

Лабораторная работа №2

Задание 1

Представлено в пяти вариантах. Везде требуется найти оценку указанным методом, смещение, дисперсию, среднеквадратическую ошибку и указать свойства оценок. Также провести эксперимент при указанных параметрах по следующей схеме:

1. Задайте массив объемов выборки
2. Для каждого объема выборки n сгенерируйте m выборок из вашего распределения и для каждой сгенерированной выборки посчитайте оценку параметра согласно полученной формуле
3. Обработайте результаты (посчитайте выборочные характеристики для разницы между оценкой и реальным параметром для каждого объема выборки, количество выборок, для которых оценка отличается от реального параметра более чем на заданный вами порог и т.п.), визуализируйте результат.

Сами варианты:

1. Методом моментов найти оценку параметра θ равномерного распределения на $[-\theta, \theta]$. Эксперимент при $\theta = 10$. **Подсказка:** в зависимости от выбранной функции $g(x)$ можно оценить не θ , а θ^2 (и написать выкладки относительно оцениваемой функции θ^2).
2. Методом моментов найти оценку квадрата масштабирующего параметра θ распределения Лапласа (сдвиг считать нулевым). Эксперимент при $\theta = 0.5$. **Указание:** для плотности используйте параметризацию $f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left\{-\frac{|x|}{\theta}\right\}$.
3. Методом максимального правдоподобия найти оценку параметра θ биномиального распределения $\text{Bin}(m, \theta)$, считая m известным. Эксперимент при $m = 4$, $\theta = 1/5$.
4. Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ для распределения с плотностью

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta - x^3)^2}{2}\right).$$

Эксперимент при $\theta = 5$. **Подсказка:** здесь распределение не стандартное, так что имеет смысл генерировать величины по схеме $X = F^{-1}(Y)$, где $U \sim U[0, 1]$, F^{-1} – обратная к функции распределения (в данном случае она выражается через квантильную функцию стандартного нормального закона и арифметические операции).

5. С помощью метода моментов найти оценку параметра θ распределения с плотностью

$$f_\theta(x) = \frac{1}{(k-1)! \theta^k} x^{k-1} e^{-x/\theta} \mathbf{1}(x > 0),$$

если $k \in \mathbb{N}$ – известный параметр. Эксперимент при $\theta = 2$, $k = 3$.

Задание 2

Найдите байесовскую оценку параметра θ (относительно среднеквадратической ошибки). Проведите эксперимент по схожей схеме, что и в предыдущей задаче.

Сами варианты (сначала указывается семейство распределений для выборки, затем – априорное распределение параметра, в конце – значения параметров для эксперимента):

1. $\text{Pois}(\theta); \Gamma(k, \lambda)$, $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$ (при решении явно указывайте используемую параметризацию); $\lambda = k = 1$.
2. $\text{Geom}(\theta); \text{Be}(a, b)$, $a, b > 0$; $a = b = 1$.
3. $\text{Exp}(\theta); \Gamma(k, \lambda)$, $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$ (при решении явно указывайте используемую параметризацию); $k = \lambda = 1$.