Zusatzaufgaben 2

Gegeben seien die Mengen $A \triangleq \{ 0,\ 1 \}$, $B \triangleq \{ 0,\ 1,\ 2 \}$, $C \triangleq \{ a,\ b,\ c \}$, $D \triangleq \{ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \}$ und $E \triangleq \{ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \}$ und die Relationen:

$$\begin{array}{lll} R_1 : (D,\ E) & \text{mit} & R_1 \triangleq \{ (c,\ 1),\ (c,\ 5),\ (e,\ 2),\ (f,\ 3),\ (f,\ 7) \} \\ R_2 : (D,\ D) & \text{mit} & R_2 \triangleq \{ (c,\ a),\ (c,\ e),\ (e,\ b),\ (f,\ c),\ (f,\ d) \} \\ R_3 : (B,\ C) & \text{mit} & R_3 \triangleq \{ (0,\ b),\ (1,\ a),\ (1,\ c),\ (2,\ b) \} \\ R_4 : (\mathbb{N},\ \mathbb{N}) & \text{mit} & R_4 \triangleq \{ (x,\ x) \mid x \text{ ist gerade} \} \cup \{ (x-1,\ x) \mid x \text{ ist ungerade} \} \end{array}$$

Aufgabe 1: Eigenschaften von Relationen

1.a) (**) *Beweise oder widerlege:* R_1 ist linkstotal.
1.b) (**) *Gib an:* Um welche Paare müsste man R_1 erweitern, damit R_1 linkstotal wird?
1.c) (**) Seien X, Y beliebige Mengen. *Beweise oder widerlege:* Wenn $\#(X) \neq 0$, dann ist $\nabla_{X,Y}$ rechtstotal.
1.d) (**) *Beweise oder widerlege:* R_3 ist linkseindeutig.
1.e) (**) *Gib an:* Um welche Paare müsste man R_3 erweitern, damit R_3 linkseindeutig wird?
1.f) (**) *Beweise oder widerlege:* R_2 ist rechtseindeutig.
1.g) (**) *Beweise oder widerlege:* R_4 ist linkseindeutig.
1.h) (**) *Gib* für jede der Relationen $R_1 - R_4$ *an*, welche der Eigenschaften rechts-/linkstotal und rechts-/linkseindeutig erfüllt ist.
1.i) (***) Seien X, Y beliebige Mengen. *Gib* für jede der Relationen $\nabla_{X,Y}$, $\emptyset_{X,Y}$ und Δ_X *an*, welche der Eigenschaften rechts-/linkstotal und rechts-/linkseindeutig erfüllt ist.

Aufgabe 2: Umkehrrelation

2.a) (**) *Gib* die Relation R_2^{-1} graphisch und in Mengenschreibweise *an*.
2.b) (**) *Beweise:* Für alle Mengen X, Y und alle Relationen $R : (X,\ Y)$ gilt $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.
Hinweis: Ihr dürft die folgende Gleichheit verwenden:

$$(a, b) \in R = (b, a) \in R^{-1} \tag{H}$$

2.c) (**) *Beweise oder widerlege:* Für alle Mengen X, Y und alle Relationen $R : (X,\ Y)$ gilt, dass R genau dann rechtstotal ist, wenn R^{-1} linkstotal ist.
Hinweis: Ihr dürft die folgende Gleichheit verwenden:

$$(a, b) \in R = (b, a) \in R^{-1} \tag{H}$$

Aufgabe 3: Komposition

3.a) (**) *Beweise oder widerlege:* Für alle Mengen X, Y und alle Relationen $R : (X,\ Y)$ und $R' : (Y,\ X)$ gilt, dass R genau dann linkstotal ist, wenn RR' linkstotal ist.
3.b) (**) *Beweise oder widerlege:* Für alle Mengen X, Y und alle Relationen $R : (X,\ Y)$ gilt $\Delta_X R = R$.
3.c) (**) *Beweise oder widerlege:* Für allen Mengen X und Y und alle Relationen $R : (X,\ Y)$ gilt $RR^{-1} \subseteq \Delta_X$.

Aufgabe 4: Abbildungen (Grundlagen)

4.a) *Gib an:* Welche Eigenschaften hat $f : (\mathbb{N}, \mathbb{N})$ mit $f \triangleq \{ (x,\ x+1-2(x \bmod 2)) \mid x \in \mathbb{N} \}$?
Wir könnten f auch alternativ wie folgt definieren:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} x+1 & ,\ x \bmod 2 = 0 \\ x-1 & ,\ x \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

Betrachtet alle möglichen Eigenschaften: linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, rechtseindeutig, surjektiv, injektiv, Bijektion, bijektive partielle Abbildung, totale Abbildung, partielle Abbildung.
4.b) *Gib an:* Welche der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig werden durch die folgenden Relationen erfüllt?

Gib an: Welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv werden durch die Relationen, die auch part. Abbildungen sind, erfüllt?
Gib an: je ein Gegenbeispiel für jede nichterfüllte Eigenschaft.

$$R_1 : (\{\ a,\ b,\ c,\ d,\ e\ \}, \{\ f,\ g,\ h,\ i\ \}) \ \text{ mit } R_1 \triangleq \{\ (a,\ i),\ (c,\ g),\ (b,\ h),\ (e,\ f)\ \}$$
$$R_2 : (\{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \}, \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \}) \ \text{ mit } R_2 \triangleq \{\ (1,\ 1),\ (3,\ 4),\ (2,\ 3),\ (4,\ 2)\ \}$$
$$R_3 : (\mathbb{N}, \mathbb{N}) \ \text{ mit } R_3 \triangleq \{\ (n,\ m) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid n * 5 = m\ \}$$

Aufgabe 5: Abbildungen (Komposition und Umkehrung)

5.a) *Beweise:* (Komposition von injektiven Abbildungen)

$$\forall f : B \to C,\ g : A \to B\ .\ (\text{injektiv}(f) \land \text{injektiv}(g)) \to \text{injektiv}(f \circ g)$$

5.b) Seien A,C beliebige Mengen und $R : (C, A)$.
Beweise oder widerlege: $\forall B\ .\ \forall R_l, R_r : (A, B)\ .\ R_l \circ R = R_r \circ R \to R_l = R_r$, gdw. R rechtstotal ist.

Aufgabe 6: Größe von Mengen, Kardinalität

6.a) *Beweise:* $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N} \setminus \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \})$
6.b) *Beweise:* $\nexists M\ .\ \text{card}(M) \geqslant \text{card}(\mathbb{N}) \land \text{card}(\mathcal{P}(M)) = \text{card}(\mathbb{N})$
6.c) *Beweise:* $\nexists M\ .\ \#(M) < \#(\mathbb{N}) \land \#(\mathcal{P}(M)) = \#(\mathbb{N})$
6.d) Sei $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \triangleq \{\ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ \}$ die Menge aller Funktionen vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Beweise: $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.
Hinweis: Seien $f, g : A \to B$. *Dann ist* $f = g$ *gdw.* $\forall a \in A\ .\ f(a) = g(a)$. (H)
6.e) Sei $\mathbb{R}_0^1 \triangleq \{\ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\ \}$ die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.
Beweise: $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathbb{R}_0^1)$.