Tutorium 1

Aufgabenformulierungen Es gibt verschiedene Formulierungen in ForSA.

- *Gib an:* — Ein passender Wert soll angegeben werden (ohne Begründung).
- *Gib explizit an:* — Ein passender Wert soll so weit wie möglich vereinfacht angegeben werden.
- *Berechne:* — Ein passender Wert soll explizit angegeben werden. Zusätzlich ist der Lösungsweg schrittweise anzugeben. Jeder Schritt muss begründet werden.
- *Begründe:* — Eine textuelle Erläuterung soll angegeben werden. Ein Beweis ist zulässig, aber nicht notwendig. Es muss ein klarer und logischer Argumentationsweg erkennbar sein.
- *Beweise:* — Ein formaler Beweis soll angegeben werden. Dabei muss jeder Schritt einzeln ausgeführt und begründet werden. Zum Vergleich habt ihr die Beispiellösungen.
- *Widerlege:* — Analog zu dem vorigen Punkt. In diesem Fall soll das Gegenteil der Behauptung bewiesen werden. (Oft ist hier ein Gegenbeispiel gefragt.)
- *Beweise oder widerlege:* — Hier ist entweder ein formaler Beweis der Aussage oder ein formaler Beweis des Gegenteils der Aussage anzugeben. Zudem muss durch einen Antwortsatz kenntlich gemacht werden, ob ihr die Aussage bewiesen oder widerlegt habt.

Aufgabe 1: Aussagenlogik

1.a) *Begründe:* Warum ist keiner der folgenden Ausdrücke eine aussagenlogische Formel?
(i) $(((p \lor q) \to (r \land s))$ (ii) $\neg p \land (q\lor)$ (iii) $\neg\neg(\neg p \lor \bot\neg\top)$ (iv) $p \lor q \land r$

--- Lösung ---

(i) Eine Klammer (zu viel.
(ii) Das 2. Argument von $\lor$ fehlt.
(iii) $\neg$ ist ein 1-stelliger Operator (in Präfix-Schreibweise) und $\bot$ ist kein Operator; die Kombination $\bot\neg$ kann daher in keiner Formel vorkommen.
(iv) Es wurde kein Vorrang zwischen $\lor$ und $\land$ festgelegt, also müsste der Vorrang hier durch Klammern geklärt werden (gleiches gilt für Kombinationen aus $\to$ und $\leftrightarrow$)

--- /Lösung ---

1.b) *Begründe:* Sei $V = \{p, q, r\}$ eine Variablenmenge. Wir betrachten die Formel $(p \land q) \lor (r \land \neg q)$ zu V. Wie viele verschiedene Variablenbelegungen gibt es?

--- Lösung ---

Es gibt 3 Variablen in der Variablenmenge. Jede Variable kann mit 2 verschiedenen Wahrheitswerten belegt werden. Also gibt es $2^3 = 8$ verschiedene Variablenbelegungen. Die Tatsache, dass die Variable q zwei mal in der Formel vorkommt, hat darauf keinen Einfluss.

--- /Lösung ---

1.c) *Gib an:* Unter welchen Variablenbelegungen wird $(p \land q) \lor r$ zu 0 ausgewertet?

--- Lösung ---

1.) $\beta_1(p) = 1$, $\beta_1(q) = 0$ und $\beta_1(r) = 0$
2.) $\beta_2(p) = 0$, $\beta_2(q) = 1$ und $\beta_2(r) = 0$
3.) $\beta_3(p) = 0$, $\beta_3(q) = 0$ und $\beta_3(r) = 0$

--- /Lösung ---

1.d) *Begründe:* Woran erkennt man in einer Wahrheitstabelle, ob eine Formel (nicht) erfüllbar oder (nicht) allgemeingültig ist bzw. ob zwei Formeln (nicht) äquivalent sind?

--- Lösung ---

- Eine Formel ist **erfüllbar**, wenn es in der entsprechenden Wahrheitstabelle **mindestens eine** Zeile gibt, in der der Hauptjunktor zu 1 ausgewertet wird.
- Eine Formel ist **nicht erfüllbar**, wenn in **allen** Zeilen der entsprechenden Wahrheitstabelle der Hauptjunktor zu 0 ausgewertet wird.
- Eine Formel ist **allgemeingültig**, wenn in **allen** Zeilen der entsprechenden Wahrheitstabelle der Hauptjunktor zu 1 ausgewertet wird.
- Eine Formel ist **nicht allgemeingültig**, wenn es in der entsprechenden Wahrheitstabelle

mindestens eine Zeile gibt, in der der Hauptjunktor zu 0 ausgewertet wird.

- Zwei Formeln sind **äquivalent**, wenn in **allen** Zeilen der entsprechenden Wahrheitstabelle die beiden Hauptjunktoren der Formeln jeweils **zum selben Wert** ausgewertet werden.
- Zwei Formeln sind **nicht äquivalent**, wenn es in der entsprechenden Wahrheitstabelle **eine** Zeile gibt, in der die beiden Hauptjunktoren der Formeln zu verschiedenen Werten ausgewertet werden.

/Lösung

1.e) *Gib an und begründe*, was aus der folgenden Wahrheitstabelle abgeleitet werden kann?

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	p	$\boxed{\to}$	p	$\wedge$	q
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Lösung

Betrachte die Belegung β mit $\beta(p) = \beta(q) = 0$. Dann ist $[\![(p \to q) \wedge p \to p \wedge q]\!]^{\beta} = 1$. Damit ist die Formel $(p \to q) \wedge p \to p \wedge q$ erfüllbar (da es eine Belegung gibt, unter der die Formel zu 1 ausgewertet wird) und somit auch nicht kontradiktorisch.
Da der Hauptjunktor in allen Zeilen zu 1 ausgewertet wird (unter jeder beliebigen Belegung), ist die Formel sogar allgemeingültig. Daher gilt $(p \to q) \wedge p \to p \wedge q \equiv \top$.

/Lösung

1.f) *Gib an und begründe*, was aus der folgenden Wahrheitstabelle abgeleitet werden kann?

p	q	p	$\wedge$	q	$\boxed{\to}$	p	$\wedge$	$\neg$	q	$\boxed{\neg}$	$(p$	$\wedge$	$q)$
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1

Lösung

Da die beiden Hauptjunktoren in jeder Zeile zum selben Wert ausgewertet werden, sind die beiden Formeln $p \wedge q \to p \wedge \neg q$ und $\neg (p \wedge q)$ logisch äquivalent.
Betrachte die Belegung β_1 mit $\beta_1(p) = \beta_1(q) = 0$. Dann ist $[\![\neg (p \wedge q)]\!]^{\beta_1} = 1$. Damit ist die Formel $\neg (p \wedge q)$ erfüllbar (da es eine Belegung gibt, unter der die Formel zu 1 ausgewertet wird) und somit auch nicht kontradiktorisch.
Betrachte die Belegung β_2 mit $\beta_2(p) = \beta_2(q) = 1$. Dann ist $[\![\neg (p \wedge q)]\!]^{\beta_2} = 0$. Damit ist die Formel $\neg (p \wedge q)$ nicht allgemeingültig (da es eine Belegung gibt, unter der die Formel zu 0 ausgewertet wird).
Da $p \wedge q \to p \wedge \neg q \equiv \neg (p \wedge q)$, ist auch $p \wedge q \to p \wedge \neg q$ erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

/Lösung

Aufgabe 2: Prädikatenlogik, Widerspruch und Kontraposition

Hinweis: Ziehe, durch die schrittweise *Anwendung logischer Äquivalenzen, alle Negationen in den folgenden Formeln zuerst soweit wie möglich nach Innen. Begründe jeden Schritt.*

2.a) *Beweise per Kontraposition*, dass für die einstelligen Prädikate P_1 und P_2 gilt:

$$(\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \rightarrow ((\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \vee (\exists z \,.\, \neg P_1(z)))$$

Lösung

$$\overset{\text{Kontraposition}}{\equiv} \neg ((\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \vee (\exists z \,.\, \neg P_1(z))) \rightarrow \neg (\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x))$$

$$\overset{\text{Proposition 0.5.6}}{\equiv} \neg ((\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \vee (\exists z \,.\, \neg P_1(z))) \rightarrow \exists x \,.\, \neg (\neg P_2(x) \vee \neg P_1(x))$$

$$\overset{\text{De Morgan II}}{\equiv} (\neg (\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \wedge \neg (\exists z \,.\, \neg P_1(z))) \rightarrow \exists x \,.\, \neg\neg P_2(x) \wedge \neg\neg P_1(x)$$

$$\overset{\text{Proposition 0.5.6}}{\equiv} ((\exists y \,.\, \neg\neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \wedge (\forall z \,.\, \neg\neg P_1(z))) \rightarrow \exists x \,.\, \neg\neg P_2(x) \wedge \neg\neg P_1(x)$$

$$\overset{\text{doppelte Negation}}{\equiv} ((\exists y \,.\, P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge (\forall z \,.\, P_1(z))) \rightarrow \exists x \,.\, P_2(x) \wedge P_1(x)$$

Zu Zeigen (Z1): $((\exists y \,.\, P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge (\forall z \,.\, P_1(z))) \rightarrow \exists x \,.\, P_2(x) \wedge P_1(x)$.
Annahme (A1): $(\exists y \,.\, P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge \forall z \,.\, P_1(z)$.
Zu Zeigen (Z2): $\exists x \,.\, P_2(x) \wedge P_1(x)$.
Annahme (A2): $\exists y \,.\, P_1(y) \rightarrow P_2(y)$.
Annahme (A3): $\forall z \,.\, P_1(z)$.
Sei y in (A2).
Annahme (A4): $P_1(y) \rightarrow P_2(y)$.
Wähle $z \triangleq y$ in (A3).
Annahme (A5): $P_1(y)$.
Wähle $x \triangleq y$ in (Z2).
Zu Zeigen (Z3): $P_2(y) \wedge P_1(y)$.
Teil 1: *Zu Zeigen (Z4.1):* $P_2(y)$.
  Aus (A4) und (A5) folgt:
  Annahme (A6.1): $P_2(y)$.
  Aus (A6.1) folgt *(Z4.1)*.
Teil 2: *Zu Zeigen (Z5.1):* $P_1(y)$.
  Aus (A5) folgt *(Z5.1)*.

/Lösung

2.b) *Beweise per Widerspruch*, dass für die einstelligen Prädikate P_1 und P_2 gilt

$$(\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \rightarrow ((\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \vee (\exists z \,.\, \neg P_1(z)))$$

Lösung

$$\begin{aligned}
& \neg((\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \rightarrow ((\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \vee (\exists z \,.\, \neg P_1(z)))) \\
\overset{\text{Implikation}}{\equiv}\; & \neg(\neg(\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \vee ((\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \vee (\exists z \,.\, \neg P_1(z)))) \\
\overset{\text{De Morgan II}}{\equiv}\; & \neg\neg(\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \wedge \neg((\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \vee (\exists z \,.\, \neg P_1(z))) \\
\overset{\text{De Morgan II}}{\equiv}\; & \neg\neg(\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \wedge (\neg(\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \wedge \neg(\exists z \,.\, \neg P_1(z))) \\
\overset{\text{Proposition 0.5.6}}{\equiv}\; & \neg\neg(\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \wedge ((\exists y \,.\, \neg\neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \wedge (\forall z \,.\, \neg\neg P_1(z))) \\
\overset{\text{doppelte Negation}}{\equiv}\; & (\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \wedge ((\exists y \,.\, (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \wedge (\forall z \,.\, P_1(z)))
\end{aligned}$$

(Widerspruchs-)Annahme: $(\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \wedge ((\exists y \,.\, (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \wedge (\forall z \,.\, P_1(z)))$.
Zu Zeigen (Z1): $\perp$.
Annahme (A1): $\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)$.
Annahme (A2): $\exists y \,.\, (P_1(y) \rightarrow P_2(y))$.
Annahme (A3): $\forall z \,.\, P_1(z)$.
Sei y in (A2).
Annahme (A4): $P_1(y) \rightarrow P_2(y)$.
Wähle $z \triangleq y$ in (A3).
Annahme (A5): $P_1(y)$.
Aus (A4) und (A5) folgt:
Annahme (A6): $P_2(y)$.
Wähle $x \triangleq y$ in (A1).
Annahme (A7): $\neg P_2(y) \vee \neg P_1(y)$.

Fall 1: Annahme (A8.1): $\neg P_2(y)$.
  Aus (A6) und (A8.1) folgt $\perp$ (Widerspruch).
Fall 2: Annahme (A9.1): $\neg P_1(y)$.
  Aus (A5) und (A9.1) folgt $\perp$ (Widerspruch).
Also gilt $(\forall x \,.\, \neg P_2(x) \vee \neg P_1(x)) \rightarrow ((\forall y \,.\, \neg (P_1(y) \rightarrow P_2(y))) \vee (\exists z \,.\, \neg P_1(z)))$.

/Lösung

Aufgabe 3: Induktion

Sei $\mathbb{N}_{\geqslant 5} \triangleq \{ x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 5 \}$. *Beweise per Induktion:* $\forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant 5} \,.\, 2^n > n^2$
Hinweis: Für den Induktionsbeweis darf, ohne eigenen Beweis, folgende Aussage benutzt werden: für $n \geqslant 5$ *gilt* $n^2 > 2n+1$.

Lösung

Sei

$$P(n) \triangleq \left(2^n > n^2\right)$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$\left(\underbrace{P(5)}_{\text{IA}} \wedge \underbrace{\left(\forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant 5} \,.\, P(n) \rightarrow P(n+1)\right)}_{\text{IS}}\right) \rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{N}_{\geqslant 5} \,.\, P(x)\right)$$

IA ($P(5)$**):** $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 5}$.

IV ($P(n)$**):** $2^n > n^2$

IS ($P(n+1)$**):** *Zu Zeigen:* $2^{n+1} > (n+1)^2$.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 \overset{Hinweis}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

/Lösung