# 10. Hafta Perşembe Dersi

29 Nisan 2021 Perşembe 10:47

## MUTLAK YAKINSAKLIK

$\sum a_n$'in mutlak değer serisi

**TANIM** Mutlak Yakınsaklık

$\sum |a_n|$ mutlak değerler serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi **mutlak olarak yakınsar** (veya **mutlak yakınsaktır**).

**Örnek.**

mutlak değer serisi $\rightarrow$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ $a=1$ $r=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ geometrik seri yakınsak

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

$\rightarrow$ mutlak yakınsak ✓

! mutlak yakınsak $\Rightarrow$ yakınsak

**Örnek.**

→ Alterne harmonik seri, yakınsaktır ama mutlak yakınsak değildir.

$(-1)^n\frac{1}{n}$ $\longrightarrow$ $\sum \frac{1}{n} \rightarrow$ ıraksak

→ **TANIM** Koşullu Yakınsaklık

Yakınsak olan, fakat mutlak yakınsak olmayan bir seri **koşullu yakınsaktır.** → kendisi yakınsak, mutlak değer serisi ıraksak

* Mutlak Değer serisi yakınsak → mutlak yakınsak
ıraksak → koşullu yakınsak. (kendisi yakınsak)

→ **TEOREM** Mutlak Yakınsaklık Testi

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsaktır.

Yakınsak ise mutlak yakınsaktır diyemeyiz.

**Örnek. (Alterne p-serisi)**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

$(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ $\xrightarrow{\text{mutlak değer serisi}}$ p serisi $\frac{1}{n^p}$ $p>1$ yakınsak, $p\leq 1$ ıraksaktır.

mutlak değer serisi yakınsak (kendisi yakınsak) — kendisi yakınsak, mutlak değer serisi ıraksak

$p>1$ ise, seri mutlak yakınsaktır. $0<p\leq 1$ ise, seri koşullu yakınsak olur.

Koşullu yakınsaklık: $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

Mutlak yakınsaklık: $1-\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}-\frac{1}{4^{3/2}}+\cdots$

örn $p<1$

$\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ($u_n$) pozitif ✓, azalan ✓, $u_n\to 0$ ✓ $\Rightarrow$ alterne seri yakınsaktır.

$p<0 \rightarrow \frac{1}{n^p}$ $\rightarrow n^3$

**Örnek.**

$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ alterne değil ama + - terimleri var

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

$0 < |\cos n| \leqslant 1$

Karşılaştırma testiyle,

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad p>1$$

böyle olan

yakınsak => mutlak değer serisi yakınsak => seri yakınsak

## KÖK VE ORAN TESTLERİ

### ORAN TESTİ

**TEOREM** **Oran Testi**

$\sum a_n$ ~~pozitif terimli~~ bir seri olsun ve

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho .$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

→ **(a)** $\rho < 1$ ise, *seri yakınsar*.

**(b)** $\rho > 1$ veya $\rho$ sonsuz ise, seri *ıraksar*.

**(c)** $\rho = 1$ ise, *test sonuçsuzdur*.

**Örnek**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)\cancel{n!}\,(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(2n+2)(2n+1)}^{4n^2}}{\underbrace{(n+1)^2}_{\to n^2}} = 4 > 1$$

$\Rightarrow$ seri ıraksaktır.

**Örnek**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(\underbrace{2(n+1)}_{2n+2})!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!\, n!}$$

$\sum_{n=1} \frac{\quad}{(2n)!}$ $\quad n\to\infty \quad a_n \quad n\to\infty \quad \frac{\quad}{(\underbrace{2(n+1)}_{2n+2})!} \cdot \frac{\quad}{4^n \cdot n! \, n!}$

$\left( \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \text{Iraksaktır.}} \right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot \cancel{4^n} \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}\, (n+1) \cdot \cancel{n!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{4^n} \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2 \to 4n^2}{(2n+2)(2n+1) \to 4n^2} = 1 \Rightarrow \text{oran testi çalışmaz!}$$

**Örnek.**

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ $\quad$ ($u_n$ azalan olmadığı alterne seri testi çalışmaz)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^3}{\cancel{3^{n+1}} \cdot 3}}_{|a_{n+1}|} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{3^n}}{n^3}}_{|1/a_n|} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{seri yakınsaktır.}$$

(mutlak yakınsaktır)

**Örnek.**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

$\Rightarrow$ seri ıraksaktır.

## KÖK TESTİ

**Örnek.**

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift} \end{cases}$$ olsun. $\sum a_n$ yakınsar mı?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \cdots.$$

Bu, kesin olarak bir geometrik seri değildir. $n \to \infty$ iken, $n$. terim sıfıra yaklaşır, dolayısıyla serinin ıraksayıp ıraksamadığını bilmiyoruz. İntegral Testi pek umut verici görünmemektedir. Oran Testi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & n \text{ tek} \\[2mm] \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

verir. $n \to \infty$ iken, oran büyük ile küçük değerler arasında değişir ve bir limiti yoktur. Soruya yanıt verecek (seri yakınsar) bir test Kök Testidir. ■

**TEOREM 13 Kök Testi**

$\sum a_n$, $n \ge N$ için, ~~$a_n \ge 0$ olacak şekilde~~ bir seri olsun ve

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

**(a)** $\rho < 1$ ise, seri *yakınsar*.
**(b)** $\rho > 1$ veya $\rho$ sonsuz ise, seri *ıraksar*.
**(c)** $\rho = 1$ ise, test *sonuçsuz*dur.

Üstteki örneğe kök testini uygularsak;

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ tek} \\ 1/2, & n \text{ çift} \end{cases}$$

Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2} \le \sqrt[n]{a_n} \le \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu görmüştük.

Sandviç teoreminden $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ olur.

$\rho < 1$ bulduğumuzdan, seri kök testine göre yakınsaktır.

**Örnekler.**

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ yakınsar, çünkü $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1.$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ ıraksar çünkü $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to \frac{2}{1} > 1.$

**(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ yakınsar, çünkü $\displaystyle\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \frac{1}{1+n} \to 0 < 1.$

**Örnek.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}.$$