Практическое занятие 7
Алгебраическая решётка

- 1. Верхняя и нижняя полурешетки.
- 2. Аксиомы решетки.
- 3. Дистрибутивная решетка.

I.Krivtsova
ITMO University

1. Верхняя и нижняя полурешётки

Обозначение: $\vee$ – операция «сложение»

Полурешётка – это алгебра $L = < X, \vee >$, в которой $\forall x, y, z \in X$ выполняются:

1. ассоциативность:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

2. коммутативность:

$$x \vee y = y \vee x$$

3. идемпотентность:

$$x \vee x = x$$

I.Krivtsova
ITMO University

- **Определение 1**

$$\forall x, y \in X:$$

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \vee y = y \qquad (1)$$

– *естественный порядок* полурешётки $< X, \vee >$.

Вывод: всякую полурешётку можно рассматривать как упорядоченное множество, причем отношение частичного порядка определяется через операцию ($\vee$) этой полурешётки согласно (1).

Элемент $x \vee y$ есть точная верхняя грань двухэлементного множества $\{x,y\}$:

$$x \vee y = sup\,\{x,y\} \qquad (2)$$

Полурешетка $L = < X, sup >$ называется верхней полурешёткой.

Вывод: в полурешётке любое 2-элементное (любое конечное) подмножество имеет точную верхнюю грань по естественному порядку полурешётки.

I.Krivtsova
ITMO University

Верно и обратное:

любое упорядоченное множество $< X, \preceq >$, в котором всякое 2-элементное подмножество имеет точную верхнюю грань, является полурешёткой, естественный порядок которой совпадает с отношением $\preceq$.

Обозначение: $\wedge$ – операция «умножение»

Пусть $< X, \wedge >$ – алгебра,
в которой $\forall x,y,z \in X$ выполняются:

1. ассоциативность ($\wedge$)
2. коммутативность ($\wedge$)
3. идемпотентность ($\wedge$)

$L = < X, \wedge >$ – полурешётка.

- **Определение 2**

$\forall x,y \in X:$

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \qquad (3)$$

Элемент $x \wedge y$ есть точная нижняя грань двухэлементного множества $\{x,y\}$:

$$x \wedge y = inf\,\{x,y\} \qquad (4)$$

Полурешетка $L = < X, inf >$ называется нижней полурешёткой.

Вывод: в полурешётке любое 2-элементное (любое конечное) подмножество имеет точную нижнюю грань по *естественному порядку* этой полурешётки.

I.Krivtsova
ITMO University

Верно и обратное:

любое упорядоченное множество $< X, \preceq >$, в котором всякое 2-элементное подмножество имеет точную нижнюю грань, является полурешёткой, причем естественный порядок этой полурешётки является порядком, двойственным к исходному порядку $\preceq$.

I.Krivtsova
ITMO University

- **Определение 3**
  - Нейтральный элемент верхней полурешётки, т.е. $\mathbf{0} \in X$:

$$\forall x \in X \quad x \vee \mathbf{0} = \mathbf{0} \vee x = x$$

называется нулем полурешётки;

- нейтральный элемент нижней полурешётки $<X, \wedge>$, т.е. $\mathbf{1} \in X$:

$$\forall x \in X \quad x \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1} \wedge x = x$$

называется **единицей полурешётки**.

I.Krivtsova
ITMO University

$L = < X, \vee, \mathbf{0} >$	$L = < X, \wedge, \mathbf{1} >$
$\forall x \in X \quad x \vee \mathbf{0} = x$ нуль верхней полурешётки есть ее наименьший элемент	$\forall x \in X \quad x \wedge \mathbf{1} = x$ единица нижней полурешётки есть ее наибольший элемент
$x \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$	$x \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$

В конечных решётках всегда $\exists$ $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ (универсальные границы)

I.Krivtsova
ITMO University

2. Аксиомы решетки

- **Определение 4**

Решётка – это алгебра $\boldsymbol{L}= < X,\vee,\wedge >$ такая, что:

- $< X, \vee >$ – верхняя полурешетка,
- $< X, \wedge >$ – нижняя полурешетка,
- выполняются *тождества поглощения*:

$$\forall x,y \in X \qquad x\vee(x\wedge y)=x, \quad x\wedge(x\vee y)=x.$$

I.Krivtsova
ITMO University

Операции решётки:

- $\vee$ называется решётчатым объединением x и y;
- $\wedge$ называется решётчатым пересечением x и y;

или обе операции – решётчатыми операциями.

I.Krivtsova
ITMO University

- **Теорема 1**

В любой решетке $\boldsymbol{L}$ естественный порядок полурешётки $< X, \vee >$ есть порядок, *двойственный* к порядку полурешётки $< X, \wedge >$, т.е. $\forall x, y \in X$ имеет место равенство:

$$x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$$

Вывод: тождества поглощения делают естественные порядки полурешёток взаимно двойственными.

- **Теорема 2**

Любое упорядоченное множество $< X, \preceq >$ в котором $\forall x,y \in X \ \ \exists sup\,\{x,y\}$ и $\exists inf\,\{x,y\}$, является решёткой в смысле определения 4, в которой решётчатые операции определены так:

$$x \vee y = sup\,\{x,y\}$$

$$x \wedge y = inf\,\{x,y\}$$

При этом *естественный порядок* решётки $< X, sup, inf >$ совпадает с исходным порядком $\preceq$

I.Krivtsova
ITMO University

Решетка $\boldsymbol{L} = < X, \vee, \wedge, \mathbf{0} >$ имеет нейтральный элемент по операции решетчатого объединения – решетка с нулем и $\mathbf{0}$ – *нуль решетки* $\boldsymbol{L}$ есть наименьший элемент решетки $\boldsymbol{L}$.

Решетка $\boldsymbol{L} = < X, \vee, \wedge, \mathbf{1} >$ имеет нейтральный элемент по операции решетчатого пересечения – решетка с единицей и $\mathbf{1}$ – *единица решетки* $\boldsymbol{L}$ есть наибольший элемент решетки $\boldsymbol{L}$.

I.Krivtsova
ITMO University

Свойства операций решетки

1. Ассоциативность
2. Коммутативность
3. Идемпотентность
4. Если решетка имеет нуль и единицу, то $\forall x \in X$ справедливо:

$$\mathbf{0} \vee x = x, \qquad \mathbf{0} \wedge x = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{1} \vee x = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1} \wedge x = x.$$

5. Поглощение:

$$x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x.$$

I.Krivtsova
ITMO University

- **Определение 5**

Подмножество элементов решётки, замкнутое относительно операций ($\vee$) и ($\wedge$), то есть содержащее с каждыми двумя элементами их точные верхнюю и нижнюю грани, называется подрешёткой.

3. Дистрибутивная решётка

- **Определение 6**

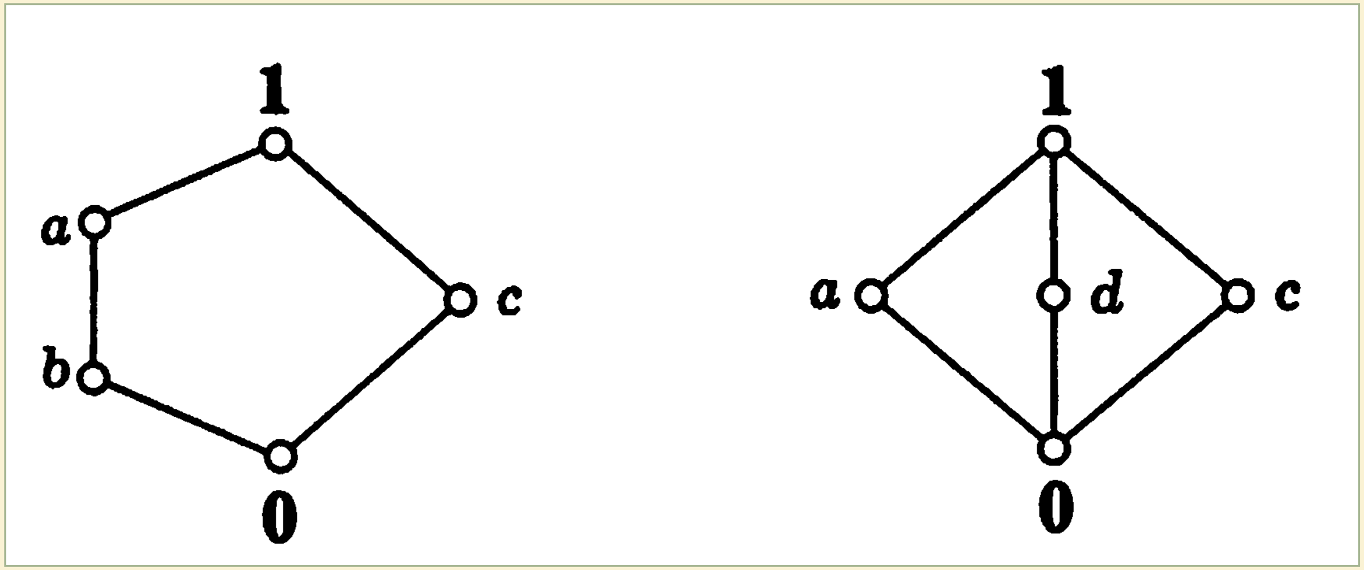
Решётка $\boldsymbol{L} = < X, \vee, \wedge >$ называется дистрибутивной, если выполняются дистрибутивные законы:

$$\forall x, y, z \in X$$

$$1.\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

$$2.\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

I.Krivtsova
ITMO University



Пентагон Диамант

- **Теорема 2**

Решетка дистрибутивна $\Leftrightarrow$ когда она не имеет подрешеток, изоморфных диаманту или пентагону.

Литература

- Белоусов А.И. Дискретная математика. М., 2021.
- Гретцер Г. Общая теория решеток.

  М.: Мир, 1982.

Домашнее задание №4

Исследование свойств множества по отношению порядка

I.Krivtsova
ITMO University