$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = ?$ $\quad a=1 \quad r=x$

geometrik seri

$|x|<1 \rightarrow$ yakınsak $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$

#11.9 FONKSİYONLARIN KUVVET SERİLERİ İLE TEMSİL EDİLMESİ

$f(x) \rightarrow f(-x^2)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Fonksiyon — Fonksiyonun kuvvet serisi — yakınsaklık aralığında geçerli! — fonksiyonun tanım kümesi

fonk.	kuvvet serisi temsili	Tanım aralığı
$\frac{1}{1-x}$	$\sum x^n$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum (-x^2)^n$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1-(-x-1)} = \frac{1}{2+x}$	$\sum (-x-1)^n$	$-2<x<0$
$x \to -\frac{x}{2}$: $\frac{1}{2+x}$	$\sum \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$	$-2<x<2$

Örnek.

$1/(1+x^2)$ fonksiyonunun kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Yukarıdan bildiğimiz fonksiyonda, x yerine $-x^2$ yazarsak;

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \qquad |-x^2| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

$a = 1$ $r = -x^2$ olan geometrik seri...

$x=-1$: $\sum (-1)^n$ $\qquad$ $x=1$: $\sum (-1)^n$ $\qquad$ ıraksak

$|-x^2| < 1$ iken yakınsak => $|x| < 1$ iken yakınsak.

$x = -1$ $veya$ 1 iken ıraksak olduğu açık. Dolayısıyla yakınsaklık aralığı $-1 < x < 1$ şeklindedir.

Örnek.

$1/(2+x)$ fonksiyonunun kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz. ($1/(1-r)$ formuna getirmeye çalışıyoruz.)

$\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$

$x \rightarrow -\frac{x}{2}$ $\qquad$ $|x|<1$ $\qquad$ $\left|-\frac{x}{2}\right|<1 \rightarrow -2<x<2$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

$a = 1, r = -x/2$ olan geometrik seri

$|-x/2| < 1$ iken yakınsak => $|x| < 2$ iken yakınsak.

$= -2$ $veya$ 2 iken ıraksak olduğu açık. Dolayısıyla yakınsaklık aralığı $-2 < x < 2$ şeklindedir.

KUVVET SERİLERİNİN TÜREV VE İNTEGRALLERİ

TEOREM

$\sum c_n(x-a)^n$ serisi bir $R > 0$ için, $a - R < x < a + R$ aralığında yakınsak ise bir f fonksiyonu tanımlar:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \qquad a - R < x < a + R.$$

Böyle bir f fonksiyonunun yakınsaklık aralığı içinde her mertebeden türevi vardır. Türevleri, esas seriyi terim-terime türeterek elde edebiliriz:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n, \qquad a - R < x < a + R.$$

Böyle bir f fonksiyonunun yakınsaklık aralığı içinde her mertebeden türevi vardır. Türevleri, esas seriyi terim-terime türeterek elde edebiliriz:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)c_n(x - a)^{n-2}$$

vs. Türev alarak elde edilmiş her seri, esas serinin yakınsaklık aralığının her iç noktasında yakınsaktır.

Örnek.

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \qquad -1 < x < 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1 - x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n - 1)x^{n-2} + \cdots$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)x^{n-2}, \qquad -1 < x < 1$$

TEOREM

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

fonksiyonunun $a - R < x < a + R$ $(R > 0)$ aralığında yakınsak olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$$

de $a - R < x < a + R$ aralığında yakınsak olur ve $a - R < x < a + R$ için

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} + C$$

olur.

Örnek.

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad -1 \le x \le 1$$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

$r = -x^2$ olan geometrik seri

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$

$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) \rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Artık $f'(x) = 1/(1+x^2)$'yi integre ederek

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$$ bulabiliriz.

fonk $f(x)=\arctan x$ kuvvet $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$ $-1<x<1$

$x = 0$ iken, $f(x)$ serisi sıfırdır, bu yüzden $C = 0$ olur. Böylece

$$\boxed{f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1} x,} \qquad -1 < x < 1$$

Örnek.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad |x| < 1$$

$\frac{1}{1-x}$ $\sum x^n$ $|x|<1$

$x \to -x$

$\int \frac{1}{1+x}\,dx$ $\sum (-x)^n$ $|x|<1$

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)$

$u = 1+x$
$du = dx$

$x = 0$ için $ln(1+0) = C$ olacağından $C = 0$ olur.

$\ln 1 = 0$

$\ln(1+x)$ $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $|x|<1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

$x \to x-1$ $1+x-1$

$\ln(x)$ $\sum (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ $|x-1|<1$

Yine uçnoktalar ayrıca değerlendirilmelidir.

KUVVET SERİLERİNİN ÇARPIM VE BÖLÜMLERİ

TEOREM **Kuvvet Serileri İçin Seri Çarpım Teoremi**

$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri $|x| < R$ için mutlak yakınsak ise ve

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serisi $|x| < R$ için mutlak yakınsaktır ve $A(x)B(x)$'e yakınsar:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Örnek.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1 \text{ için}$$

geometrik serisini kendisiyle çarparak, $|x| < 1$ için, $1/(1-x)^2$'nin kuvvet serisini bulun.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

$a_n = 1$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

ve

$(n+1)x^n$

$$c_n = \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0}_{n+1 \text{ terim}}$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ tane bir}} = n + 1$$

$\frac{1}{(1-x)^2}$ $\sum (n+1)x^n$

olsun. Bu durumda, Serilerin Çarpımı Teoremine göre,

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

$1/(1-x)^2$'nin serisidir. Seri $|x| < 1$ için mutlak yakınsaktır.

#11.10 TAYLOR VE MACLAURIN SERİLERİ

Hangi fonksiyonların kuvvet serisi vardır?

Bu serileri nasıl bulabiliriz?

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ $|x-a| < R$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

$f(a) = c_0 + 0 + 0 + 0 + 0$

$x = a$ için $f(a) = c_0$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

$f'(a) = c_1 + 0 + 0 + \cdots$

$x = a$ için $f'(a) = c_1$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

$f''(a) = 2c_2 + 0 + 0 + 0 \cdots$

$x = a$ için $f''(a) = 2c_2$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

$x = a$ için $f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!\, c_3$

....

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!\, c_n$$

$f(a) = c_0$

$f'(a) = c_1$

$f''(a) = 2c_2$

$f'''(a) = 2.3.c_3$

$f^{(4)}(a) = 2.3.4\, c_4$

$\vdots$

$f^{(n)}(a) = n!\, c_n$

$\Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

f'in $x = a$ civarında bir seri temsili varsa

f'in $x = a$ civarında bir seri temsili varsa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(a)}_{c_0} + \underbrace{\frac{f'(a)}{1!}}_{c_1}(x-a) + \underbrace{\frac{f''(a)}{2!}}_{c_2}(x-a)^2 + \underbrace{\frac{f'''(a)}{3!}}_{c_3}(x-a)^3 + \cdots$$

TANIMLAR **Taylor Serileri , Maclaurin Serileri**

f, a'yı bir iç nokta olarak içeren bir aralıkta her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. f **tarafından** $x = a$**'da üretilen Taylor serisi**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

olarak tanımlanır. f **tarafından üretilen Maclaurin serisi** ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ile verilir, yani f'nin $x = 0$'da ürettiği Taylor serisidir.

$x=a$ civarında f tarafından üretilen Taylor Serisi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$a=0 \Rightarrow$ MacLaurin serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Örnek.

$f(x) = 1/x$ fonksiyonunun $a = 2$'de ürettiği Taylor serisini bulun. Eğer yakınsak ise seri nerede $1/x$'e yakınsar?

$$c_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!}$$

$f(x) = x^{-1}$, $\quad f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, $\quad \Rightarrow c_0 = \frac{f(2)}{1} = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -x^{-2}$, $\quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}$, $\quad \Rightarrow c_1 = \frac{f'(2)}{1!} = -\frac{1}{4}$

$f''(x) = 2!x^{-3}$, $2 \cdot x^{-3}$ $\quad \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, $\quad \Rightarrow c_2$

$f'''(x) = -3!x^{-4}$, $\quad \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{2^4}$ $\quad \Rightarrow c_3$

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}$$

$\vdots \qquad \vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$, $\quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n}$$

$a = \frac{1}{2}$

$r = \frac{(-1)(x-2)}{2}$

$f(x) = \frac{1}{x}$'in $a=2$ civarında ürettiği Taylor Serisi

$a = 1/2, r = -(x-2)/2$ olan geometrik seri

$|x-2| < 2$ için mutlak yakınsaktır. Değeri de;

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2$$

$a = 1/2, r = -(x-2)/2$ olan geometrik seri

$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2$

$|x-2| < 2$ için mutlak yakınsaktır. Değeri de;

$$\frac{1/2}{1+(x-2)/2} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{x}$$

$f(x) = 1/x$'in $a = 2$'de ürettiği Taylor serisi, $0 < x < 4$ için $1/x$'e yakınsar.

Bu aralıkta bu fonksiyona eşit olur.

Örnek.

$f(x) = e^x$'in $a = 0$'da ürettiği Tayor serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz. ($f(x) = e^x$'in Maclaurin serisini bulunuz).

$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$c_n = \frac{1}{n!}$

$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$
$f''(x) = e^x$

$c_0 = 1$
$c_1 = \frac{1}{1!}$
$c_2 = \frac{1}{2!}$

$f(x) = e^x, f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Yakınsaklık aralığı için; oran testiyle

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\cancel{x^{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{x^n}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R = \infty$$

Her x için seri yakınsaktır ve yakınsaklık yarıçapı $R = \infty$'dur.

TANIM **n. Mertebe Taylor Polinomu**

f, a'yı iç nokta olarak içeren bir aralıkta k. mertebeden, $k = 1, 2, \ldots, N$, türevleri var olan bir fonksiyon olsun. 0'dan N'ye kadar olan herhangi bir n tam sayısı için f'nin $x = a$'da ürettiği **n. mertebe Taylor polinomu**

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ile verilir.

Ör/ $f(x) = e^x$ $x=0$'daki n. mertebe Taylor polinomu

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

4. mertebe Taylor Polinomu: $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

Ör/ $f(x) = \frac{1}{x}$ $x = 2$ civarındaki 3. mertebe Taylor polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$$

$$P_3(x) = \underset{n=0}{\frac{1}{2}} - \underset{n=1}{\frac{x-2}{4}} + \underset{n=2}{\frac{(x-2)^2}{8}} - \underset{n=3}{\frac{(x-2)^3}{16}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \qquad P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-3)^3}{16}$$

Ör/ $f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun $\overset{a=0}{\wedge}$ MacLaurin serisini ve Taylor polinomlarını bulalım.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f(x) = \cos(x) \qquad f(0) = \cos(0) = 1$$

$$\to f'(x) = -\sin(x) \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) \qquad f''(0) = -1$$

$$\to f'''(x) = \sin(x) \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x) \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

$$\to \boxed{f^{(2n+1)}(0) = 0}$$

$$\to f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad c_{2n+1} = 0 \qquad c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$f(x) = \underset{c_0 x^0}{f(0)} + \underset{c_1 x^1}{0} + \underset{c_2 x^2}{-\frac{1}{2!}x^2} + \underset{c_3 x^3}{0} + \underset{c_4 x^4}{\frac{1}{4!}x^4} + 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n} = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \to$$

$f(x) = \cos(x)$'in $x=0$ civarında Taylor serisi

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$\to$ (2n). mertebeden Taylor polinomu

$$= P_{2n+1}(x)$$