Раздел 3

Нечеткие множества

Лекция 7
Операции над нечеткими подмножествами

- 1. Понятие нечеткого подмножества. Функция принадлежности.
- 2. Логические операции над нечеткими подмножествами.
- 3. Алгебраические операции над нечеткими подмножествами.

Литература

1. Л. Заде. Понятие лингвинистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М., 1976.
2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М., 1982.

Лотфи Аскер Заде

1921-2017

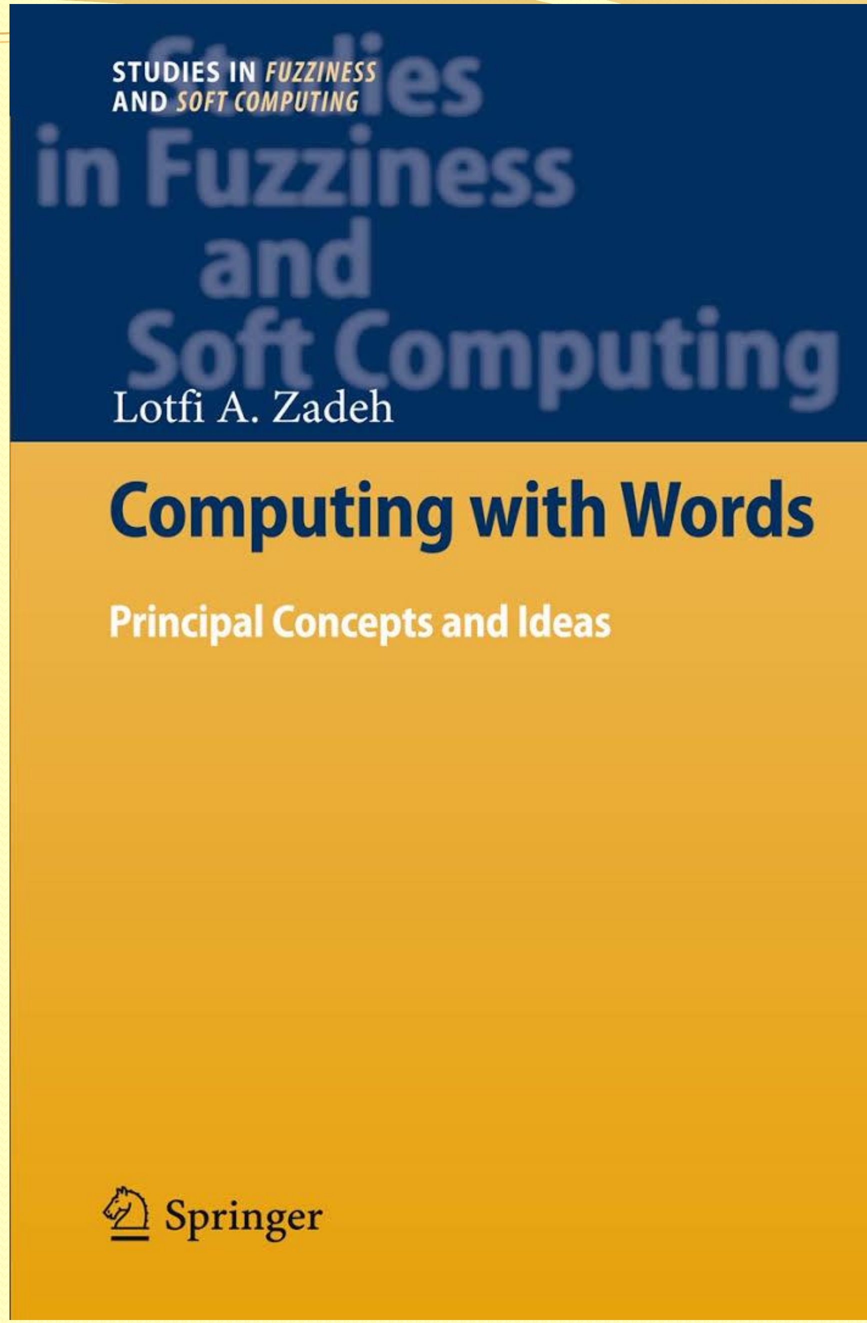
1965 г. – “*Fuzzy sets*”

Основная идея Заде: человеческий способ рассуждений, опирающийся на естественный язык, не может быть описан традиционной математикой, которой присуща однозначность интерпретации, а все, что связано с использованием естественного языка, имеет многозначную интерпретацию.

Программа Заде: построение новой математической дисциплины, в основе которой лежит не классическая теория множеств, а теория нечетких множеств.

1973 г. – теория нечеткой логики,

позднее – теория мягких вычислений (*soft computing*), теория вербальных вычислений и представлений.


STUDIES IN FUZZINESS
AND SOFT COMPUTING
Studies
in Fuzziness
and
Soft Computing
Lotfi A. Zadeh
Computing with Words
Principal Concepts and Ideas
Springer

Теория нечетких множеств – математическая формализация нечеткой информации с целью ее использования при построении математических моделей сложных систем.

Основа понятия *нечеткого множества* – представление о том, что элементы этого множества, обладающие общим свойством, могут обладать им в различной степени и, следовательно, принадлежать этому множеству с различной степенью.

1. Понятие нечеткого подмножества. Функция принадлежности

Пусть E – некоторое множество, $A \subset E$.

$\forall x \in E$ поставим в соответствие значение

функции $\mu(x) \in [0, 1]$.

Элемент $x \in E$ может:

- не быть элементом A ($\mu(x)=0$);
- быть элементом A в небольшой степени ($\mu(x)$ *близко к* 0);
- более или менее принадлежать A ($\mu(x)$ *не слишком близко к* 0 *и не слишком близко к* 1);

- в значительной степени быть элементом A ($\mu(x)$ *близко к* 1);
- быть элементом A ($\mu(x)=1$).

Пример

$E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}8), (x_2|0), (x_3|0{,}5), (x_4|1), (x_5|0{,}2)\}.$$

Пусть E – некоторое множество, $A \subset E$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

– характеристическая функция множества A.

Пример $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $A=\{x_2, x_3, x_5\}$.

$A=\{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

Пусть $E \neq \varnothing$.

- **Определение 1**

Нечетким подмножеством $\widetilde{A}$ множества E называется множество упорядоченных пар, составленных из элементов множества E и соответствующих им значений функции $\mu(x)$:

$$\widetilde{A} = \{(x | \mu_{\widetilde{A}}(x))\} \ \forall x \in E,$$

где $\mu_{\widetilde{A}}(x) \in [0, 1]$.

$$\widetilde{A} \subset E$$

- Множество E называется универсальным (базовым);
- Функция $\mu_{\tilde{A}}(x)$ называется функцией принадлежности нечеткого подмножества $\widetilde{A}$;
- Значение функции $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для каждого конкретного $x \in E$, называется степенью принадлежности элемента x нечеткому подмножеству $\widetilde{A}$.

Если E – бесконечное, то нечеткое подмножество символически записывают в виде:

$$\widetilde{A} = \int \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x} dx$$

- **Определение 2**

Если функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \quad \forall x \in E,$$

то нечеткое подмножество $\widetilde{A}$ называется пустым.

- **Определение 3**

Носителем нечеткого подмножества $\widetilde{A}$ называется подмножество универсального множества E, для элементов которого функция принадлежности строго больше нуля.

Обозначение: $S_{\tilde{A}}$ или $supp\widetilde{A}$

$$S_{\tilde{A}} = \{x \in E: \quad \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

- **Определение 4**

Высотой нечеткого подмножества $\tilde{A}$ называется величина

$$h_{\tilde{A}} = \sup_{x \in E} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Нечеткое подмножество называется

- нормальным, если $h_{\tilde{A}} = 1$
- субнормальным, в противном случае

- **Определение 5**

Множеством идеальных элементов нечеткого подмножества $\tilde{A}$ называется множество

$$I_{\tilde{A}} = \{x \in E: \ \mu_{\tilde{A}}(x) = h_{\tilde{A}}\}$$

- **Определение 6**

Ядром нечеткого подмножества $\widetilde{A}$ называется множество

$$core\,\widetilde{A} = \{x \in E:\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Нечеткое подмножество называется унимодальным, если $\exists!\, x \in E \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, тогда x – мода $\widetilde{A}$.

- **Определение 7**

Границей нечеткого подмножества $\widetilde{A}$ называется множество

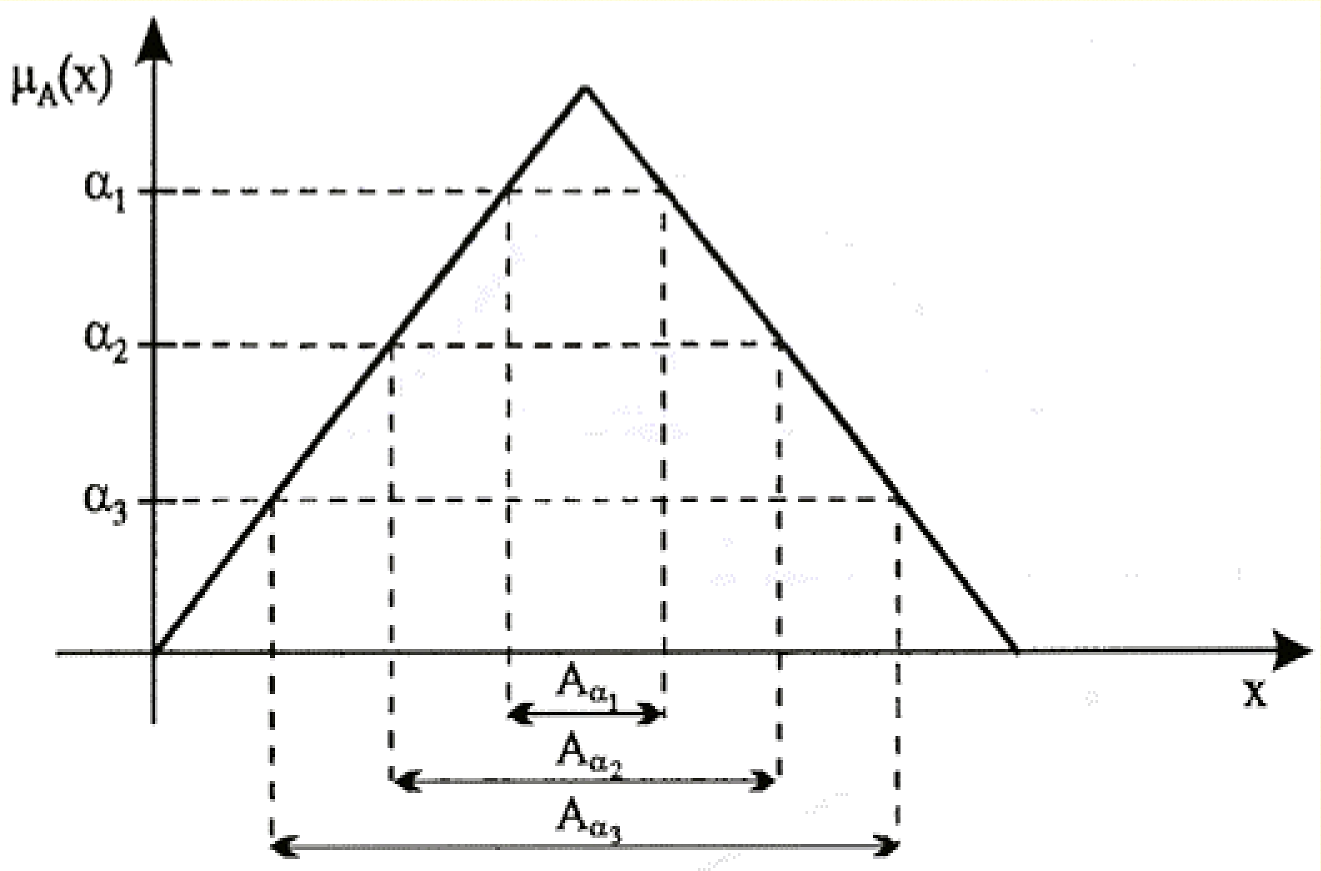
$$front\,\widetilde{A} = \{x \in E:\quad 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1\}$$

- **Определение 8**

Множеством α – уровня нечеткого подмножества $\widetilde{A}$ называется множество всех таких элементов универсального множества E, степень принадлежности которых нечеткому подмножеству $\widetilde{A}$ больше или равна α :

$$\widetilde{A}_{\alpha} = \{x \in E: \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\},$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$



$\mu_A(x)$
α_1
α_2
α_3
x
A_{α_1}
A_{α_2}
A_{α_3}

Множество α – уровня называют также сечением нечеткого подмножества $\tilde{A}$:

- при $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$ говорят о *сильном* сечении;
- при $\mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha$ говорят о *слабом* сечении.

Элементы $x \in E$, для которых $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0{,}5$ называются точками перехода нечеткого подмножества.

Разложение (декомпозиция) нечеткого подмножества по его множествам уровня:

$$\widetilde{A} = \sum_{\alpha} \alpha \widetilde{A}_{\alpha}$$

2. Логические операции

Пусть E – универсальное множество,
$\tilde{A}, \tilde{B}$ – нечеткие подмножества E.

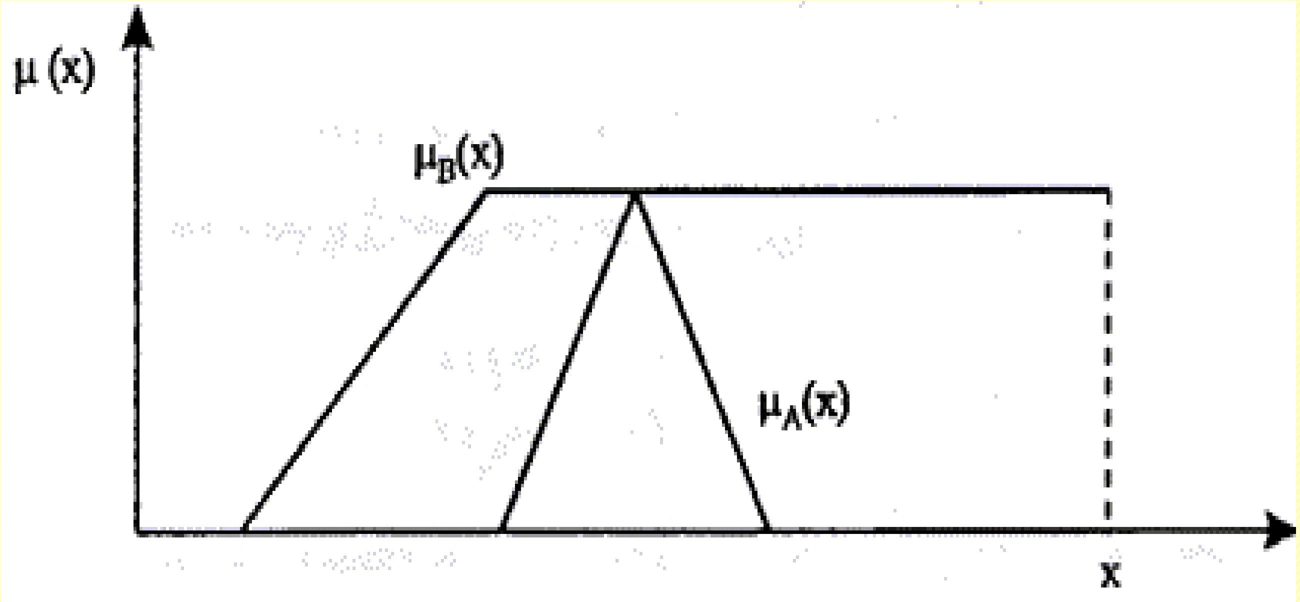
- **Определение 9**

Подмножество $\tilde{A}$ содержится в $\tilde{B}$, если

$$\boxed{\forall x \in E \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x)}$$

Обозначение: $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$.

Говорят, что $\tilde{B}$ доминирует над $\tilde{A}$.



- **Определение 10**

Два нечетких подмножества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ равны, если

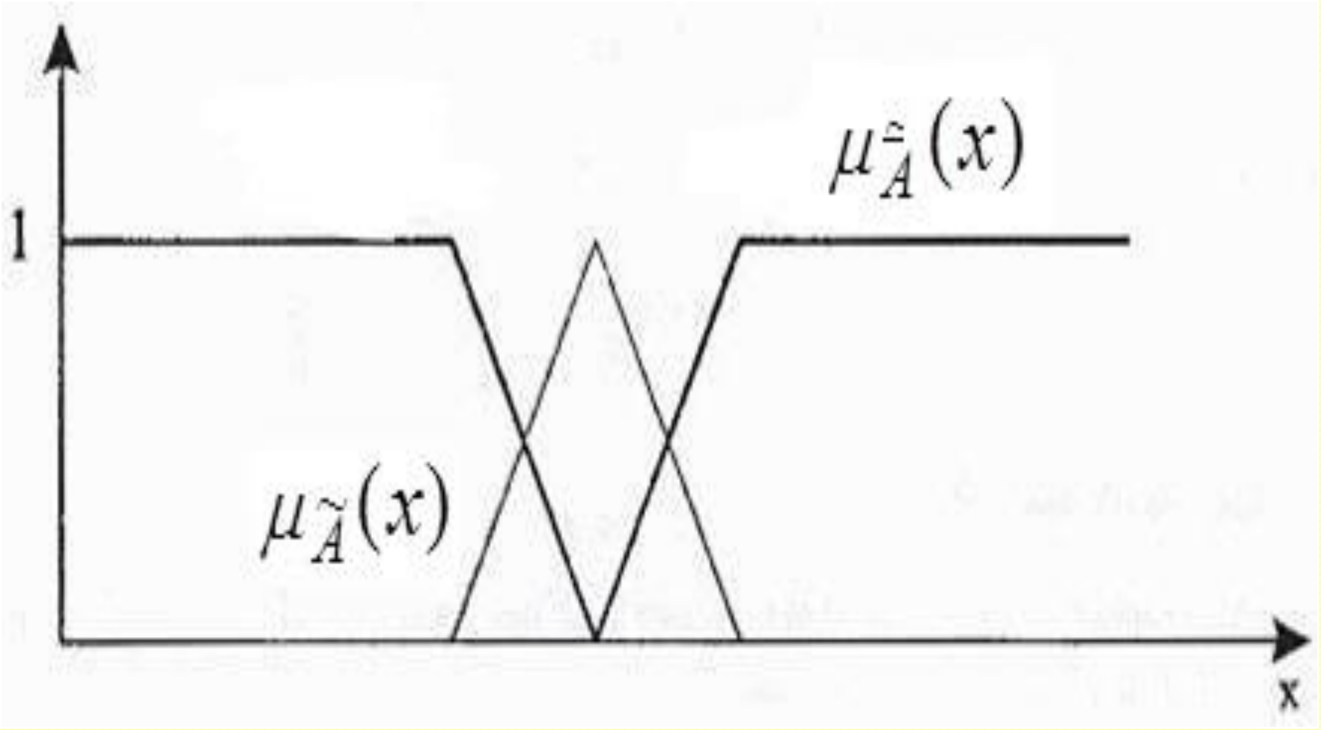
$$\forall x \in E \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Обозначение: $\tilde{A} = \tilde{B}$

- **Определение 11**

Дополнением нечеткого подмножества $\widetilde{A}$ называется нечеткое подмножество $\overline{\widetilde{A}}$ с функцией принадлежности

$$\forall x \in E \quad \mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x)$$



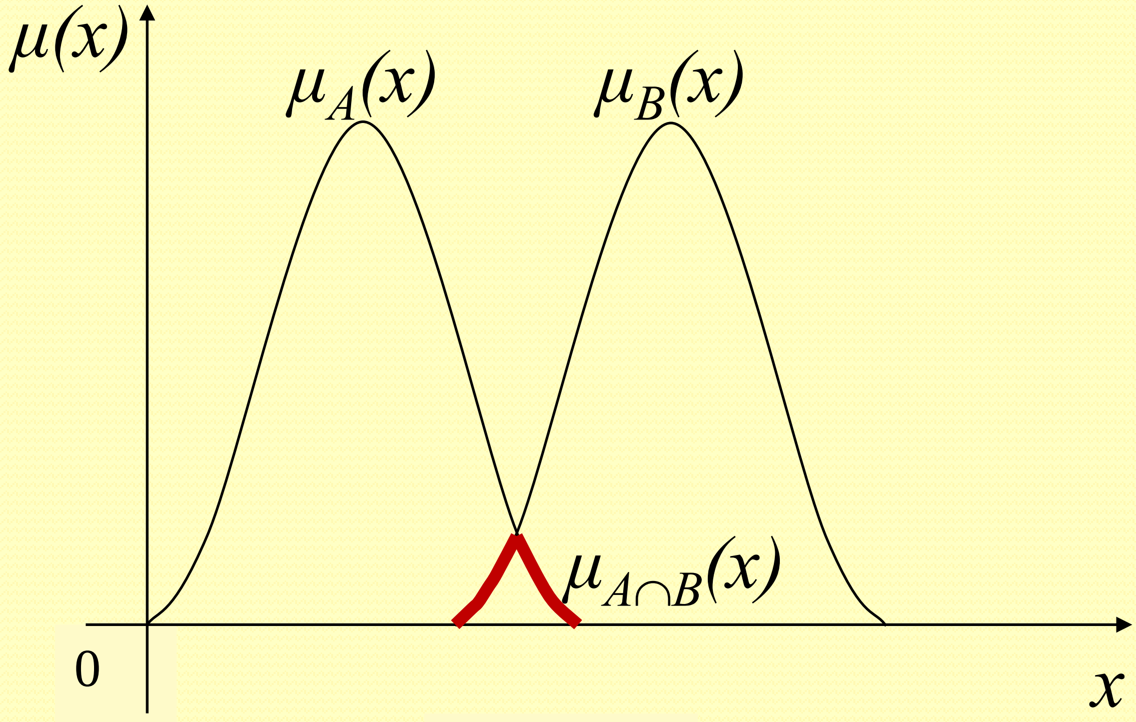
$\mu_{\tilde{\bar{A}}}(x)$
1
$\mu_{\tilde{A}}(x)$
x

- **Определение 12**

  Пересечением двух нечетких подмножеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое подмножество множества E с функцией принадлежности вида:

$$\forall x \in E \quad \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min_{x} \{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

Обозначение: $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$



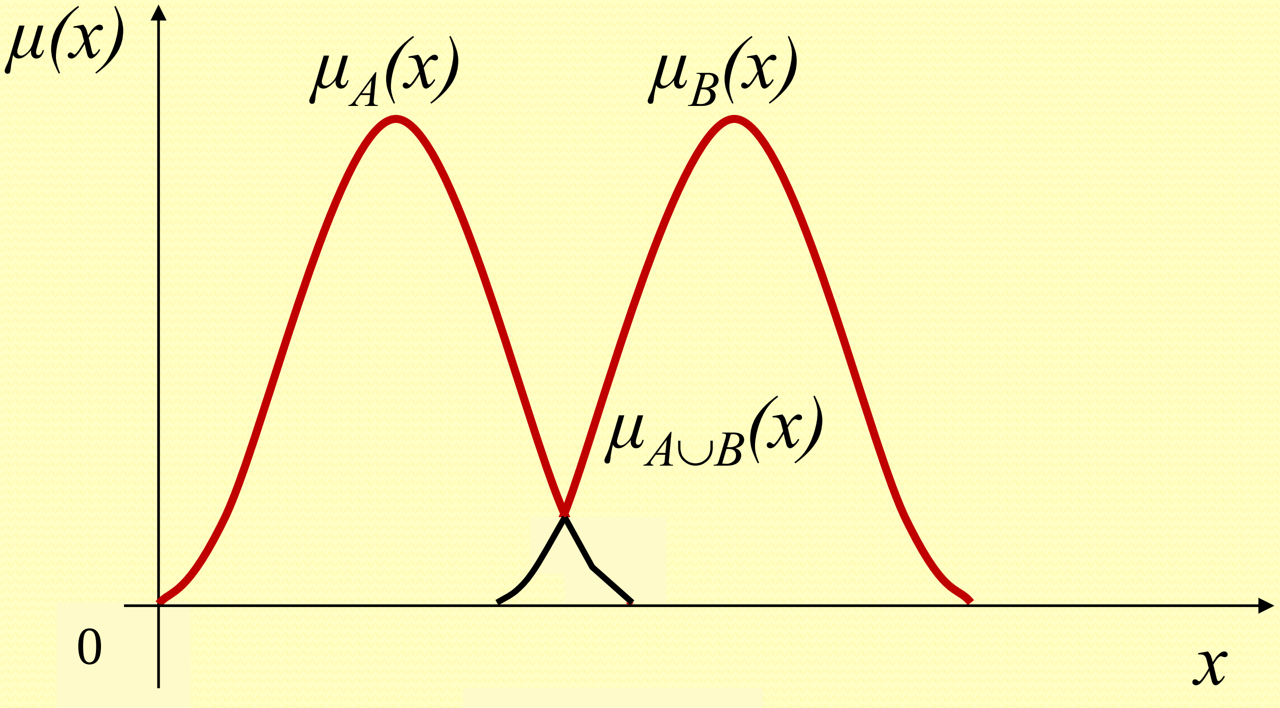
$\mu(x)$
$\mu_A(x)$
$\mu_B(x)$
$\mu_{A\cap B}(x)$
0
x

- **Определение 13**

  Объединением двух нечетких подмножеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое подмножество множества E с функцией принадлежности вида:

$$\forall x \in E \quad \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max_{x} \{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

  Обозначение: $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, $\tilde{A} \vee \tilde{B}$



$\mu(x)$
$\mu_A(x)$
$\mu_B(x)$
$\mu_{A \cup B}(x)$
0
x

- **Определение 14**

Разностью двух нечетких подмножеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется нечеткое подмножество $\widetilde{A} - \widetilde{B} = \widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{B}}$ множества E с функцией принадлежности вида:

$$\forall x \in E \ \ \mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \min_{x} \{\mu_{\tilde{A}}(x), 1-\mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

- **Определение 15**

  Дизъюнктивной суммой двух

нечетких подмножеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое подмножество

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}) \cup (\overline{\tilde{A}} \cap \tilde{B})$$

множества E с функцией принадлежности вида:

$$\forall x \in E \quad \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) =$$

$$= \max_x [\min_x \{\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \min_x \{1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}]$$

Свойства операций $\cap$, $\cup$

- коммутативность
- ассоциативность
- идемпотентность
- дистрибутивность
- инволютивность
- законы де Моргана

- $\tilde{A} \cap \varnothing = \varnothing$
- $\tilde{A} \cap E = \tilde{A}$
- $\tilde{A} \cup E = E$
- $\tilde{A} \cup \varnothing = \tilde{A}$

СР Верно ли, что:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\tilde{A}} = \varnothing$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\tilde{A}} = E$$

3. Алгебраические операции

Определение 16

Алгебраической суммой нечетких подмножеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ универсального множества E называется нечеткое подмножество $\tilde{A}+\tilde{B}$ множества E, с функцией принадлежности вида:

$$\forall x \in E \quad \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$$

Определение 17

Алгебраическим произведением нечетких подмножеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ универсального множества E называется нечеткое подмножество $\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$ множества E, с функцией принадлежности вида:

$$\forall x \in E \quad \mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x)$$

Свойства алгебраических операций

- коммутативность;
- ассоциативность;
- законы де Моргана;
- $\widetilde{A} + \varnothing = \widetilde{A}$
- $\widetilde{A} \cdot \varnothing = \varnothing$
- $\widetilde{A} + E = E$
- $\widetilde{A} \cdot E = \widetilde{A}$

СР Что верно?

1. $\tilde{A} + \tilde{A} = \tilde{A}$
2. $\tilde{A} \cdot \tilde{A} = \tilde{A}$
3. $\tilde{A} + (\tilde{B} \cdot \tilde{C}) = (\tilde{A} + \tilde{B}) \cdot (\tilde{A} + \tilde{C})$
4. $\tilde{A} \cdot (\tilde{B} + \tilde{C}) = \tilde{A} \cdot \tilde{B} + \tilde{A} \cdot \tilde{C}$
5. $\tilde{A} + \tilde{\overline{A}} = E$
6. $\tilde{A} \cdot \tilde{\overline{A}} = \varnothing$

При совместном применении логических и алгебраических операций выполняются свойства:

- дистрибутивность $\cdot$ относительно $\cup$ и относительно $\cap$
- дистрибутивность $+$ относительно $\cup$ и относительно $\cap$

Определение 18

Степенью нечеткого подмножества $\tilde{A}$ универсального множества E называется нечеткое подмножество $\tilde{A}^{\alpha}$ множества E, функция принадлежности которого имеет вид:

$$\forall x \in E \qquad \mu_{\tilde{A}^{\alpha}}(x) = \mu_{\tilde{A}}^{\alpha}(x),\ \alpha > 0$$

- При $\alpha = 2$ получаем *концентрацию* нечеткого подмножества $\widetilde{A}$:

$$CON(\widetilde{A}) = \widetilde{A}^2$$

с функцией принадлежности

$$\forall x \in E \quad \mu_{CON(\tilde{A})}(x) = (\mu_{\tilde{A}}(x))^2$$

- При $\alpha = 0{,}5$ получаем *растяжение* нечеткого подмножества $\tilde{A}$:

$$DIL(\tilde{A}) = \tilde{A}^{0{,}5}$$

с функцией принадлежности

$$\forall x \in E \quad \mu_{DIL(\tilde{A})}(x) = (\mu_{\tilde{A}}(x))^{0{,}5}$$

Определение 19

Умножением нечеткого подмножества на число $\alpha > 0$, такое, что $\forall x \in E$ $\alpha \max \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$, называется нечеткое подмножество $\alpha \tilde{A}$ с функцией принадлежности вида:

$$\forall x \in E \ \ \mu_{\alpha \tilde{A}}(x) = \alpha \mu_{\tilde{A}}(x)$$