Лекция 8

Степень нечеткости нечеткого подмножества

- 1. Расстояние между нечеткими подмножествами.
- 2. Индекс нечеткости нечеткого подмножества.

1. Расстояние между нечеткими подмножествами

Пусть X – некоторое множество

$\boldsymbol{R}^+ = \{x \in \boldsymbol{R}:\ x \geq 0\}$

Функция $r : X^2 \to \boldsymbol{R}^+$ называется расстоянием в X, если $\forall x, y, z \in X$ выполняется:

1. $r(x,x)=0$
2. $r(x,y) = r(y,x)$
3. $r(x,z) \leq r(x,y) + r(y,z)$

Пусть E – конечное, $|E|=n$.

- Обобщенное (линейное) расстояние Хемминга:

$$d(\tilde{A},\tilde{B})=\sum_{i=1}^{n}|\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\mu_{\tilde{B}}(x_i)|$$

- Относительное расстояние Хемминга:

$$\boxed{\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{n} d(\tilde{A}, \tilde{B})}$$

- Евклидово (квадратичное) расстояние:

$$e(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\mu_{\tilde{B}}(x_i))^2}$$

Величина $e^2(\tilde{A},\tilde{B})$ называется евклидовой нормой.

СР

Докажите, является ли величина

$$e^2(\tilde{A},\tilde{B})$$

расстоянием?

- Относительное расстояние Евклида:

$$\varepsilon(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\ e(\tilde{A},\tilde{B})$$

СР

Если $\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \in \{0, 1\}$, то:

$$e^2(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad ? \quad d(\tilde{A}, \tilde{B})$$

$$\varepsilon^2(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad ? \quad \delta(\tilde{A}, \tilde{B})$$

Пусть E – бесконечное счетное.

- Линейное расстояние:

$$d(\tilde{A},\tilde{B})=\sum_{i=1}^{\infty}|\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\mu_{\tilde{B}}(x_i)|$$

если ряд справа сходится

- Квадратичное расстояние:

$$e(\tilde{A},\tilde{B})=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\mu_{\tilde{B}}(x_i))^2}$$

если ряд под знаком корня сходится

Пусть E – бесконечное несчетное, $E \subseteq \boldsymbol{R}$.

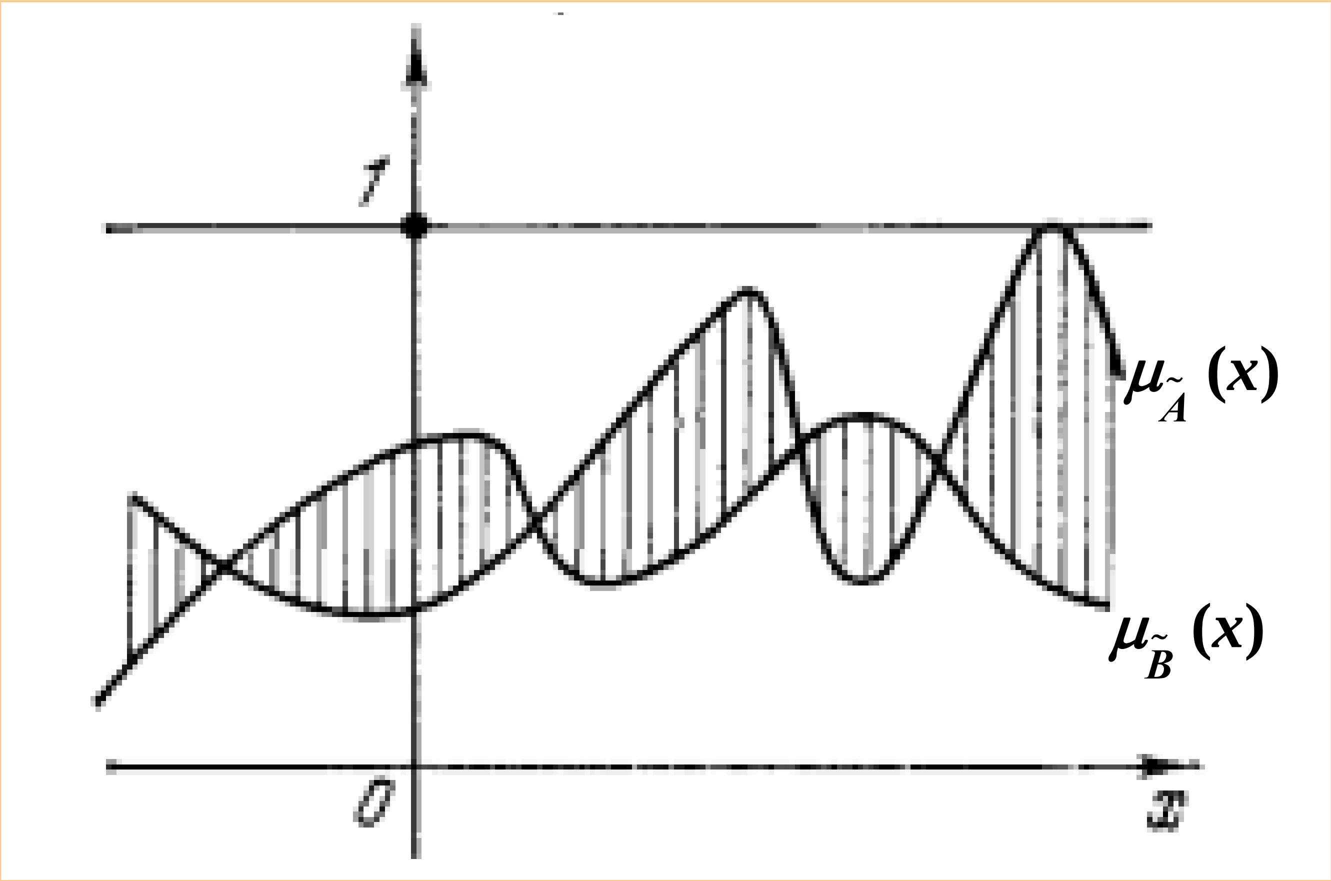
- Линейное расстояние:

$$\boxed{d(\tilde{A},\tilde{B}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)\,|\,dx}$$

- Квадратичное расстояние:

$$\boxed{e(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x))^2\,dx}}$$

если соответствующий интеграл сходится


1
$\mu_{\tilde{A}}(x)$
$\mu_{\tilde{B}}(x)$
0
x

Если E – ограниченное, $E = [\alpha, \beta]$, то $d(\tilde{A}, \tilde{B})$ и $e(\tilde{A}, \tilde{B})$ всегда конечны.

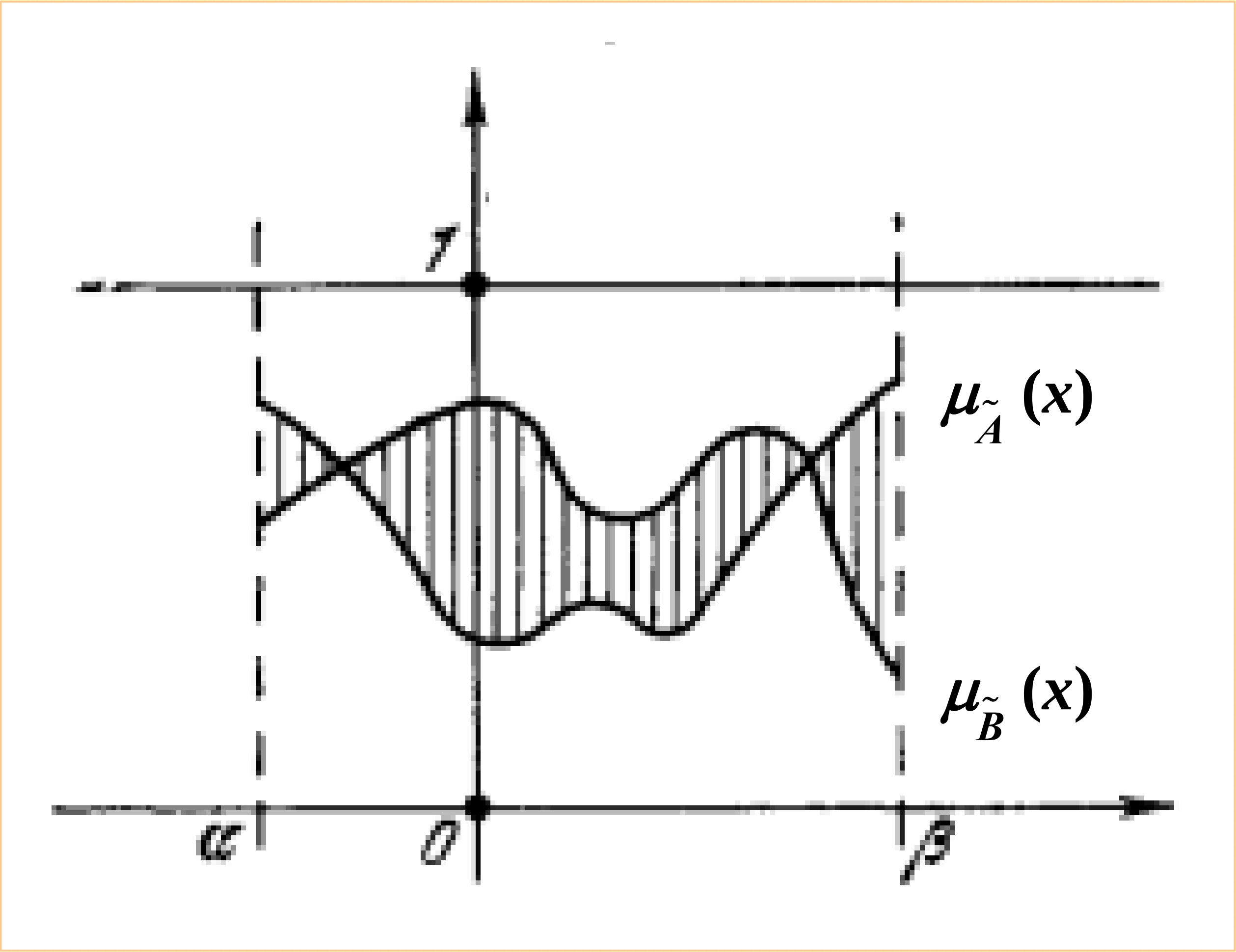
Тогда можно определить:

- относительное расстояние Хемминга

$$\boxed{\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{\beta - \alpha} d(\tilde{A}, \tilde{B})}$$

- относительное расстояние Евклида

$$\boxed{\varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}} e(\tilde{A}, \tilde{B})}$$



$\mu_{\tilde{A}}(x)$

$\mu_{\tilde{B}}(x)$

2. Индекс нечеткости нечеткого подмножества

Нечеткие множества могут иметь различную *степень нечеткости*.

Этот показатель является параметром оценки качества алгоритмов в распознавании образов, принятии решений, моделях поиска информации и т.п.

Методы оценки нечеткости

- Энтропийный
- Метрический
- Аксиоматический

Метрический подход

Идея: оценивать степень нечеткости множества через расстояние между этим множеством и некоторым другим множеством с известной степенью нечеткости.

Множество с известной степенью нечеткости называется базисным.

Примеры выбора базисных множеств

1. Пусть $\widetilde{A}$ - нечеткое подмножество.

Четкое множество A с функцией принадлежности

$$\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_{\widetilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{x}) < 0{,}5 \\ 1, & \text{если } \mu_{\widetilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{x}) > 0{,}5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_{\widetilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{x}) = 0{,}5 \end{cases}$$

называется ближайшим к нечеткому подмножеству $\widetilde{A}$.

Принимаем $\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) = 0$, если $\mu_{\widetilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{x}) = 0{,}5$.

Множество A имеет степень нечеткости, равную нулю.

Чем больше расстояние от некоторого нечеткого подмножества до его ближайшего четкого множества, тем больше степень его нечеткости.

2. Нечеткое множество $\tilde{A}_{0,5}$ с функцией принадлежности

$$\forall x \in E \quad \mu(x) = 0,5$$

есть максимально нечеткое множество.

Чем ближе к нему некоторое нечеткое подмножество, тем больше степень его нечеткости.

Степень нечеткости нечеткого подмножества характеризуется *индексом нечеткости*.

- Линейные индексы нечеткости:

$$\delta(A,\widetilde{A}) = \frac{1}{n}\ d(A,\widetilde{A})$$

причем $0 \le \delta(A,\widetilde{A}) \le \frac{1}{2}$,

$$\nu\left(\tilde{A}\right) = \frac{2}{n}\, d(A,\tilde{A})$$

причем $0 \le \nu(\tilde{A}) \le 1$.

- Квадратичные индексы нечеткости:

$$\varepsilon(A,\widetilde{A}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\ e(A,\widetilde{A})$$

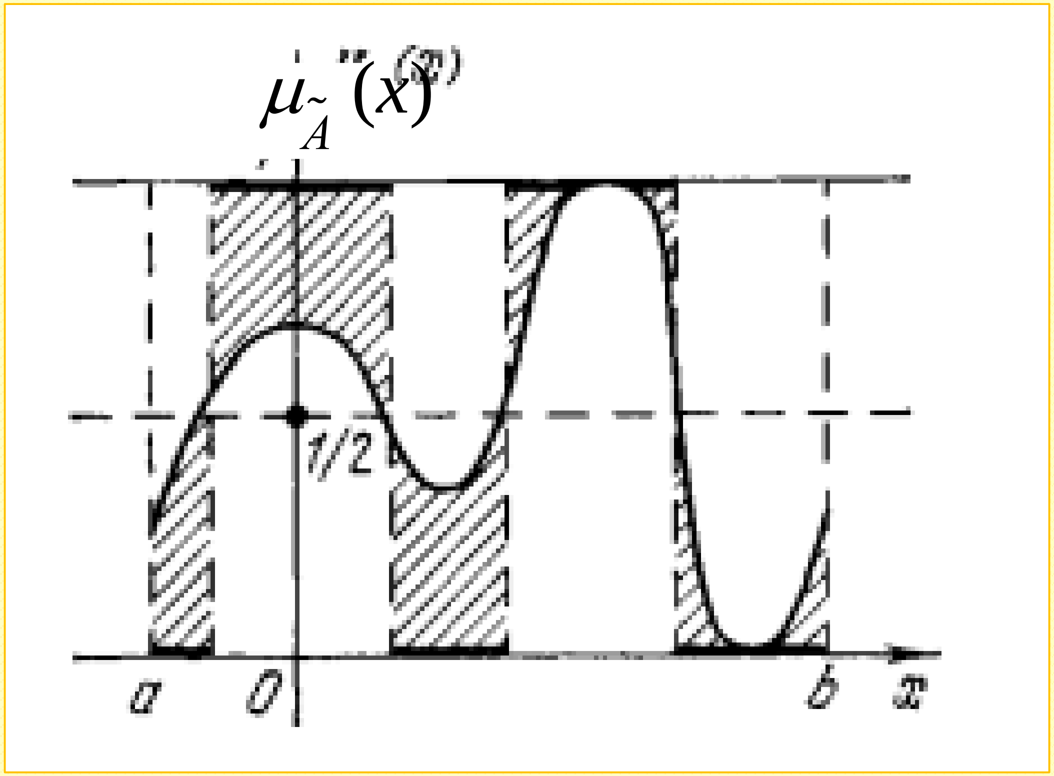
причем $0 \leq \varepsilon(A,\widetilde{A}) \leq \frac{1}{2}$,

$$\eta(\widetilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}}\ e(A,\tilde{A})$$

причем $0 \leq \eta(\tilde{A}) \leq 1$.

Если $E=[a, b]$, то, например,

$$\nu(\tilde{A}) = \frac{2}{b-a} \int_a^b |\mu_A(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)|\, dx$$



- Индекс гамма:

$$\gamma(\tilde{A}) = 1 - \frac{2}{n} d(\tilde{A}_{0,5}, \tilde{A})$$

Аксиоматический подход

Идея: формулирование естественных требований (аксиом) к степени нечеткости и поиск конкретных индексов, удовлетворяющих этим требованиям.

Аксиомы степени нечеткости

A1. A – четкое множество $\Rightarrow \xi(A)=0$

A2. $\xi(\tilde{A}_{0,5})=1$

A3. $\xi(\tilde{A})\le\xi(\tilde{B})$, если

$$\mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{B}}(x) \text{ при } \mu_{\tilde{B}}(x)<0{,}5$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)\ge\mu_{\tilde{B}}(x) \text{ при } \mu_{\tilde{B}}(x)>0{,}5$$

Говорят, что $\tilde{A}$ является *заострением* $\tilde{B}$.

A4. $\xi(\tilde{A})=\xi(\overline{\tilde{A}})$.

https://www.youtube.com/watch?v=2ScTwFCcXGo