Parametrik Denklemler

$$y = f(x) \quad \nearrow x \quad \searrow y$$

Eğrinin Parametrizasyonu

t: parametre $t \in I = [a,b]$

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

$$\left(\underset{f(a)}{x}, \underset{g(a)}{y} \right) \xrightarrow{\;t=a\;} \text{Başlangıç Noktası}$$

$$\left(f(b), g(b) \right) \longrightarrow \underset{\text{Bitiş Noktası}}{t=b}$$

Kartezyen Koordinatlar   parametrik değerler

Örn.

$$\begin{cases} x = t^2 \to t = \sqrt{x} \\ y = t + 1 \to t = y-1 \end{cases}$$

şeklinde parametrize edilmiş eğrinin kartezyen denklemini bulalım ve eğriyi çizelim.

$$\boxed{-\infty < t < \infty}$$

$$-\infty \quad -1, 0, 1, \quad \infty$$

$$\sqrt{x} = y - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt{x} + 1}$$

$t = -1$;
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} (1,0)$$

$t = 0$;
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} (0,1)$$

$t = 1$;
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} (1,2)$$

$t \to \infty$
$$\begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases} \text{1.bölge}$$

$t \to -\infty$;
$$\begin{cases} x \to \infty \\ y \to -\infty \end{cases} \text{4.bölge}$$

Örn.

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

şeklinde parametrize edilmiş eğrinin kartezyen denklemini bulalım ve eğriyi çizelim. $y = f(x)$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos t \\ \dfrac{y}{2} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$$

$$\to \boxed{x^2 + y^2 = 4}$$

$(0,0)$ merkezli
$r = 2$ yarıçaplı
Çemberin denklemi

$\bigstar$ (a,b) merkezli r yarıçaplı çember denklemi : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$x = 2\cos t$
$y = 2\sin t$
$0 \le t \le 2\pi$

t	x	y	
0	$2\cos 0 = 2$	$2\sin 0 = 0$	$\to (2,0)$
$\dfrac{\pi}{2}$	$2\cdot\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$	$2\sin\dfrac{\pi}{2} = 2$	$\to (0,2)$
π	$2\cos\pi = -2$	$2\sin\pi = 0$	$\to (-2,0)$
$\dfrac{3\pi}{2}$	0	-2	
2π	$2\cos 2\pi = 2$	$2\sin 2\pi = 0$	
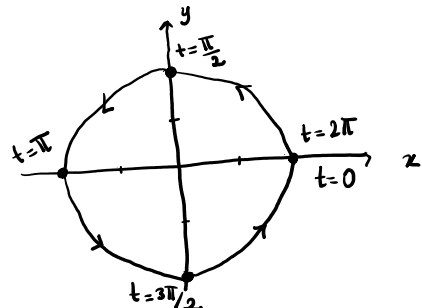
Örn:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t_2 \rightarrow t = \dfrac{1-x}{2} \\ y = t/2 - 1 \rightarrow t = 2y+2 \end{cases}$$ şeklinde parametrize edilmiş eğrinin kartezyen denklemini bulalım ve eğriyi çizelim.

$$-2 \leq t \leq 4$$

$$2y + 2 = \frac{1-x}{2}$$

$$4y + 4 = 1 - x$$

$$0 = t/2 - 1 \qquad 0 = 1 - 2t \qquad y = \frac{-x-3}{4} \rightarrow$$

$$1 = t/2 \qquad t = \frac{1}{2} \rightarrow x$$

$$\boxed{t = 2}$$

t	x	y
-2	5	-2
0	1	-1
4	-7	1
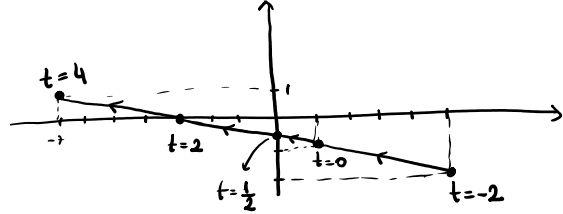
Parametrik Eğrilerde Türev

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \boxed{\frac{g'(t)}{f'(t)}}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{dy'/dt}{f'(t)} \qquad \boxed{y^{(n)} = \frac{y^{(n-1)}}{f'(t)}}$$

Örn:

$$\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t \\ \boxed{-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}} \end{cases}$$ eğrisinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktasındaki teğet denklemi yazalım.

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \quad y = 1 \\ t = ? \end{cases} \begin{cases} \sec t = \sqrt{2} \\ \tan t = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{t = \pi/4}$$

Eğim:

$t = \pi/4$ noktasındaki türev;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \cdot \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \qquad t = \pi/4 \ ; \qquad \frac{\sec \pi/4}{\tan \pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$(\sqrt{2}, 1)$ noktasından geçen ve eğimi $\sqrt{2}$ olan doğru denklemi;

$$\frac{y-1}{x - \sqrt{2}} = \sqrt{2} \implies x\sqrt{2} - 2 = y - 1 \implies \boxed{y = x\sqrt{2} - 1}$$

Parametrik Eğrilerde Alan

$$x = f(t)$$

kartezyen doğru $y = f(x)$

$t = b$

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$
$$t \in [a,b]$$

Kartezyen denge $y = f(x)$

$$\int f(x)\,dx$$

$$x = f(t)$$
$$dx = f'(t)\,dt$$

$t = a$; $t = b$; $g(t) \to A$

$$A = \int_{a}^{b} \underset{y}{g(t)} \underset{\Delta x}{f'(t)\,dt}$$

Örn/
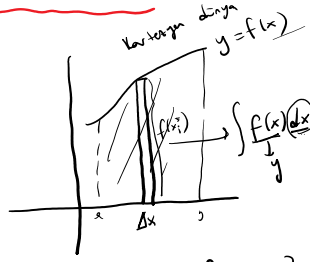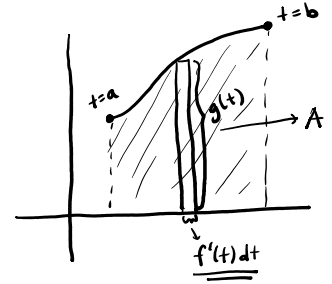
$$x = \underset{=f(t)}{1 - 2t} \qquad \text{eğrisinin} \quad x \text{ ekseni ile} \quad \text{arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız}$$
$$y = \underset{=g(t)}{t/2 - 1}$$
$$-2 \leqslant t \leqslant 2$$

$$\int_{-2}^{2} g(t)\,f'(t)\,dt = \int_{-2}^{2} (t/2 - 1)\cdot(-2)\,dt = \left(-\frac{t^2}{2} + 2t\right)\Big]_{-2}^{2}$$
$$\underset{(-t+2)\,dt}{}$$

$$= (4-2) - (-4-2)$$
$$= 8 \quad /\!/$$

Örn/

$$x = t^2$$
$$y = t^3 - 3t$$
$$-\infty < t < \infty$$

a) Eğrinin (3,0) noktasında 2 adet teğet doğrusu olduğunu gösteriniz, denklemlerini bulunuz.

b) Eğri hangi noktalarda yatay / dikey teğete sahiptir?

c) Eğrinin yukarı konkav / aşağı konkav olduğu aralıkları belirleyiniz.

d) Eğriyi çiziniz.

a)

$$\begin{matrix} x = 3 \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow t = ? \qquad \begin{matrix} 3 = t^2 \\ 0 = t^3 - 3t \\ t(t^2 - 3) \end{matrix} \quad t = \pm\sqrt{3} \qquad \begin{matrix} t = -\sqrt{3} \\ t = \sqrt{3} \end{matrix}$$

Türev:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2 - 1}{t}\right) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \qquad (3,0) \leftarrow \text{nokta}$$

→ $t = -\sqrt{3}$ için ; eğim: $\frac{3}{2}\left(\frac{3-1}{-\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}$

Teğet Denklemi

$$-\sqrt{3} = \frac{y - 0}{x - 3} \Rightarrow \boxed{y = -\sqrt{3}\,x + 3\sqrt{3}}$$

→ $t = \sqrt{3}$ için ; eğim: $\frac{3}{2}\left(\frac{3-1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$

$$\sqrt{3} = \frac{y - 0}{x - 3} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}\,x - 3\sqrt{3}}$$

eğim: $\dfrac{2}{2}\left(\dfrac{}{\sqrt{3}}\right) = 13$ $\sqrt{3} = \dfrac{y-0}{x-3} \Rightarrow \boxed{y = 13x - 3\sqrt{3}}$

b)

Dikey teğet $\rightarrow$ türev tanımsız $\rightarrow$ $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = 0}$ **!** $\boxed{\text{Türev} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}}$

Yatay teğet $\rightarrow$ türev $=0$ ama tanımsız olmamalı $\rightarrow$ $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = 0 \text{ ve } \dfrac{dx}{dt} \neq 0}$

$x = t^2$
$y = t^3 - 3t$

Dikey $\dfrac{dx}{dt} = 2t = 0 \Rightarrow$ $\underline{t = 0}$ noktasında dikey teğet vardır.

Yatay $\dfrac{dy}{dt} = 0$, $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ $\left.\begin{array}{l}3t^2 - 3 = 0 \\ \underline{2t \neq 0}\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}3t^2 = 3 \\ t^2 = 1\end{array}$ $\Rightarrow$ $\underline{t = \pm 1}$ noktalarında yatay teğet vardır.

c) Konkavlık durumu için ikinci türeve bakıyorduk.

$$\dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)\right)}{2t} = \dfrac{\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)}{2t} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{t^2 + 1}{t^3}\right)^{+}$$

$\underline{y'' > 0} \rightarrow \underline{t > 0}$ iken yukarı konkav $\smile$ $\smile$

$\underline{y'' < 0} \rightarrow \underline{t < 0}$ iken aşağı konkav $\frown$ $\frown$

d)

$x = t^2$
$y = t^3 - 3t$
$\,\,\,\, t(t^2 - 3)$
$-\infty < t < \infty$

t	x	y	
$-\infty$	∞	$-\infty$	$\rightarrow$ 4.bölge
$-\sqrt{3}$	3	0	$\rightarrow (3,0)$
-1	1	2	$\rightarrow (1,2)$
0	0	0	$\rightarrow (0,0)$
1	1	-2	$\rightarrow (1,-2)$
$\sqrt{3}$	3	0	$\rightarrow (3,0)$
∞	∞	∞	$\rightarrow$ 1.bölge

aşağı konkav ↗   yukarı konkav ↓