13. Hafta Perşembe Dersi

20 Mayıs 2021 Perşembe 11:27

Taylor - MacLaurin Serilerinin Uygulamaları

TEOREM 22 **Taylor Teoremi**

f fonksiyonu ve $f', f'', \dots, f^{(n)}$ türevleri $[a, b]$ veya $[b, a]$ aralıklarında sürekli iseler ve $f^{(n)}$ (a, b) veya (b, a) aralığında türetilebiliyorsa, a ile b arasında

$$\underset{f(x)}{f(b)} = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \underline{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir c sayısı vardır.

Taylor teoremini uygularken, genellikle a'yı sabit tutup, b'ye ($\to x$) bağımsız bir değişken gibi bakmak isteriz. Bu gibi durumlarda, b yerine x yazarsak, Taylor teoremini uygulamak kolaylaşır. Bu değişiklikle teorem şu şekli alır:

Taylor Formülü

a'yı içeren bir I aralığında f'nin her mertebeden türevi varsa, her pozitif n tamsayısı ve I'daki her x için,

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{n. mertebeden Taylor Polinomu}} + R_n(x), \qquad (1)$$

dir. Burada

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (c,\ a \text{ ile } b \text{ arasında bir sayı}) \qquad (2)$$

dir.

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{R_n(x)}_{\text{hata terimi (kalan)}} \quad R_n(x) \to 0$$

$\forall x \in I$ için, $R_n(x) \to 0 \Rightarrow P_n(x) \to f(x)$

(1) denklemine **Taylor formülü** denir. $R_n(x)$ fonksiyonuna **n. mertebeden kalan** veya f'nin I aralığındaki $P_n(x)$ yaklaşımının **hata terimi** denir. Aralıktaki her x için, $n \to \infty$ iken, $R_n(x) \to 0$ ise, f'nin x = a'da ürettiği Taylor serisinin I aralığı üzerinde f'ye **yakınsadığını** söyleriz. Ve;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

yazabiliriz.

TEOREM 23 **Kalanı Tahmin Teoremi**

x ve a arasındaki her t için $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ olacak şekilde pozitif bir M sabiti varsa, Taylor teoremindeki kalan terim $R_n(x)$

$$|R_n(x)| \le M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu koşullar her n için geçerliyse ve f Taylor teoreminin diğer koşullarını sağlıyorsa, seri $f(x)$'e yakınsar.

En iyi bilinen Bazı Fonksiyonlar İçin MacLaurin Serileri (a=0 merkez)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad |x|<1 \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad |x|<1 \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1 \qquad |x|<1 \quad \checkmark \quad |x^2|<1$$

Binom Serisi

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{k}{n}}_{c_n} x^n = 1 + kx + \underbrace{\frac{k(k-1)}{2!}}_{c_2} x^2 + \underbrace{\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}}_{c_3} x^3 + \cdots \qquad R = 1 \qquad |x|<1$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad R = \infty$$

Örn $\sqrt[3]{1.2}$ için 2. mertebeden Taylor Polinomu kullanarak yaklaşık değer bulunuz.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $a=1$ civarında bakacağız. $\qquad$ $f(x) \approx P_2(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad c_0 = \frac{f(a)}{0!} = \frac{f(1)}{0!} = \frac{\sqrt[3]{1}}{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad c_1 = \frac{f'(a)}{1!} = \frac{f'(1)}{1!} = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} \cdot x^{-2/3}$

$-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x^{-5/3}$

$$f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}} \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} = \frac{f''(1)}{2!} = \frac{-2}{9 \cdot 2!} = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + -\frac{1}{9} \cdot (x-1)^2 \qquad f(x) \approx P_2(x)$$

$$f(1.2) \Rightarrow P_2(1.2) = 1 + \frac{1}{3}(1.2-1) - \frac{1}{9}(1.2-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.2 - \frac{1}{9} \cdot 0.04 = 1.062$$

Limit Bulma Uygulaması

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{\sin x}{6x} \to \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

Örn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ limitini MacLaurin serisi kullanarak bulunuz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{} + \frac{x^5}{} - x^7$$

$x \to 0 \qquad x^3$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!}\xrightarrow{}0 + \frac{x^4}{7!}\xrightarrow{}0 \cdots\right)}{\cancel{x^3}} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Ör/

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right) - \left(\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots\right)}{x^3}$$

$$-\frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3} = \frac{-3x^3}{6} = -\frac{x^3}{2}$$

$$\frac{x^5}{5!} - \frac{2x^5}{15} = \frac{-15x^5}{5!}$$

5.4.3.2.1 $\quad$ 3.5 (4.2)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} - \frac{15x^5}{5!} - \cdots}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{15x^2}{5!}\xrightarrow{}0 - \cdots\right)}{\cancel{x^3}} = -\frac{1}{2}$$

Ör/

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x} - 1)\cdot \ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = ?$$

Mac L.

$\frac{x^n}{n!}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \Rightarrow \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{(x^3)^2}{2} + \frac{(x^3)^3}{3} - \frac{(x^3)^4}{4} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \Rightarrow \cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\cdot \ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots\right)\left(x^3 - \frac{(x^3)^2}{2} + \frac{(x^3)^3}{3} - \frac{(x^3)^4}{4} + \cdots\right)}{\left(\frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^4}{4!} + \frac{(3x)^6}{6!} \cdots\right)^2}$$

$x \to 0 \quad (1-\cos(3x))$ $\quad x \to 0$

$$\left(\frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^4}{4!} + \frac{(3x)^6}{6!} - \dots \right)$$

$- \cancel{2}x \cdot \frac{x^6}{\cancel{2}} - x^7$

$2x \quad \frac{x^9}{3} \quad \frac{2}{3} x^{10}$

$\frac{(2x)^2}{2!} \cdot x^3 = \frac{4x^2 \cdot x^3}{2!} = 2x^5$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^4} \left(2 - \cancel{x^3} + \frac{2}{3}\cancel{x^6} + \dots + \cancel{2x} + \dots \right)}{\cancel{x^4} \left(\frac{9^2}{2!^2} - \cancel{\frac{9x^8}{4!}} - 2 \cdot \cancel{\frac{9 \cdot 9 \cdot x^6}{2! \cdot 4!}} - \dots \right)^2} = \frac{2}{\frac{9^2}{4}} = \frac{8}{81}$$