#11.3 İNTEGRAL TESTİ VE TOPLAMLARIN HESABI

İNTEGRAL TESTİ

1.Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$s_1 = 1$

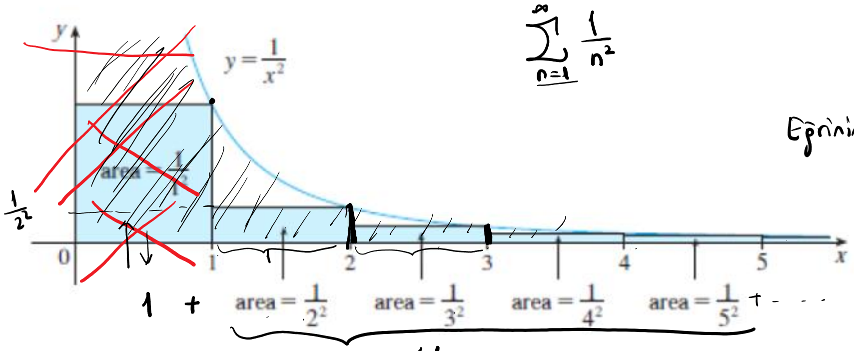
$s_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$

$s_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$

$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

S_n kısmi toplamları içi bir formül bulamıyoruz...

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$



Eğrinin altında kalan alan $= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ → yakınsak

>

Dikdörtgenlerin alanları toplamı $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

İmproper(genelleştirilmiş) integrallerden yardım alabiliriz...

Sadece 1.dikdörtgeni çıkarırsak geri kalan alanların toplamı genelleştirilmiş integralin değeri (1) den küçüktür.

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} p < 1 & \text{ıraksak} \\ p = 1 & \text{ıraksak} \\ p > 1 & \text{yakınsak} \end{cases}$$

2.Örnek

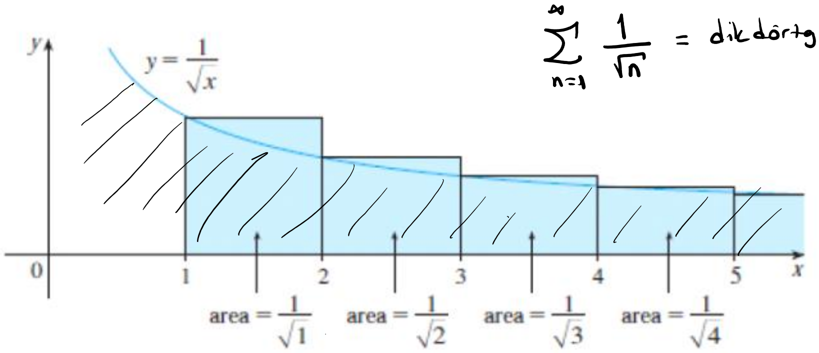
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

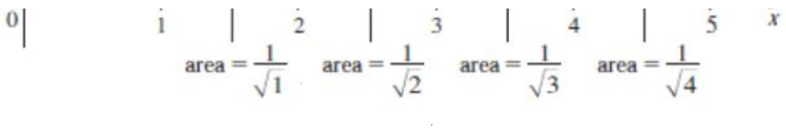
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ = dikdörtgenlerin alanları toplamı → ıraksak.

>

integral

$\int^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ → ıraksak





$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \rightarrow$ ıraksak

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Bu toplam integralin değerinden (sonsuz) büyüktür. Iraksak => ıraksak

> **TEOREM İntegral Testi**
>
> $\{a_n\}$ pozitif terimli bir dizi olsun f, her $x \geq N$ (N pozitif bir tamsayı) için x'in sürekli, pozitif ve azalan bir fonksiyonu olmak üzere, $a_n = f(n)$ olduğunu varsayın. Bu durumda, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ve $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin ikisi de ya yakınsar, ya da ıraksar.

a_n verilen aralıkta sürekli, pozitif, azalan olmalı!!!

$a_n \rightarrow f(x)$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \rightarrow$ ıraksak $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak

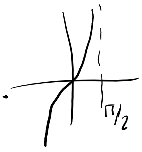
$\searrow$ yakınsak $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak.

Örnek.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow \text{yakınsaktır.}$$

Verilen aralıkta sürekli, pozitif, azalan. $\Rightarrow$ integral testini kullanabiliriz.

$[1,\infty)$ ✓ ✓ ✓



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(\arctan x \Big]_1^{t} \right) = \lim_{t\to\infty} \left(\arctan t - \arctan 1 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ yakınsaktır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} p<1 & \text{ıraksak} \\ p=1 & \text{ıraksak} \\ p>1 & \text{yakınsak} \end{cases}$$

Örnek (p serisi)

p'nin hangi değerleri için aşağıdaki seri yakınsar, hangi değerleri için ıraksar?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \rightarrow \begin{cases} p \leq 1 \Rightarrow \text{ıraksaktır.} \\ p > 1 \Rightarrow \text{yakınsaktır.} \end{cases}$$

p integralini hatırlayacağız...

p>1 ise yakınsaktır, p<=1 ise ıraksaktır.

! DİKKAT

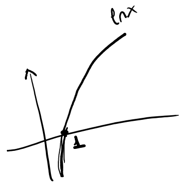
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Örnek

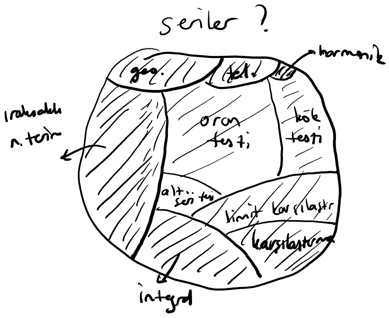
$\ln x$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{} \quad \frac{1/n}{} = 0$

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \qquad \frac{1/n}{1} \qquad = 0$$



Verilen aralıkta sürekli, pozitif. Acaba azalan mı?
$[1,\infty)$ ✓ ✓ ✓

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \qquad x\to\infty \qquad <0 \text{ azalan...}$$

İntegral testini uygulayabiliriz;

$$u = \ln x \rightarrow \int u\,du \rightarrow \frac{u^2}{2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(\left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^t \right) = \lim_{t\to\infty} \left(\underbrace{\frac{(\ln t)^2}{2}}_{\infty} - \frac{(\ln 1)^2}{2} \right) = \infty \rightarrow \text{ıraksak.}$$

$\Rightarrow$ Seri de ıraksaktır.

SERİ TOPLAMININ YAKLAŞIK DEĞERİ

İntegral testiyle serinin yakınsak olduğunu bulduk diyelim. Toplamın değerini nasıl bulacağız?

Aslında her kısmi toplam esas toplamın bir yaklaşımıdır;

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

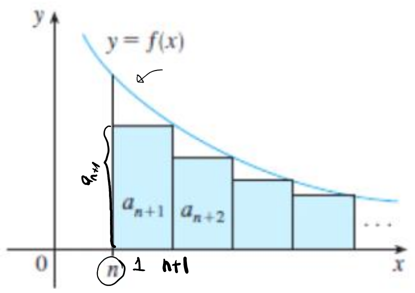
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

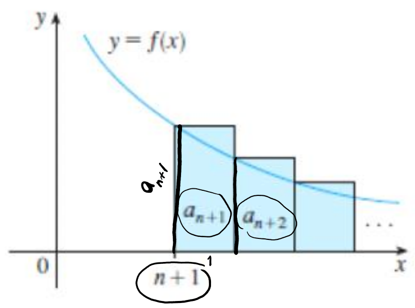
$n \to \infty \qquad s_n \to s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Bu yaklaşımın başarım ölçütü, aradaki "fark" olacak yani "hata" değeri;

$$\rightarrow R_n = s - s_n = \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots}_{\text{hata payı}} \rightarrow$$



$$R_n = \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots}_{R_n = \text{ Dikdörtgenlerin alanları toplamı}} \leqslant \underbrace{\int_n^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{Eğrinin altında kalan alan}}$$



$$R_n = \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots}_{\text{Dikdörtgenlerin alanları toplamı}} \geqslant \underbrace{\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{Eğrinin altında kalan alan}}$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \leqslant R_n \leqslant \int_n^{\infty}$$

Sonuç:

$$\rightarrow \boxed{\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^{\infty} f(x)\,dx}$$

$\rightarrow$ Her s_n kısmi toplamı, s için, bu aralıkta bir R_n hatasıyla, bir yaklaşım belirtir.

bir R_n hatasıyla, bir yaklaşım belirtir.

Örnek.

$s = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{1}/_{n^3}$ serisinin değeri için

$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}$ $p=3>1 \Rightarrow$ yakınsak $\Rightarrow \sum 1/n^3$ yakınsak.

a-) İlk 10 terimin toplamını kullanarak bulacağımız yaklaşık değer için hatanın ölçüsü ne olacaktır? S_{10} $? < R_{10} < ?$ 0.005

b-) 0.0005 hata payıyla doğru bir yaklaşık değer bulmak için en az kaç terim kullanılmalıdır? 32

$R_n < 0.005$

Öncelikle verilen aralıkta sürekli, pozitif ve azalan bir durum var, integral testini kullanalım;

Her hangi bir n.terimden başlayarak oluşacak toplam için;

$$\rightarrow \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{2t^2}}_{0}+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

x^{-3} $\frac{x^{-2}}{-2}$

$$\int_{10}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2.10^2} \qquad \int_{11}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2.11^2}$$

$$\frac{1}{2.11^2} \leqslant R_{10} \leqslant \frac{1}{2.10^2}$$

a-)

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200} = 0.005$$

Demek ki, hata en fazla 0.005 olacaktır.

b-) $R_n \leq 0.0005$ olması için

$$\int_{n+1}^\infty \leqslant R_n \leqslant \underbrace{\int_n^\infty}_{0.0005} = \frac{1}{2n^2} =$$

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{1}{2n^2} < 0.0005 \qquad n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000 \qquad n > \sqrt{1000} \approx 31.6 \rightarrow 32 \text{ olmalı.}$$

$n = 32$

Yani en az 32 terime ihtiyaç vardır.

Hata için kullandığımız aralığın her tarafına s_n eklersek, seri toplamı için bir yaklaşım buluruz;

$$\boxed{s_n + \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_n^\infty f(x)\,dx}$$

$$\int_{n+1}^\infty \leqslant \underset{s-s_n}{R_n} \leqslant \int_n^\infty$$

$$\int_{n+1}^\infty + s_n \leqslant s \leqslant \int_n^\infty + s_n$$

Örneğin yukarıda 10. kısmi toplamı kullanarak serinin değeri için yaklaşık değer ararsak;

∞

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

$$s_{10} + \frac{1}{2.11^2} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2.10^2} + s_{10}$$

$$s_{32} + \frac{1}{2.33^2} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2.32^2} + s_{32}$$

#11.4 KARŞILAŞTIRMA TESTLERİ yakınsaklık / ıraksaklık

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$$\sum \frac{1}{2^n} \qquad a = \frac{1}{2} \qquad r = \frac{1}{2} \qquad \frac{a}{1-r} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

$|r| < 1 \to$ yak.

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$$

büyük, yakınsak $\Rightarrow$ küçük de yakınsaktır.

> **TEOREM** Karşılaştırma Testi
>
> $\sum a_n$ negatif terim içermeyen bir seri olsun.
>
> **(a)** N herhangi bir tamsayı olmak üzere her $n > N$ için, $a_n \le c_n$ olacak şekilde yakınsak bir $\sum c_n$ serisi varsa $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.
>
> **(b)** N herhangi bir tamsayı olmak üzere her $n > N$ için $a_n \ge d_n$ olacak şekilde negatif terim içermeyen ıraksak bir $\sum d_n$ serisi varsa, $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

! Büyük olan bir seri bulduk + yakınsak $\Rightarrow$ Bizim küçük serimiz de yakınsaktır.

Küçük olan bir seri bulduk + ıraksak $\Rightarrow$ Bizim büyük serimiz de ıraksaktır.

Ör

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}}_{\Rightarrow \text{ yakınsaktır.}} < \frac{5}{2n^2}$$

Büyük, yakınsak

$$\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to p > 1$$

yakınsaktır.

***** Sonlu sayıda terim karşılaştırmayı etkilemez.

Ör

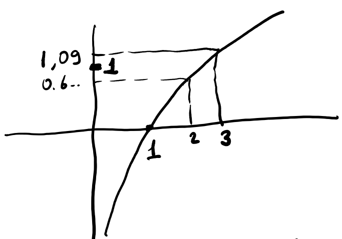
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad \text{küçük,} \to \text{ıraksak}$$

ıraksaktır $\Leftarrow$

$$= \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$\ln n > 1 \Leftarrow n \geqslant 3$ ise



$\ln n > 1$

$$= \underbrace{\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2}}_{\text{sonlu sayıda}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$\ln n > 1 \Leftarrow n \geq 3$ ise $\quad \ln n > 1$, $n \geq 3$

Örn

$$\underbrace{5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1}_{\text{sonlu sayıda terim}} + \underbrace{\frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{8+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \cdots}_{\text{yakınsak bulduk}}$$

bu serinin yakınsaklık durumu nedir? $\Rightarrow$ yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ büyük, ıraksak — $p<1$ ıraksak — karşılaştırma çalışmaz

$\sum \frac{1}{2^n}$ $a = \frac{1}{2}$ $r = \frac{1}{2}$ olan geometrik seri $\frac{a}{1-r} = 1$ yakınsak.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$ büyük yakınsak. ✓

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$ yakınsaktır.

Örn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$$

$2^2 \qquad 2^3$

$n! > 2^n$

$n. \cdots 2.1 > 2.2.2$

$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$ büyük, yakınsak. $\qquad \sum \frac{1}{n!} \to$ yakınsaktır

— ∘ —