8. Hafta Perşembe Dersi - Seriler -1

15 Nisan 2021 Perşembe 12:06

Seriler 21 -1

11.1 Diziler → a_n : genel terim $a_1, a_2, \dots$

11.2 SONSUZ SERİLER

Seri $= a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ldots$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

Bir sonsuz dizinin terimlerini toplamak ~~gibi~~...

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Örnek 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

a_n → Bir seri iki dizi ile ilişkilidir. ← s_n

yeni bir dizi → $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$ } → Kısmi Toplamlar Dizisi

a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $a_1+a_2+a_3+a_4$

ilk n terimin toplamı

$s_n \longrightarrow s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5$

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

$$* \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n}$$

* Serinin Değeri = Kısmi Toplamlar Dizisinin Limiti

Kısmi Toplamlar;

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Yeni bir dizi... Limiti olabilir de olmayabilir de...

TANIMLAR **Sonsuz Seriler, n.inci Terim, Kısmi Toplam, Yakınsar, Toplam**

Bir $\{a_n\}$ sayı dizisi verilmiş olsun.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

şeklindeki bir ifadeye bir **sonsuz seri** denir. a_n sayısı serinin ***n*. terimi**dir.

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$\vdots$$

ile tanımlanan $\{s_n\}$ dizisine serinin **kısmi toplamlar dizisi** denir. s_n sayısı ***n*. kısmi toplam** dır. Kısmi toplamlar dizisi bir L limitine yakınsıyorsa, seri **yakınsaktır** der ve **toplamının** L olduğunu söyleriz. Bu durumda, ayrıca

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} s_n$$

yazarız. Serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsamıyorsa, seri **ıraksaktır** deriz.

GEOMETRİK SERİLER

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Örnek 1.

$\to$ r=1; $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

$a + 2a + 4a + 8a = a2^{n-1}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n}$$

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na,$$

$$\lim_{n\to\infty} na = \infty$$

$\to$ Iraksak... (r=-1)

r>0 / r <0

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots$$

$|r| > 1$ Örn $\sum_{n=1}^{\infty} a2^{n-1} = a + a.2 + a.2^2 + a.2^3 + \cdots$

$$= a\,(\underbrace{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots}_{\infty}) = \infty$$

$|r| \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \to$ ıraksaktır.

$\underline{|r|<1}$ $r \to$ basit kesir

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

Mat 116
13 Nisan 2021 Salı
Dr. Sümeyra BEDİR

n. terim

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$
$$s_n - rs_n = a - ar^n$$
$$s_n(1-r) = a(1-r^n)$$
$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad (r \neq 1)$$

$$s_n = a \cancel{+ar} \cancel{+ar^2} \cancel{+\ldots} \cancel{+ ar^{n-1}}$$
$$r\,s_n = \cancel{ar} \cancel{+ar^2} + \cancel{\ldots} \cancel{+ar^{n-1}} + ar^n$$
$$s_n - rs_n = a - ar^n$$
$$s_n(1-r) = a - ar^n \Rightarrow s_n = \frac{a-ar^n}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \underline{\underline{\frac{a}{1-r}}}$$

$|r|<1$ olduğunda 0'a gider

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \rightarrow$

$\underline{|r| < 1}$ ise, $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ geometrik serisi $a/(1-r)$'ye yakınsar.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad \underline{\underline{|r|<1}}$$

$\underline{|r| \geq 1}$ ise, seri ıraksar.

Örnek 2.

n=1'den başlayan indis, ~~a=1/9, r=1/3~~

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1-(1/3)} = \frac{1}{6}$$

$$a + ar + ar^2 + \ldots = \underline{a}(1 + \underline{r} + \underline{r^2} + \ldots)$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$$

$a = \frac{1}{9}$, $\frac{1}{3} \to r$, $\frac{1}{9} \to r^2$ $\Rightarrow r = \frac{1}{3}$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{6} \qquad \frac{1/9}{1-1/3} \qquad \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}$$

Örnek 3.

n=0'dan başlayan indis, ~~a=5, r= -1/4~~

$a=5$ $r=-1/4$

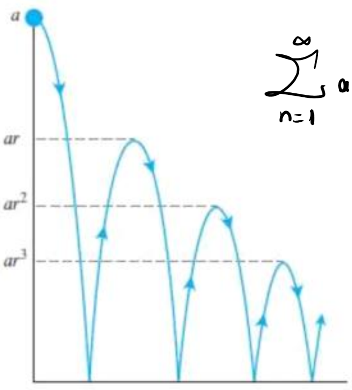
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots = 5\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} \cdots\right)$$

$\frac{1}{4} \to r$, $\frac{1}{16} \to r^2$, $\frac{1}{64} \to r^3$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1+(1/4)} = 4$$

Örnek 4.

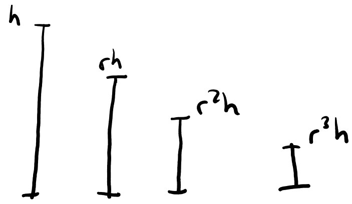
Bir topu a metre yüksekten düz bir yüzeye bırakıyorsunuz. Top bir h yüksekliğinden düştükten sonra her yüzeye çarptığında, bir rh yüksekliğine zıplıyor. Burada r pozitif, fakat 1'den küçüktür. Topun yukarı ve aşağı aldığı toplam yolu bulunuz.



(a)

$|r|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$



$$h + 2rh + 2r^2h + 2r^3h + \cdots$$

$$a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}$$

$$\cancel{a(1 + 2r + 2r^2}$$

$$a + a + 2a(r + r^2 + r^3 + \cdots) - a$$

$$= \underbrace{2a(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots)}_{\text{geometrik seri}} - a$$

$$\frac{2a}{1-r} - a = \frac{2a - a + ar}{1-r} = \frac{a+ar}{1-r}$$

Toplam mesafe

$$\cancel{s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\text{Bu toplam } 2ar/(1-r).} = a + \frac{2ar}{1-r}} = a\frac{1+r}{1-r}$$

Örnek 5.

5.23232323.... tekrarlı ondalık sayısını iki tam sayının oranı olarak yazınız.

$$5.232323\ldots = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \frac{23}{(100)^4} + \cdots$$

$$= 5 + \underbrace{\frac{23}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots\right)}_{23/99}$$

$\cancel{a = 1, \; r = 1/100}$

$$= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}$$

$$a = \frac{23}{100} \qquad r = \frac{1}{100}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{23/100}{1 - 1/100} = \frac{23/100}{99/100} = \frac{23}{99}$$