + \sigma T + j\omega T$

当 $\sigma = 0$ 时, $z = 1 + j\omega T$; 表明 z 平面的 $j\omega$ 轴映射为 z 平面上的

$z = 1 + j\omega T$ 。即 $\Re\{z\} = 1$, $\Im\{z\} = \omega T$ 。

(e) 如果 $H_c(s)$ 是稳定的, 因果的, 则 $H_c(s)$ 的所有极点都位于左半 s 平面。设

$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ 是一个极点, $\sigma_0 < 0$; 经映射后, 该极点映射为

$z_0 = 1 + \sigma_0 T + j\omega_0 T$; 显然这一映射关系不能保证 $\sigma_0 < 0$ 时, 一定有 $|z_0| < 1$ 。

因此 $H_c(s)$ 是因果、稳定的, 并不能保证所得 $H_d(z)$ 也是因果稳定的。

7.24 用定义求下列信号的单边 z 变换及收敛域:

(a) $u(n) + u(n+2)$

(b) $a^{n+3}u(n+3)$

(c) $\delta(n-m)$

(d) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$

(e) $e^{-j\omega_0 n} u(n)$

(f) $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & n \geq N \end{cases}$

解: (a) $\frac{2}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$

(b) $\frac{a^3}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-m) z^{-n} = z^{-m}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$

(e) $\frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} \quad |z| > 1$

(f) $\sum_{n=0}^N z^{-n} = \frac{1-z^{N+1}}{1-z^{-1}} \quad z \in R \quad z \neq 0$

7.25 如果 $X(z)$ 为 $x(n)$ 的单边 z 变换, R 为相应的收敛域。用 $X(z)$ 和 R 表示下列信号的单边 z 变换及收敛域:

(a) $x(n-1)$

(b) $x(n+2)$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n+1)$

(d) $e^{j\omega_0 n} u(n-1)$

(e) $z_0^n x(n)$

(f) $\sum_{n=-\infty}^n x(k)$

解: (a) $z^{-1} X(z)$

(b) $z^2 X(z) - z^2 (X(0) + X(1) z^{-1})$

(c) $\frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$

(d) $\frac{e^{j\omega_0} z^{-1}}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} \quad |z| > 1$

(e) $z_0^n X(z) \quad |z| \in R$

$$(f) X(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$$

7.26 利用单边 z 变换, 求解由下列差分方程所描述的增量线性系统的响应 $y(n)$ 。

$$(a) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1), \quad x(n) = u(n), \quad y(-1) = 1$$

$$(b) y(n) + 0.1y(n-1) - 0.2y(n-2) = 10x(n),$$

$$x(n) = u(n), \quad y(-1) = 4, \quad y(-2) = 6$$

$$(c) y(n) + 2y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = \frac{4}{3}x(n)$$

$$x(n) = 3^n u(n), \quad y(-1) = 0, \quad y(0) = \frac{3}{4}$$

$$(d) y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n-2),$$

$$x(n) = u(n), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

解: (a) 对方程两边求单边拉氏变换, 得

$$Y(z) - \frac{1}{2}[z^{-1}Y(z) + y(-1)] = X(z) + \frac{1}{2}[z^{-1}X(z) + x(-1)]$$

$$\therefore Y(z) = 3 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\therefore y(n) = 3 \cdot u(n) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(b) Y(z) + 0.1[z^{-1}Y(z) + y(-1)] - 0.2[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1.8 - 0.8z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.7z^{-1}-0.2z^{-2})}$$

$$y(n) = ?$$

$$(c) Y(z) + 2[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + [z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = \frac{4}{3}X(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{4(1+z^{-1})^2} + \frac{3}{4(1-3z^{-1})}$$

$$\therefore y(n) = \left[\frac{3}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{4}(-1)^n \cdot n \right] u(n)$$

$$(d) Y(z) - 5[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 6[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

当 $n=1$ 时, 推出 $y(-1) = -\frac{1}{6}$

$n=0$ 时, 推出 $y(-2) = -\frac{5}{36}$

$$Y(z) = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-6z^{-1}+6z^{-2})}$$

$y(n) = ?$

7.27 某离散时间系统的差分方程为

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n-1) - 2x(n-2)$$

初始条件 $y(-2) = \frac{3}{2}, y(-1) = 1$ 。当加入激励信号 $x(n]$ 时, 系统响应

$y(n) = (2^n - 1)u(n)$, 求系统激励信号 $x(n)$ 。

解: 对差分方程两边进行单边 z 变换

$$X(z) = \frac{(1-3z^{-1}+2z^{-2})Y(z)}{z^{-1}-2z^{-2}} + \frac{2z^{-1}}{z^{-1}-2z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-2z^{-2}} + 2\frac{z^{-1}}{z^{-1}-2z^{-2}} = \frac{3}{1-2z^{-1}}$$

故 $x(n) = 3 \cdot 2^{-n}u(n)$

第八章

8.1 某连续时间 LTI 因果系统由下列微分方程描述:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

- (a) 确定该系统的系统函数 $H(s)$ 及收敛域;
- (b) 判断系统的稳定性, 若系统是稳定的求出系统的频率响应;
- (c) 求出系统的单位冲激及单位阶跃响应;
- (d) 如果系统输入 $x_1(t) = e^t$, 求输出响应 $y_1(t)$;
- (e) 如果系统输入 $x_2(t) = e^{-t}u(t)$, 求输出响应 $y_2(t)$;
- (f) 当系统输出 $y(t)$ 的拉氏变换为 $Y(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2}$, $\text{Re}\{s\} > -2$, 求出系统的输入信号 $x(t)$ 。

解: (a) $\because sY(s) + 2Y(s) = X(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

(b) 系统稳定 $h(t) = e^{-2t}u(t)$

(c) 单位冲激响应 $h(t) = e^{-2t}u(t)$

单位阶跃响应 $H_1(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right)$

$$\therefore h_1(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

(d) $y_1(t) = h'(1)e^t = \frac{1}{3}e^t$

(e) $Y_2(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

$$y_2(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

(f) $Y(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \quad X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{s+1}{s+2}$$

$$x(t) = (e^{-2t}u(t))' + e^{-2t}u(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

8.2 考查图 P8.2 所示的离散时间 LTI 稳定系统；

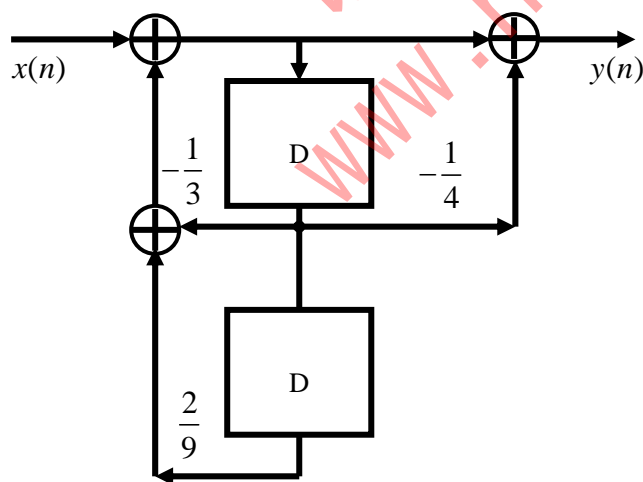


图 P8.2

- 确定该系统的系统函数及收敛域；
- 求出系统的频率响应、单位脉冲响应和单位阶跃响应；
- 如果系统的输入 $x_1(t) = (-1)^n$ ，求系统响应 $y_1(t)$ ；

(d) 若系统输入 $x_2(t) = (-1)^n u(n)$, 求系统响应 $y_2(t)$;

(e) 当系统响应 $y(n) = [(\frac{1}{3})^n + (-\frac{2}{3})^n]u(n)$, 求系统的输入信号 $x(n)$ 。

解: (a) $H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-4}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}} = \frac{\frac{7}{12}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{12}}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$ 收敛域 $|z| > 3$

(b) 单位脉冲响应 $h(t) = \frac{7}{12}(\frac{1}{3})^n u(n) + \frac{5}{12}(-\frac{2}{3})^n u(n)$

(c) $y_1(t) = H(-1)z^n = \frac{27}{16}(-1)^n$

(d) $Y_2(z) = H(z)X_2(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}} = \frac{1}{1 + z^{-1}}$

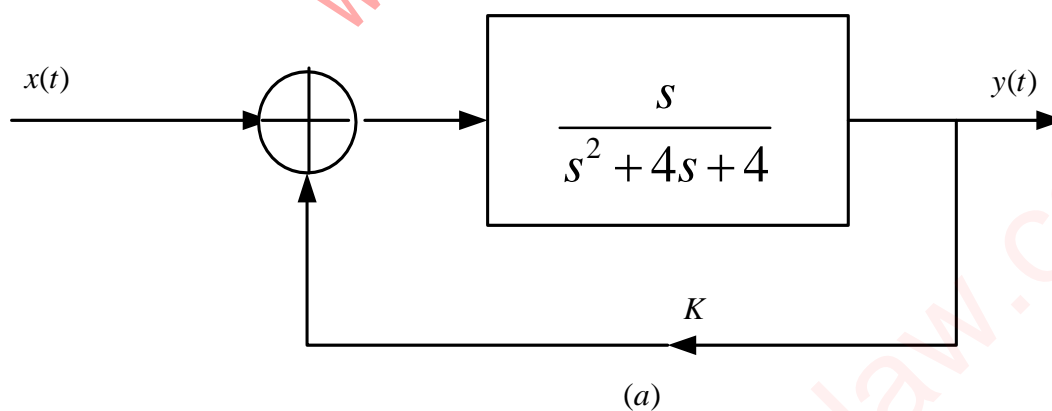
$y_2(t) = \frac{7}{16}(\frac{1}{3})^n u(n) - \frac{7}{16}(-1)^n u(n) + \frac{5}{4}(-\frac{2}{3})^n u(n) - \frac{5}{4}(-1)^n u(n)$

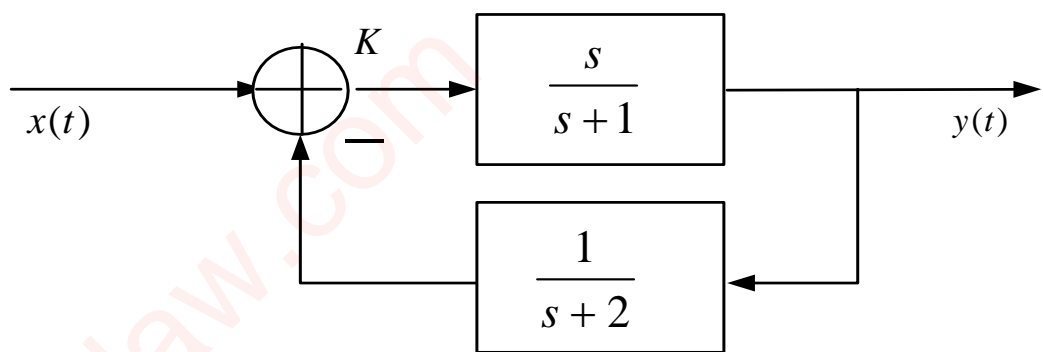
(e) $Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}} = \frac{2 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}z^{-1})}$

$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{2 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}z^{-1})} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{2 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$

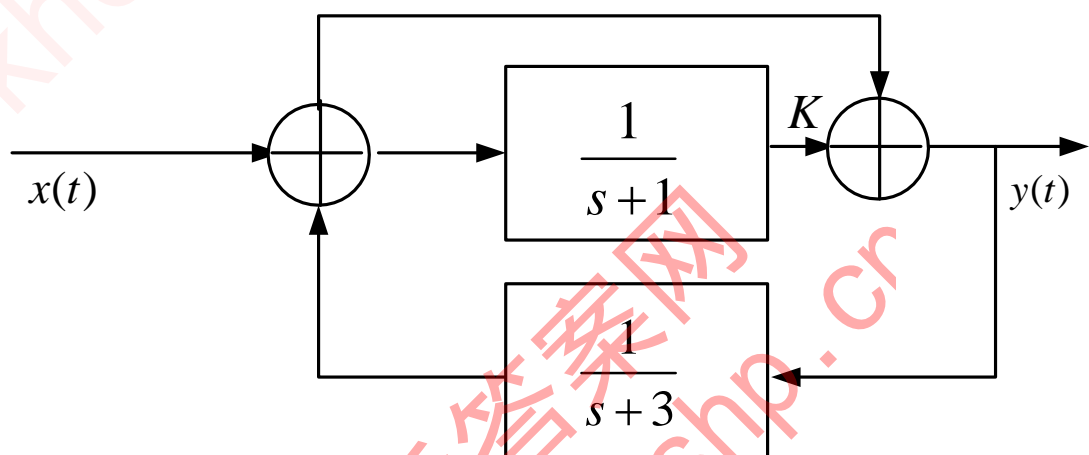
$x(n) = 2 \cdot (-\frac{1}{4})^n u(n) + \frac{1}{3}(-\frac{1}{4})^{n-1} u(n-1)$

8.3 图 P8.3 所示的连续时间 LTI 系统最初是松弛的, 试确定系统函数; 若系统是稳定的求 K 的取值范围。

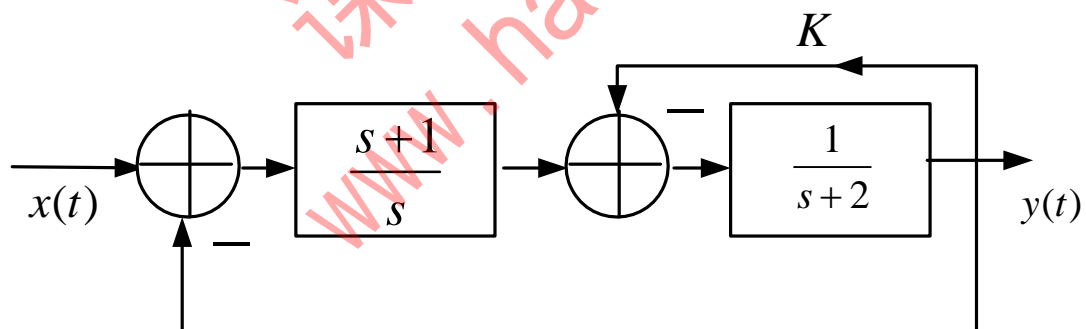




(b)



(c)



(d)

图 P8.3

解: (a) $H(s) = \frac{s}{s^2 + (4-k)s + 4}$ 稳定 $k < 4$

$$(b) \frac{ks}{s+1} X(s) - \frac{ks}{(s+1)(s+2)} Y(s) = Y(s)$$

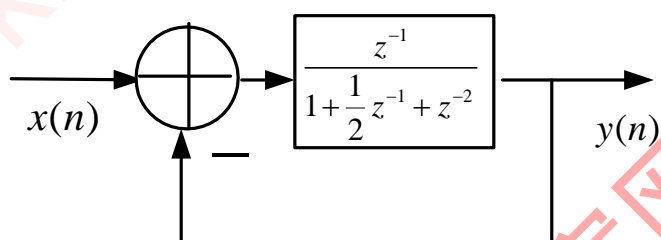
$$H(s) = \frac{ks(s+2)}{s^2 + (3+k)s + 2} \quad \text{稳定} \quad k < -3$$

$$(c) \left[\frac{1}{s+3} Y(s) + X(s) \right] \left(\frac{k}{s+1} + 1 \right) = Y(s)$$

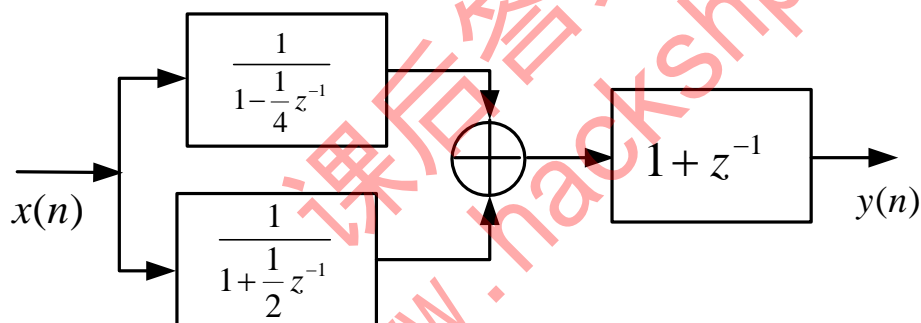
$$H(s) = \frac{s+k+1}{s^2 + 3s + (2-k)}$$

$$(d) H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s^2 + (3+k)s + 1} \quad \text{稳定} \quad k > -3$$

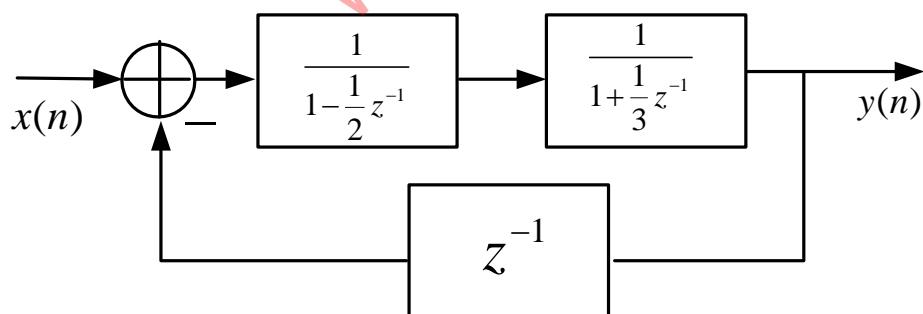
8.4 对 P8.4 所确定的离散时间 LTI 因果系统，求系统函数及其收敛域，并判断系统的稳定性。



(a)



(b)



(c)

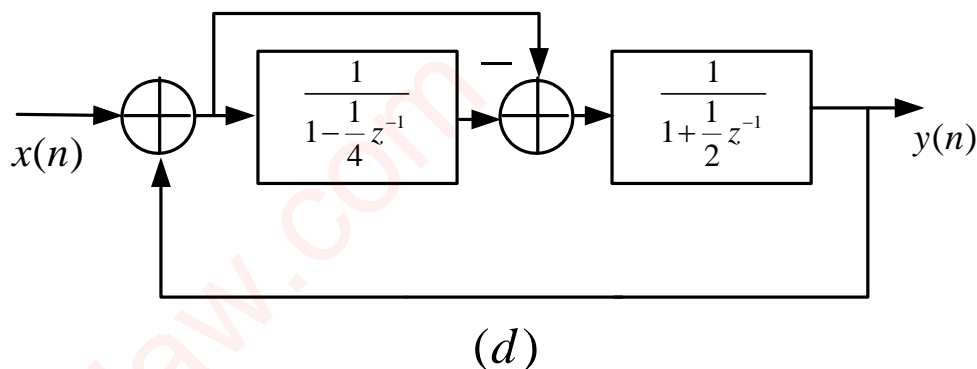


图 P8.4

解： (a) $H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} + z^{-2}} \quad [z] \neq 0 \quad \text{稳定}$

(b) $H(z) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) (1 + z^{-1}) \quad |z| > \frac{1}{2} \quad \text{稳定}$

(c) $H(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}} \quad |z| > 1 \quad \text{不稳定}$

(d) $H(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{8}z^{-1}} \quad |z| > 2\sqrt{2} \quad \text{不稳定}$

8.5 在正文中我们指出：系统函数为 z^{-1} 的有理函数的离散时间 LTI 系统，其系统因果的充分

必要条件是系统函数的收敛域必须位于最外部极点的外部，并且包括 $|z| = \infty$ 。例如，

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

所确定的系统就是因果的。

(1) 考查下述系统函数： $H(z) = \frac{z^3 + z^2 + 1}{z^2 + \frac{1}{2}z - 1}$ 若该系统的收敛域也是最外部极点的外

部，请问该系统是因果的吗？为什么？

(2) 判断下列系统函数所描述的系统是否为因果的（假设系统函数的收敛域均为最外部极点的外部）。

(a) $\frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$

$$(b) \frac{(1-z^{-1})^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$(c) \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$(d) \frac{z^2+4}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}$$

$$(e) \frac{(z-\frac{1}{3})^3}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$(f) \frac{(z-\frac{1}{3})^2}{(z-\frac{1}{2})^3}$$

$$(g) \frac{z^3}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$$

$$(h) \frac{1+z^{-1}+z^{-3}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

解：(1) 不因果，不包括 $|z|=\infty$

(2) (a) 因果；(b) 因果；(c) 因果；(d) 因果

(e) 不因果；(f) 因果；(g) 不因果；(h) 因果。

8.6 连续时间系统函数如下，试分别用一个一阶系统与一个二阶系统的级联和并联结构实现（用相加器、积分器和放大器表示）。

$$(a) \frac{5s+7}{(s+4)(s^2+s+1)}$$

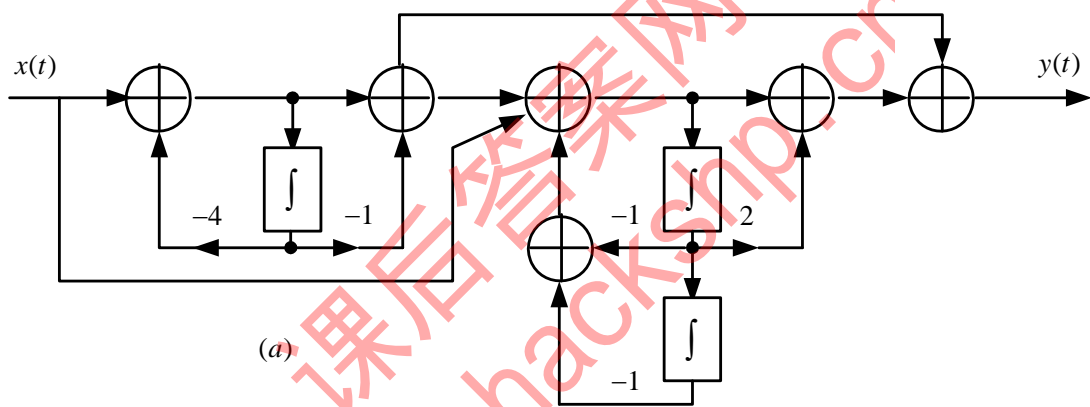
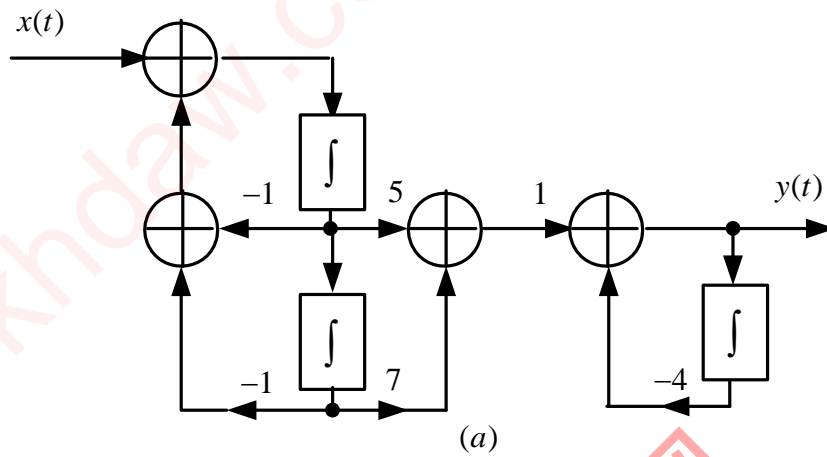
$$(b) \frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(c) \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$(d) \frac{s^2+2s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

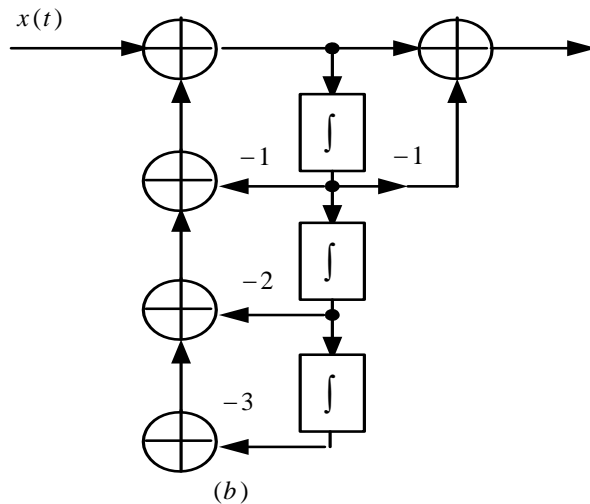
解: (a) $\frac{5s+7}{(s+4)(s^2+s+1)} = \frac{5s+7}{s^2+s+1} \cdot \frac{1}{s+4}$

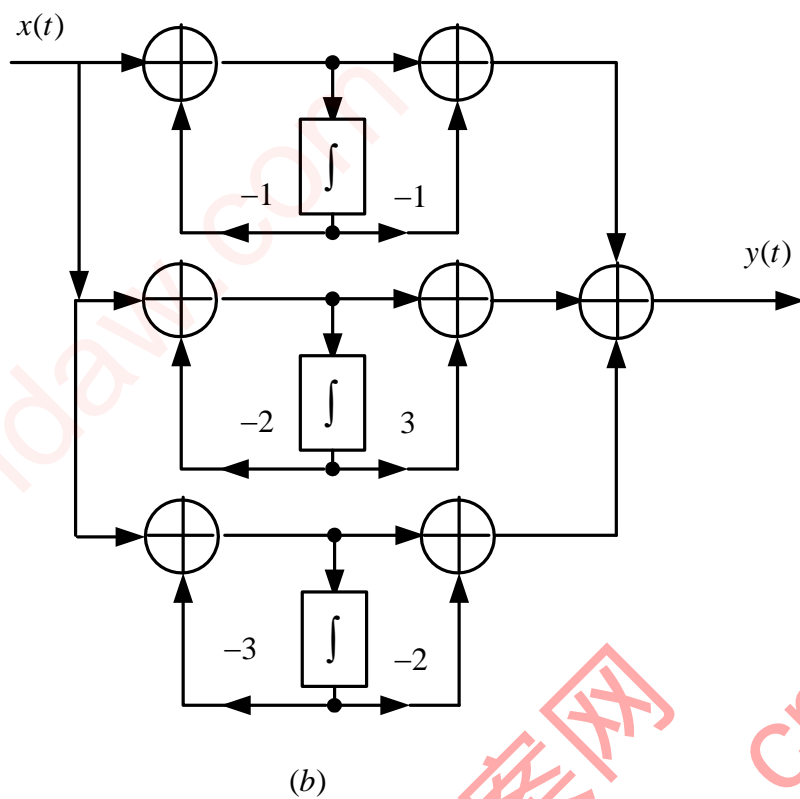
原式 = $\frac{-1}{s+4} + \frac{s+2}{s^2+s+1}$



(b) $\frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

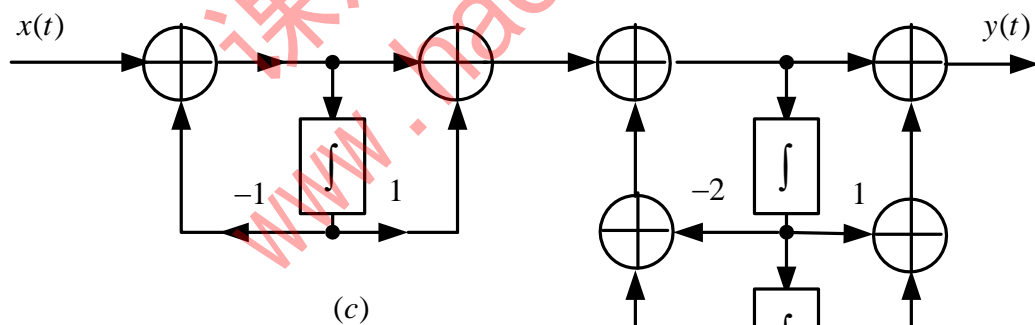
原式 = $\frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3}$

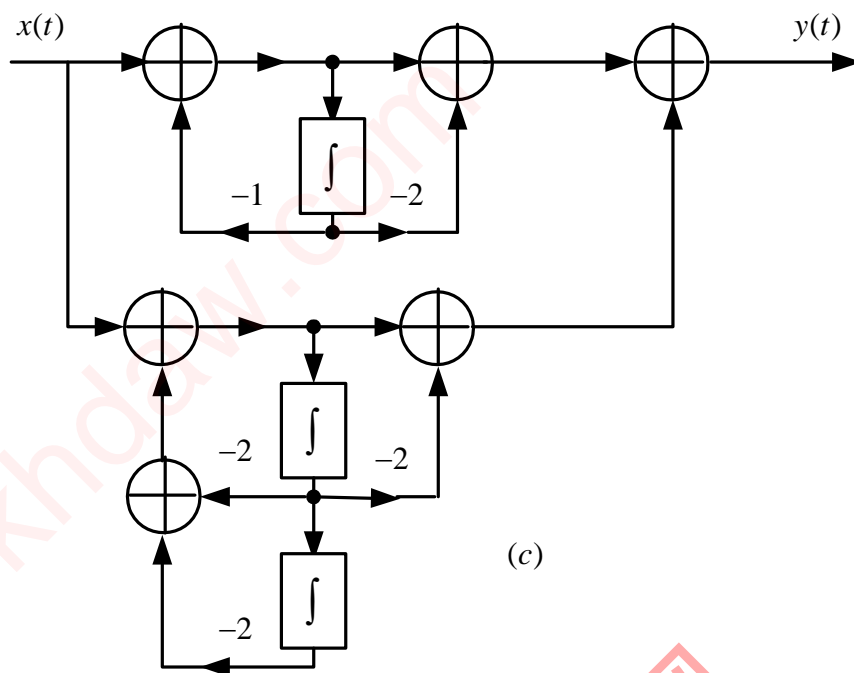




(c) $\frac{1}{s+1} \cdot \frac{s^2+s+2}{s^2+2s+2}$

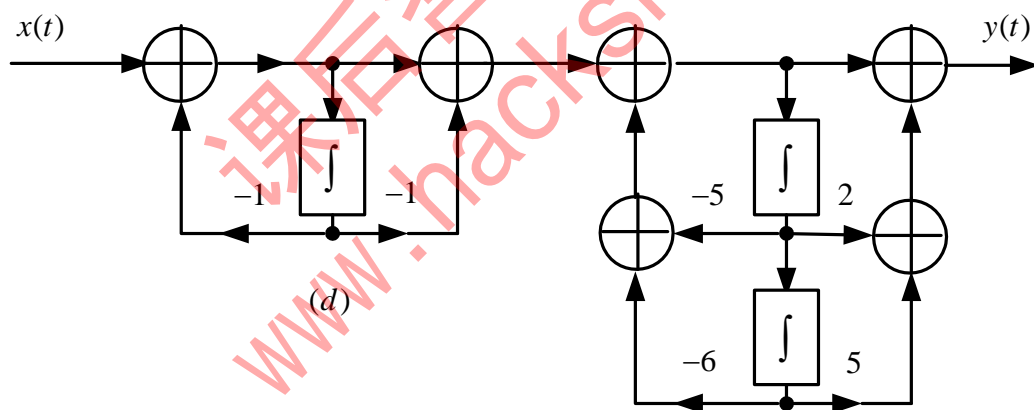
原式 = $\frac{2}{s+1} + \frac{-s+7}{s^2+5s+6}$

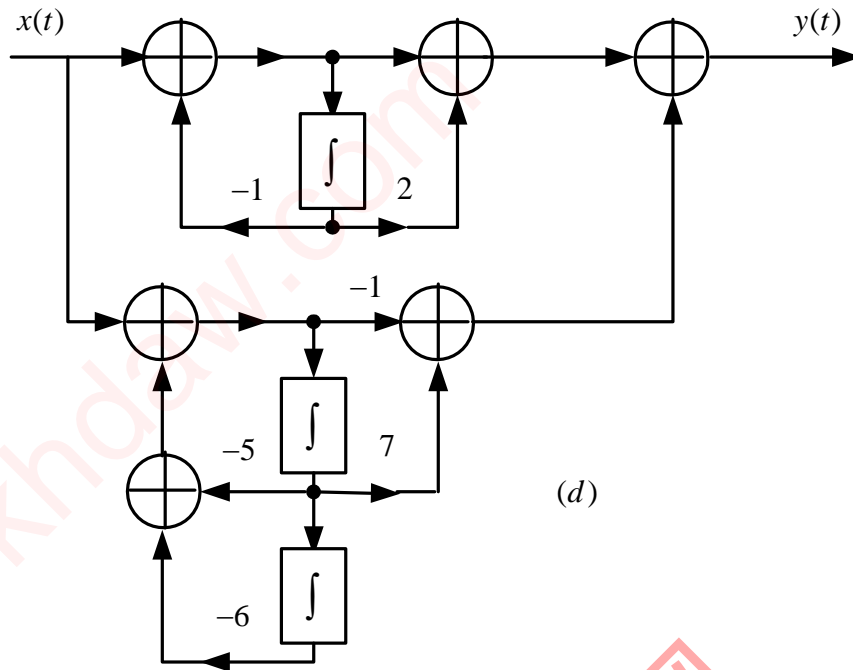




(d) $\frac{1}{s+1} \cdot \frac{s^2+2s+5}{s^2+5s+6}$

原式 = $\frac{2}{s+1} + \frac{-s+7}{s^2+5s+6}$





8.7 离散时间系统函数如下所示，试分别用一个一阶系统与一个二阶系统的级联和并联结构实现（用延时器、相加器和放大器表示）。

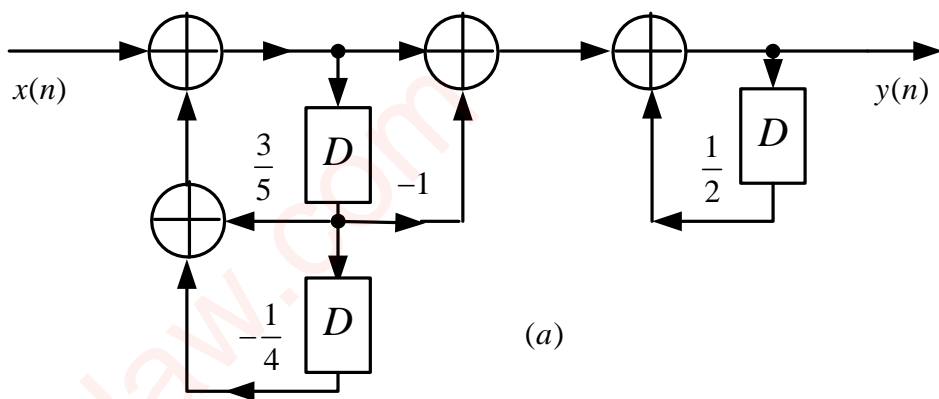
(a)
$$\frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{3}{5}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2})}$$

(b)
$$\frac{1+2z^{-1}}{(1-\frac{4}{5}z^{-1})(1-\frac{3}{5}z^{-1})(1+\frac{2}{5}z^{-1})}$$

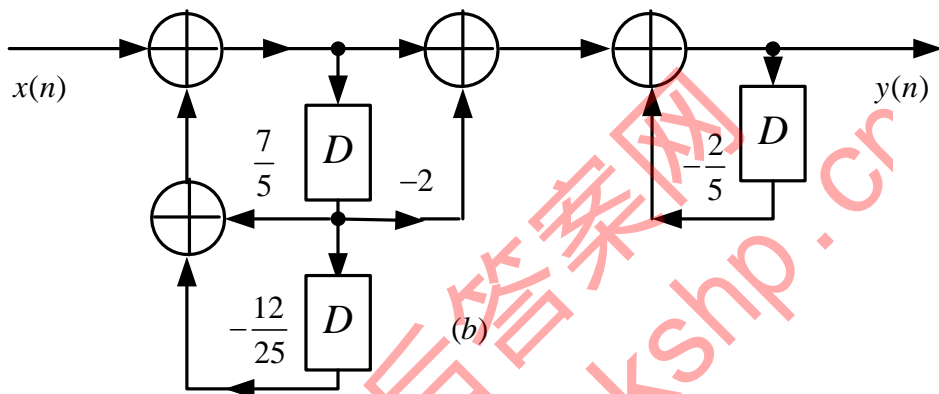
(c)
$$\frac{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2})}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

(d)
$$\frac{1-z^{-1}+z^{-2}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

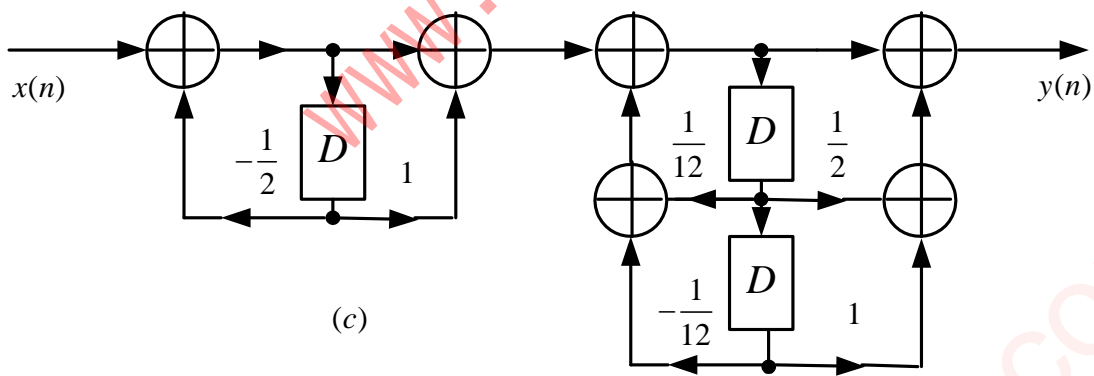
解： (a)
$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{3}{5}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$



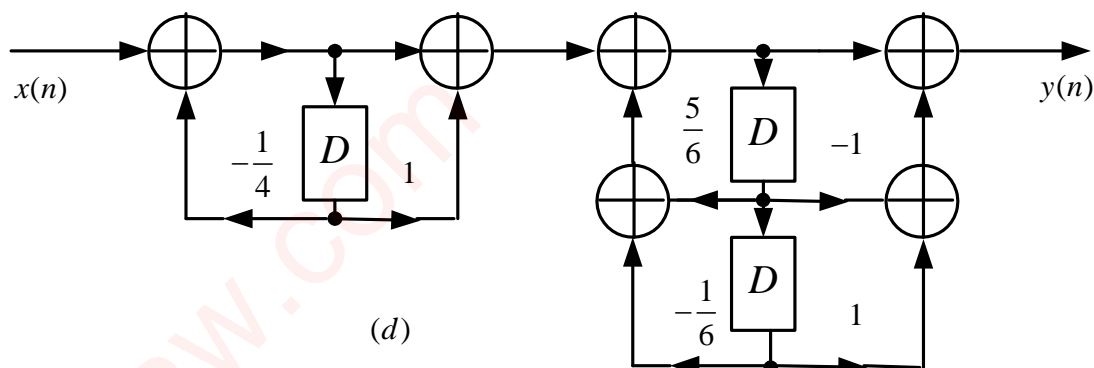
(b)
$$\frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{7}{5}z^{-1}+\frac{12}{25}z^{-2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{5}z^{-1}}$$



(c)
$$\frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{1}{12}z^{-1}-\frac{1}{12}z^{-2}}$$



(d)
$$\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} \cdot \frac{1-z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$



8.8 (a) 某连续时间系统的系统函数为 $H(s) = \frac{1}{(s+2)^3}$ ，试用三个一阶系统的级联结构实现。该系统能否由 3 个一阶系统并联实现，为什么？

(b) 考虑系统函数 $H(s) = \frac{1}{(s+3)^3(s+2)}$ ，用一个三阶系统和一个一阶系统的极联结构实现。能否用两个二阶系统的并联实现，为什么？若用一个二阶系统和两个一阶系统实现该系统，应如何联结？

(d) 对系统函数 $H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$ ，所确定的系统用四种不同的一个一阶系统和一个二阶系统级联来实现。

解：(a) $H(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2}$ 不能用三个一阶的并联实现

$$(b) H(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)^2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{s+1} - \frac{\frac{1}{3}}{s+2}$$

$$(c) H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{s+2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}$$

8.9 (a) 某离散时间系统函数为 $H(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^3}$ ，请问该系统能否用 3 个一阶系统的级联实现？如果可以画出结构图，如果不能请说明理由。

(b) 对下述系统函数描述的系统，能否用三个一阶系统的级联或并联实现，为什么？

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2})}$$

(c) 对 (b) 所示的系统，画出所有可能的一阶和/或二阶系统级联和并联实现结构。

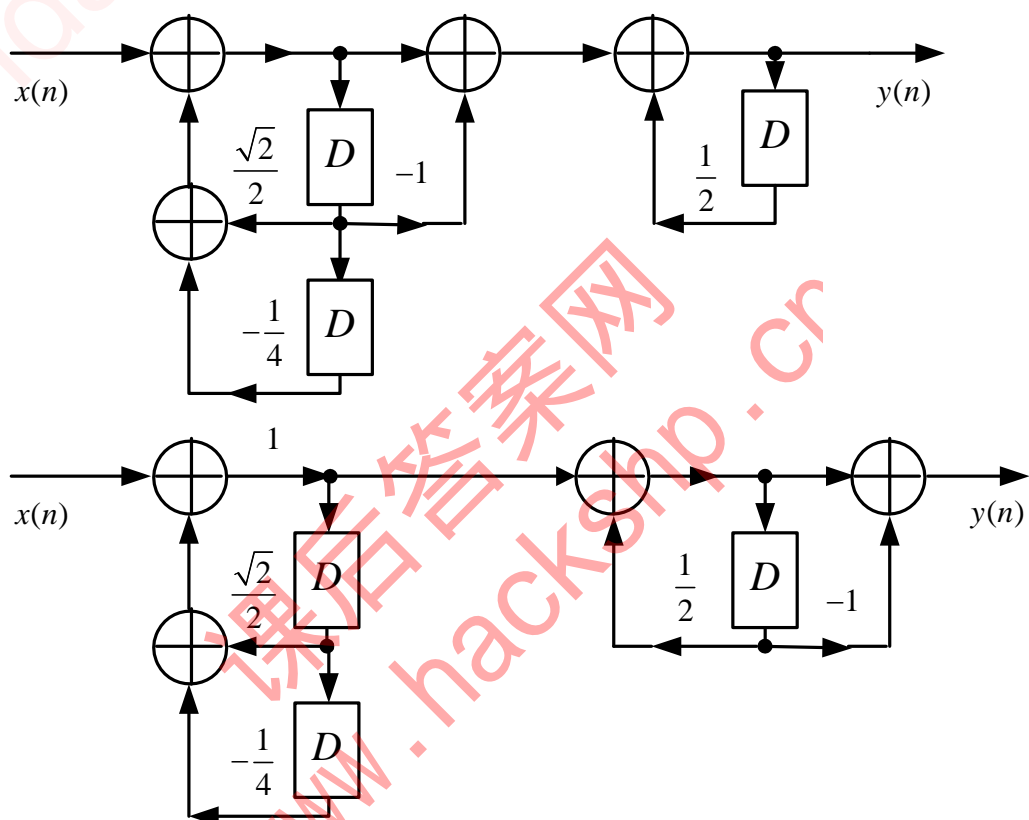
解：(a) $H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

∴可由3个一阶系统级联但不可并联。

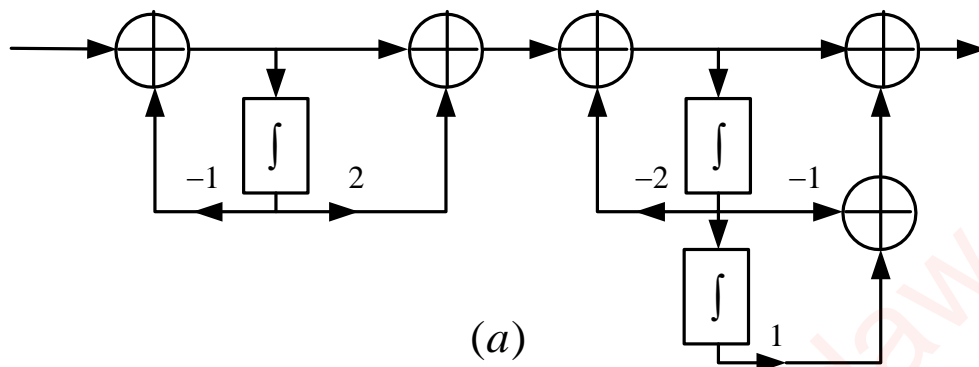
(b) 不能由3个一阶系统级联实现，也不能由并联实现

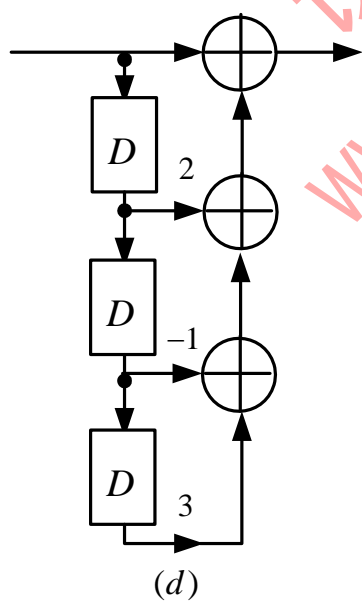
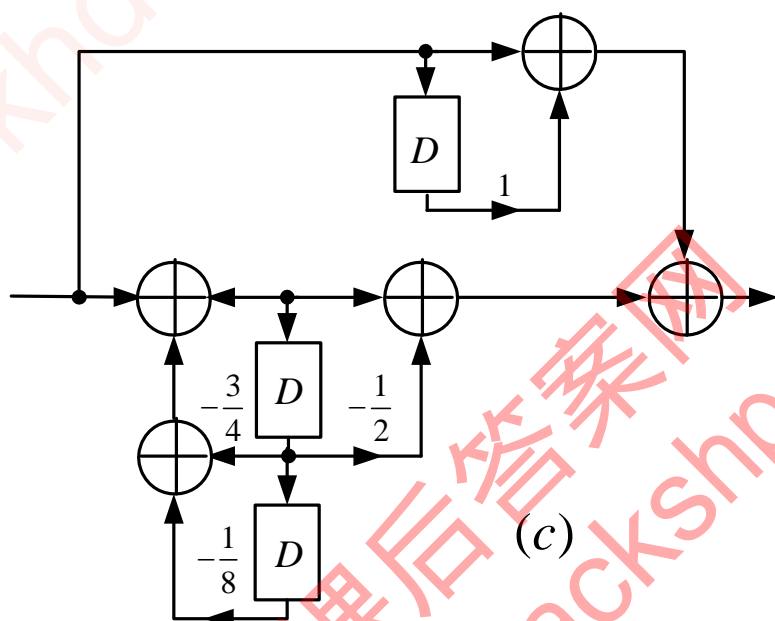
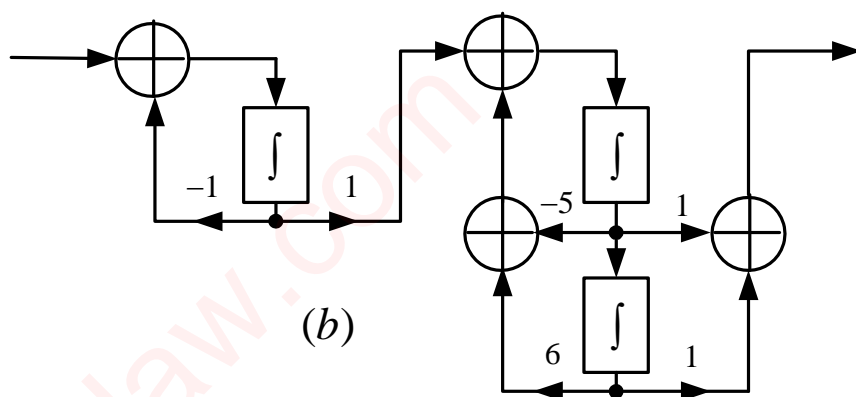
$$(c) H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\text{原式} = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$



8.10 对图 P8.10 所确定的因果系统，求系统函数及收敛域。





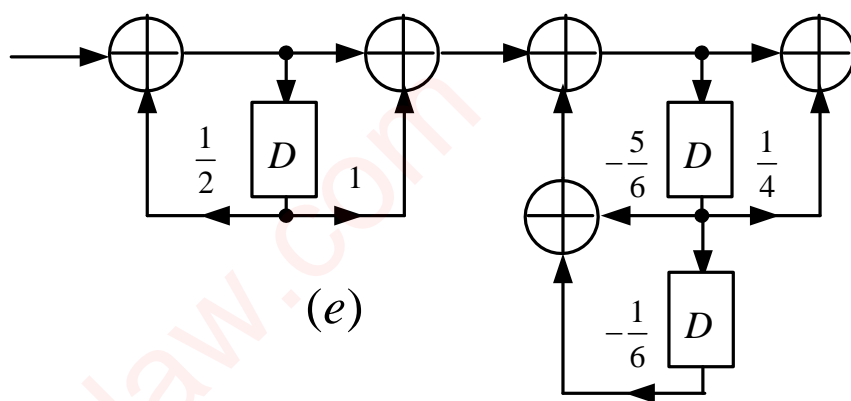


图 P8.10

解: (a) $H(s) = \frac{s-2}{s+1} \cdot \frac{s^2-s+3}{s+2}$ $\text{Re}\{s\} > -1$

(b) $H(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s^2+s+1}{s^2+5s+6}$ $\text{Re}\{s\} > 3$

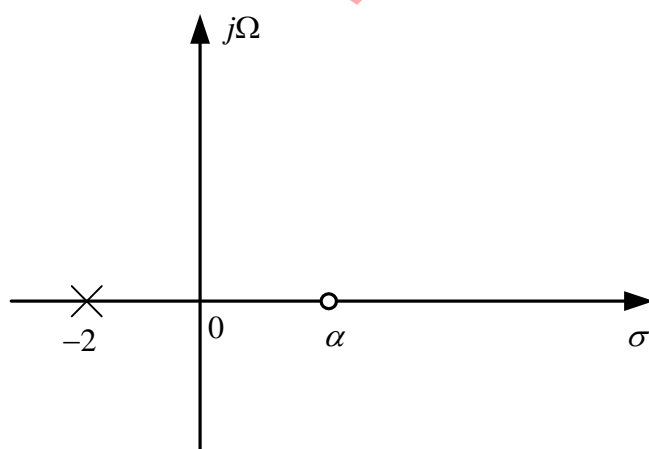
(c) $H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} + \frac{1}{1+z^{-1}}$ $|z| > 1$

(d) $H(z) = 1 + 2z^{-1} - z^{-2} + 3z^{-3}$ $|z| \neq 0$

(e) $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$ $|z| > \frac{1}{2}$

8.11 某连续时间因果系统函数 $H(s)$ 的零极点如图 P8.11 所示, 且 $H(\infty)=1$ 。该系统的单

位阶跃响应中一定包含 $Ke^{-2t}u(t)$, 请问当 a 从 0 变到 4 时, 相应的 K 值如何改变。



图P8.11

解: $H(s) = k \cdot \frac{s-a}{s+2} \quad \because H(\infty) = 1 \quad \therefore k = 1$

故 $H(s) = \frac{s-a}{s+2}$

$a = 0 \Rightarrow h(t) = -2e^{-2t}u(t)$

当 a 从 $0 \rightarrow 4$ 变化时, 相应的 k 值为 $-2-a$, 即由 $-2 \rightarrow -6$

8.12 已知某离散时间因果系统函数 $H(z)$ 的极点位于 $z = \frac{1}{2}$ 处, 零点在 $z = a$ 处, 而且

$H(\infty) = 1$ 。此系统的单位脉冲响应中一定包含 $K(\frac{1}{2})^n u(n)$ 。试问 a 从 0 变到 2, 相应的 K 值如何随之改变。

解: $H(z) = \frac{1-az^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) - a(\frac{1}{2})^{n-1} u(n-1) = 1 + (\frac{1}{2})^n u(n-1) - 2a(\frac{1}{2})^n u(n-1) = 1 + (1-2a)(\frac{1}{2})^n u(n-1)$

故 K 随 a 增大而减小。

8.13 已知 LTI 因果系统函数如下, 画出系统函数的零极点图; 求系统的单位冲激 (或单位脉冲响应), 并画出波形示意图。

(a) $\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$

(b) $\frac{1}{(s+1)^2}$

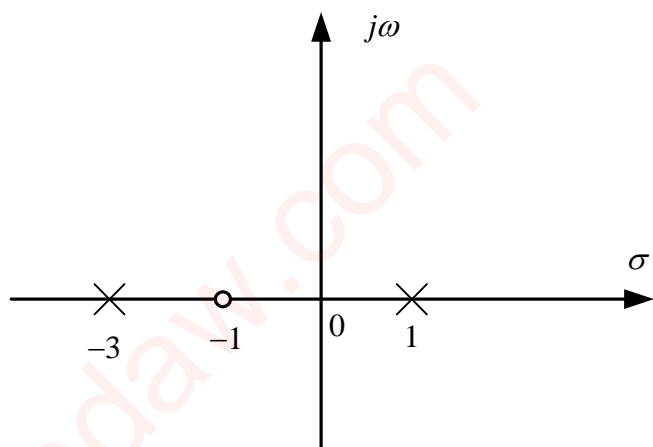
(c) $\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4}$

(d) $\frac{1+z^{-1}}{1-(\cos\frac{3}{4}\pi)z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$

(e) $\frac{(1+z^{-1})^2}{1-(\cos\frac{3}{4}\pi)z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$

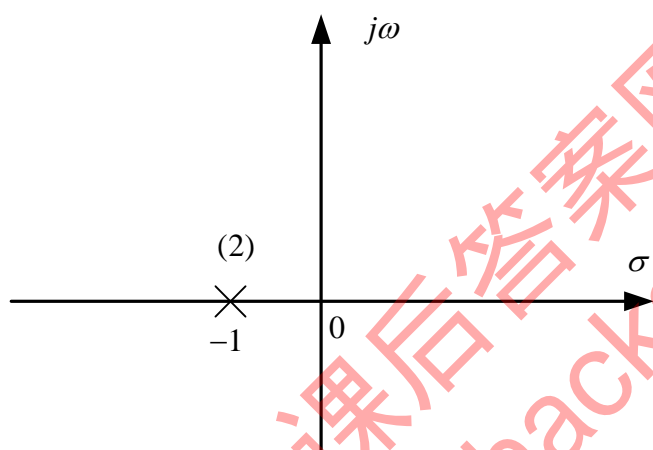
(f) $\frac{1-z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

解: (a) $h(t) = e^{-t} \cos 2t \cdot u(t)$



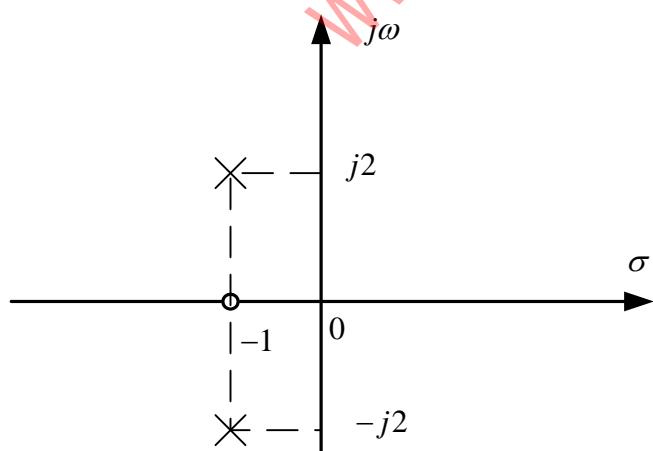
(a)

(b) $h(t) = te^{-t}u(t)$



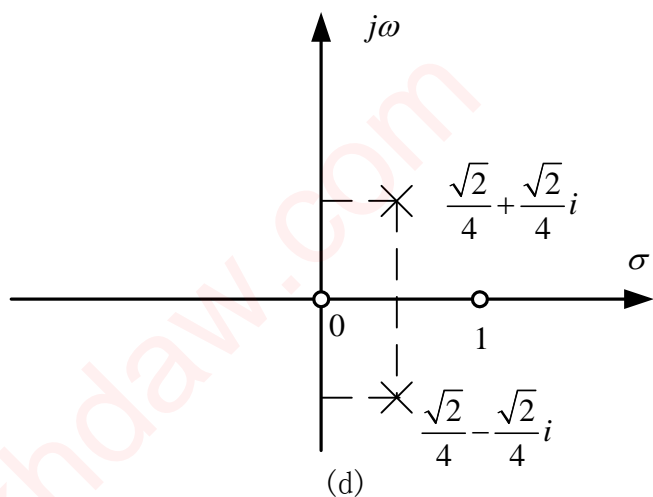
(b)

(c) $h(t) = -2e^{-t} \sin 2t \cdot u(t) + \delta(t)$



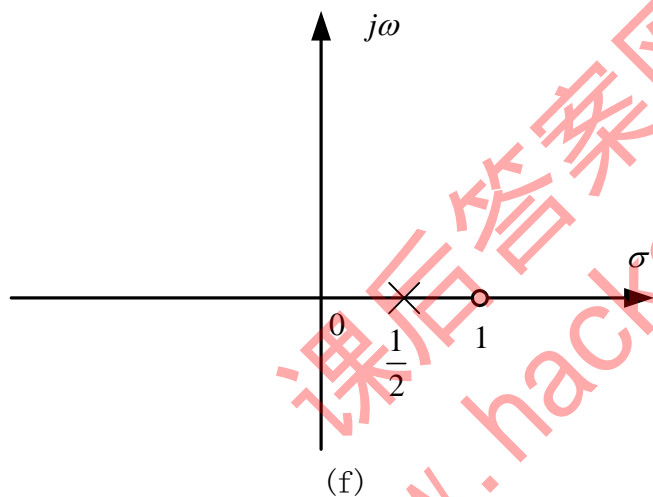
(c)

(d) $h(n) = ?$



(e) ?

$$(f) \quad h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2)$$



8.14 LTI 因果系统函数如下，试确定系统的单位冲激响应 $h(t)$ 或单位脉冲响应 $h(n)$ ，并画

出波形示意图；画出系统的零极点图，注意零极点分布对 $h(t)$ （或 $h(n)$ ）的影响。

$$(a) \quad \frac{1 - e^{s\tau}}{s}$$

$$(b) \quad \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$$(c) \quad \frac{1 - e^{s\tau}}{s(1 - e^{-sT})}$$

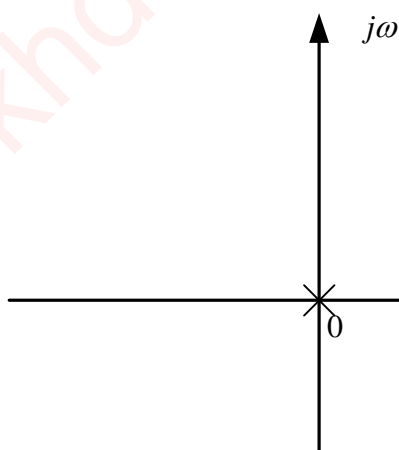
$$(d) \quad \frac{1 - z^{-N_1}}{1 - z^{-1}}$$

(e) $\frac{1}{1-z^{-T}}$

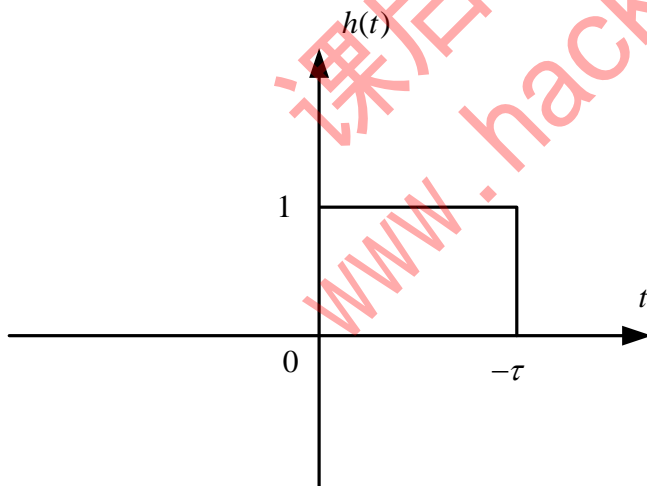
(f) $\frac{1-z^{-N_1}}{(1-z^{-1})(1-z^{-T})}$

解: (a) $H(s) = \frac{1-e^{s\tau}}{s} = \frac{1}{s} - \frac{e^{s\tau}}{s}$

$$h(t) = u(t) - u(t + \tau)$$



(a)



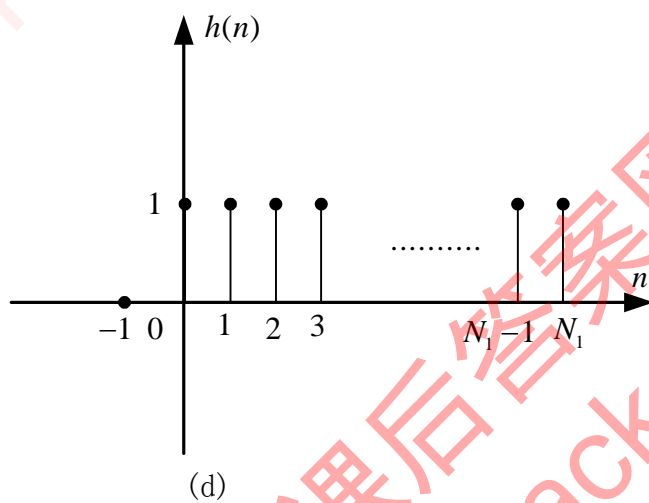
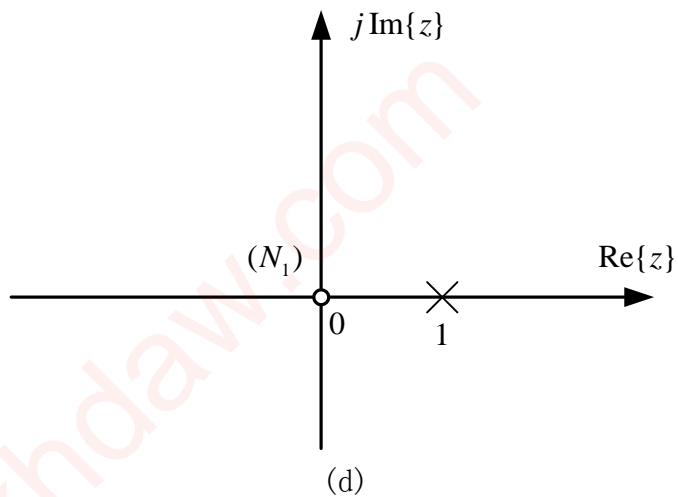
(a)

(b) ?

(c) ?

(d) $H(z) = \frac{1-z^{-N_1}}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N_1+1}$

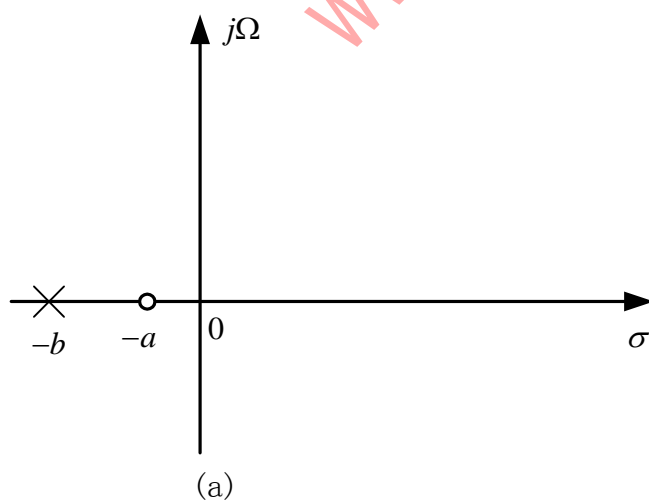
$$h(n) = u(n) - u(n - N)$$

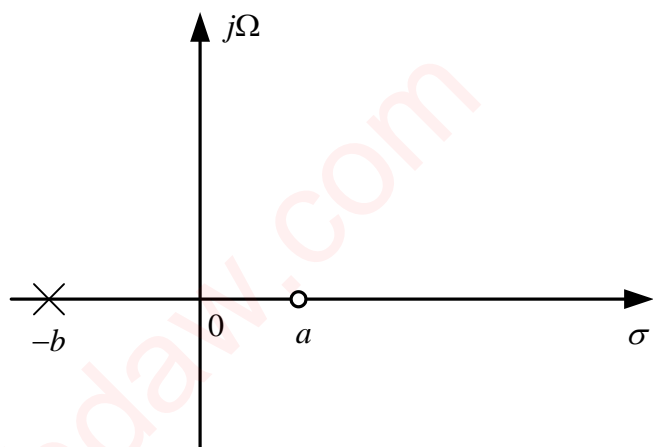


(e) ?

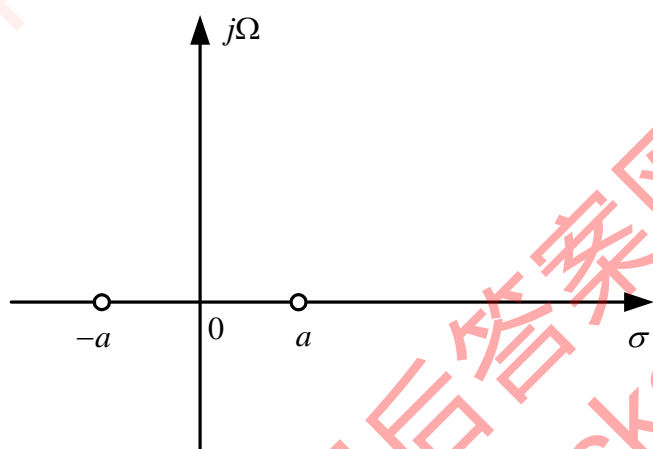
(f) ?

8.15 图 P8.15 给出了连续时间 LTI 系统的零极点分布。如果系统是稳定的，试用几何求值法概略画出系统的频率特性，并作必要的标注。

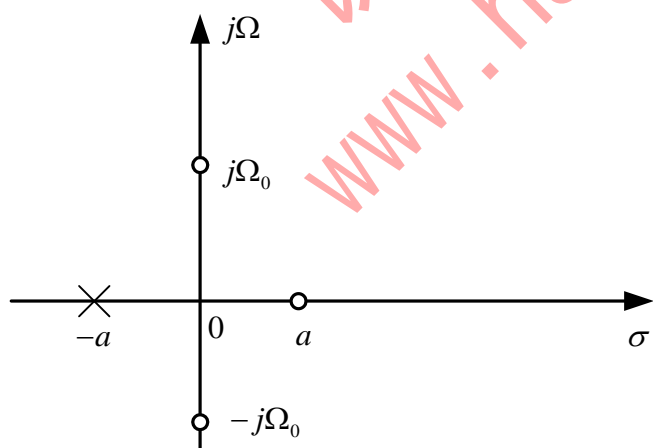




(b)



(c)



(d)

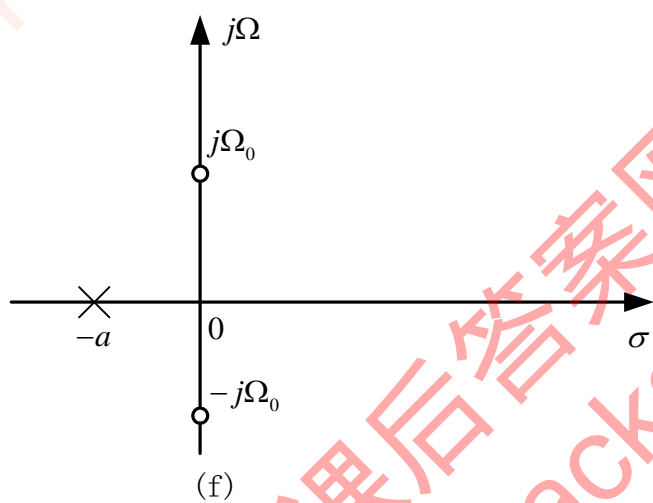
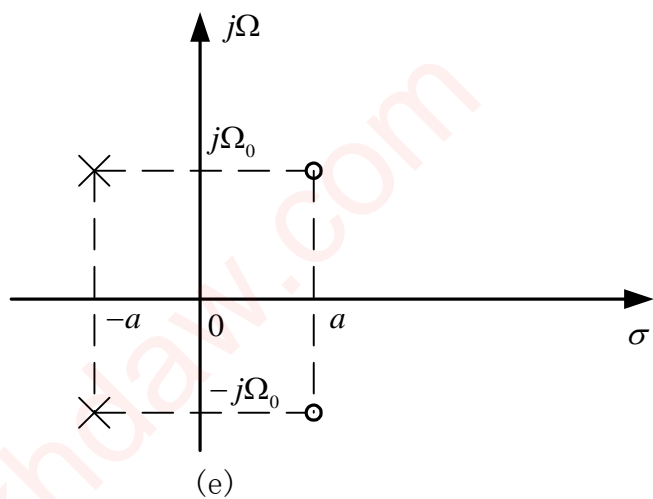
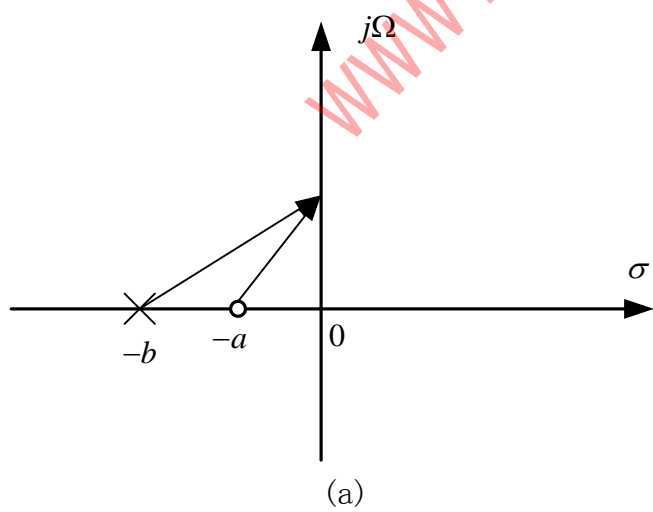
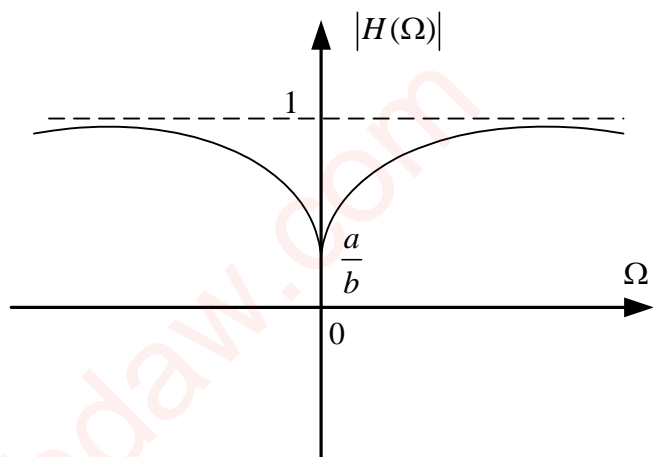


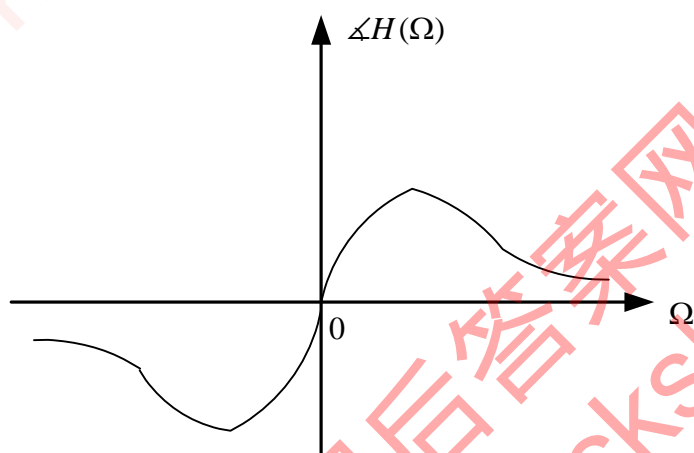
图 P8.15

解: (a)



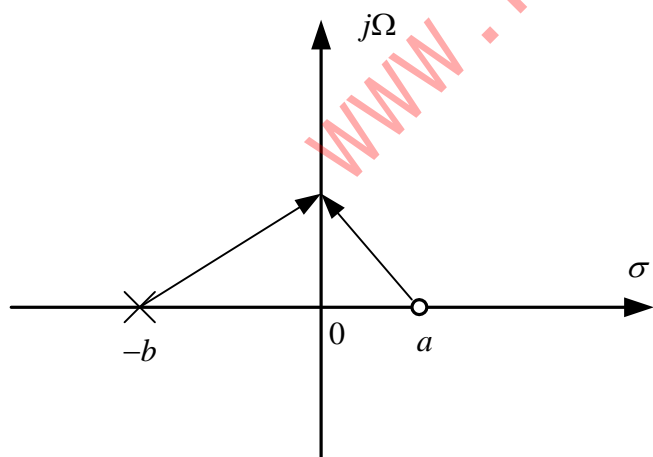


(a)

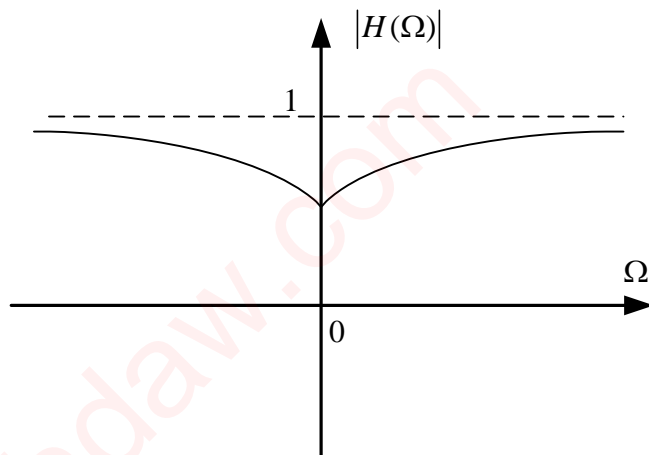


(a)

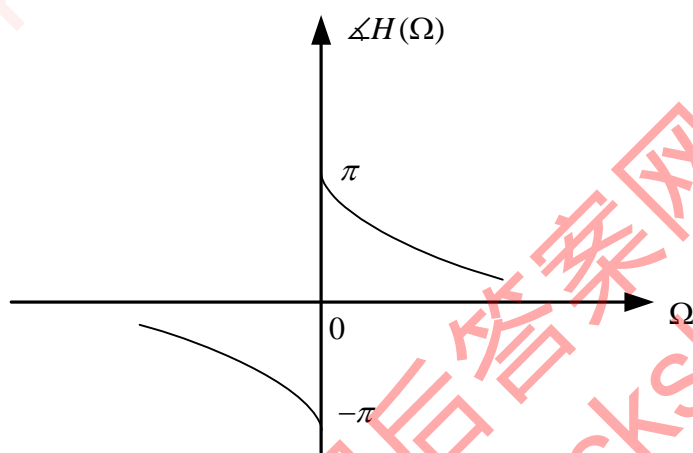
(b)



(b)

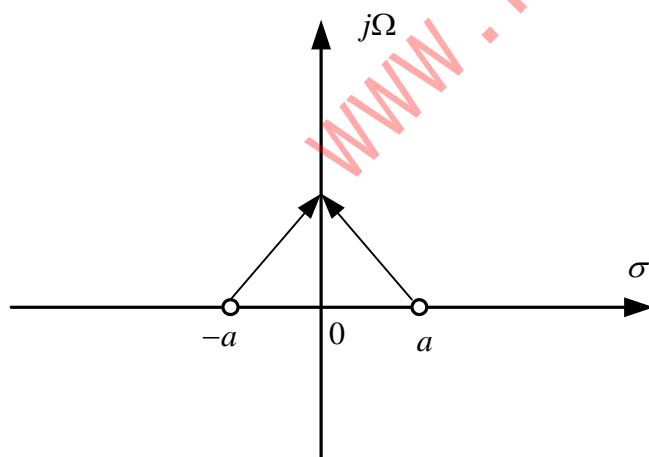


(b)

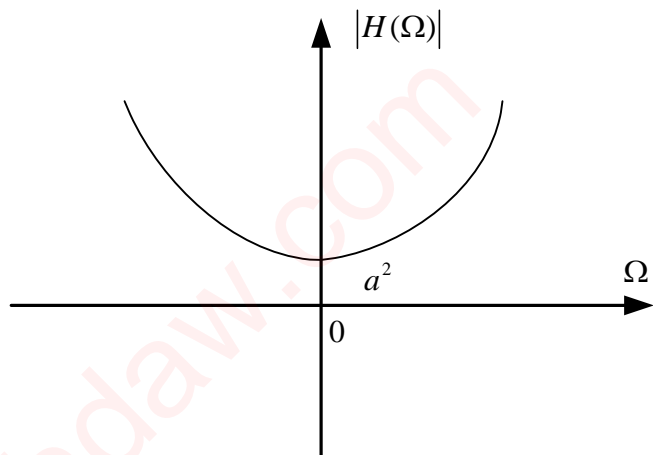


(b)

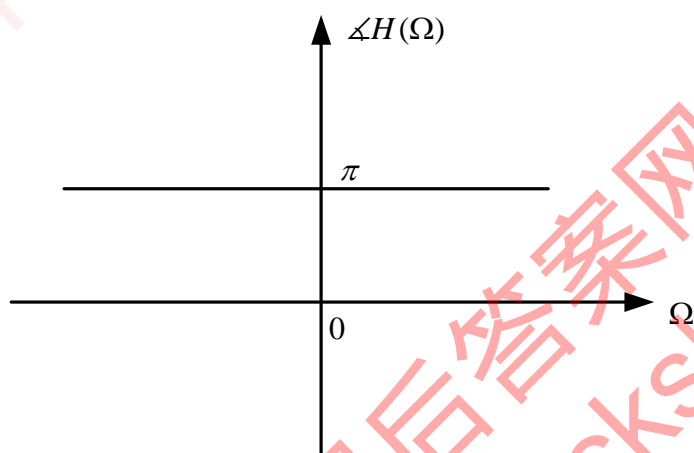
(c)



(c)

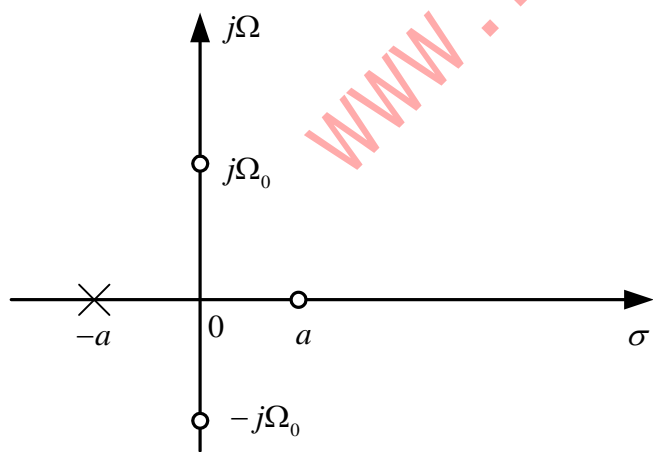


(c)

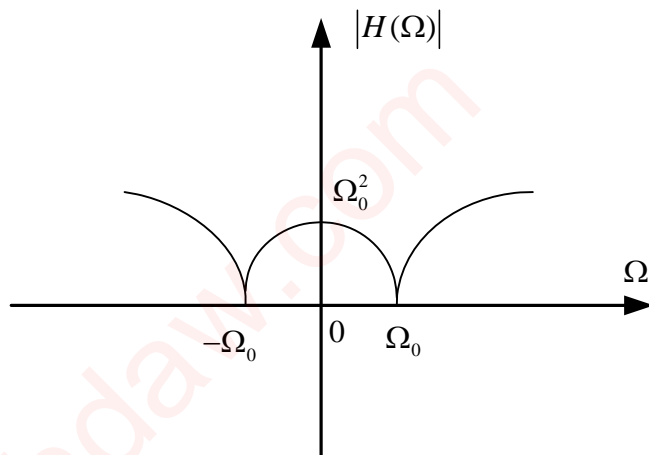


(c)

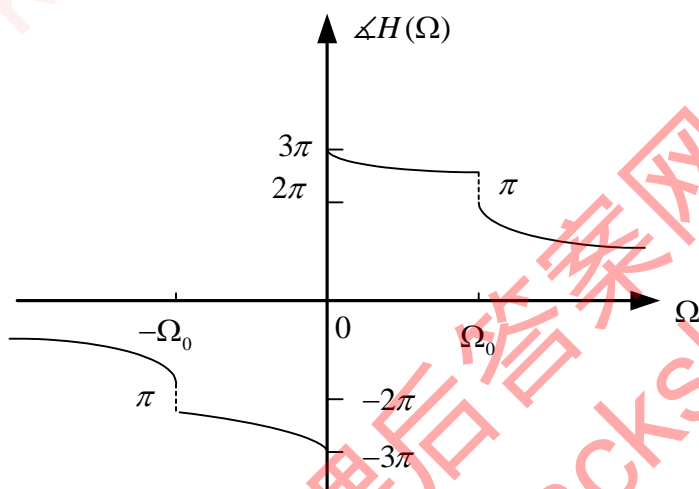
(d)



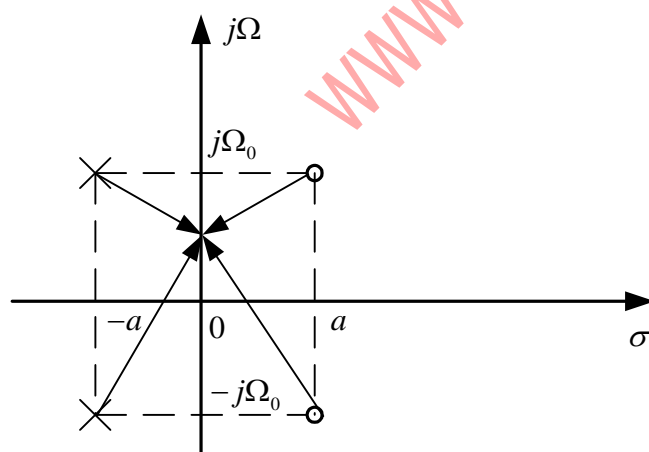
(d)



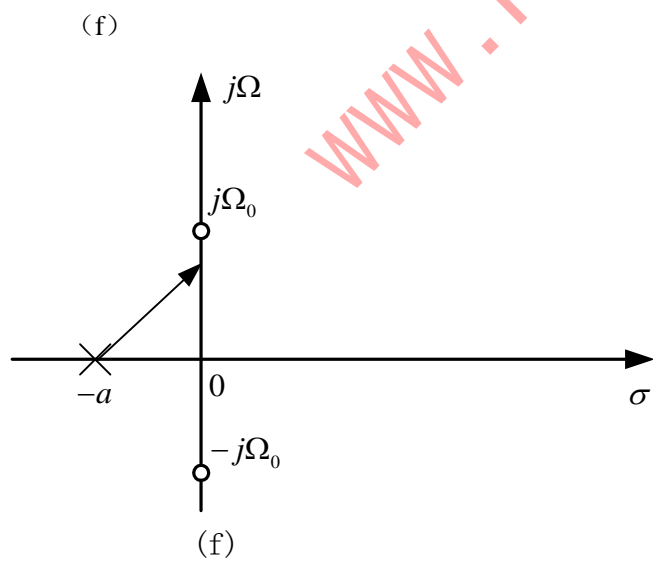
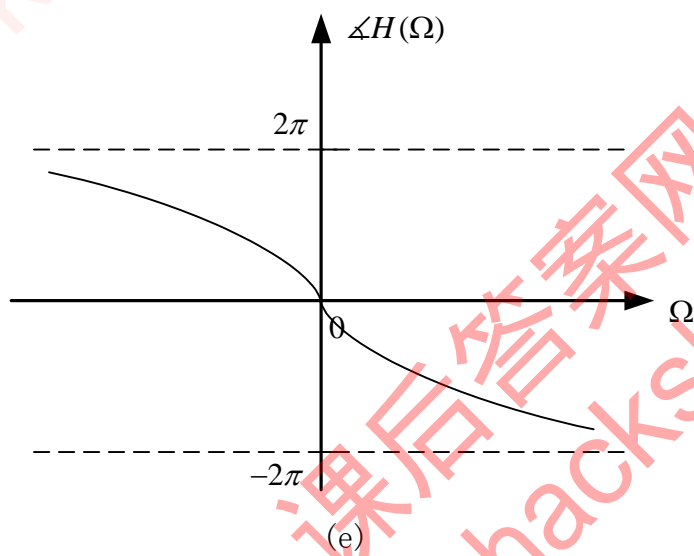
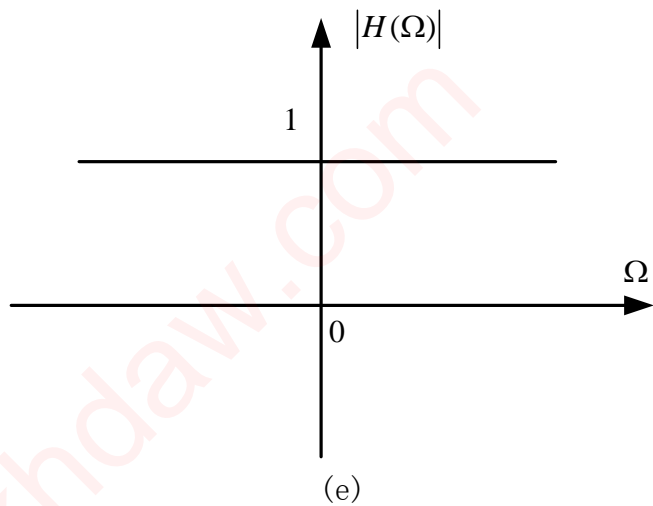
(d)

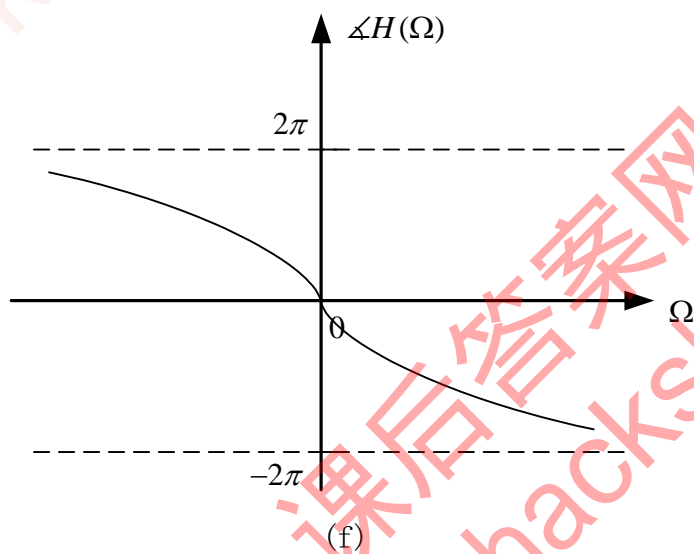
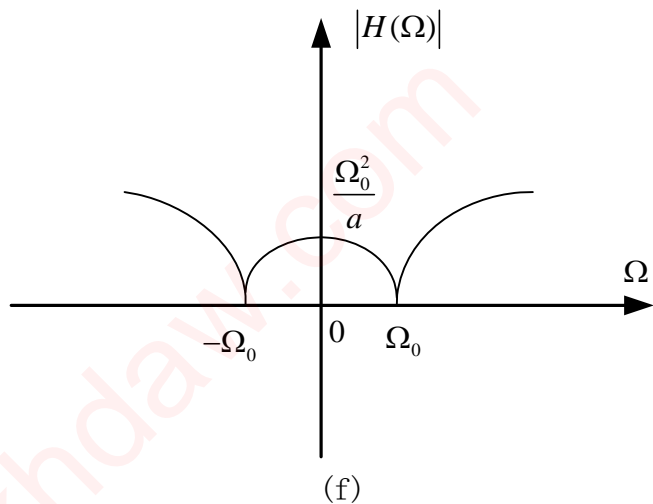


(d)

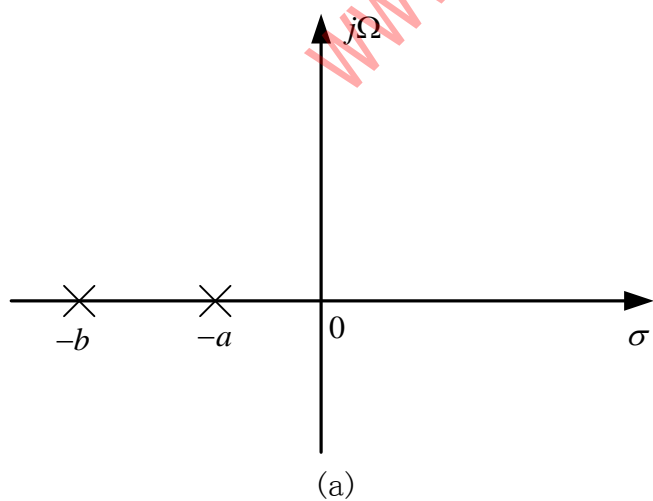


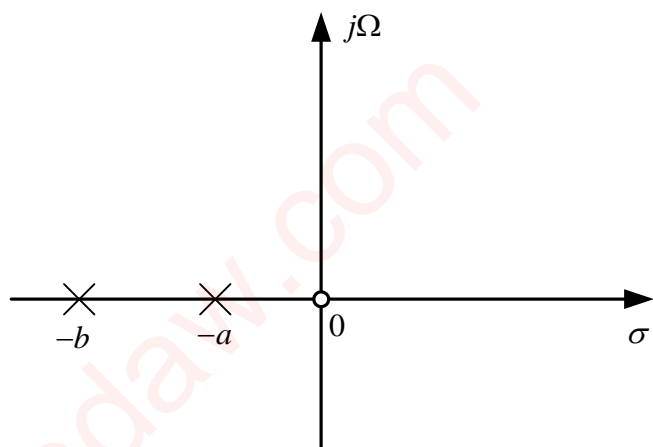
(e)



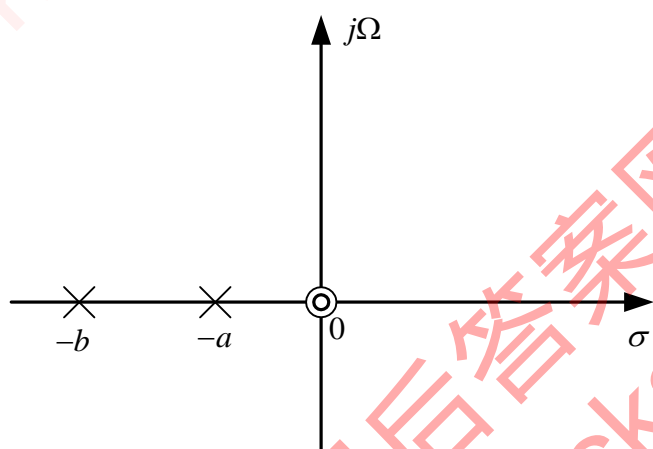


8.16 连续时间 LTI 系统的零极点分布如图 P8.16 所示，试判断系统的特性是低通、高通、带通还是带阻。

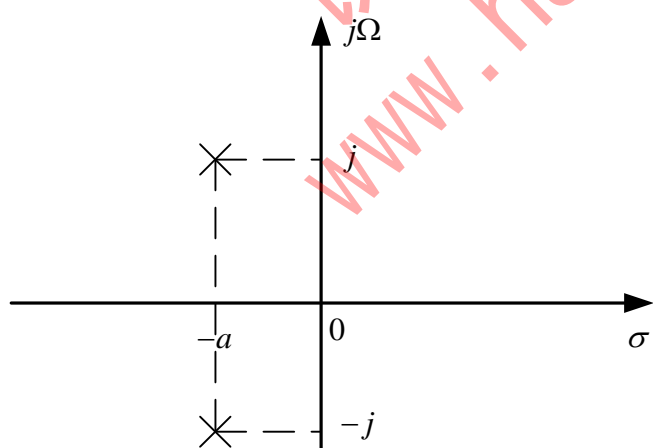




(b)



(c)



(d)

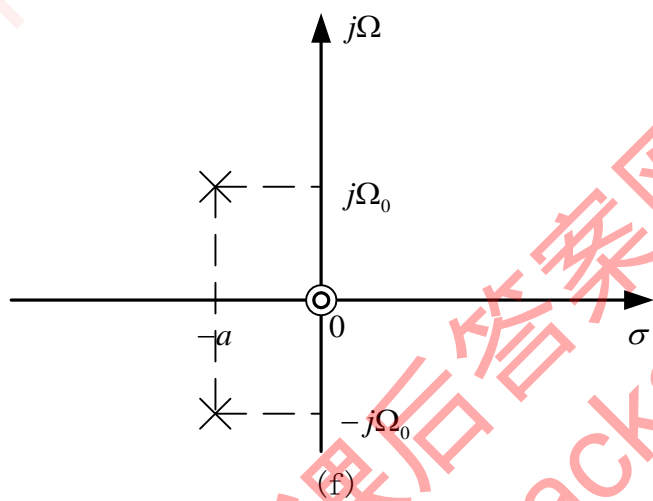
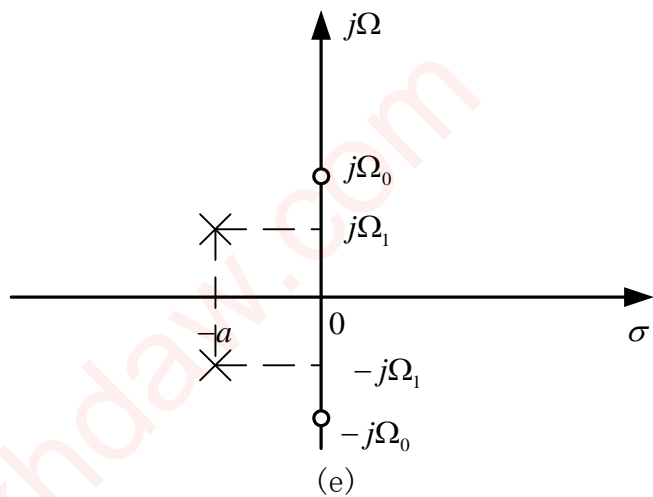
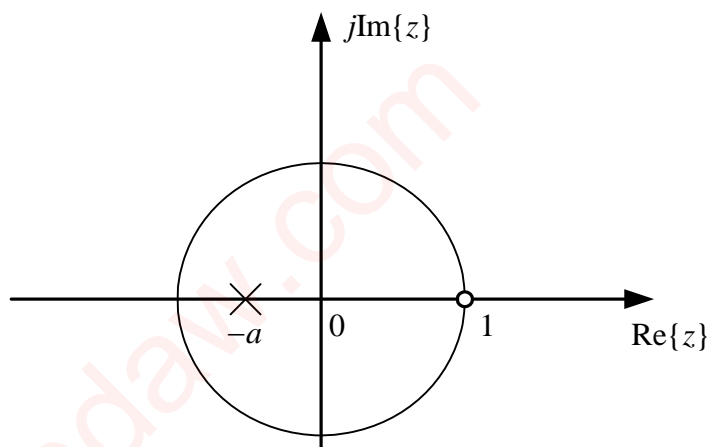


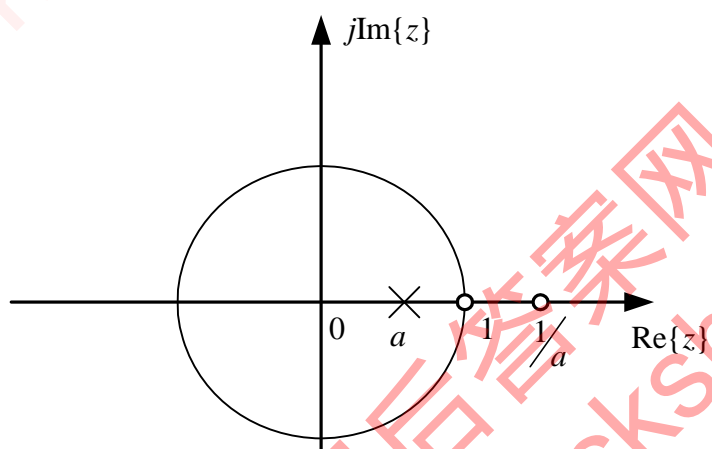
图 P8.16

- 解： (a) 带通
 (b) 带阻
 (c) 带阻
 (d) 低通
 (e) 带阻
 (f) 高通

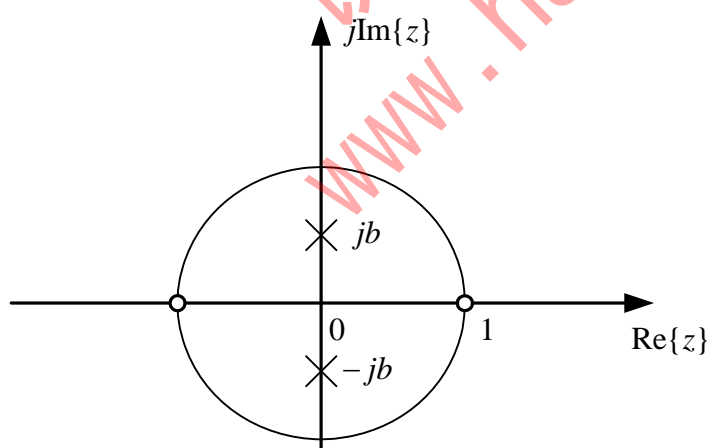
8.17 (a) 离散时间系统函数的零极点如图 P8.17 所示。如果系统是稳定的，试用几何求值法概略画出系统的频率特性，并给以必要的标注。



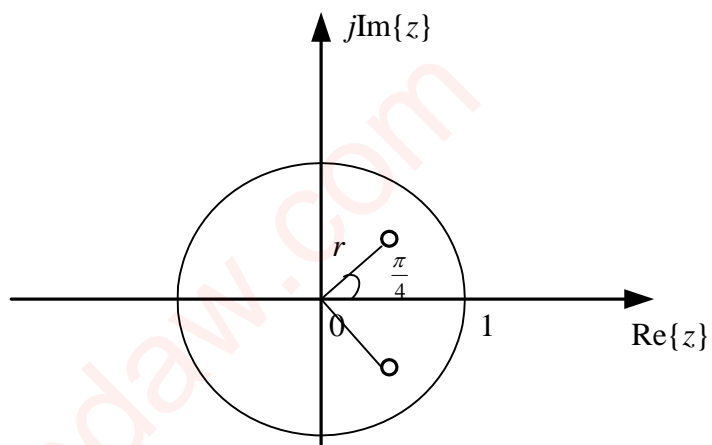
(a)



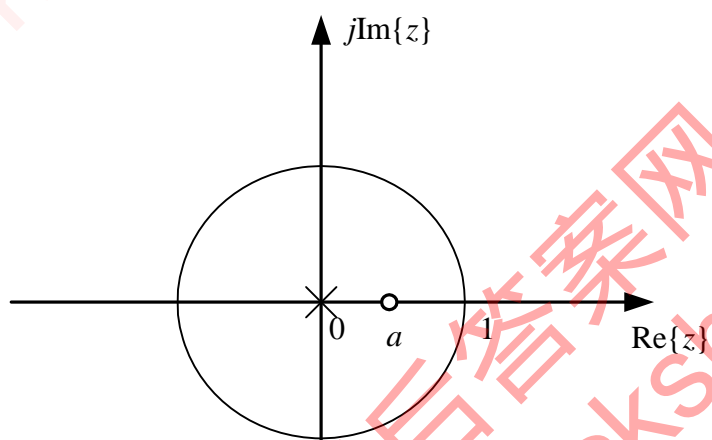
(b)



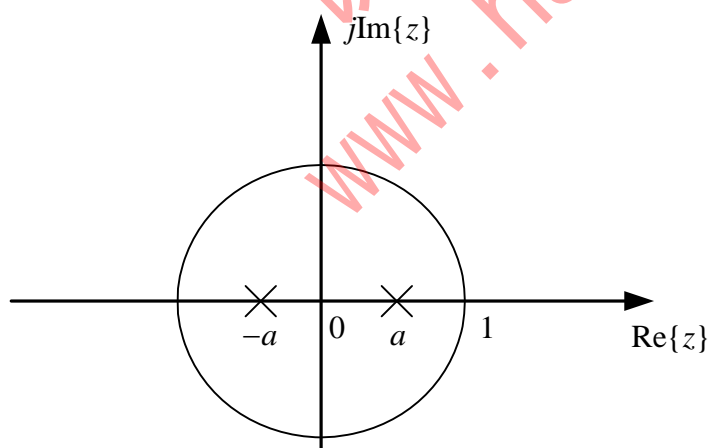
(c)



(d)



(e)



(f)

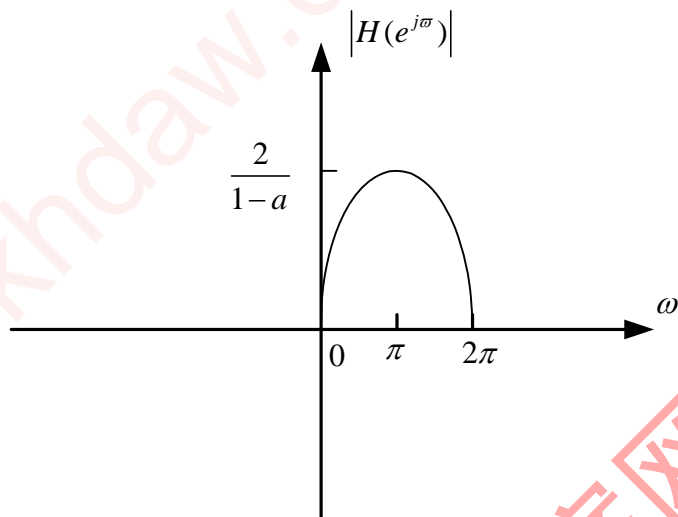
图 P8.17

(b) 由 (a) 的结果可知，图 P8.17 (b) 所确定的系统频率响应的模是与频率 ω 无关的常数。因此我们称该系统为全通系统。离散时间全通系统的零点 z_k 与极点 p_k 有

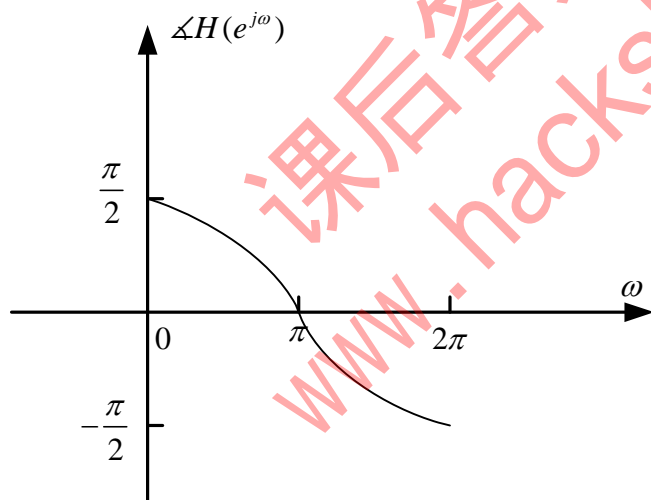
$z_k = \frac{1}{p_k}$ 的对应关系，它相当于在 s 平面镜像对称于 $j\Omega$ 轴，所以也称零点与极点镜像对称于单位圆。求上述全通系统的单位脉冲和单位阶跃响应。

解： (a)

(a)

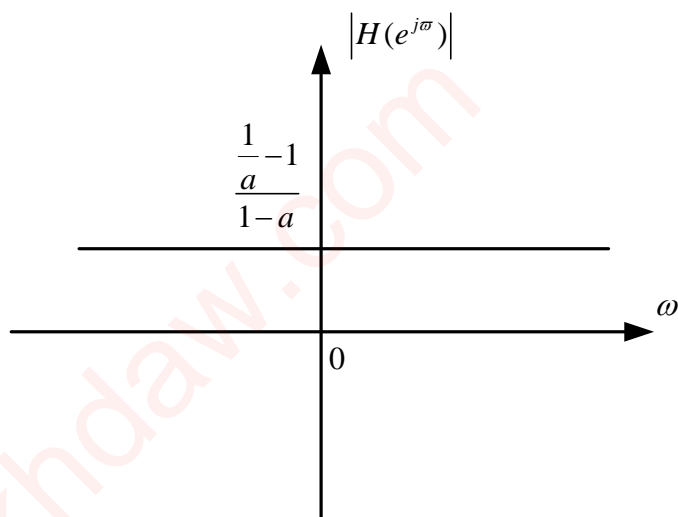


(a)

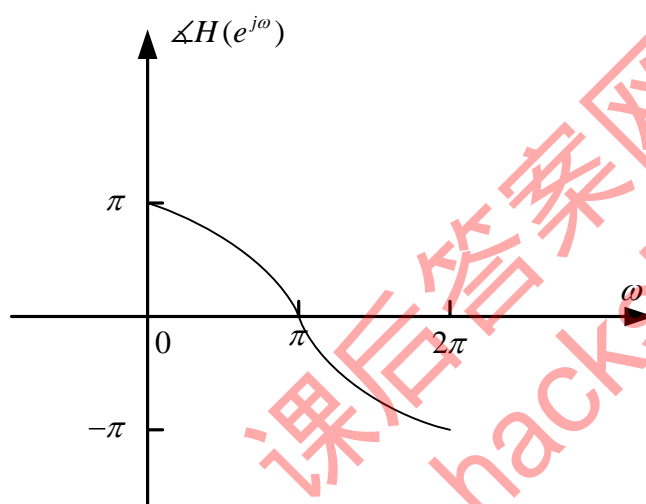


(a)

(b)

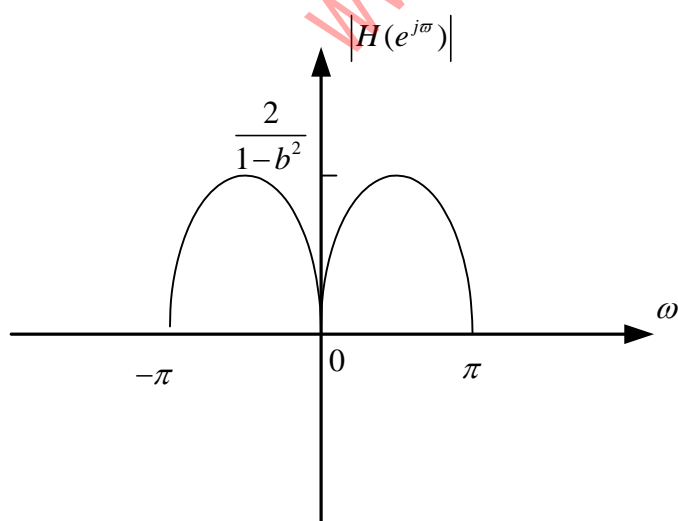


(b)

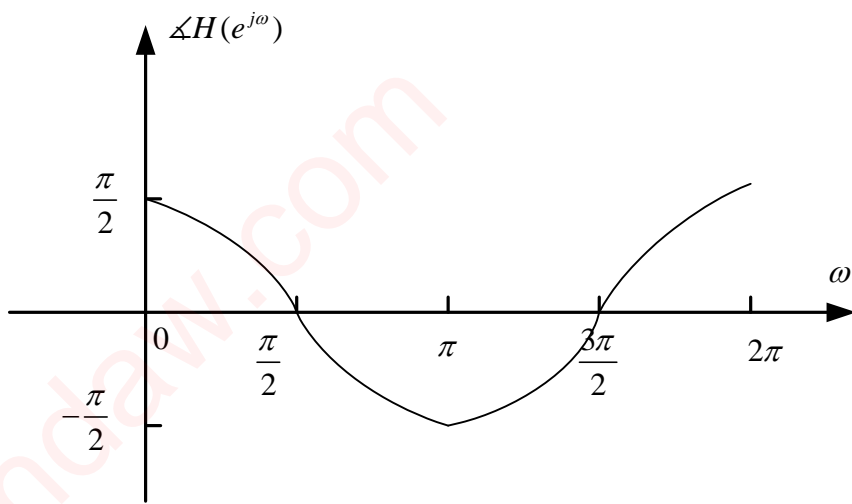


(b)

(c)

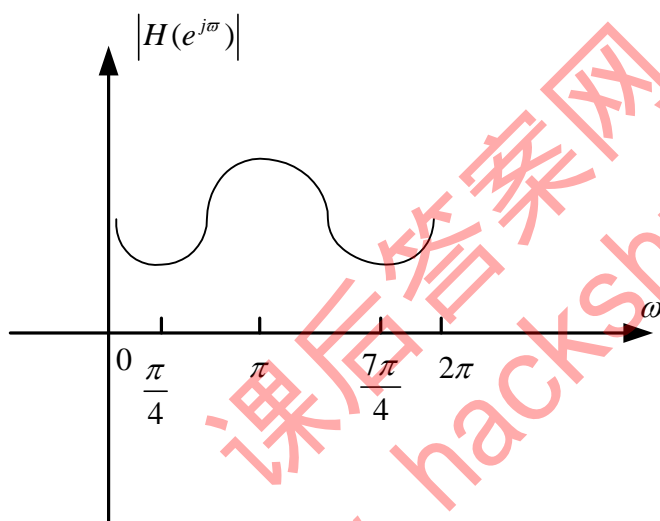


(c)

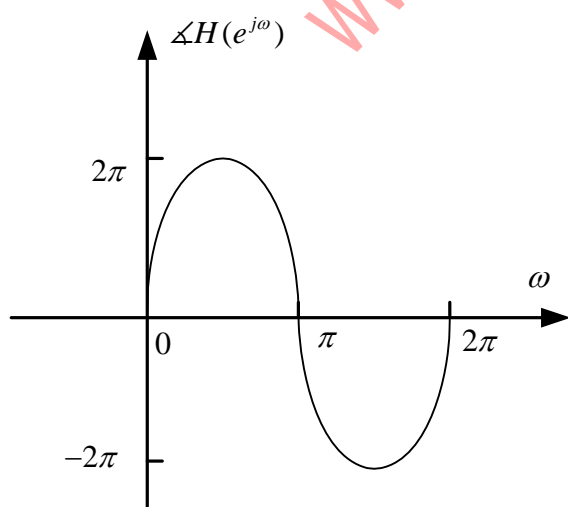


(c)

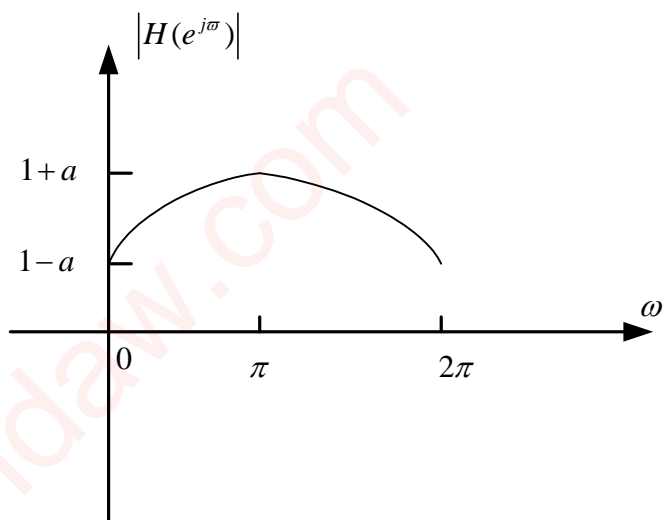
(d)



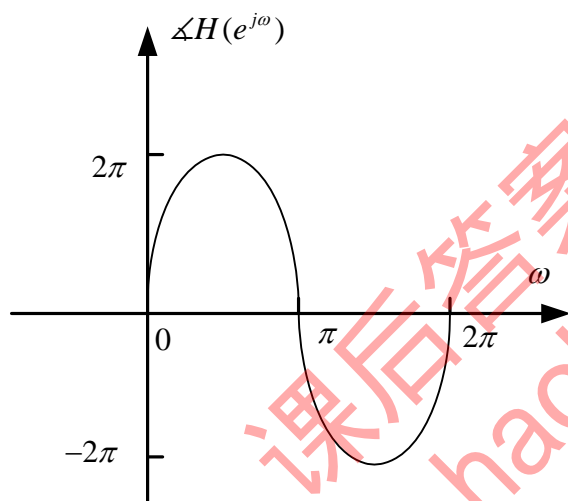
(d)



(e)

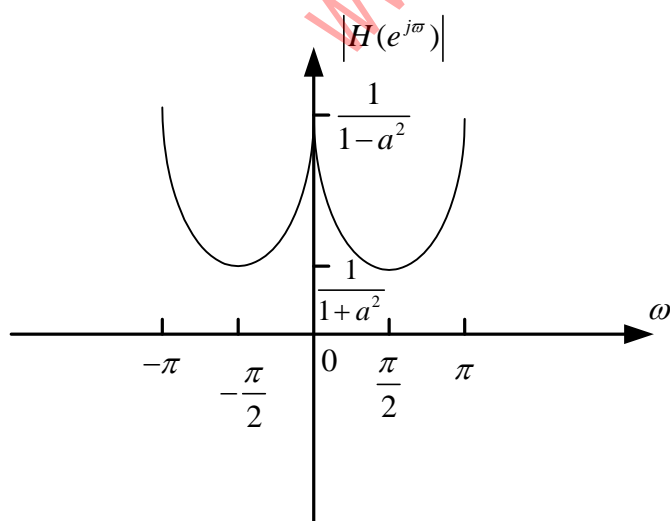


(e)

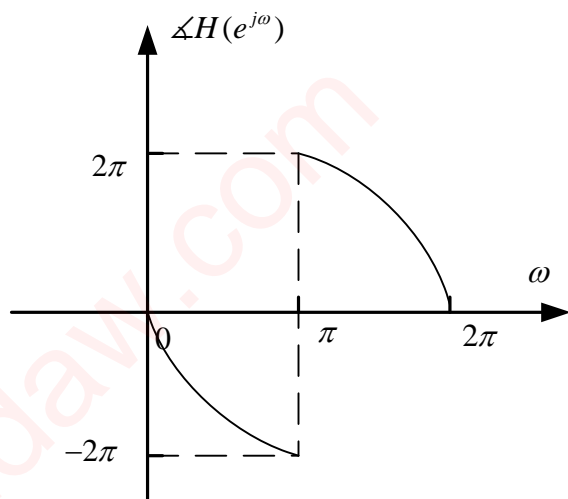


(e)

(f)



(f)



(f)

(b)

$$H(z) = K \frac{z - z_k}{z - p_k} = K \frac{1 - z_k z^{-1}}{1 - \frac{1}{z_k} z^{-1}} = K \frac{z_k^2 (1 - \frac{1}{z_k} z^{-1})}{1 - \frac{1}{z_k} z^{-1}} + K \frac{1 - z_k^2}{1 - \frac{1}{z_k} z^{-1}} = K z_k^2 + K \frac{1 - z_k^2}{1 - \frac{1}{z_k} z^{-1}}$$

$$\because K z_k^2 \leftrightarrow k z_k^2 \delta(n)$$

$$K \frac{1 - z_k^2}{1 - \frac{1}{z_k} z^{-1}} \longleftrightarrow K (1 - z_k^2) \left(\frac{1}{z_k} \right)^n u(n)$$

$$\therefore H(z) \longleftrightarrow K z_k^2 \delta(n) + K (1 - z_k^2) \left(\frac{1}{z_k} \right)^n u(n)$$

8.18 概略画出下列稳定系统频率响应的波特图。

(a) $s + 10$

(b) $s - 10$

(c) $\frac{s + 10}{s + 1}$

(d) $\frac{s - 10}{s + 1}$

(e) $\frac{s + 10}{s^2 + s + 1}$

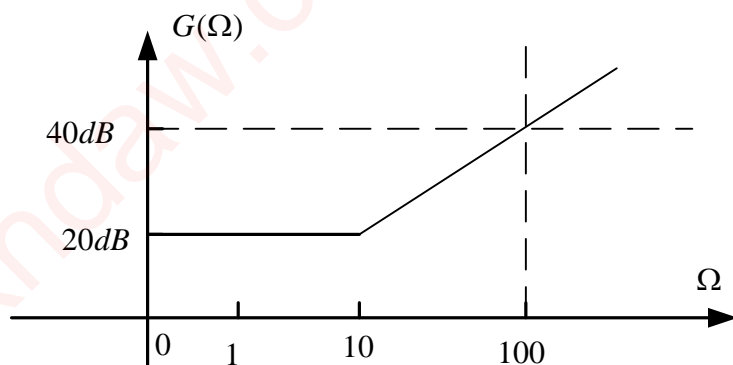
(f) $\frac{s^2 + \frac{1}{2}s + 1}{s + 10}$

(g) $s^2 + s + 1$

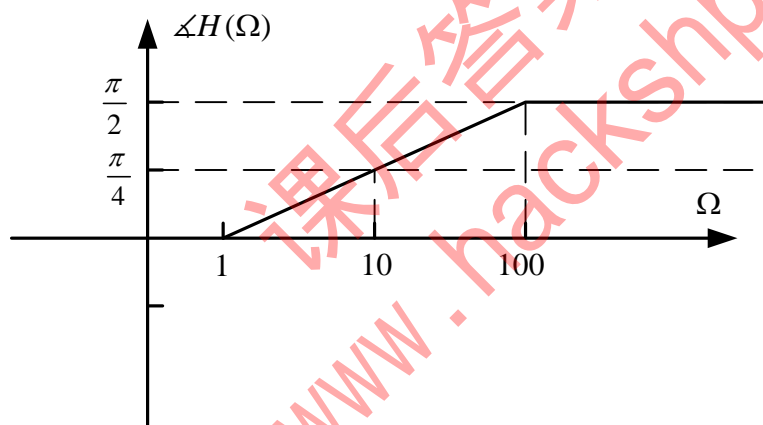
(h) $s^2 - s + 1$

(i) $\frac{(s+10)(s+1)}{(s+100)(s^2+s+1)}$

解: (a)

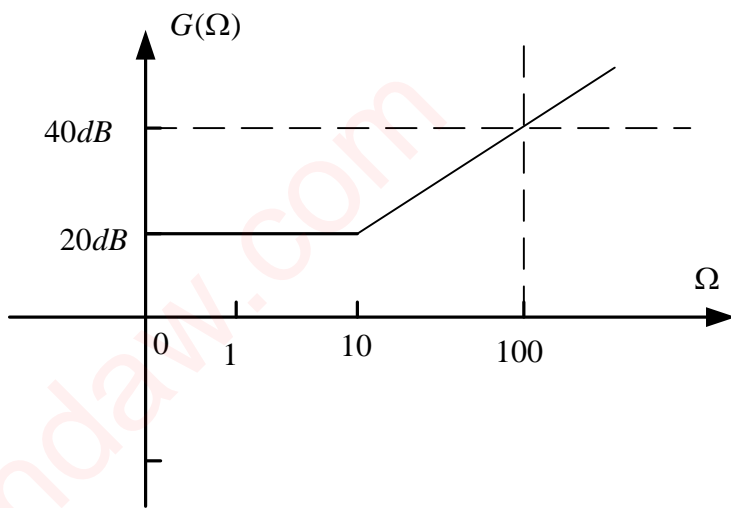


(a)

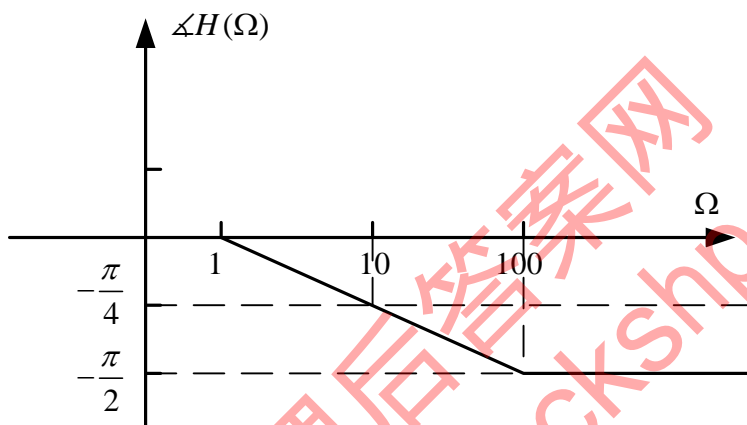


(a)

(b)

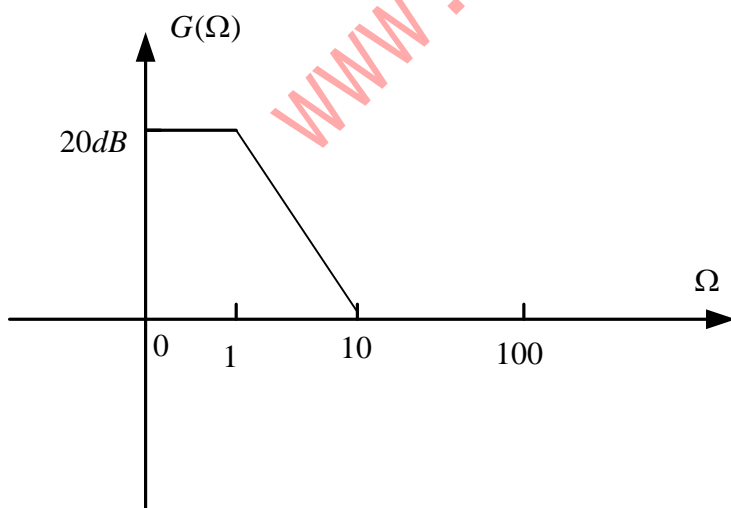


(b)

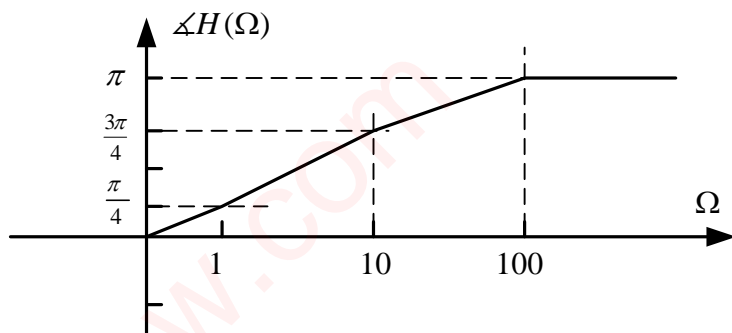


(b)

(c)

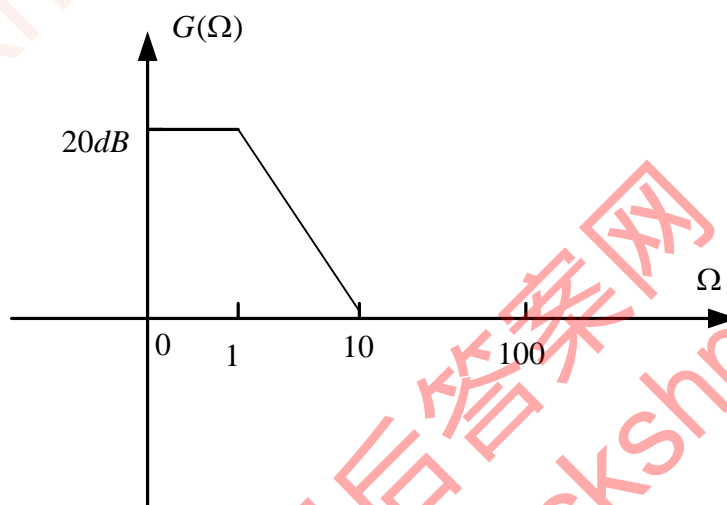


(c)

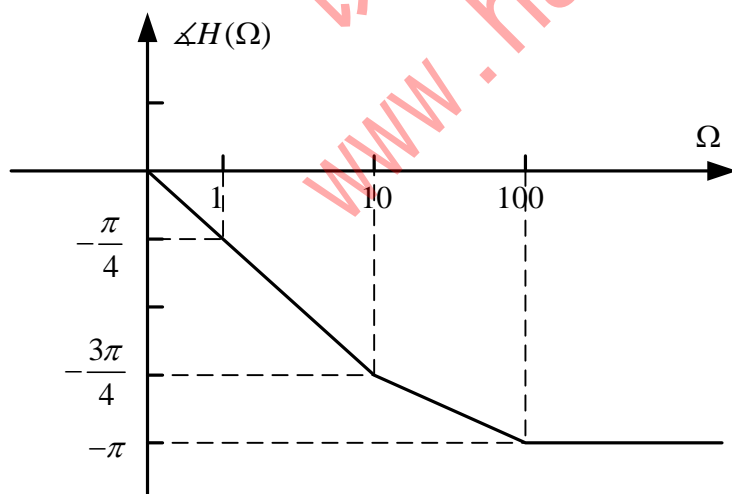


(c)

(d)

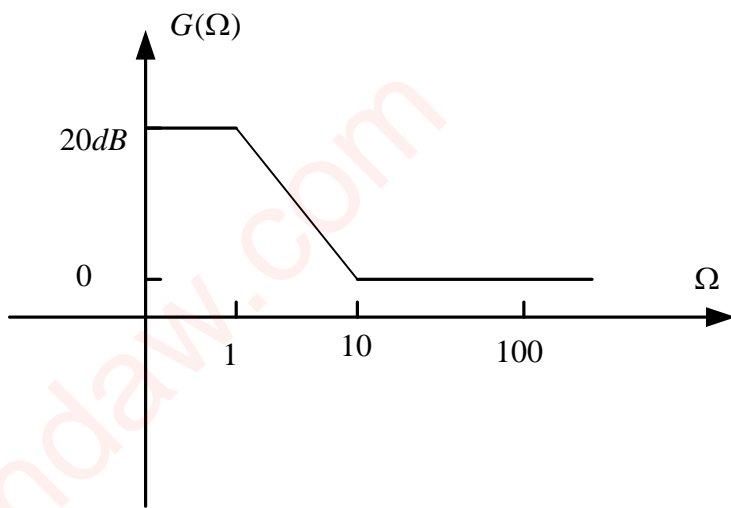


(d)

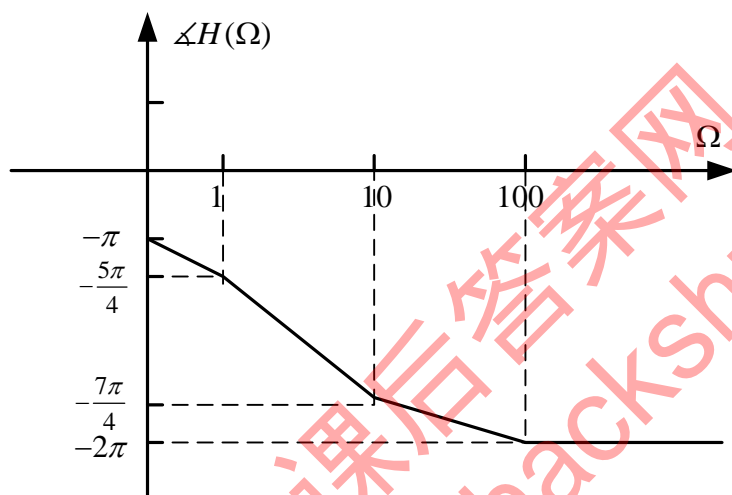


(d)

(e)

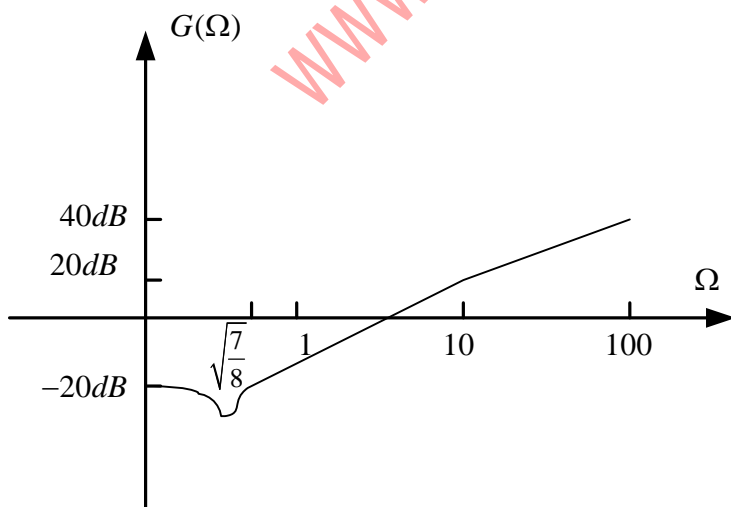


(e)

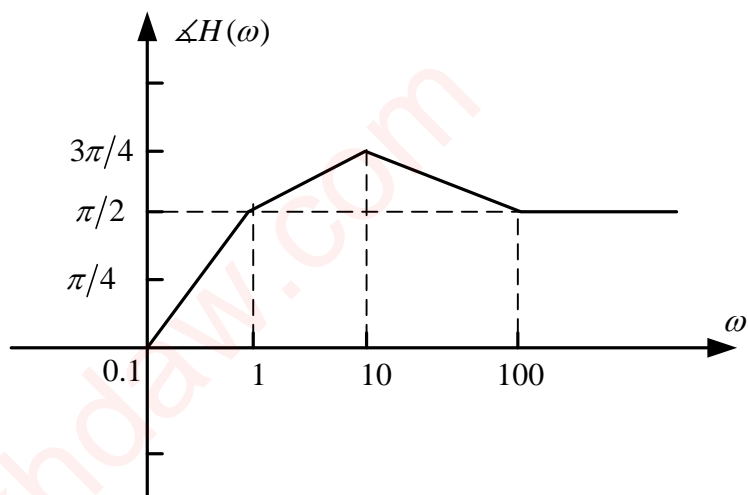


(e)

(f)

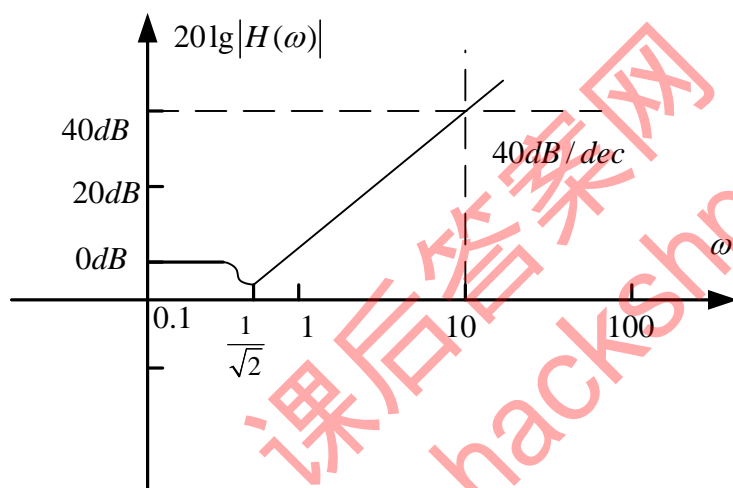


(f)

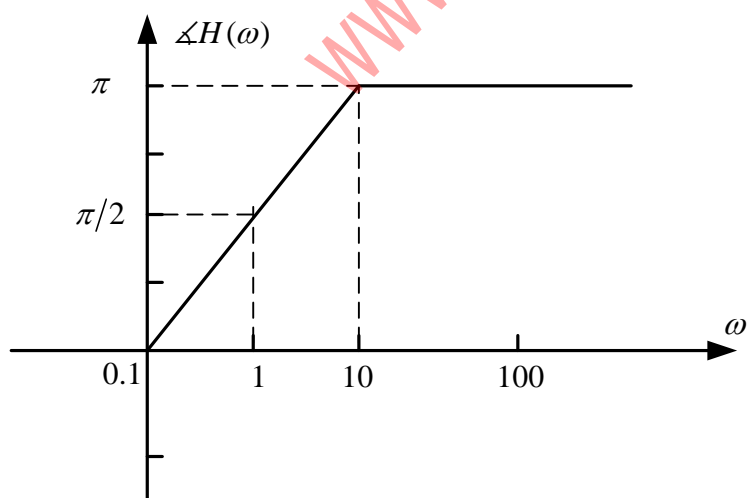


(f)

(g)

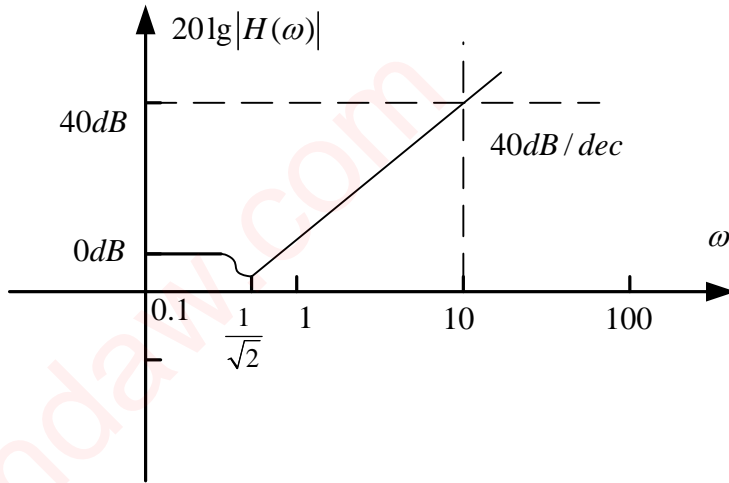


(g)

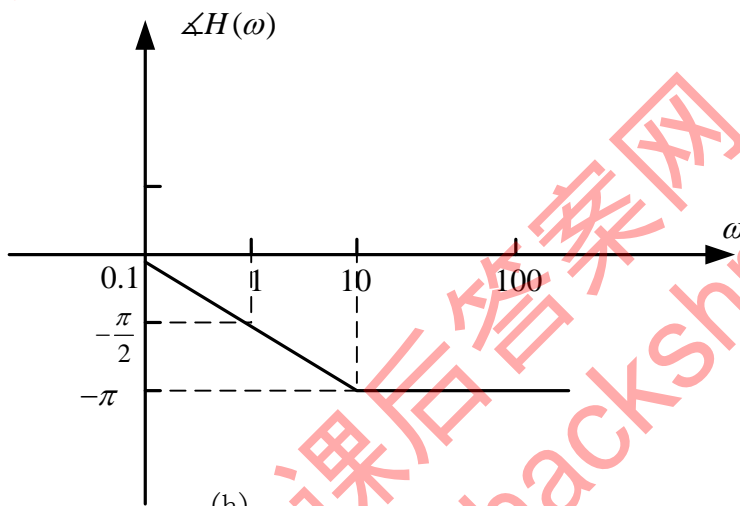


(g)

(h)

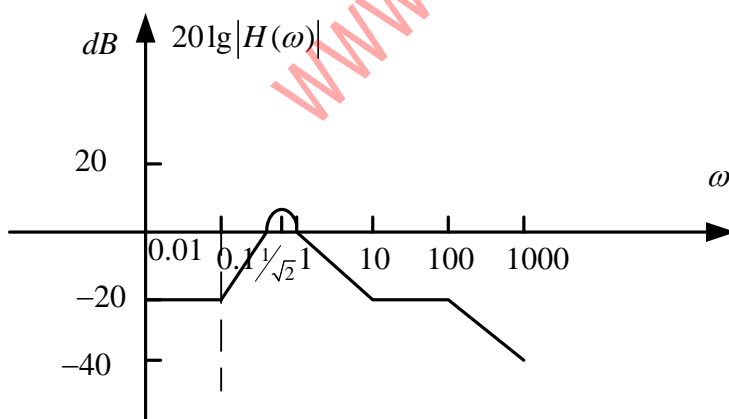


(h)

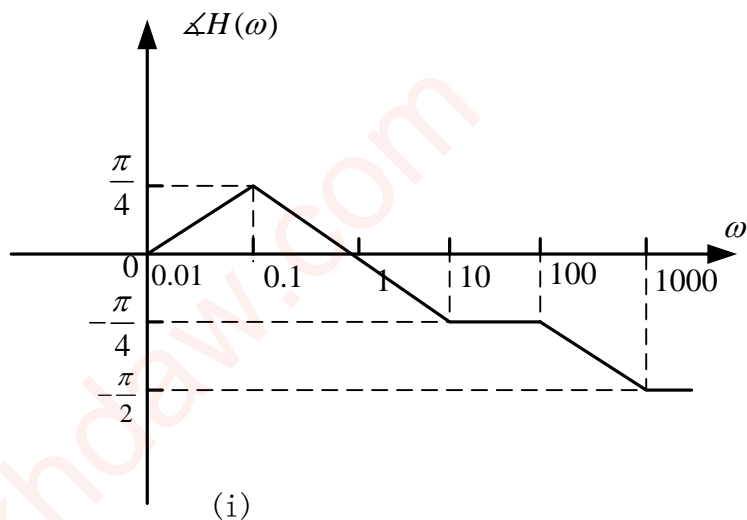


(h)

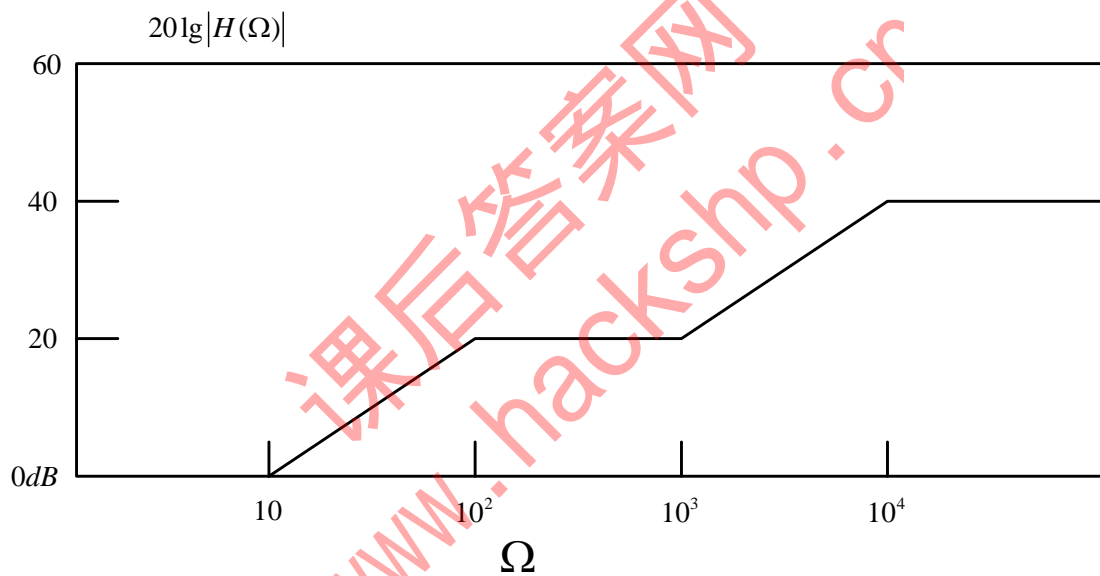
(i)



(i)



8.19 已知某连续时间 LTI 系统的幅度波特图如图 P8.19 所示。如果该系统是最小相移系统，求出该系统，求出该系统的系统函数及收敛域；如果该系统是非最小相移系统，那么系统函数及收敛域又将是什么？

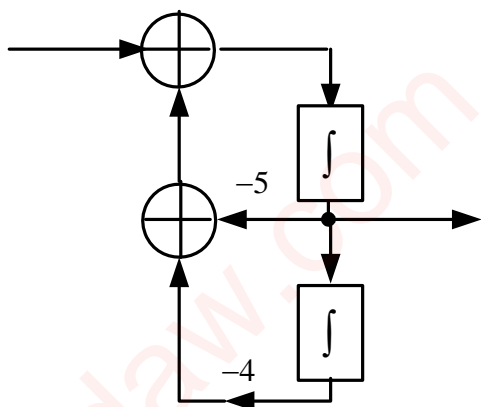


图P8. 19

解：

8.20 某连续时间 LTI 二阶系统的直接型结构如图 P8.20 所示。若系统是稳定的，其系统函数

$$\text{及收敛域为 } H(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 4}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



图P8.20

- (a) 由于上述二阶系统的两个极点均为实数,因此该系统可以看成两个一阶系统的级联,即 $H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s}{s+4}$, 利用一阶系统的频率特性可求得该二阶系统的频率特性。请概略画出该系统的频率特性的模和相位。

- (b) 又因上述系统还可以看成是两个一阶系统的并联,即 $H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{4/3}{s+4}$, 所以我们可以根据两个一阶系统的时域特性得到二阶系统的时域特性。试求出该系统的单位冲激和单位阶跃响应。

解: (a) $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4}}$

(b) $h(t) = -\frac{1}{3}u(t) + \frac{4}{3}e^{-4t}u(t)$

8.21 差分方程 $y(n) + \frac{1}{3}y(n-1) - \frac{2}{9}y(n-2) = x(n)$, 描述了一个离散时间二阶因果系统,

其系统函数及收敛域为 $H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}}$, $|z| > \frac{2}{3}$

- (a) 由于该系统的两个极点都是实极点,所以二阶系统可以由两个一阶系统的级联来实现,其中一阶系统函数分别为

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \text{ 和 } H_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

请利用这两个一阶系统的频率特性概略画出该系统的频率特性。

- (b) 若上述系统用两个一阶系统的并联来实现,其一阶系统函数分别为

$$H_1(z) = \frac{1/3}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \text{ 和 } H_2(z) = \frac{2/3}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

试利用两个一阶系统的时域特性,求出二阶系统的单位脉冲及单位阶跃响应。

第九章习题答案

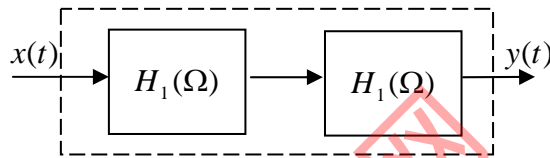
9.1 如图 P9.1 所示, 两个理想模拟滤波器级联和并联, 其中 $H_1(\Omega)$ 是低通, 截止频率为 Ω_{c1} ;

$H_2(\Omega)$ 是高通, 截止频率为 Ω_{c2} :

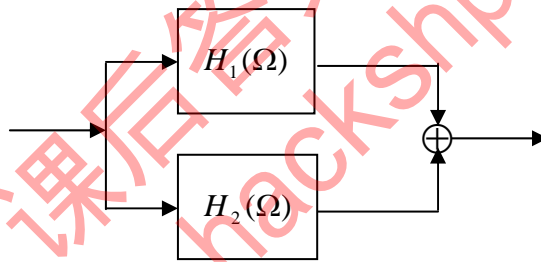
(a) 当 $\Omega_{c1} > \Omega_{c2}$ 时, 试证明, 图 P9.1 (a) 相当于一个理想带通滤波器, 并确定其通带宽度。

(b) 当 $\Omega_{c1} < \Omega_{c2}$ 时, 试证明, 图 P9.1 (b) 相当于一个理想带阻滤波器, 并确定阻带宽度。

(c) 如果按图 P9.1 联接的是两个数字滤波器 (离散时间滤波器), 情况会是如何?



(a)



(b)

解: (a) $\because H_1(\Omega)$ 是低通, 截止频率为 Ω_{c1} ; $H_2(\Omega)$ 是高通, 截止频率为 Ω_{c2}

$$\therefore H_1(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 0 & |\Omega| > \Omega_{c1} \end{cases}, \quad H_2(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| > \Omega_{c2} \\ 0 & |\Omega| < \Omega_{c2} \end{cases}$$

当 $\Omega_{c1} > \Omega_{c2}$ 时,

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & \Omega_{c2} < |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

故级联后的滤波器为理想带通滤波器, 其通带宽度为: $B = \Omega_{c1} - \Omega_{c2}$ 。

(b) 当 $\Omega_{c1} < \Omega_{c2}$ 时,

$$H(\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega_{c1} < |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases},$$

故级联后的滤波器为带阻滤波器，阻带宽度为： $B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1}$

(c) 数字滤波器结果与上类似。

9.2 图 P9.2 中的系统常用来从低通滤波器获得高通滤波器，反之亦然。

- (a) 证明当 $H(\Omega)$ 是截止频率为 Ω_p 的理想低通滤波器时，整个系统相当于一个理想高通滤波器。确定其截止频率，并粗略绘出其单位冲激响应。
- (b) 如果 $H(\Omega)$ 是一个截止频率为 Ω_p 的理想高通滤波器，证明整个系统相当于一个理想低通滤波器。并确定其截止频率。
- (c) 如果把一个离散时间理想低通（或高通）滤波器按图 P9.2 联接，所组成的系统是理想的离散时间高通（或低通）滤波器吗？

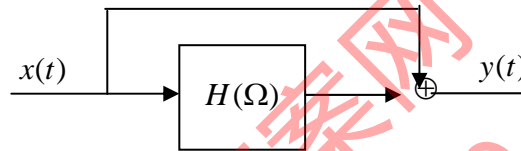


图 P9.2

解：(a) $\because H(\Omega)$ 是低通滤波器，截止频率为 Ω_p

$$\therefore H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

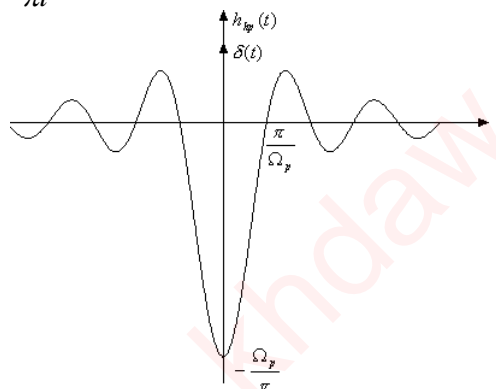
整个系统的频率响应为：

$$H_1(\Omega) = 1 - H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| > \Omega_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

故整个系统为高通滤波器。其单位冲激响应为：

$$h_{hp}(t) = \delta(t) - \frac{\sin(\Omega_p t)}{\pi t}$$

其波形如图所示。



(b) $\because H(\Omega)$ 是高通滤波器, 截止频率为 Ω_p

$$\therefore H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| > \Omega_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

整个系统的频率响应为:

$$H_1(\Omega) = 1 - H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

故整个系统相当于一个理想低通滤波器, 其截止频率为 Ω_p 。

(c) 是。

9.3 某模拟低通滤波器的幅频特性如图 P9.3 所示。试对下列每种相位特性, 求出该滤波器的单位冲激响应并概略绘出其波形。

(a) $\angle H(\Omega) = 0$

(b) $\angle H(\Omega) = \Omega T$, 其中 T 为常数

(c) $\angle H(\Omega) = \begin{cases} \pi/2, & \Omega > 0 \\ -\pi/2, & \Omega < 0 \end{cases}$

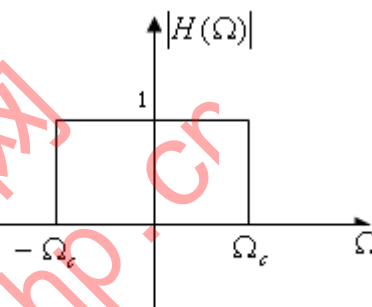
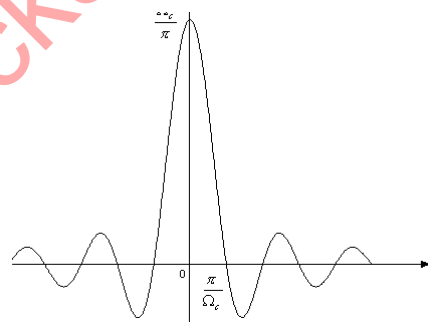


图 9.3

解: (a) 若 $\angle H(\Omega) = 0$, 则有:

$$h_a(t) = \frac{\sin \Omega_c t}{\pi t}$$

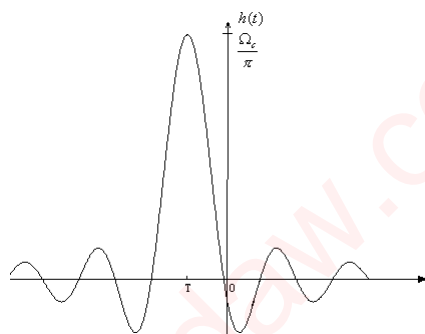
波形如图所示:



(b) 若 $\angle H(\Omega) = \Omega T$, 则有:

$$H_b(\Omega) = H_a(\Omega) e^{j\Omega T}$$

$$h_b(t) = h_a(t + T) = \frac{\sin \Omega_c (t + T)}{\pi (t + T)}$$



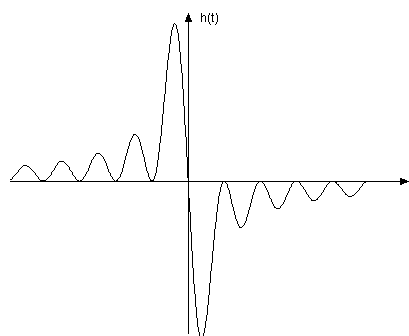
(c) 如 $H(\Omega) = \begin{cases} \pi/2, & \Omega > 0 \\ -\pi/2, & \Omega < 0 \end{cases}$, 则

$$H_c(\Omega) = \begin{cases} jH_a(\Omega) & \Omega > 0 \\ -jH_a(\Omega) & \Omega < 0 \end{cases}$$

$H_c(\Omega)$ 可视为如下的卷积:

$$H_c(\Omega) = H_a(2\Omega) * j[\delta(\Omega - \frac{\Omega_c}{2}) - \delta(\Omega + \frac{\Omega_c}{2})]$$

$$\therefore h_c(t) = -\frac{(\sin \Omega_c t)^2}{\pi/2}$$

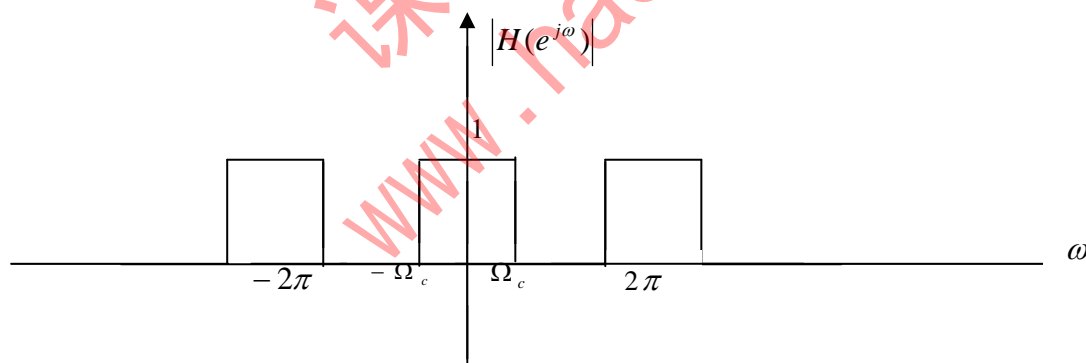


9.4 若某离散时间理想低通滤波器的单位脉冲响应为 $h(n)$, 频率响应如图 P9.4 所示。另一

个新的滤波器的单位脉冲响应为 $h_1(n)$, 且

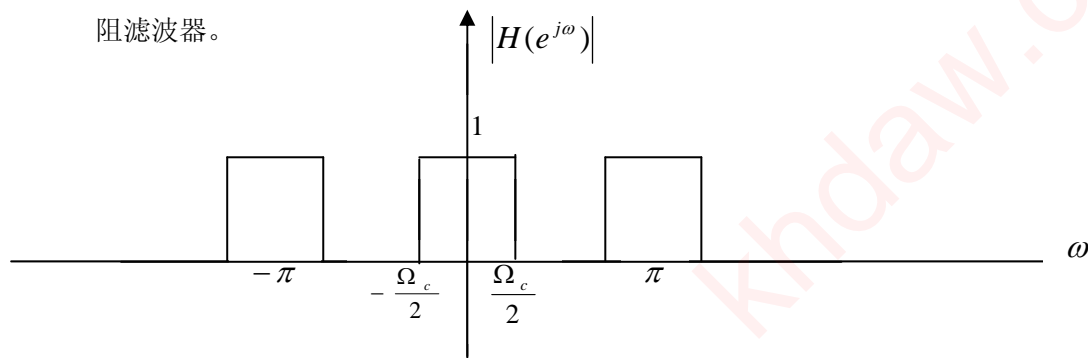
$$h_1(n) = \begin{cases} h(n/2), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

试确定并粗略画出新滤波器的频率特性 $H_1(e^{j\omega})$ 。指出它属于哪一种滤波器(低通, 高通, 带通, 带阻)。



解: $H_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_1(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j2\omega n} = H(e^{j2\omega})$, 其频谱如下所示, 它是一个带

阻滤波器。



9.5 在许多滤波问题中，人们总希望相位特性是零或者是线性的。对因果滤波器，实现零相位是不可能的。然而，在非实时要求的情况下，零相位过滤是可能的。如果要处理的序列 $x(n)$ 是有限长的， $h(n)$ 是一个具有任意相位特性的因果滤波器的单位脉冲响应，且

$h(n)$ 是一个具有任意相位特性的因果滤波器的单位脉冲响应，且 $h(n)$ 为实序列，则可

以通过以下两种方法实现对 $x(n)$ 的零相位过滤。

(a) 按以下三步进行，如图 P9.5 (a) 所示。

(b) 按以下三步进行，如图 P9.5 (b) 所示。

分别对以上两种方法求出从输入 $x(n)$ 到输出 $y(n)$ 的整个系统的系统函数，单位脉冲响应，并证明该系统具有零相位特性。

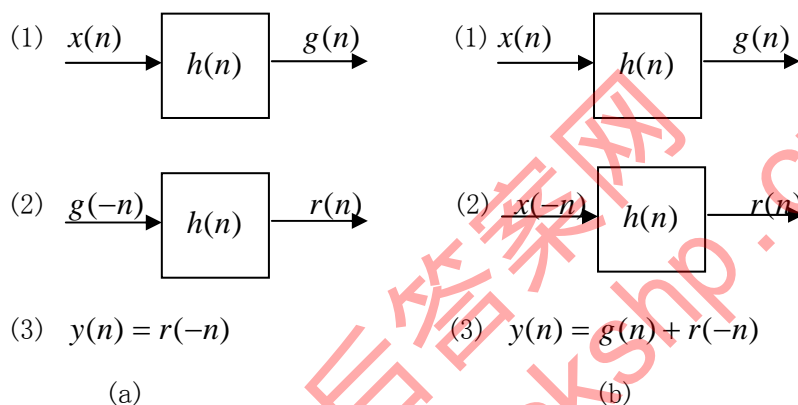


图 P9.5

解：(a) 由图 P9.5 (a) 可知：

$$G(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

又 $\because g(-n)$ 的傅立叶变换为 $G(-\Omega)$

$$\therefore r(n) \text{ 的傅立叶变换为 } R(\Omega) = G(-\Omega)H(\Omega) = X(-\Omega)H(-\Omega)H(\Omega)$$

$$\therefore Y(\Omega) = R(-\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)H(-\Omega)$$

又 $\because h(n)$ 为实序列，则：

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)H^*(\Omega) = X(\Omega)|H(\Omega)|^2$$

故系统函数为：

$$H_1(\Omega) = |H(\Omega)|^2$$

单位冲激响应为： $h_1(n) = h(n) * h(-n)$ ，它具有零相位特性。

(b) 由图 P9.5(b) 可知:

$$G(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

$$R(\Omega) = X(-\Omega)H(\Omega)$$

$$Y(\Omega) = G(\Omega) + R(-\Omega) = X(\Omega)[H(\Omega) + H(-\Omega)]$$

又 $\because h(n)$ 为实序列, 则 $H(-\Omega) = H^*(\Omega)$:

$$\therefore H_2(\Omega) = H(\Omega) + H(-\Omega) = H(\Omega) + H^*(\Omega) = 2\operatorname{Re}\{H(\Omega)\}$$

这表明复合滤波器具有零相位特性。故系统函数为:

$$H_1(\Omega) = |H(\Omega)|^2$$

单位冲激响应为: $h_2(n) = h(n) + h(-n)$ 。

9.6 频率选择性滤波器往往被用来分离两个加性信号。如果两个加性信号的频谱不重叠, 则用滤波器就可达到目的。然而, 当频谱有重叠时, 把滤波器设计成从通带到阻带逐渐过渡的形状往往更为可取。本题旨在研究确定滤波器频率响应的一种方法, 这种滤波器可以用来近似地分离频谱重叠的信号。设 $x(t)$ 是一个复合信号, $x(t) = s(t) + w(t)$ 。我们希望设计一个 LTI 滤波器, 从 $x(t)$ 中分离出 $s(t)$, 如图 P9.6(a) 所示。也就是说, 滤波器的频率响应 $H(\Omega)$ 应使 $y(t)$ 是对 $s(t)$ 较好的近似。假定用 $\varepsilon(\Omega)$ 作为 $y(t)$ 与 $s(t)$ 之间误差的度量, 定义为

$$\varepsilon(\Omega) = |S(\Omega) - Y(\Omega)|^2$$

其中 $S(\Omega)$ 和 $Y(\Omega)$ 分别是 $s(t)$ 和 $y(t)$ 的傅立叶变换。

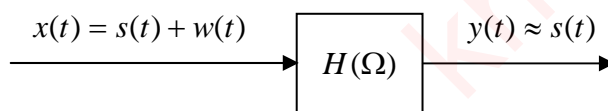
(a) 用 $S(\Omega)$, $H(\Omega)$ 和 $W(\Omega)$ 表示 $\varepsilon(\Omega)$ 。其中 $W(\Omega) = F[w(t)]$ 。

(b) 限定 $H(\Omega)$ 为实函数, 因此 $H(\Omega) = H^*(\Omega)$ 。通过使 $\varepsilon(\Omega)$ 对 $H(\Omega)$ 的导数为零, 确定使误差 $\varepsilon(\Omega)$ 为最小的 $H(\Omega)$ 。

(c) 证明: 如果 $S(\Omega)$ 和 $W(\Omega)$ 不重叠, 则 (b) 中的结果就变为一个理想滤波器。

(d) 如果 $S(\Omega)$ 与 $W(\Omega)$ 如图 P9.6(b) 所示, 根据 (b) 的结果, 确定并概略画出

$H(\Omega)$ 。



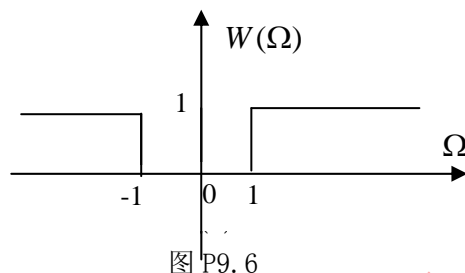
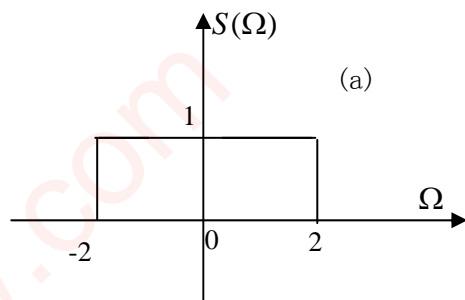


图 P9.6

(a) 由图 p9.6(a) 可得:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = [S(\Omega) + W(\Omega)]H(\Omega)$$

故有:

$$S(\Omega) - Y(\Omega) = S(\Omega) - [S(\Omega) + W(\Omega)]H(\Omega)$$

$$\varepsilon(\Omega) = |S(\Omega) - Y(\Omega)|^2 = |S(\Omega) - [S(\Omega) + W(\Omega)]H(\Omega)|^2$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \varepsilon(\Omega) &= |S(\Omega)|^2 + H^2(\Omega)|S(\Omega) + W(\Omega)|^2 - 2\operatorname{Re}\{S^*(\Omega)[S(\Omega) + W(\Omega)]\}H(\Omega) \\ &= |S(\Omega)|^2 + H^2(\Omega)|S(\Omega) + W(\Omega)|^2 - 2H(\Omega)[|S(\Omega)|^2 + \operatorname{Re}\{S^*(\Omega)W(\Omega)\}] \end{aligned}$$

$$\text{令: } \frac{\partial \varepsilon(\Omega)}{\partial H(\Omega)} = 0 \text{ 得:}$$

$$2H(\Omega)|S(\Omega) + W(\Omega)|^2 - 2[|S(\Omega)|^2 + \operatorname{Re}\{S^*(\Omega)W(\Omega)\}] = 0$$

$$\therefore H(\Omega) = \frac{|S(\Omega)|^2 + \operatorname{Re}\{S^*(\Omega)W(\Omega)\}}{|S(\Omega) + W(\Omega)|^2}$$

如果在某一个频率 Ω_0 处有 $S(\Omega_0) + W(\Omega_0) = 0$, 则此时 $X(\Omega_0) = 0$, 从而有

$Y(\Omega_0) = 0$ 。对此频率来说, $H(\Omega_0)$ 可以取任意值。

(c) 如果 $S(\Omega)$ 和 $W(\Omega)$ 不重叠, 则 $S(\Omega)W(\Omega) = 0$ 。

设 $S(\Omega)$ 在区域 A 为非零, $W(\Omega)$ 在区域 B 非零, 则:

当 $\Omega \in A$ 时, $S(\Omega) \neq 0, W(\Omega) = 0$;

当 $\Omega \in B$ 时, $S(\Omega) = 0, W(\Omega) \neq 0$ 。

在此情况下, $H(\Omega)$ 具有如下特性:

$$\text{当 } S(\Omega) \neq 0, W(\Omega) = 0 \text{ 时, } H(\Omega) = \frac{|S(\Omega)|^2}{|S(\Omega)|^2} = 1;$$

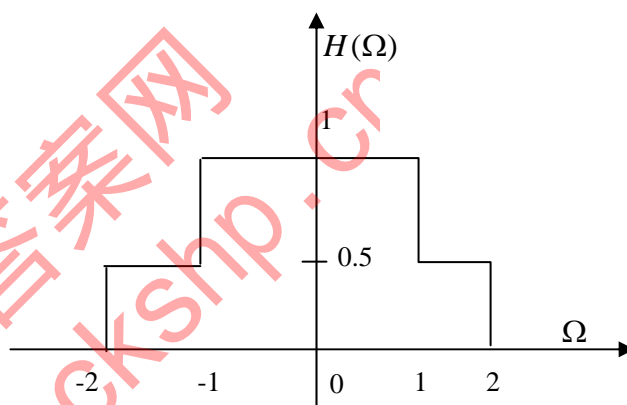
$$\text{当 } S(\Omega) = 0, W(\Omega) \neq 0 \text{ 时, } H(\Omega) = 0;$$

$$\text{当 } S(\Omega) = 0, W(\Omega) = 0 \text{ 时, } H(\Omega) \text{ 可为任意值, 当然可以规定为 } H(\Omega) = 0。$$

由以上讨论可见, $H(\Omega)$ 在 $S(\Omega)$ 与 $W(\Omega)$ 不重叠时, 具有理想滤波器特性。

(d) 根据图 p9.6(b) 和 (b) 的结果可得:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & -1 \leq \Omega \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq |\Omega| \leq 2 \\ 0 & |\Omega| > 2 \end{cases}$$



9.7 题 9.6 讨论了当两个信号的频谱有重叠时, 为了从加性信号中分离出一个信号, 选择连续时间滤波器频率特性的一种特殊准则。试对离散时间的情况, 导出与题 9.6 (b) 中所得结果相对应的结果。

分别用 $S(\omega)$, $W(\omega)$, $H(\omega)$, $Y(\omega)$ 和 $\varepsilon(\omega)$ 代替题 9.6 中的 $S(\Omega)$, $W(\Omega)$,

$H(\Omega)$, $Y(\Omega)$ 和 $\varepsilon(\Omega)$ 有:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = [S(\omega) + W(\omega)]H(\omega)$$

$$S(\omega) - Y(\omega) = S(\omega) - [S(\omega) + W(\omega)]H(\omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = |S(\omega) - [S(\omega) + W(\omega)]H(\omega)|^2$$

假定 $H(\omega)$ 为实函数, 相应有:

$$\varepsilon(\omega) = |S(\omega)|^2 + H^2(\omega)|S(\omega) + W(\omega)|^2 - 2H(\omega)[|S(\omega)|^2 + \text{Re}\{S^*(\omega)W(\omega)\}]$$

令 $\frac{\partial \varepsilon(\omega)}{\partial H(\omega)} = 0$, 得:

$$H(\omega) = \frac{|S(\omega)|^2 + \operatorname{Re}\{S^*(\omega)W(\omega)\}}{|S(\omega) + W(\omega)|^2}$$

同样, 如果在某一个频率 ω_0 处有 $S(\omega) + W(\omega) = 0$, 则此时 $X(\omega) = 0$, 从而有

$Y(\omega_0) = 0$ 。对此频率来说, $H(\omega_0)$ 可以取任意值。

9.8 在许多滤波器应用中, 往往不希望滤波器的阶跃响应出现过冲。例如图象处理中, 滤波器阶跃响应的过冲会产生图象轮廓的勾边现象。当滤波器的冲激响应始终非负时, 可以消除过冲现象。

(a) 证明: 如果连续时间滤波器的 $h(t)$ 始终大于或等于零, 即 $h(t) \geq 0$, 则该滤波器的阶跃响应是单调非减的函数, 因而不会发生过冲。

(b) 证明: 如果离散时间滤波器的单位脉冲响应总大于或等于零, 即 $h(n) \geq 0$, 则其阶跃响应是单调非减的函数, 因而不会发生过冲。

解: (a) 设 $s(t)$ 为连续时间 LTI 滤波器的阶跃响应, 则有:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

因此, 当 $h(t) \geq 0$ 时, 有 $\frac{ds(t)}{dt} \geq 0$, 这表明 $s(t)$ 是单调非减的函数, 因而不会发生过冲。

(b) 设 $s(n)$ 为离散时间 LTI 滤波器的阶跃响应, 则有:

$$h(n) = s(n) - s(n-1)$$

因此, 当 $h(n) \geq 0$ 时, 有 $s(n) - s(n-1) \geq 0$, 这表明 $s(n)$ 是单调非减的函数,

因而不会发生过冲。

9.9 对因果的离散时间 LTI 系统, 试推导出其频率响应的实部和虚部之间的依从关系。即离散时间的实部与虚部自满关系。

解: 设因果系统的单位脉冲响应为 $h(n)$, 则根据系统的因果性, 有:

$$h(n) = h(n)u(n)$$

对上式两边同时取傅立叶变换, 有:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) \left[\frac{1}{1 - e^{-j(\omega-\theta)}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \theta - 2\pi k) \right] d\theta$$

整理后有:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) \frac{1}{1 - e^{-j(\omega-\theta)}} d\theta$$

令: $H(e^{j\omega}) = H_R + jH_I$, 带入上式并整理后有:

$$H_R + jH_I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (H_R + H_I \operatorname{ctg} \frac{\omega-\theta}{2}) d\theta + \frac{1}{2\pi} j \int_{-\pi}^{\pi} (H_I - H_R \operatorname{ctg} \frac{\omega-\theta}{2}) d\theta$$

所以:

$$H_R = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (H_R + H_I \operatorname{ctg} \frac{\omega-\theta}{2}) d\theta;$$

$$H_I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (H_I - H_R \operatorname{ctg} \frac{\omega-\theta}{2}) d\theta$$

9.10 对图 P9.1 所示归一化滤波电路, 分别求出其去归一化的实际元件参数, 已知工作频

率 $\Omega_c = 10^6 \text{ rad/s}$, 负载电阻 $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$ 。

解: 由公式 9.24, 9.26, 9.28 得实际阻抗和归一化阻抗, 实际感抗和归一化感抗, 实际容抗和归一化容抗间满足如下关系:

$$R = \bar{R} R_0 = \bar{R} (k\Omega), L = \frac{R_0}{\Omega_c} \bar{L} = 0.001 \bar{L}, C = \frac{1}{\Omega_c R_0} \bar{C} = 10^{-9} \bar{C}$$

$$(a) L_1 = 0.0015 H, C_2 = 4 * 10^{-9} / 3 F, R_L = 1 k\Omega;$$

$$(b) C_1 = 1.5 * 10^{-9} F, L_2 = \frac{0.004}{3} H, C_3 = 0.5 * 10^{-9} F, R_L = 1 k\Omega$$

$$(c) L_1 = 0.001 / 6 H, C_2 = 4 * 10^{-9} F, L_3 = 0.0005 H, C_4 = 10^{-9} F, R_L = 1 k\Omega;$$

$$(d) C_1 = 1 / 6 * 10^{-9} F, L_2 = 0.004 H, C_3 = 0.5 * 10^{-9}, L_4 = 0.001 H, R_L = 1 k\Omega$$

9.11 设计一个巴特沃思模拟低通滤波器, 技术指标为:

$$f_p = 2 \text{ KHz}, A_p = 3 \text{ dB}, f_r = 2 f_c, A_r \geq 30 \text{ dB}$$

要求得到归一化滤波器的系统函数 $\bar{H}_a(s)$, 和归一化电路及归一化元件参量。

解: (1) 根据技术指标知此时 $f_p = f_c$, 对阻带频率归一化可得:

$$\bar{\Omega}_r = \frac{\Omega_r}{\Omega_p} = \frac{f_r}{f_p} = 2$$

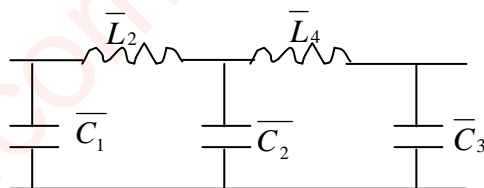
(2) 查图 9.8(b) 可得 5 阶巴特沃思模拟低通滤波器满足 $\bar{\Omega}_r = 2$ 时, $A_r \geq 30 \text{ dB}$

的要求, 故定阶为 $n = 5$ 。

(3) 查表 9.1 可得 5 阶巴特沃思模拟低通滤波器归一化系统函数为:

$$H_B(s) = \frac{1}{s^5 + 3.236s^4 + 5.236s^3 + 5.236s^2 + 3.236s + 1}$$

(4) 查表 9.2 可得归一化电路结构和元件参量如下图所示。



其中, $\overline{C_1} = 0.6180, \overline{L_2} = 1.618, \overline{C_3} = 2.000, \overline{L_4} = 1.618, \overline{C_5} = 0.618$

9.12 设计一个巴特沃思模拟低通滤波器, 技术指标为:

$$f_p = 1\text{kHz}, A_p = 1\text{dB}; f_r = 2\text{kHz}, A_r \geq 20\text{dB}$$

要求得到归一化滤波器的系统函数, 并求出该滤波器的 3dB 带宽。

解: (1) 根据 9.32 式确定滤波器的阶数 n 。

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\frac{\Omega_r}{\Omega_p})} \approx 4.2893$$

取整数后为: $n = 5$ 。

(2) 确定 3dB 带宽

阶数取整数后滤波器有富裕量, 将其留给阻带, 则将阶数 n 代入公式 9.30 得:

$$A_p = 10 \lg[1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^{2n}] = 10 \lg[1 + (\frac{f_p}{f_c})^{10}]$$

代入数据后解得:

$$f_c = 1.1446\text{KHz}$$

阶数取整数后滤波器有富裕量, 将其留给通带, 则将阶数 n 代入公式 9.31 得:

$$A_r = 10 \lg[1 + (\frac{\Omega_r}{\Omega_c})^{2n}] = 10 \lg[1 + (\frac{f_r}{f_c})^{10}]$$

代入数据后解得:

$$f_c = 1.2632\text{KHz}$$

(3) 确定归一化滤波器系统函数

$$\text{当 } f_c = 1.1446\text{KHz}, \overline{\Omega}_r = \frac{\Omega_r}{\Omega_c} = \frac{f_r}{f_c} = \frac{2}{1.1446} = 1.7473 \text{ 时,}$$

查表 9.8 (b) 得 5 阶巴特沃思模拟低通滤波器满足 $A_r \geq 20\text{dB}$ 。

$$\text{当 } f_c = 1.2632\text{KHz}, \overline{\Omega}_r = \frac{\Omega_r}{\Omega_c} = \frac{f_r}{f_c} = \frac{2}{1.2632} = 1.5833 \text{ 时,}$$

查表 9.8 (b) 得 5 阶巴特沃思模拟低通滤波器满足 $A_r \geq 20dB$ 。

故归一化滤波器系统函数为：

$$\overline{H}_B(s) = \frac{1}{s^5 + 3.236s^4 + 5.236s^3 + 5.236s^2 + 3.236s + 1}$$

9. 13 设计两个切比雪夫模拟低通滤波器，它们的技术指标分别为：

$$(a) \quad f_c = 10kHz, A_p = 1dB; f_r = 100kHz, A_r \geq 140dB$$

$$(b) \quad f_c = 100Hz, A_p = 0.1dB; f_r = 130Hz, A_r \geq 30dB$$

要求得到归一化滤波器的系统函数。

解：(a) 阻带频率归一化得：

$$\overline{\Omega}_r = \frac{\Omega_r}{\Omega_c} = \frac{f_r}{f_c} = 10$$

查表 9.12 (b) 可得切比雪夫模拟低通滤波器阶数为 $n = 6$ 。

再查表 9.3 (2) 可得切比雪夫模拟低通归一化滤波器的系统函数

$$H_L(s) = \frac{1}{s^6 + 0.92825s^5 + 1.93082s^4 + 1.20214s^3 + 0.93935s^2 + 0.30708s + 0.06891}$$

(b) 切比雪夫模拟低通滤波器衰减函数为：

$$A = 10\lg[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\overline{\Omega})]$$

$$\text{当 } \Omega_c = \Omega_p \text{ 时, } \overline{\Omega} = \frac{\Omega_p}{\Omega_c} = 1, \text{ 此时有:}$$

$$A_p = 10\lg[1 + \varepsilon^2 T_n^2(1)] = 10\lg(1 + \varepsilon^2)$$

$$\text{当 } A_p = 0.1 \text{ 时, } \varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.1526$$

又归一化阻带频率为：

$$\overline{\Omega}_r = \frac{\Omega_r}{\Omega_c} = \frac{f_r}{f_c} = \frac{130}{100} = 1.3$$

将 $\varepsilon, \overline{\Omega}_r$ 代入公式 9.37 得滤波器阶数为：

$$n \geq \frac{ch^{-1}(\sqrt{10^{0.1A_r} - 1}/\varepsilon)}{ch^{-1}(\overline{\Omega}_r)} = 7.9$$

$$\therefore n = 8$$

$$H_L(s) = \frac{1}{0.91981s^7 + 2.42303s^6 + 1.65516s^5 + 1.8369s^4 + 0.84682s^3 + 0.44783s^2 + 0.10734s + 0.01723}$$

9.14 若巴特沃思模拟低通滤波器技术指标为：

$$f_p = 0.5\text{kHz}, A_p = 3\text{dB}; f_r = 2\text{kHz}, A_r \geq 30\text{dB}$$

试通过计算和查图表两种方法确定滤波器的阶数并设计出归一电路。

解：（1）查表法：

（a） 根据技术指标知此时 $f_p = f_c$ ，对阻带频率归一化，可得：

$$\bar{\Omega}_r = \frac{\Omega_r}{\Omega_p} = \frac{f_r}{f_p} = 4$$

（b） 查图 9.8(b) 可得巴特沃思模拟低通滤波器阶数为 $n = 3$ 。

（c） 查表 9.1 可得 3 阶巴特沃思模拟低通滤波器归一化系统函数为：

$$H_B(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

（2）直接计算法：

（a） 由公式 9.32 可得阶数为：

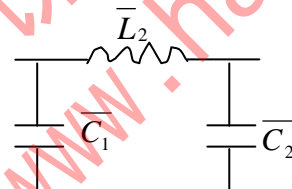
$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1 \times 30} - 1)/(10^{0.1 \times 3} - 1)}}{\lg(4)} = \frac{\lg(31.6821)}{\lg(4)} = 2.49$$

取整数得巴特沃思模拟低通滤波器阶数为 $n = 3$ 。

（b） 查表 9.1 可得 3 阶巴特沃思模拟低通滤波器归一化系统函数为：

$$H_B(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

归一化电路如下图所示。



$$\text{其中, } \bar{C}_1 = 1.000, \bar{L}_2 = 2.000, \bar{C}_3 = 1.000$$

9.15 若巴特沃思模拟低通的技术指标为：

$$f_p = 10\text{kHz}, A_p = 0.92\text{dB}; f_r = 20\text{kHz}, A_r \geq 20\text{dB}$$

试通过计算确定该滤波器的阶数。并算出其 3dB 带宽。

解：由公式 9.32 可以确定滤波器的阶数 n 。

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1 \times 20} - 1)/(10^{0.1 \times 0.92} - 1)}}{\lg(\frac{20}{10})} \approx 4.36$$

取整数后有： $n = 5$ 。

将富裕量留给阻带，则将阶数代入 9.30 后有：

$$f_c = \frac{f_p}{\sqrt[10]{10^{0.1A_p} - 1}} = \frac{10\text{kHz}}{0.8655} = 11.55\text{kHz}$$

将富裕量留给通带，则将阶数代入 9.31 后有：

$$f_c = \frac{f_r}{\sqrt[10]{10^{0.1A_r} - 1}} = \frac{20\text{kHz}}{1.5833} = 12.632\text{kHz}$$

9.16 试求切比雪夫模拟低通滤波器的系统函数表达式。技术指标为：

$$\Omega \leq 300\text{rad/s 时}, A_p \leq 1\text{dB}$$

$$\Omega \geq 800\text{rad/s 时}, A_r \geq 20\text{dB}$$

解：(1) 对阻带频率进行归一化，有：

$$\bar{\Omega}_r = \frac{\Omega_r}{\Omega_c} = \frac{800}{300} \approx 2.667$$

(2) 查表 9.12(b) 得切比雪夫模拟低通滤波器阶数为： $n=3$ 。

(3) 再查表 9.3(2) 得切比雪夫模拟低通滤波器归一化系统函数为：

$$H_b(s) = \frac{1}{s^3 + 0.98834s^2 + 1.23841s + 0.49131}$$

9.17 (a) 一个二阶巴特沃思低通和一个二阶切比雪夫低通都满足通带衰减 $A_p \leq 3\text{dB}$ ，阻

带衰减 $A_r \geq 15\text{dB}$ 的要求，若它们的通带截止频率相同，通过查图表确定并比较它们的阻带频率。

(b) 若给定 $f_p = 1.5\text{MHz}, A_p \leq 3\text{dB}; f_r = 1.7\text{MHz}, A_r \geq 60\text{dB}$ ，试确定满足该技术指标的巴特沃思低通与切比雪夫低通的最低阶数。

解：(a) 对巴特沃思低通滤波器，查图 9.8 (b) 得：

$$\frac{\Omega_r^b}{\Omega_c} \geq 2.5$$

$$\therefore \Omega_r^b \geq 2.5\Omega_c$$

对切比雪夫低通滤波器，查表 9.12 得：

$$\frac{\Omega_r^c}{\Omega_c} \geq 2$$

$$\therefore \Omega_r^c \geq 2\Omega_c$$

\therefore 在通带截止频率相同的情况下，可以看到切比雪夫低通滤波器的阻带截止频率小于巴特沃思低通滤波器的阻带截止频率。

(b) 对巴特沃思低通滤波器有:

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1*60} - 1)/(10^{0.1*3} - 1)}}{\lg(1.7/1.5)} \approx 55.20$$

取整数后有: $n = 56$ 。

对切比雪夫低通滤波器有:

$$n \geq \frac{ch^{-1}(\sqrt{10^{0.1A_r} - 1}/\sqrt{10^{0.1A_p} - 1})}{ch^{-1}(\Omega_r / \Omega_c)} \approx 14.88$$

取整数后有: $n = 15$ 。

9.18 设计一个巴特沃思高通滤波器, 技术要求为: $\Omega \leq 15\pi \text{ rad/s}$ 时阻带衰减大于 40dB; $\Omega \geq 120\pi \text{ rad/s}$ 时, 通带衰减小于 3dB。

解: (1) 对高通进行频率归一化, 以 f_p 为归一化因子有:

$$\overline{\Omega}_{HP} = \frac{\Omega_p}{\Omega_p} = \frac{120\pi}{120\pi} = 1; \quad \overline{\Omega}_{HR} = \frac{\Omega_r}{\Omega_p} = \frac{15\pi}{120\pi} = 0.125$$

根据 9.39 式得相应的低通原型的归一化截止频率为:

$$\overline{\Omega}_{LP} = \frac{1}{\overline{\Omega}_{HP}} = 1; \overline{\Omega}_{LR} = \frac{1}{\overline{\Omega}_{HR}} = 8$$

从而, 低通原型滤波器的技术指标为:

$$\overline{\Omega}_{LP} = 1, A_p \leq 3\text{dB}; \overline{\Omega}_{LR} = 8, A_r \geq 40\text{dB}。$$

(2) 查表 9.8(b) 可得三阶巴特沃思低通滤波器满足上述要求。低通原型的归一化系统函数为:

$$H_L(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

(3) 巴特沃思高通滤波器系统函数为:

$$H_H(s) = H_L(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{s}} = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

9.19 设计一个切比雪夫高通滤波器, 其技术指标为:

$$f_c = 1\text{kHz}, A_p = 1\text{dB}; f_r = 100\text{Hz}, A_r \geq 140\text{dB}$$

解: (1) 对高通进行频率归一化, 以 f_p 为归一化因子有:

$$\overline{\Omega}_{HP} = \frac{\Omega_p}{\Omega_p} = \frac{1000}{1000} = 1; \quad \overline{\Omega}_{HR} = \frac{\Omega_r}{\Omega_p} = \frac{100}{1000} = 0.1$$

根据 9.39 式得相应的低通原型的归一化截止频率为:

$$\overline{\Omega}_{LP} = \frac{1}{\overline{\Omega}_{HP}} = 1; \overline{\Omega}_{LR} = \frac{1}{\overline{\Omega}_{HR}} = 10$$

从而, 低通原型滤波器的技术指标为:

$$\overline{\Omega}_{LP} = 1, A_p \leq 1dB; \overline{\Omega}_{LR} = 10, A_r \geq 140dB。$$

(2) 查图 9.12(b) 可得 6 阶切比雪夫低通滤波器满足上述要求。低通原型的归一化系统函数为:

$$H_L(s) = \frac{1}{s^6 + 0.92825s^5 + 1.93082s^4 + 1.20214s^3 + 0.93935s^2 + 0.30708s + 0.06891}$$

(3) 切比雪夫高通滤波器归一化系统函数为:

$$H_H(s) = H_L(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{s}} = \frac{s^6}{0.06891s^6 + 0.30708s^5 + 0.93935s^4 + 1.20214s^3 + 1.93082s^2 + 0.92825s + 1}$$

9.20 设计一个满足下列技术指标的巴特沃思高通滤波器:

$$\text{通带} \quad 10kHz \leq f \leq \infty, A_p \leq 1dB$$

$$\text{阻带} \quad 0 \leq f \leq 2kHz, A_r \geq 45dB \quad R_i = 600\Omega$$

解: (1) 先设计对应的低通原型滤波器, 其技术指标为:

$$f_p = 2kHz, A_p \leq 1dB;$$

$$f_r = 10kHz, A_r \geq 45dB$$

由公式 9.32 得滤波器的阶数满足:

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1 \cdot 45} - 1)/(10^{0.1 \cdot 1} - 1)}}{\lg(\frac{10}{2})} \approx 3.639$$

$$\therefore n = 4$$

4 阶低通滤波器的归一化系统函数为:

$$H_L(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

(2) 巴特沃思高通滤波器系统函数为:

$$H_H(s) = H_L(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{s}} = \frac{s^4}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

9.21 用切比雪夫滤波器实现题 9.20 的技术指标。

解：(1) 先设计对应的低通原型滤波器，其技术指标为：

$$f_p = 2\text{kHz}, A_p \leq 1\text{dB};$$

$$f_r = 10\text{kHz}, A_r \geq 45\text{dB}$$

查图 9.21 可得切比雪夫低通滤波器的阶数为 $n = 3$ 。

3 阶低通滤波器的归一化系统函数为：

$$H_L(s) = \frac{1}{s^3 + 0.98834s^2 + 1.23841s + 0.49131}$$

(2) 切比雪夫高通滤波器归一化系统函数为：

$$H_H(s) = H_L(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{s}} = \frac{s^3}{0.49131s^3 + 1.2384s^2 + 0.98834s + 1}$$

9.22 设计一个满足下列指标的带通滤波器：

$$\text{通带} \quad 3\text{kHz} \leq f \leq 6\text{kHz}, A_p \leq 1\text{dB}$$

$$\text{阻带} \quad 0 \leq f \leq 1\text{kHz}, 18\text{kHz} \leq f \leq \infty, A_r \geq 45\text{dB}$$

$$\text{电源内阻} \quad R_i = 600\Omega$$

(a) 用巴特沃思滤波器设计。(b) 用切比雪夫滤波器设计。

解：(a) 按巴特沃思滤波器设计。

将给定的带通指标转化为低通指标，有：

归一化低通的通带截止频率为：

$$\overline{\Omega}_{LP} = \frac{\Omega_B^2 - \Omega_0^2}{B\Omega_B} = \frac{(6 * 10^3)^2 - (\sqrt{6 * 10^3 * 3 * 10^3})^2}{(6 * 10^3 - 3 * 10^3) * 6 * 10^3} = 1$$

归一化低通的阻带截止频率为：

$$\overline{\Omega}_{LR} = \frac{\Omega_B^2 - \Omega_0^2}{B\Omega_B} = \frac{(18 * 10^3)^2 - (\sqrt{3 * 10^3 * 6 * 10^3})^2}{(6 * 10^3 - 3 * 10^3) * 18 * 10^3} \approx 5.67$$

低通原型的指标为：

$$\overline{\Omega}_{LP} = 1, A_p = 1\text{dB}; \overline{\Omega}_{LR} = 5.67, A_r = 45\text{dB}$$

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1*45} - 1)/(10^{0.1*1} - 1)}}{\lg(\frac{5.67}{1})} \approx 3.375$$

取整数后为: $n = 4$.

4 阶低通滤波器的归一化系统函数为:

$$H_L(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

根据表 9.4, 将上式中的 s 换成 $\frac{s^2 + 18*10^6}{s*3*10^3}$ 即可获得带通滤波器的实际系统函数.

(b) 按切比雪夫滤波器设计。

$$n \geq \frac{ch^{-1}(\sqrt{10^{0.1A_r}} - 1) / \sqrt{10^{0.1A_p}} - 1}{ch^{-1}(\Omega_r / \Omega_c)} \approx 2.706$$

取 $n = 3$, 可得三阶切比雪夫低通滤波器的归一化系统函数为:

$$H_L(s) = \frac{1}{s^3 + 0.9889s^2 + 1.2384s + 0.4913}$$

将上式中 s 换成 $\frac{s^2 + 18*10^6}{s*3*10^3}$, 即可以得到三阶切比雪夫带阻滤波器的系统函数。

9.23 设计满足下列指标的带阻滤波器:

通带 $0 \leq f \leq 3.8kHz, 16.5kHz \leq f \leq \infty, A_p \leq 1dB$

阻带 $6.6kHz \leq f \leq 9.7kHz, A_r \geq 50dB$

电源内阻 $R_i = 600\Omega$

(a) 用巴特沃思逼近。(b) 用切比雪夫逼近。

解: (a) 按巴特沃思滤波器设计。

将给定的带阻指标转化为带通指标, 再转化为归一化低通指标, 有:

归一化低通的通带截止频率为:

$$\bar{\Omega}_{LP} = \frac{\Omega_B^2 - \Omega_0^2}{B\Omega_B} = \frac{(9.7*10^3)^2 - (\sqrt{6.6*10^3 * 9.7*10^3})^2}{(9.7*10^3 - 6.6*10^3)*9.7*10^3} = 1$$

归一化低通的阻带截止频率为:

$$\bar{\Omega}_{LR} = \frac{\Omega_B^2 - \Omega_0^2}{B\Omega_B} = \frac{(16.5*10^3)^2 - (\sqrt{6.6*10^3 * 9.7*10^3})^2}{(9.7*10^3 - 6.6*10^3)*9.7*10^3} \approx 6.92$$

低通原型的指标为:

$$\bar{\Omega}_{LP} = 1, A_p = 1dB; \bar{\Omega}_{LR} = 6.92, A_r = 50dB$$

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1*50} - 1)/(10^{0.1*1} - 1)}}{\lg(\frac{6.92}{1})} \approx 3.325$$

取整数后为： $n = 4$ 。4 阶低通滤波器的归一化系统函数为：

$$H_L(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

查表 9.4 可以获得带阻滤波器的实际系统函数为：

$$H(s) = H_L(s) \Bigg|_{s \rightarrow \frac{s(\Omega_2 - \Omega_1)}{s^2 + \Omega_0^2} = \frac{3.1*10^3 s}{s^2 + (8*10^3)^2}}$$

(b) 按切比雪夫滤波器设计。

$$n \geq \frac{ch^{-1}(\sqrt{10^{0.1A_r} - 1} / \sqrt{10^{0.1A_p} - 1})}{ch^{-1}(\Omega_r / \Omega_c)} \approx 2.717$$

取 $n = 3$ ，可得三阶切比雪夫低通滤波器的归一化系统函数为：

$$H_L(s) = \frac{1}{s^3 + 0.9889s^2 + 1.2384s + 0.4913}$$

将上式中 s 换成 $\frac{3.1*10^3 s}{s^2 + 64*10^6}$ ，即可以得到三阶切比雪夫带阻滤波器的系统函数。

9.24 求出图 P9.24 所示有源滤波器电路的系统函数。大致绘出其频率响应的波特图，说明它们分别是什么类型的滤波器。

[说明] 图 P9.24 (c)，(d) 中 R_s 与 R_b 构成的反馈电路决定该电路的放大倍数。

解：(a)

$$H(s) = -\frac{R_1 R_1}{1 + R_2 SC} : \text{低通滤波器}$$

(b)

$$H(s) = -\frac{SRC_1}{1 + SRC_2} : \text{高通滤波器}$$

$$(c) H(s) = \frac{(R_5 + R_6)RCS}{R^2 C^2 R_6 S^2 + (4R_6 - R_5)RCS + 2R_6} : \text{带通滤波器}$$

$$(d) H(s) = -\frac{(R_5 + R_6)s}{2R_5 s^2 + (5.454R_5 - 2.146R_6)s + 3.918R_5} : \text{带通滤波器}$$

9.25 某电子设备采用一个巴特沃思低通与一个巴特沃思高通级联构成一个带通滤波器。带通的通带上、下截止频率分别为 200kHz 和 100 kHz；通带内衰减不大于 3dB；低频段

在 50kHz 时 $A_r \geq 15\text{dB}$ ；在高频段 $f = 400\text{kHz}$ 时， $A_r \geq 15\text{dB}$ ，试分别求出所需高

通与低通的系统函数 $H_1(s)$ 与 $H_2(s)$ 。

解：通过分析可知，满足如下技术参数的高通滤波器和低通滤波器级联后可以构成所需带通滤波器：

高通滤波器： $f_p = 100\text{kHz}$ 时， $A_p \leq 1\text{dB}$ ； $f_r = 50\text{kHz}$ 时， $A_r \geq 15\text{dB}$

低通滤波器： $f_p = 200\text{kHz}$ 时， $A_p \leq 1\text{dB}$ ； $f_r = 400\text{kHz}$ 时， $A_r \geq 15\text{dB}$

(1) 高通滤波器设计：

(a) 对高通进行频率归一化，以 f_p 为归一化因子有：

$$\overline{\Omega}_{HP} = \frac{\Omega_p}{\Omega_p} = \frac{f_p}{f_p} = \frac{100\text{kHz}}{100\text{kHz}} = 1; \quad \overline{\Omega}_{HR} = \frac{\Omega_r}{\Omega_p} = \frac{f_r}{f_p} = \frac{50\text{kHz}}{100\text{kHz}} = 0.5$$

根据 9.39 式得相应的低通原型的归一化截止频率为：

$$\overline{\Omega}_{LP} = \frac{1}{\overline{\Omega}_{HP}} = 1; \overline{\Omega}_{LR} = \frac{1}{\overline{\Omega}_{HR}} = 2$$

从而，低通原型滤波器的技术指标为：

$$\overline{\Omega}_{LP} = 1, A_p \leq 1\text{dB}; \overline{\Omega}_{LR} = 2, A_r \geq 15\text{dB}。$$

由公式 9.32 得滤波器的阶数满足：

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r/\Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1 \times 15} - 1)/(10^{0.1 \times 1} - 1)}}{\lg(\frac{10}{2})} \approx 3.443$$

$$\therefore n = 4$$

(b) 4 阶低通滤波器的归一化系统函数为：

$$H_L(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

(c) 巴特沃思高通滤波器系统函数为：

$$H_1(s) = H_H(s) = H_L(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{s}} = \frac{s^4}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

(2) 低通滤波器设计

$$\overline{\Omega}_{LP} = 1, A_p \leq 1\text{dB}; \overline{\Omega}_{LR} = 2, A_r \geq 15\text{dB}$$

解法同上述低通原型设计，可以得到：

$$H_2(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

9.26 用脉冲响应不变法将以下 $H_a(s)$ 转换为 $H(z)$ ，设采样周期为 T_s 。

$$(a)H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \quad (b)H_a(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

$$(c)H_a(s) = \frac{3s+2}{2s^2+3s+1} \quad (d)H_a(s) = \frac{A}{(s-s_0)^2}$$

解：(a) 将 $H_a(s)$ 进行部分分式展开，有：

$$H_a(s) = \frac{0.5}{s+a+jb} + \frac{0.5}{s+a-jb}$$

从而有：

$$H(z) = \frac{0.5}{1-e^{(-a+jb)T_s}z^{-1}} + \frac{0.5}{1-e^{(-a-jb)T_s}z^{-1}}$$

(b) 将 $H_a(s)$ 进行部分分式展开，有：

$$H_a(s) = \frac{1.5}{s+1} - \frac{1.5}{s+3}$$

从而有：

$$H(z) = \frac{1.5}{1-e^{-T_s}z^{-1}} - \frac{1.5}{1-e^{-3T_s}z^{-1}}$$

(c) 将 $H_a(s)$ 进行部分分式展开，有：

$$H_a(s) = \frac{1}{2s+1} + \frac{1}{s+1}$$

从而有：

$$H(z) = \frac{0.5}{1-e^{-0.5T_s}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T_s}z^{-1}}$$

(d) $H_a(s)$ 没有单重极点，不能进行部分分式展开。

$$\therefore H_a(s) = \frac{A}{(s-s_0)^2}$$

$$\therefore h_a(t) = te^{s_0 t} u(t)$$

根据脉冲响应不变法，有：

$$h(n) = h_a(nT_s) = nT_s e^{s_0 nT_s} u(nT_s) ,$$

对其进行 z 变换有：

$$H(z) = \frac{T_s e^{s_0 T_s} z^{-1}}{(1-e^{s_0 T_s} z^{-1})^2}$$

9.27 用脉冲响应不变法设计一个三阶巴特沃思数字低通滤波器，采样频率为

$f_s = 6.28318\text{kHz}$ ，截止频率 $f_c = 1\text{kHz}$ 。并画出该系统的并联型结构。

解：三阶巴特沃思模拟低通滤波器的归一化系统函数为：

$$\overline{H}_b(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

去归一化后得系统函数为：

$$H_b(s) = \overline{H}_b(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{s}{\Omega_c}} = \frac{\Omega_c^3}{s^3 + 2s^2\Omega_c + 2s\Omega_c^2 + \Omega_c^3}$$

将其进行部分分式展开，有：

$$H_b(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} + \frac{-(\Omega_c/\sqrt{3})e^{-j\frac{\pi}{6}}}{s + \Omega_c(1 - j\sqrt{3})/2} + \frac{-(\Omega_c/\sqrt{3})e^{j\frac{\pi}{6}}}{s + \Omega_c(1 + j\sqrt{3})/2}$$

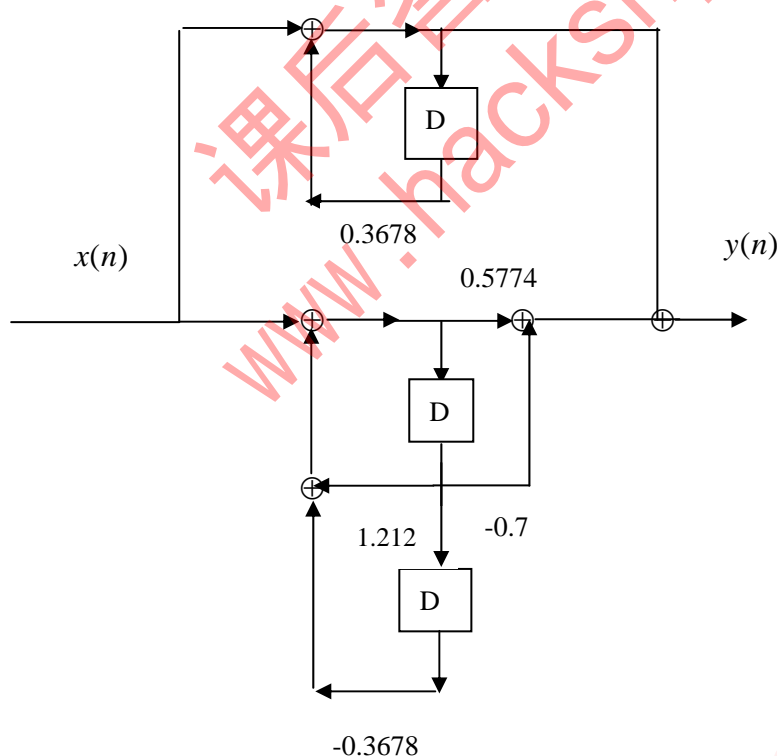
根据 (9.55) 和 (9.56) 式有：

$$H(z) = \frac{\omega_c}{1 - e^{-\omega_c} z^{-1}} + \frac{(-\omega_c/\sqrt{3})e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{-\omega_c(1-j\sqrt{3})/2} z^{-1}} + \frac{-(\omega_c/\sqrt{3})e^{j\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{-\omega_c(1+j\sqrt{3})/2} z^{-1}},$$

将 $\omega_c = \Omega_c T = 1$ 代入上式，整理后有：

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.3678z^{-1}} - \frac{0.5774 - 0.7z^{-1}}{1 - 1.212z^{-1} + 0.3678z^{-2}}.$$

其并联型结构如下图所示：



9.28 用双线性变换法设计一个三阶巴特沃思数字低通滤波器，采样频率为 $f_s = 1.2kHz$ ，

截止频率 $f_c = 400Hz$ 。

解：对模拟低通截止频率进行预畸变，有：

$$\Omega_c = \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{2} = \operatorname{tg} \frac{2\pi f_c / f_s}{2} = 1.732$$

三阶巴特沃思模拟低通滤波器的归一化系统函数为：

$$\overline{H}_b(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

对上式去频率归一化，得：

$$H_b(s) = \overline{H}_b(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{s}{\Omega_c}} = \frac{\Omega_c^3}{s^3 + 2s^2\Omega_c + 2s\Omega_c^2 + \Omega_c^3}$$

将 $\Omega_c = 1.732$ 代入上式整理后有：

$$H_b(s) = \frac{5.196}{s^3 + 3.464s^2 + 6s + 5.196}$$

对 $H_b(s)$ 进行双线性变换，有：

$$H(z) = H_b(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{(1+z^{-1})^3}{1.32z^{-3} + 1.934z^{-2} + 2.911z^{-1} + 3.01}$$

9.29 利用双线性变换法设计满足下列技术要求的数字低通滤波器：

$$f_p = 1.2\text{kHz}, A_p \leq 0.5\text{dB}; f_r = 2\text{kHz}, A_r \geq 40\text{dB}; \text{抽样频率 } f_s = 8\text{kHz}.$$

(a) 用巴特沃思型设计。 (b) 用切比雪夫型设计。

解：(a) 用巴特沃思型设计

对频率进行预畸变，有：

$$\Omega_c = \Omega_p = \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = \operatorname{tg} \frac{2\pi f_p / f_s}{2} = 0.5095$$

$$\Omega_r = \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_r}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi f_r / f_s}{2} \right) = 1$$

由公式 9.32 得滤波器的阶数满足：

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1) / (10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1 \times 40} - 1) / (10^{0.1 \times 0.5} - 1)}}{\lg \left(\frac{1}{0.5095} \right)} \approx 8.38$$

∴ 滤波器阶数为 $n = 9$

查表 9.1 可得 9 阶巴特沃思模拟低通滤波器的归一化系统函数为：

$$\overline{H}_b(s) = \frac{1}{s^9 + 5.759s^8 + 16.582s^7 + 31.163s^6 + 41.986s^5 + 41.986s^4 + 31.163s^3 + 16.582s^2 + 5.759s + 1}$$

根据表 9.5，得巴特沃思数字低通滤波器的系统函数为：

$$H(z) = \overline{H}_b(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{\Omega_c(1+z^{-1})}}$$

$$=$$

$$\frac{(1+z^{-1})^9}{432(1-z^{-1})^9 + 1254(1-z^{-1})^8(1+z^{-1}) + 1842(1-z^{-1})^7(1+z^{-1})^2 + 1766(1-z^{-1})^6(1+z^{-1})^3 + \dots}$$

$$\frac{+ 1214(1-z^{-1})^5(1+z^{-1})^4 + 619(1-z^{-1})^4(1+z^{-1})^5 + 235(1-z^{-1})^3(1+z^{-1})^6 + 63.7(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})^7 + \dots}{+ \dots + 11.28(1-z^{-1})(1+z^{-1})^8 + (1+z^{-1})^9}$$

(b) 用切比雪夫型设计，根据 (9.37) 计算低通原型的阶数

$$n \geq \frac{ch^{-1}(\sqrt{10^{0.1A_r}} - 1) / \sqrt{10^{0.1A_p}} - 1}{ch^{-1}(\Omega_r / \Omega_p)} \approx 4.82$$

故阶数 $n = 5$

查表 9.3 可得 5 阶切比雪夫低通滤波器的归一化系统函数为：

$$\overline{H}_c(s) = \frac{1}{s^5 + 1.17249s^4 + 1.93737s^3 + 1.30957s^2 + 0.75252s + 0.17892}$$

根据表 9.5，得切比雪夫数字低通滤波器的系统函数为：

$$H(z) = \overline{H}_b(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{\Omega_c(1+z^{-1})}}$$

$$=$$

$$\frac{(1+z^{-1})^5}{28.92(1-z^{-1})^5 + 17.3(1-z^{-1})^4(1+z^{-1}) + 14.59(1-z^{-1})^3(1+z^{-1})^2 + 5.03(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})^3 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 0.75252(1-z^{-1})(1+z^{-1})^4 + 0.17892(1+z^{-1})^4}{\dots}$$

9.30 利用双线性变换法设计数字低通滤波器。指标为：通带最大波动 $A_p = 0.5dB$ ；阻带最

小衰减 $A_r = 60dB$ ；通带截止数字频率 $\omega_p = 0.25\pi$ ，阻带截止数字频率 $\omega_r = 0.3\pi$ ，

抽样频率 $f_s = 2kHz$ 。

(a) 用巴特沃思型设计。 (b) 用切比雪夫型设计。

解：对频率进行预畸变，得到模拟滤波器的技术指标：

$$\Omega_p = \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = 0.4142, A_p = 0.5 \text{ dB}$$

$$\Omega_r = \operatorname{tg} \frac{\omega_r}{2} = 0.5095, A_r = 60 \text{ dB}$$

(a) 用巴特沃思型设计
计算模拟低通滤波器的阶数：

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1) / (10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1 \times 60} - 1) / (10^{0.1 \times 0.5} - 1)}}{\lg \left(\frac{0.5095}{0.4142} \right)} \approx 38.43$$

\therefore 滤波器阶数为 $n = 39$ 。

选用 39 阶的巴特沃思低通滤波器进行低通原型设计，再采用表 9.5 从模拟低通原型变换到数字低通。

(b) 用切比雪夫型设计

$$n \geq \frac{ch^{-1}(\sqrt{10^{0.1A_r} - 1} / \sqrt{10^{0.1A_p} - 1})}{ch^{-1}(\Omega_r / \Omega_p)} \approx 12.99$$

\therefore 滤波器阶数为 $n = 13$ 。

选用 13 阶的切比雪夫低通滤波器进行低通原型设计，再采用表 9.5 从模拟低通原型变换到数字低通。

9.31 用双线性变换法设计一个三阶巴特沃思数字高通滤波器。采样频率 $f_s = 6 \text{ kHz}$ ，截止频率 $f_c = 1.5 \text{ kHz}$ （3kHz 以上的频率分量不计）。

解：对频率进行预畸变，得模拟截止频率 $\Omega_c = \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_c}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi f_c / f_s}{2} \right) = 1$

又三阶巴特沃思模拟低通滤波器的归一化系统函数为：

$$H_L(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

查表 9.5 可得三阶巴特沃思数字高通滤波器的系统函数为：

$$H(z) = H_L(s) \Bigg|_{s \rightarrow \frac{\Omega_c(1+z^{-1})}{1-z^{-1}}} = \frac{(1-z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3 + 2(1+z^{-1})^2(1-z^{-1}) + 2(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2 + (1-z^{-1})^3}$$

9.32 用双线性变换法设计数字带通滤波器，技术指标为：

通带 $0.25\pi \leq \omega \leq 0.35\pi$ ，通带截止频率 $\omega_2 = 0.4\pi, \omega_1 = 0.2\pi$

$A_p = 0.5dB, A_r \geq 60dB$, 抽样频率 $2kHz$.

$$\text{解: } \cos \omega_0 = \frac{\cos[(\omega_1 + \omega_2)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]} = \frac{\cos(0.25\pi + 0.35\pi)/2}{\cos(0.35\pi - 0.25\pi)/2} = 0.5951$$

$$\Omega_c = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_2}{\sin \omega_2} = \frac{0.5951 - \cos(0.35\pi)}{\sin(0.35\pi)} = 0.15838, A_p = 0.5dB$$

$$\Omega_r = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_r}{\sin \omega_r} = \frac{0.5951 - \cos(0.4\pi)}{\sin(0.4\pi)} = 0.3, A_r \geq 60dB$$

如采用巴特沃思型设计, 则滤波器阶数为:

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1A_r} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\lg(\Omega_r / \Omega_p)} = \frac{\lg \sqrt{(10^{0.1 \times 60} - 1)/(10^{0.1 \times 0.5} - 1)}}{\lg(\frac{0.3}{0.15838})} \approx 12.41$$

取整数后为: $n = 13$

9.33 利用双线性变换法设计巴特沃思数字带通滤波器, 已知抽样频率 $f_s = 6kHz$, 其等效的模拟滤波器指标为:

$$2kHz \leq \Omega \leq 3kHz, A_p = 3dB$$

$$\Omega \geq 6kHz, A_r \geq 50dB$$

$$\Omega \leq 1.5kHz, A_r \geq 20dB$$

解: 通带上截止频率为:

$$\omega_2 = 2\pi * 3 * 10^3 / (6 * 10^3) = \pi$$

通带下截止频率为:

$$\omega_1 = 2\pi * 2 * 10^3 / (6 * 10^3) = \frac{2}{3}\pi$$

阻带截止频率为:

$$\omega_r = 2\pi * 6 * 10^3 / (6 * 10^3) = 2\pi$$

按表 9.6 进行预畸变, 有:

$$\cos \omega_0 = \frac{\cos[(\omega_1 + \omega_2)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]} = -1$$

$$\Omega_c = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_2}{\sin \omega_2} = 1, A_p = 3dB$$

$$\Omega_r = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_r}{\sin \omega_r} = \frac{-1 - \cos(2\pi)}{\sin(2\pi)} = \infty ?$$

9.34 用矩形窗设计线性相位高通滤波器。已知

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j(\omega-\pi)\alpha}, & \pi - \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0, & 0 \leq \omega < \pi - \omega_c \end{cases}$$

- (a) 求出单位脉冲响应 $h_d(n)$ 的表达式，确定 α 与 N 的关系。
 (b) 该滤波器有几种类型，分别属于哪一种线性相位滤波器？
 (c) 改用海宁窗进行设计，求出 $h_d(n)$ 的表达式。

解：

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\omega_c}^{\pi} e^{-j(\omega-\pi)\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{e^{j\pi n}}{2\pi} \int_{\pi-\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\alpha)} d\omega \\ &= \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\omega_c(n-\alpha)}{2}\right)}{\pi(n-\alpha)} e^{-j\frac{\omega_c(n-\alpha)}{2}} \end{aligned}$$

为了保证线性相位， $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 。

- (b) 当 N 为奇数，为第一种情况，滤波器偶对称。
 若 N 为偶数，为第四种情况，滤波器奇对称。

$$\text{(c)} \quad h_d(n) = \left\{ \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\omega_c(n-\alpha)}{2}\right)}{\pi(n-\alpha)} e^{-j\frac{\omega_c(n-\alpha)}{2}} \cdot \frac{1}{2} [1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right)] \right\} R_N(n)。$$

9.35 若线性相位高通滤波器的特性为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} -je^{-j(\omega-\pi)\alpha}, & \pi - \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ je^{-j(\omega-\pi)\alpha}, & \pi < \omega \leq \pi + \omega_c \\ 0, & 0 \leq \omega < \pi - \omega_c, \pi + \omega_c < \omega \leq 2\pi \end{cases}$$

重复 9.34 题的各项要求。

解：

$$\text{(a)} \quad h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\omega_c}^{\pi} -je^{-j(\omega-\pi)\alpha} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi+\omega_c} je^{-j(\omega-\pi)\alpha} e^{j\omega n} d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{j\pi\alpha}}{2\pi} \left[\int_{\pi-\omega_c}^{\pi} -je^{j(n-\alpha)\omega} d\omega + \int_{\pi}^{\pi+\omega_c} je^{j(n-\alpha)\omega} d\omega \right] \\
&= \frac{e^{j\pi\alpha}}{2\pi} \left[\frac{-e^{j(n-\alpha)\omega}}{n-\alpha} \Big|_{\pi-\omega_c}^{\pi} + \frac{e^{j(n-\alpha)\omega}}{n-\alpha} \Big|_{\pi}^{\pi+\omega_c} \right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi(n-\alpha)} (\cos \omega_c(n-\alpha) - 1) \\
&= \frac{(-1)^{n+1} \sin^2[(n-\alpha)\omega_c/2]}{\pi(n-\alpha)}
\end{aligned}$$

$$h(n) = h_d(n) * \varpi_R(n) = \frac{(-1)^{n+1} \sin^2[(n-\alpha)\omega_c/2]}{(n-\alpha)\pi} \varpi_R(n)$$

(b) 为了保证线性相位 $\alpha = \frac{N-1}{2}$

若 N 为奇数, 设 $N=2k+1$ 则 $\alpha=k$

$$h(n) = (-1)^{n+1} \frac{2 \sin^2[(n-k)\omega_c/2]}{(n-k)\pi} \varpi_R(n)$$

$h(n)$ 满足奇对称, 即 $h(n) = -h(N-1-n)$ 属于第 III 类 FIR 滤波器
若 N 为偶数, 设 $N=2k$ 则 $\alpha=k-1/2$

$$h(n) = (-1)^{n+1} \frac{2 \sin^2[(n-k+1/2)\omega_c/2]}{(n-k+1/2)\pi}$$

$h(n)$ 满足偶对称, 即 $h(n) = h(N-1-n)$ 属于第 II 类 FIR 滤波器

$$(c) h(n) = (-1)^{n+1} \frac{\sin^2[(n-\alpha)\omega_c/2]}{(n-\alpha)\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right) \varpi_R(n)$$

9.36 用矩形窗设计线性相位带通滤波器, 已知

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & -\omega_c \leq \omega - \omega_0 \leq \omega_c \\ 0, & 0 \leq \omega < \omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

(a) 取 N 为奇数, 设计 $h(n)$ 。

(b) 取 N 为偶数, 设计 $h(n)$ 。

(c) 若用汉明窗设计, 分别求出以上两种情况的 $h(n)$ 表达式。

解:
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0-\omega_c}^{\omega_0+\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0-\omega_c}^{-\omega_0+\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin[(n-\alpha)(\omega_0 + \omega_c)] - \sin[(n-\alpha)(\omega_0 - \omega_c)]}{(n-\alpha)\pi} \\
&= \frac{2\cos(n-\alpha)\omega_0 \sin(n-\alpha)\omega_c}{(n-\alpha)\pi}
\end{aligned}$$

$$h(n) = h_d(n)\varpi_R(n)$$

- (a) N 为奇数时, 设 $N=2k+1$, $\alpha = \frac{N-1}{2} = k$

$$h(n) = \frac{2\cos(n-k)\omega_0 \sin(n-k)\omega_c}{(n-k)\pi} \varpi_R(n)$$

$h(n)$ 满足偶对称, 属于第 I 类 FIR 滤波器

- (b) N 为偶数时, 设 $N=2k$, $\alpha=k-1/2$

$$h(n) = \frac{2\cos(n-k+1/2)\sin(n-k+1/2)\omega_c}{(n-k+1/2)\pi} \varpi_R(n)$$

$h(n)$ 满足偶对称, 属于第 II 类 FIR 滤波器

- (c) N 为奇数时, 用升余弦窗设计

$$h(n) = \frac{2\cos(n-k)\omega_0 \sin(n-k)\omega_c}{(n-k)\pi} [0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}] R_N(n)$$

N 为偶数, 用升余弦窗设计

$$h(n) = \frac{2\cos(n-k+1/2)\omega_0 \sin(n-k+1/2)\omega_c}{(n-k)\pi} [0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}] R_N(n)$$

9.37 用矩形窗设计线性相位正交变换网络。已知

$$H_d(e^{j\omega}) = -je^{-j\omega a}, 0 < \omega < \pi$$

- (a) 求 $h(n)$ 的表达式。
- (b) N 选奇数好还是选偶数好? 还是性能一样好, 为什么?
- (c) 若用凯塞窗进行设计, 求 $h(n)$ 的表达式。

解: (a)

$$H_d(e^{j\omega}) = -je^{-j\omega a} = e^{j(-\omega a - \pi/2)}$$

$$\therefore |H_d(e^{j\omega})| = 1, \varphi(\omega) = -\omega a - \pi/2$$

$$\therefore h_d(n) = \frac{\sin(n-a)\pi}{(n-a)\pi} \text{sgn}(n-a)$$

$$h(n) = h_d(n)\varpi_R(n) = \frac{\sin(n-a)\pi}{(n-a)\pi} \text{sgn}(n-a)\varpi_R(n)$$

- (b) N 为奇数时, $\alpha = (N-1)/2 = k$

$$\therefore h(n) = \begin{cases} 1, & n = a \\ 0, & n \neq a \end{cases}$$

N 为偶数时, $\alpha = (N-1)/2 = k-1/2$

$$h(n) = \frac{\sin(n-k+1/2)\pi}{(n-k+1/2)\pi} \operatorname{sgn}(n-k+1/2) \varpi_R(n)$$

N 为偶数时性能好.

$$(c) \quad h(n) = \frac{\sin(n-a)\pi}{(n-a)\pi} \operatorname{sgn}(n-a) \frac{I_0(\beta \sqrt{1-[1-n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)}$$

9.38 用频率采样法设计线性相位低通滤波器。N = 15, 幅度采样值为

$$H_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0.5, & k = 1, 14 \\ 0, & k = 2, 3, \dots, 13 \end{cases}$$

(a) 设计采样值的相位 θ_k , 并求出 $h(n)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 的表达式。

(b) 用横截型和频率采样型两种结构实现该滤波器。画出其结构图。

(c) 比较这两种结构所需的乘法和加法数目的多少?

解:

(a)

$$\theta(k) = -k \frac{2\pi}{N} \left(\frac{N-1}{2} \right) = -k\pi(1-1/N), H_d(0) = 1, H_d(1) = 0.5e^{-j\pi(1-1/15)}$$

$$H_d(k) = H_d(N-k) = 0, k = 2, 3, \dots, 13$$

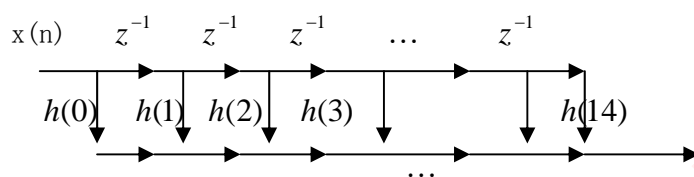
$$H_d(14) = 0.5e^{-j14(15-1)\pi/15} = H_d^*(1)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

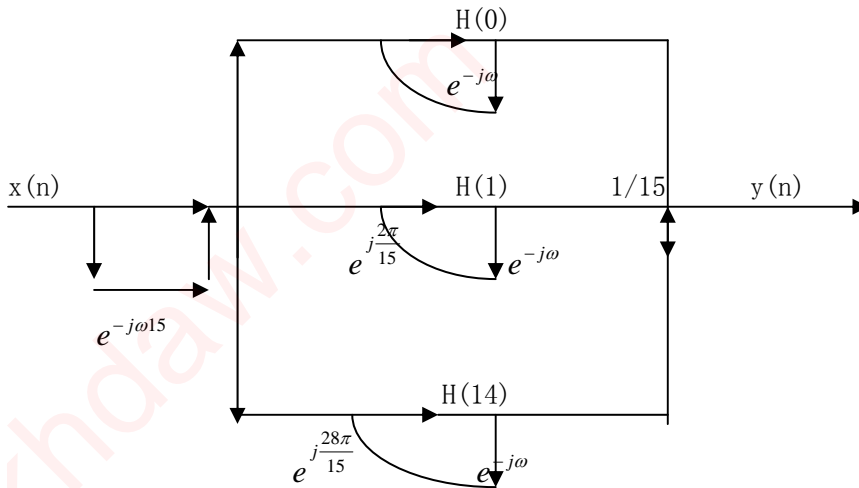
$$= \frac{1}{15} (1 + 0.5e^{-j \frac{14}{15}\pi} e^{j \frac{2\pi}{15}n} + 0.5e^{j \frac{14}{15}\pi} e^{j \frac{28}{15}\pi n})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{j\omega 15}}{15} \sum_{k=0}^{14} \frac{H(k)}{1 - e^{-j\omega} e^{j22k/15}}$$

(b) 横截型



频率采样型



(c) 横截型用的乘法器多，频率采样型用的加法器多

9.39 已知 $h_1(n)$ 是一个 $N=8$ 的偶对称序列， $h_2(n)$ 是 $h_1(n)$ 圆周移动 $N/2=4$ 以后所得

的序列，如图 P9.39 所示。 $H_1(k) = DFT[h_1(n)]$ ， $H_2(k) = DFT[h_2(n)]$

(a) 试问 $|H_1(k)| = |H_2(k)|$ 成立吗？ $\theta_1(k)$ 与 $\theta_2(k)$ 有何关系？

(b) 分别以 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 作为单位脉冲响应构成的低通滤波器是否是线性相位滤波器，其时延是多少？

(c) 这两个滤波器的性能是否相同，若不相同，谁优谁劣，为什么？

解：(a)

$\because h_2(n)$ 为 $h_1(n)$ 的圆周移位

$$H_2(k) = H_1(k)W_N^{km} = H_1(k)e^{jk\pi} \therefore |H_1(k)| = |H_2(k)|$$

$$\theta_1(k) = \theta_2(k) - k\pi$$

(b) 如图所示，又 $\because N=8, a=(N-1)/2=3.5$ 知 $h_1(n)$ ， $h_2(n)$ 均关于 $n=3.5$ 偶对称，所以属于线性相位滤波器，时延为 3.5

(c) 滤波器性能不一样。

9.40 用频率采样法设计线性相位高通滤波器，截止频率 $\omega_p = \frac{3}{4}\pi$ ，边沿设置一个过渡点

$$|H(k)| = 0.39, \text{ 试设计采样值 } H(k).$$

(a) 取 $N=33$ ，(b) 取 $N=34$ 。

解：

(a) $N=33$

$$|H(k)| = \begin{cases} 0, 0 \leq k \leq 11, 22 \leq k \leq 32 \\ 0.39, k = 12, 21 \\ 1, 13 \leq k \leq 20 \end{cases}, \theta(k) = \begin{cases} -\frac{32}{33}k\pi, 0 \leq k \leq 16 \\ \frac{32}{33}\pi(33-k), 17 \leq k \leq 32 \end{cases}$$

(b) N=34

$$|H(k)| = \begin{cases} 0, 0 \leq k \leq 11, 23 \leq k \leq 33 \\ 0.39, k = 12, 22 \\ 1, 13 \leq k \leq 21 \end{cases}, \theta(k) = \begin{cases} -\frac{33}{34}k\pi, 0 \leq k \leq 17 \\ \frac{33}{34}\pi(34-k), 18 \leq k \leq 33 \end{cases}$$

9.41 用频率采样法设计线性相位带通滤波器，其通带上下截止频率为

$$\omega_1 = \pi/4, \omega_2 = 3\pi/4, , \text{不设边沿过渡点, 试对 } N=33 \text{ 和 } N=34 \text{ 的情况分别求第 1,}$$

2, 3, 4 种线性相位滤波器的采样值 $H(k)$ 。

解:

(a) N=33, 因为 N 为奇数, 所以可能是第 I, III 型滤波器

$$|H(k)| = \begin{cases} 0, 0 \leq k \leq 4, 13 \leq k \leq 20, 29 \leq k \leq 32 \\ 1, 5 \leq k \leq 12, 21 \leq k \leq 28 \end{cases}$$

$$\text{第 I 型 } \theta(k) = \begin{cases} -\frac{32}{33}k\pi, 0 \leq k \leq 16 \\ \frac{32}{33}\pi(33-k), 17 \leq k \leq 32 \end{cases}$$

$$\text{第 III 型 } \theta(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{32}{33}k\pi, 0 \leq k \leq 16 \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{32}{33}\pi(33-k), 17 \leq k \leq 32 \end{cases}$$

(b) N=34, 可能是第 II, IV 型滤波

$$|H(k)| = \begin{cases} 0, 0 \leq k \leq 4, 13 \leq k \leq 21, 30 \leq k \leq 33 \\ 1, 5 \leq k \leq 12, 22 \leq k \leq 29 \end{cases}$$

$$\text{第 II 型 } \theta(k) = \begin{cases} -\frac{33}{34}k\pi, 0 \leq k \leq 17 \\ \frac{33}{34}\pi(34-k), 18 \leq k \leq 33 \end{cases}$$

$$\text{第 IV 型 } \theta(k) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{33}{34}k\pi, 0 \leq k \leq 17 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{33}{34}\pi(34-k), 18 \leq k \leq 33 \end{cases}$$

9.42 用频率采样法分别按 $h(n)$ 偶对称和 $h(n)$ 奇对称两种情况设计线性相位低通滤波器，

已知 $N = 16$ ，幅度采样值的前一半为

$$H_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0.39, & k = 4 \\ 0, & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

对这两种滤波器的特性加以比较。

解：(a) $h(n)$ 偶对称，且滤波器点数为偶数，故选择第 II 型滤波器，此时有：

$$H_k = -H_{N-k}$$

$$\theta_k = -k\pi(1 - \frac{1}{N}) = -\frac{15}{16}k\pi$$

(b) $h(n)$ 奇对称，且滤波器点数为偶数，故选择第 IV 型滤波器，此时有：

$$H_k = H_{N-k}$$

$$\theta_k = -k\pi(1 - \frac{1}{N}) - \frac{\pi}{2}$$

9.43 利用频率采样法设计线性相位低通滤波器，已知 $N = 20$ ， $\omega_c = 0.15\pi rad$ 。如要改

善滤波器的频率效应，应采取什么措施？

解：选择滤波器的类型。由于要设计的是低通滤波器，且 N 为偶数，故选择第 2 类滤波器。于是有：

$$\theta_k = -k\pi(1 - \frac{1}{N}) = -\frac{19}{20}k\pi, k = 0, 1, 2, \dots, 19。$$

由 $\omega_c = 2\pi k / N$ 来确定通带内的点数。通带内点数为 2。

根据 $H_k = -H_{N-k}$ ，可得：

$$H_k = \begin{cases} 1 & k = 0, 1 \\ 0 & k = 2, \dots, 18 \\ -1 & k = 19 \end{cases}$$

要改善滤波器的频率效应，需要设置过渡带。

9.44 设计一个具有零相移的 FIR 低通滤波器，截止频率 $f_c = 125kHz$ ，抽样间隔 $T_s = 1\mu s$ ，

脉冲响应长度 $N = 32$ 。试求：

(a) 单位脉冲响应 $h(n)$ 。

(b) 当滤波器输入为 $x(t) = \sin(5 \times 10^5 t)$ 的 100 个样点时，求输出响应。

(c) 当输入为 $x(t) = \sin(8 * 10^5 t)$ 的 100 个样点时, 求输出响应, 并与 (b) 的结果相比较。

(d) 若输入为 50kHz 方波的样本点, 求滤波器的输出。

解:

(a) 采用矩形窗设计法:

$$\text{数字截止频率为: } \omega_c = 2\pi f_c / f_s = \frac{\pi}{4}$$

$$h_d(n) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}, n = -16, \dots, 15$$

(b) 由于输入信号的频率为 $f = \frac{5 * 10^5}{2\pi * 10^3} = 79.57\text{kHz}$, 在低通滤波器的通带频率范围内, 故经过滤波器后输出仍然为原始信号。

(c) 由于输入信号的频率为 $f = \frac{8 * 10^5}{2\pi * 10^3} = 127.32\text{kHz}$, 在低通滤波器的通带频率范围外, 故经过滤波器后输出为零。

(d) 当输入为 50kHz 方波的样本点时, 由于 FIR 低通滤波器的截止频率 $f_c = 125\text{kHz}$, 故方波信号中只有直流分量, 一次谐波, 两次谐波可以通过, 其余谐波衰减为零。

9.45 用频率采样法设计正交变换网络

$$H_d(e^{j\omega}) = -je^{-j\omega\alpha}, 0 < \omega < \pi$$

(a) 若为偶数, 设置一个过渡点, 幅度采样值为

$$H_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ 0.4, & k=1, N-1 \\ 1, & k=2, 3, \dots, N-2 \end{cases}$$

请完成 θ_k 的设计。

(b) 若 N 为奇数, 对 midpoint $k = (N-1)/2$, $H(k)$ 为何值? 此 midpoint 两边是否应设过渡点? 此时 $H(k)$ 应如何设计?

解:

(a) N 为偶数, 上面正交网络可设计成第 IV 型滤波器

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \frac{2k\pi}{N}, k=0, \dots, [\frac{N-1}{2}] \\ \frac{\pi}{2} + \frac{N-1}{2} (\frac{2\pi}{N})(N-k), k=[\frac{N-1}{2}]+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

(b) N 为奇数，纯虚数幅度响应样本为：

$$jH_r(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ -j, & k = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

由于这是一个 III 型线性相位滤波器，在 $\omega=\pi$ 处振幅响应应为零，即 $H_k = 0$ 为了减少波动，

在靠近 $\omega=\pi$ 处（即中点两旁）设过渡点，不妨选值为 0.4

$$H_k = \begin{cases} 0, & k = 0, k = (N-1)/2 \\ -j, & 2 \leq k \leq (n-5)/2, (N+3)/2 \leq k \leq N-2 \\ 0.4j, & k = (N-3)/2, (N+1)/2, 1, N-1 \end{cases}$$

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2k\pi}{N}\right), & k = 0, \dots, \left[\frac{N-1}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} + \left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{N}\right)(N-k), & k = \left[\frac{N-1}{2}\right] + 1, \dots, N-1 \end{cases}$$