LİMİT KARŞILAŞTIRMA TESTİ

TEOREM **Limit Karşılaştırma Testi**

dışardan ithal

Her $n \geq N$ (N bir tamsayı) için $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olduğunu varsayın.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise, $\sum a_n$ ve $\sum b_n$'nin ikisi birden yakınsak veya ıraksaktır.
   $\sum b_n$ yakınsaklık durumu $\Rightarrow \sum a_n$ yakınsaklık durumu
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ise ve $\sum b_n$ yakınsak ise, $\sum a_n$'de yakınsaktır.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise ve $\sum b_n$ ıraksak ise, $\sum a_n$'de ıraksaktır.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ $a_n \to$ bizim serimiz; $b_n \to$ ithal ettiğimiz, ne olduğunu bildiğimiz, kendi serimizle karşılaştıracağımız seri

Limit Karşılaştırma Testi:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \to$
- $c>0 \Rightarrow \sum a_n, \sum b_n$ aynı yakınsaklık/ıraksaklık durumunda
- $c=0$ ve $\sum b_n$ yakınsak $\Rightarrow \sum a_n$ yakınsak
- $c=\infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak $\Rightarrow \sum a_n$ ıraksak

Örnekler

(a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$ $\quad b_n = \frac{n}{n^2}$

(b) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} > \sum \frac{1}{2^n} \leftarrow b_n \to a=\frac{1}{2}$ $r=\frac{1}{2}$ olan geometrik seri yakınsaktır. $\to$ küçük olan yakınsak. Karşılaştırma (normal) testi çalışmaz.

(c) $\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$

Neden normal karşılaştırmayı kullanamadığımızı gözlemleyelim. $\rightarrow \frac{2n+1}{n^2+2n+1} \overset{?}{>} \frac{1}{n}$

a) $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n+1}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ harmonik seri, ıraksak

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2 > 0 \Rightarrow \sum a_n, \sum b_n$ ile aynı yakınsaklık/ıraksaklık durumundadır.

öteki de ıraksak

b) $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ $\quad b_n = \frac{1}{2^n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{2^n}{1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \to$ yakınsak

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \to \frac{2^n/2^n}{(2^n-1)/2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} \to 1$ $\quad (\frac{1}{2^n} \to 0)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-(1/2^n)}$

$= 1 > 0$

öteki de yakınsak $\Rightarrow \sum \frac{1}{2^n-1}$ yakınsaktır.

$\Rightarrow \sum a_n, \sum b_n$ aynı durumdadır.

c) $a_n = \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ $\quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1+n\ln n}{n^2+5} \cdot \frac{n}{1} = \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}$

$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ harmonik seri, ıraksak

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} \xrightarrow{L'} \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n\ln n+n}{2n} \xrightarrow{L'} \lim_{n\to\infty} \frac{2.\ln n+2+1}{2} = \infty$

$= \infty$ $\quad$ ıraksak

$\sum a_n \to$ ıraksak.

Örnekler.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}} > \frac{1}{n^{3/2}} \to p>1$ yakınsak (a_n, b_n) $\quad n \geq 3$, $\ln n > 1$

karşılaştırma testi çalışmaz.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\cancel{n^{3/2}}} \cdot \frac{\cancel{n^{3/2}}}{1} = \infty$

limit karşılaştırma testi çalışmaz.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}} \to$ yakınsak ✓

$\frac{1}{n} \to$ ıraksak $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}} \cdot \frac{n}{1}$ $\quad \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $\quad \frac{1/n}{1/2\sqrt{n}}$

$\frac{k^{1/3}}{\quad} = \frac{1}{\quad}$ ... $p>1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}}$ → yakınsak ✓

$\frac{k^{1/3}}{k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2-1/3}}$, $7/6>1$ yakınsak

$\frac{1}{n}$ → ıraksak

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ $\frac{n}{1}$ $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $\frac{1/n}{1/2\sqrt{n}}$

limit karşılaştırma testi çalışmaz $\frac{2\sqrt{n}}{n}$ $\frac{2}{\sqrt{n}}\to 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{k^{1/3}}{\sqrt{k^3+4k+3}} \cdot \frac{k^{3/2-1/3}}{1} \quad \frac{k^{3/2}}{\sqrt{k^3+4k+3}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{k^2}+\frac{3}{k^3}}} = 1 > 0$$

⇒ $\sum a_n, \sum b_n$ aynı durumdadır.

⇒ $\sum a_n$ yakınsaktır.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin^2 k}{1+k^3}$

$0 < \sin^2 k < 1$

$\frac{k\sin^2 k}{1+k^3} < \frac{k}{1+k^3}$ yakınsak.

→ yakınsak. $\frac{k}{1+k^3}$, $\frac{1}{k^2}$ yakınsak

$\frac{k\sin^2 k}{1+k^3}$ $\quad \frac{k\sin^2 k}{1+k^3} < \frac{k}{1+k^3}$ → yakınsak

$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{1+k^3}\cdot\frac{k^2}{1} = 1 > 0$

→ $\sum \frac{k\sin^2 k}{1+k^3}$ yakınsak.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$b_n = \frac{1}{n^3}$, $3>1$ yakınsak.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = 1 > 0$$

⇒ $\sum a_n$, $\sum b_n$ ile aynı durumdadır.

⇒ $\sum a_n$ yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n\sqrt{n}}$

$\frac{1}{e^n\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak, karşılaştırma testi çalışmaz.

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n\cancel{\sqrt{n}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{n}}}{1} = 0$, limit karşılaştırma çalışmadı

$b_n = \frac{1}{e^n}$ $\quad a = 1/e$, $r = 1/e < 1$ geometrik seri yakınsaktır

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{e^n}\sqrt{n}}\cdot\frac{\cancel{e^n}}{1} = 0$

⇒ $\sum a_n$ yakınsaktır. ✓

#11.5 ALTERNE SERİLER

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$ alterne

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$ alterne

$\sum \frac{1}{n}$ → harmonik seri, ıraksak

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \quad (1)$$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n 4}{2^n} + \cdots \quad (2)$$ → yakınsak

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (-1)^{n+1}n + \cdots \quad (3)$$

$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ → alterne harmonik seri yakınsak

$u_n = \frac{1}{n}$ pozitif ✓, azalan ✓, $u_n \to 0$ ✓

Alterne harmonik seri denilen (1) serisi, birazdan göreceğimiz gibi, yakınsaktır. $r=-1/2$ oranıyla bir geometrik seri olan (2) serisi $-2/[1+(1/2)] = -4/3$'e yakınsar. (3) serisi ıraksaktır çünkü; n. terim sıfıra yaklaşmaz.

TEOREM 14 **Alterne Seriler Testi (Leibniz Teoremi)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

serisi aşağıdaki üç koşulu da sağlanırsa yakınsar:

1. u_n'lerin hepsi pozitiftir.
2. Her $n \geq N$ için $u_n \geq u_{n+1}$'dir. (N bir tamsayı). u_n azalan
3. $u_n \to 0$.

⇒ alterne seri yakınsak.

Örnek 1.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Örnek 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1} \qquad u_n = \frac{3n}{4n-1}$$

pozitif ✓
azalan ✓

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4} \neq 0$$

3.şart sağlanmıyor... $\Rightarrow$ Alterne seri testi çalışmaz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

limiti yok.. Iraksaklık testi gereği ıraksaktır..

Örnek 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1} \rightarrow u_n$$

pozitif ✓
azalan mı? ✓
$u_n \to 0$ ✓
$\Rightarrow$ yakınsak ✓

2. koşulu test etmeliyiz;

$$\rightarrow f'(x) = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3+1)^2} < 0$$

azalan

Tüm şartları sağlar..yakınsak..