8. Hafta Salı Dersi - Diziler

13 Nisan 2021 Salı 11:15

11 Sonsuz Diziler ve Seriler -1

Mat 116
13 Nisan 2021 Salı
Dr. Sümeyra BEDİR

#11 SONSUZ DİZİLER VE SERİLER

#11.1 DİZİLER

Örnek 1. Genel Terim $\boxed{n \geq 1}$

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; \ldots$

(a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \boxed{a_n = \frac{n}{n+1}}$ $\quad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\quad a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\quad \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \ldots, \cancel{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}}, \ldots\right\}$

(c) $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3}, \; n \geq 3$ $\quad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\}$

(d) $\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad a_n = \cos\frac{n\pi}{6}, \; n \geq 0$ $\quad \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\frac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

Örnek 2. $n \geq 1$

$n=1 \quad n=2$

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}$$

$a_1 \quad a_2$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{5^n}$$

$$a_1 = \frac{3}{5} \quad a_2 = -\frac{4}{25} \quad a_3 = \frac{5}{125} \quad a_4 = -\frac{6}{625} \quad a_5 = \frac{7}{3125}$$

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

Bir dizinin birden fazla genel terimi olabilir.

Örnek 3. Rekürsif Diziler (Yinelemeli Diziler) Recursion

$f_1 = 1$, $f_2 = 1$ $\quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$

Örn

$n=1 \quad n=2 \quad n=3 \quad n=4$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$$\left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \ldots\right\}$$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$n=0 \quad n=1 \quad n=2 \quad n=3$

dizinin genel terimini bulunuz.

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \quad n \geq 1}$$

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{3^{n+1}}, \quad n \geq 0}$$

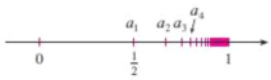
* Diziler farklı genel terimlerle ifade edilebilir.

Mat 116
13 Nisan 2021 Salı
Dr. Sümeyra BEDİR

DİZİLERDE LİMİT $= \lim_{n\to\infty} a_n$

Örnek

$\underbrace{a_n = n/(n+1),}_{\text{genel terim.}}$

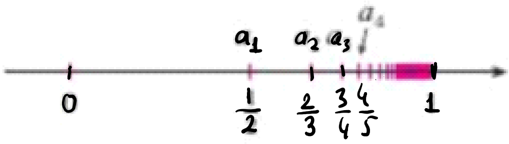


$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Genel olarak,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$



! Limit varsa Yakınsak Dizi, limit yoksa Iraksak Dizi

Örn

$a_n = 1$ $\{1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Yakınsak diziler için;

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \checkmark$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \checkmark$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \checkmark \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} c = c}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \checkmark$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{if } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \checkmark$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{if } \underline{p > 0} \text{ and } \underline{a_n > 0} \checkmark$$

Mat 116
13 Nisan 2021 Salı
Dr. Sümeyra BEDİR

$\boxed{n \to \infty \quad \frac{1}{n} \to 0}$

* Sonsuzda Limitler

Örnek 4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \cancel{\frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

$\lim_{n\to\infty}$

Rasyonel Fonksiyonların Sonsuzda Limitleri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} \begin{cases} \deg p(n) > \deg q(n) \Rightarrow \infty \\ \deg p(n) < \deg q(n) \Rightarrow 0 \\ \deg p(n) = \deg q(n) \Rightarrow \dfrac{p(n)\text{'in başkatsayısı}}{q(n)\text{'in başkatsayısı}} \end{cases}$$

$n \to \infty \quad \frac{1}{n} \to 0$

Örnek 5.

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{10+n}}$$

$n \longrightarrow \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{n^2}+\frac{1}{n}}} = \infty$$

pay ve payda n'e bölündü

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{10+n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{10+n}{n^2}}} = \infty, \quad \frac{10+n}{n^2} \to 0$$

Iraksak...

Örnek 6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \quad \begin{matrix}\to\infty \\ \to\infty\end{matrix}$$

∞/∞ L' Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Örnek 7.

$a_n = (-1)^n$: $\quad a_n = (-1)^n$

$\to \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$

Limiti yok... DNE

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0, \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.}$$

Örnek 8.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow$$

> **TEOREM** **Diziler İçin Sürekli Fonksiyon Teoremi**
> $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. $a_n \to L$ ve f fonksiyonu L'de sürekli ve bütün a_n'lerde tanımlı ise, $f(a_n) \to f(L)$ olur.

$\ln x$

$\lim \ln = \ln (\lim$

Örnek 9. $f(x) = \sin(x)$

$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi/n)$. $\quad a_n = \sin(\pi/n)$

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi/n) = \sin\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} (\pi/n)}_{0}\Big) = \sin 0 = 0$$

> **TEOREM** **Diziler İçin Sandviç Teoremi**
> $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ reel sayı dizileri olsunlar. Belirli bir N indisinden büyük her n için $a_n \le b_n \le c_n$ geçerliyse ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ise, bu durumda $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ olur.

$$\begin{array}{cccccc} & a_n & \leq & b_n & \leq & c_n \\ \lim & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & L & & L & & L \end{array}$$

Örnek 10.

$a_n = n!/n^n$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3.\dots.n}{n.n.n.\dots.n} = \frac{1}{n}\left(\frac{\overbrace{2.3.\dots.n-1.\cancel{n}}^{\text{basit kesir}}}{\underbrace{n.n.\dots.n.\cancel{n}}}\right)$$

$b_n = 0$ $\qquad$ $b_n = \frac{1}{n}$

$$0 < a_n < \frac{1}{n}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Mat 116
13 Nisan 2021 Salı
Dr. Sümeyra BEDİR

$a_1 = 1$ $\qquad$ $a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$ $\qquad$ $a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}$$

Sandwich thm $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}\right)$$

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

$a_n \to 0$

Monoton Diziler

$n \to \infty$ $\qquad$ a_n $\qquad$ $a_n = (-1)^n$

! Terim sayısı artınca terimler de artıyorsa Artan Dizi, Terim sayısı artınca terimler azalıyorsa Azalan Dizi denir. Bir dizi artan veya azalan ise Monoton Dizi denir.

Örnek 10.

$\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$ $\qquad$ n. terim $\frac{3}{n+5}$ $\qquad$ $(n+1)$. terim $\frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

n. terim > $(n+1)$. terim

$\Rightarrow$ Azalan dizi...

Mat 116
13 Nisan 2021 Salı
Dr. Sümeyra BEDİR

Örnek 11.

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \overset{?}{<} \frac{n}{n^2+1} \iff (n+1)(n^2+1) \overset{?}{<} n[(n+1)^2+1]$$
$$\iff n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n$$
$$\iff 1 < n^2+n$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \checkmark$$

Azalan dizi...

n.terim: $\dfrac{n}{n^2+1}$ $\quad ((n+1)^2+1)$

(n+1).terim: $\dfrac{n+1}{(n+1)^2+1}$ $\quad (n^2+1)$

payı $= n((n+1)^2+1)$
$n(n^2+2n+2)$
$\cancel{n^3}+2n^2+2n$
n^2+n

payı: $(n+1)(n^2+1)$
$\cancel{n^3}+n^2+n+1$

$n^2+n > 1$

Türev yardımıyla da fonksiyon gibi düşünerek artan/azalan durumuna bakabiliriz;

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}; \quad x \geq 1$$

f türevlenebilir ise;
$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ artan
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ azalan

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$$

Azalan fonksiyon... azalan dizi... ✓

SINIRLI DİZİ

> **TANIMLAR** Sınırlı, Üst Sınır, En Küçük Üst Sınır
>
> Her n için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlıdır. M sayısı $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır. M sayısı $\{a_n\}$ 'nin bir üst sınırı ise ve M'den daha küçük bir sayı $\{a_n\}$ için bir üst sınır olamıyorsa M sayısı $\{a_n\}$'nin en küçük üst sınırıdır.

$a_n \leq M \rightarrow$ üst sınır
M'den küçük bir sayı üst sınır olamıyorsa
$\rightarrow$ EKÜS $\leftarrow$

Alt sınır, En Büyük Alt Sınır...

$a_n \geq N \rightarrow$ alt sınır
N'den büyük bir sayı alt sınır olamıyorsa
$\rightarrow$ EBAS $\leftarrow$

Alttan sınırlı + Üstten Sınırlı = Sınırlı

Örnek.

$a_n = n$ $\{1, 2, 3, \ldots\}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$a_n = n$

$a_n \geqslant 1 \rightarrow$ altsınır

(n>=1) Alttan sınırlı... (1 ile) üstten sınırlı değil...

$a_n = n/(n+1)$, $a_n = \frac{n}{n+1}$ $n \geqslant 1$ $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \right\}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$0 < a_n < 1$

$a_n \geqslant \frac{1}{2} \rightarrow$ alt sınır $a_n < 1 \rightarrow$ üst sınır

(~~n>=0~~) Allttan ve üstten sınırlı... $\Rightarrow$ sınırlı dizi

Dikkat! Her sınırlı dizi için yakınsaktır diyemeyiz.

$a_n = (-1)^n$ $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ $\Rightarrow$ sınırlı

$a_n = (-1)^n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = DNE$ altsınır $= -1$ üst sınır $= 1$

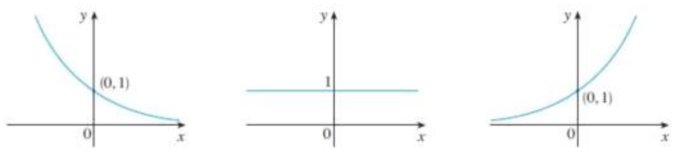
Sınırlıdır ama yakınsak değildir.

Dikkat! Her monoton dizi için yakınsaktır diyemeyiz.

$a_n = n$

Monoton artan dizidir ama yakınsak değildir.

Dikkat! Bir dizi hem sınırlı hem de monoton ise YAKINSAK'tır.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

Ör. $a_n = 5^n \rightarrow$ artan dizi

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow$ azalan dizi