Практическое занятие 6
Свойства множества по отношению порядка

- 1. Элементы ч.у.м. по отношению порядка.
- 2. Супремум и инфимум упорядоченного подмножества.
- 3. Понятие решетки.

Литература

1. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
2. Набебин А.А. Сборник заданий по дискретной математике. – М.: Научный мир, 2009. – 280 с.

- Отношение частичного порядка

– бинарное отношение Q на X, обладающее свойствами:

- рефлексивности,
- антисимметричности,
- транзитивности.

Обозначение: $x \preceq y$.

Говорят, что элемент x *предшествует или равен* y, а элемент y *следует за или равен* x.

- Отношение строгого порядка

– бинарное отношение Q на X, обладающее свойствами:

- антирефлексивности,
- антисимметричности,
- транзитивности.

$$\forall x, y \in X \;\; x \prec y \;\Leftrightarrow\; x \preceq y \text{ и } x \neq y.$$

Говорят, что элемент x *строго предшествует* y, а элемент y *строго следует за* x.

- Отношение линейного порядка

– отношение частичного порядка на множестве X, для которого любые два элемента сравнимы:

$$x \preceq y \text{ или } y \preceq x.$$

Непустое множество X с заданным на нем бинарным отношением порядка Q называется упорядоченным.

Обозначение: $< X, Q >$.

Частично (линейно) упорядоченное множество – непустое множество X с заданным на нем отношением частичного (линейного) порядка Q.

Сокращенно ч.у.м. или л.у.м.

Рассмотрим ч.у.м. $< X, \preceq >$.

Элемент y доминирует над x (y покрывает x), если

$$x \prec y \text{ и } \nexists z \in X \text{ такой, что } x \prec z \prec y.$$

Обозначение: $x \lhd y$

Конечное ч.у.м. $< X, \preceq >$ имеет диаграмму Хассе, если в нем строгий порядок определяется отношением доминирования:

$$\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X \quad \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \exists\ x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n$$

такая, что $\boldsymbol{x} = x_0 \lhd x_1 \lhd x_2 \lhd \ldots \lhd x_n = \boldsymbol{y}$.

В диаграмме Хассе:

- каждый элемент $x_i \in X$ изображают точкой на плоскости,
- если $x_i \lhd x_{i+1}$, то точку x_{i+1} располагают выше точки x_i и соединяют их отрезком (дугой).

1. Элементы множества по отношению порядка

Пусть $< X, \preceq >$ – ч.у.м.

Определение 1

Элемент $x_{max} \in X$ называется **максимальным элементом множества X**, если $\nexists x \in X$ такой, что $x \succ x_{max}$.

Определение 2

Элемент $x^* \in X$ называется наибольшим элементом множества X по данному отношению порядка, если

$$\forall x \in X \quad x \preceq x^*.$$

Определение 3

Элемент $x_{min} \in X$ называется **минимальным элементом множества** X, если $\nexists x \in X$ такой, что $x \prec x_{min}$.

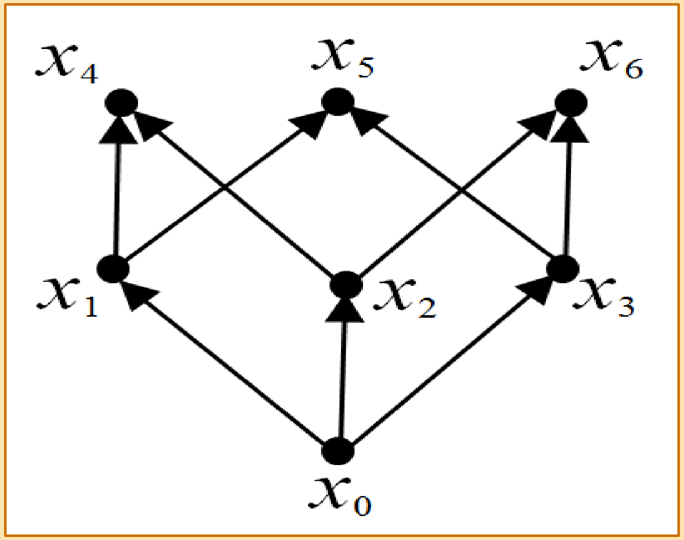
Определение 4

Элемент $x_* \in X$ называется **наименьшим элементом множества** X по данному отношению порядка, если

$$\forall x \in X \quad x_* \preceq x.$$

Наибольший элемент называют *единицей*,

наименьший элемент – *нулем* множества X по данному отношению порядка.

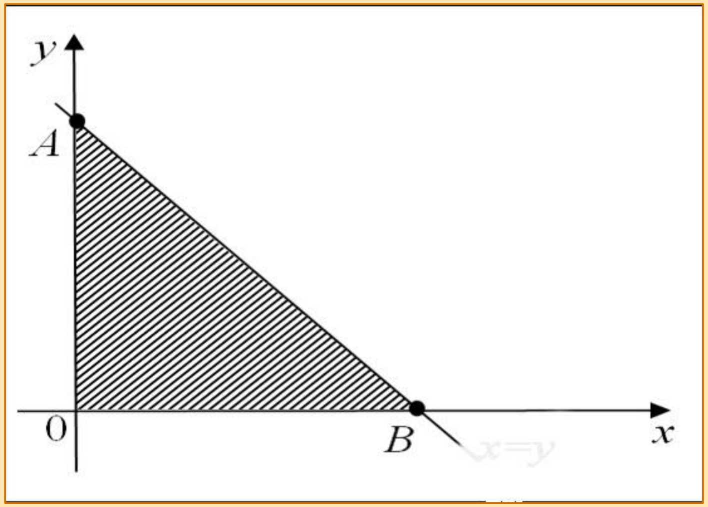


$< \{ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \preceq >$ ч.у.м.

- множество максимальных элементов:

$$X_{max} = \{x_4, x_5, x_6\};$$

- наибольший элемент x^* не существует;
- наименьший элемент $x_* = x_0 = x_{min}$, т.е. он же минимальный.



$< \Delta OAB, \Pi >$ ч.у.м.

- множество максимальных элементов

$$X_{max} = [\,A, B\,];$$

- наибольший элемент x^* не существует;
- наименьший элемент $x_* = (0,0) = x_{min}$.

Теорема 1

Если наибольший (наименьший) элемент множества по данному отношению порядка существует, то он *единственный*.

2. Супремум и инфимум упорядоченного подмножества

Пусть $< X, \preceq >$ – ч.у.м., $M \subseteq X$, $M \neq \varnothing$

Обозначим $\preceq_M$ – ограничение отношения $\preceq$ на подмножество M.

Ч.у.м. $< M, \preceq_M >$ называется упорядоченным подмножеством ч.у.м. $< X, \preceq >$.

Порядок $\preceq_M$ на подмножестве M называют порядком, индуцированным исходным порядком $\preceq$ на всем множестве X:

для $x, y \in M$ полагаем

$$x \preceq_M y \Leftrightarrow x \preceq y$$

- **Определение 5**

  Элемент $a \in X$ называется:

- верхней гранью множества M, если $\forall x \in M$ выполняется $x \preceq a$.

- нижней гранью множества M, если $\forall x \in M$ выполняется $a \preceq x$.

Верхним конусом множества M называют множество всех его верхних граней.

Обозначение: M^{Δ}.

Нижним конусом множества M называют множество всех его нижних граней.

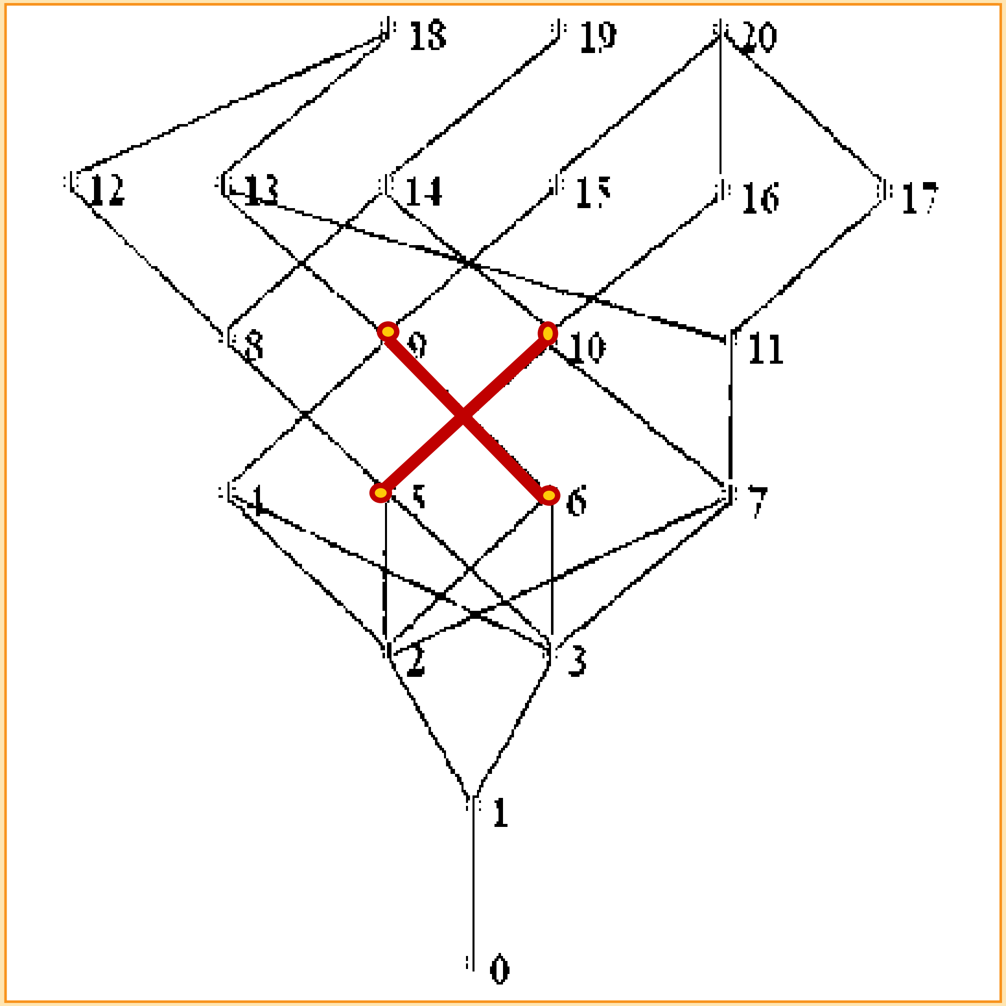
Обозначение: M^{∇}.

Точной верхней гранью или супремумом множества M называется наименьший элемент множества всех его верхних граней.

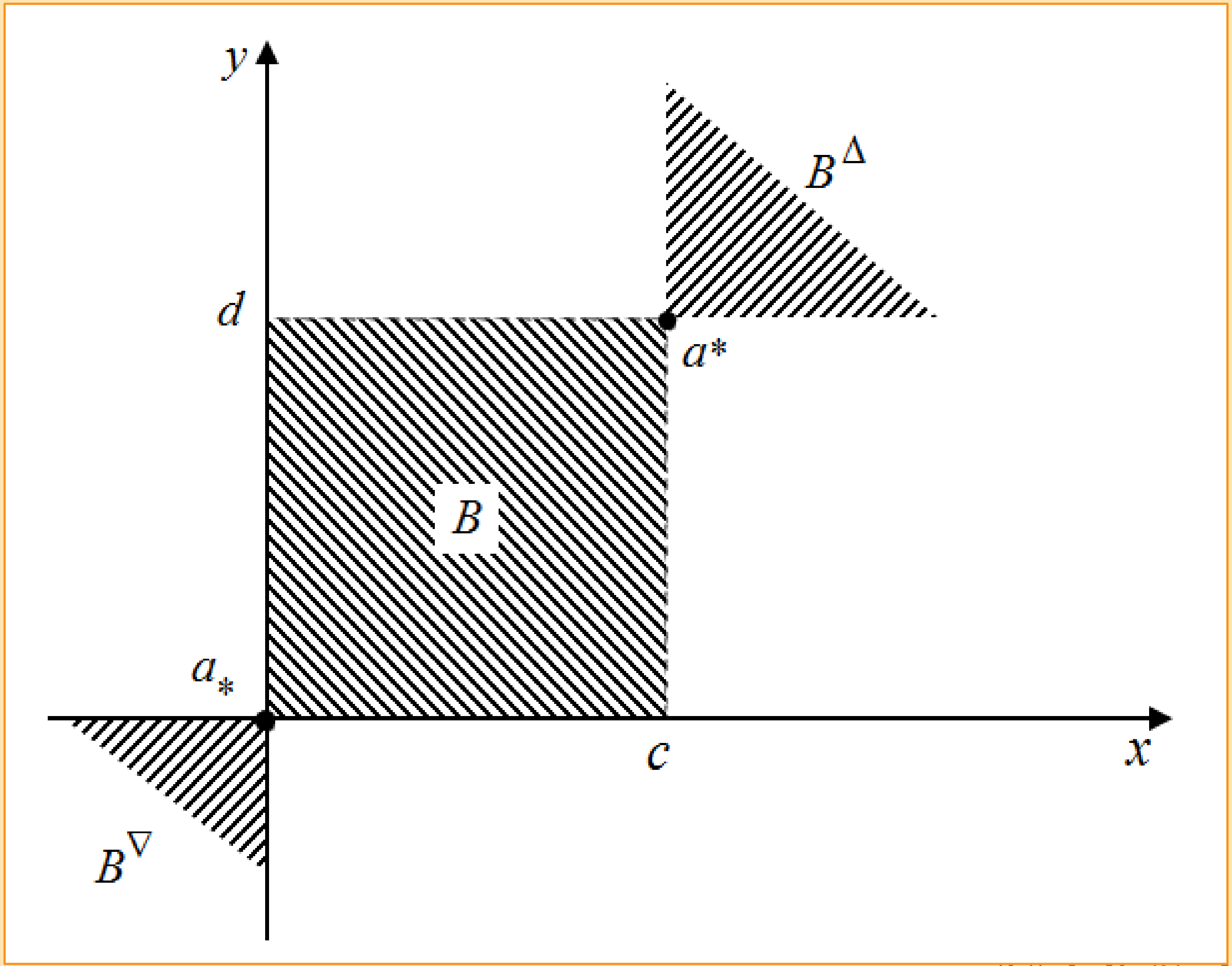
Обозначение: $sup\, M$.

Точной нижней гранью или инфимумом множества M называется наибольший элемент множества всех его нижних граней.

Обозначение: $inf\, M$.



18
19
20
12
13
14
15
16
17
8
9
10
11
4
5
6
7
2
3
1
0


y
d
B^Δ
a*
B
a_*
c
x
B^∇

$< \boldsymbol{R}^2, \Pi >$ – ч.у.м.,

где $(a, b)\ \Pi\ (c, d) \Leftrightarrow a \leq c,\ b \leq d.$

$B = \{(x,y)\colon 0 \leq x \leq c \text{ и } 0 \leq y \leq d\}$

- $\sup B = a^* = (c,d)$;
- $\inf B = a_* = (0,0)$.

Теорема 2

Если точная верхняя (нижняя) грань упорядоченного множества существует, то она *единственная*.

3. Понятие решетки

Пусть $< X, \preceq >$ – ч.у.м.; $x, y \in X$.

Определение 6

Элемент a называется:

- верхней гранью элементов x и y, если

$$x \preceq a \text{ и } y \preceq a;$$

- нижней гранью элементов x и y, если

$$a \preceq x \text{ и } a \preceq y.$$

Определение 7

Элемент a^* называется точной верхней гранью или супремумом элементов x и y, если

$$\forall t \;\; x \preceq t \text{ и } y \preceq t \Rightarrow a^* \preceq t$$

Обозначение: $a^* = sup\ \{x,y\}$.

Определение 8

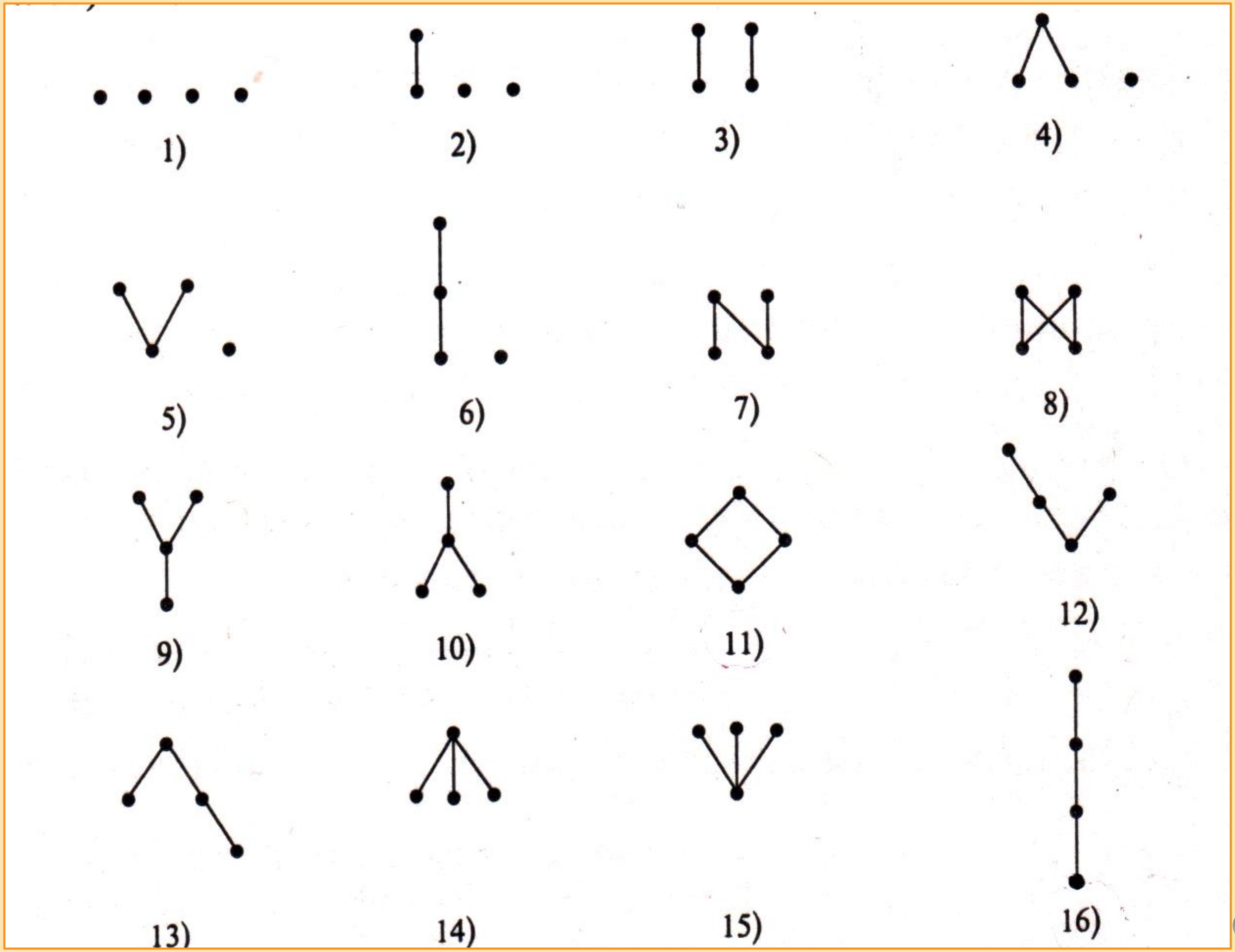
Элемент a_* называется точной нижней гранью или инфимумом элементов x и y, если

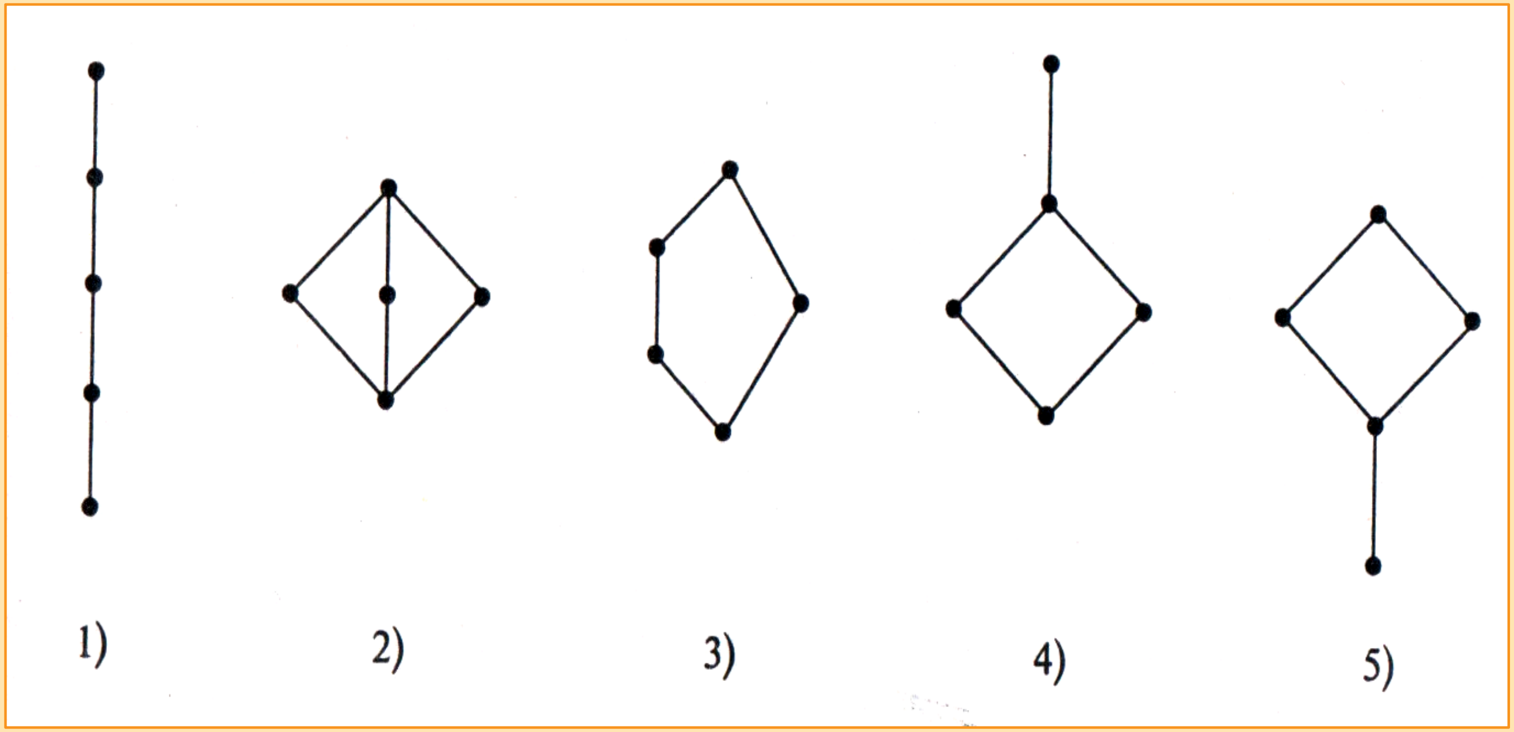
$$\forall t \quad t \preceq x \text{ и } t \preceq y \Rightarrow t \preceq a_*$$

Обозначение: $a_* = inf\,\{x,y\}$.

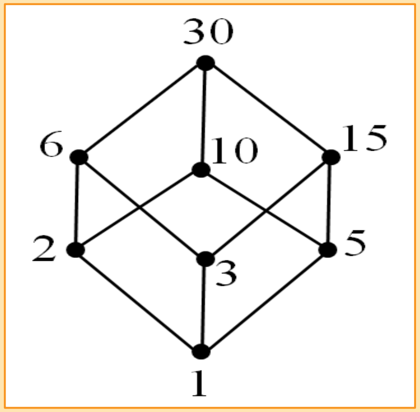
Определение 9

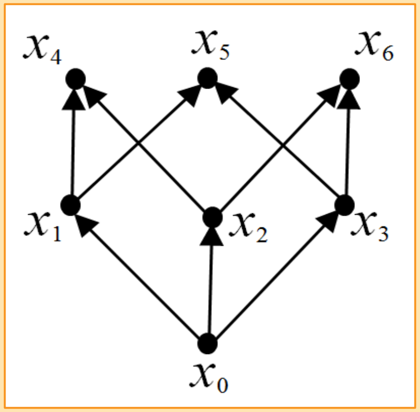
Решеткой называется ч.у.м. $< X, \preceq >$, в котором каждая пара элементов x и y имеет супремум и инфимум.

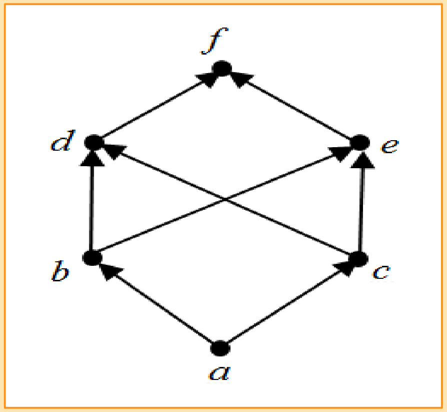

1)
2)
3)
4)
5)
6)
7)
8)
9)
10)
11)
12)
13)
14)
15)
16)



Попарно неизоморфные 5-элементные решетки


30
6
10
15
2
3
5
1


x_4
x_5
x_6
x_1
x_2
x_3
x_0


f
d
e
b
c
a