

Лабораторная работа № 3

Задание 1

Предъявите доверительный интервал уровня $1 - \alpha$ для указанного параметра при данных предположениях (с математическими обоснованиями). Сгенерируйте 2 выборки объема 25 и посчитайте доверительный интервал. Повторить 1000 раз. Посчитайте, сколько раз 95-процентный доверительный интервал покрывает реальное значение параметра. То же самое сделайте для объема выборки 10000. Как изменился результат? Как объяснить?

Задача представлена в 4 вариантах. Везде даны две независимые выборки X, Y из нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ объема n, m соответственно. Сначала указывается оцениваемая функция, потом данные об остальных параметрах, затем параметры эксперимента и подсказки.

1. $\tau = \mu_1 - \mu_2$; σ_1^2, σ_2^2 известны; $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0.5$; воспользуйтесь функцией

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{\sigma}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}.$$

2. $\tau = \mu_1 - \mu_2$; $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ неизвестна; $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$; воспользуйтесь функцией

$$\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{\sqrt{n\text{Var}(X) + m\text{Var}(Y)}},$$

где $\text{Var}(\cdot)$ – выборочная смещенная дисперсия. Смотрите в сторону распределения Стьюдента.

3. $\tau = \sigma_1^2/\sigma_2^2$; μ_1, μ_2 неизвестны; $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 1$; воспользуйтесь функцией

$$\frac{n(m-1)\text{Var}(X)}{m(n-1)\text{Var}(Y)},$$

где $\text{Var}(\cdot)$ – выборочная смещенная дисперсия. Смотрите в сторону распределения Фишера.

4. $\tau = \sigma_1^2/\sigma_2^2$; μ_1, μ_2 известны; $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 1$; воспользуйтесь функцией

$$\frac{m \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2}{n \sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_2)^2},$$

Смотрите в сторону распределения Фишера.

Задание 2

Постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1 - \alpha$ для указанного параметра. Проведите эксперимент по схеме, аналогичной первой задаче.

Задача представлена в 5 вариантах. Сначала указывается класс распределений (однопараметрический) и оцениваемый параметр, затем параметры эксперимента и подсказки.

1. $\text{Exp}(\lambda)$; медиана; $\lambda = 1$; воспользуйтесь предельной теоремой об асимптотическом поведении среднего члена вариационного ряда.
2. Распределение Лапласа с неизвестным параметром сдвига μ и единичным масштабирующим параметром; μ ; $\mu = 2$; можно воспользоваться подсказкой для предыдущего варианта, хотя другие способы решения приветствуются.
3. $U[-\theta, \theta]$; θ ; $\theta = 5$; воспользуйтесь предельной теоремой об асимптотическом поведении крайних членов вариационного ряда.
4. $\text{Geom}(p)$; p ; $p = 0.7$; тут рецепт стандартный).
5. $\text{Pois}(\lambda)$; второй момент; $\lambda = 1$; воспользоваться асимптотической нормальностью второго момента.