Formale Sprachen und Automaten MK02

"Relationen, Abbildungen, Kardinalitäten"

Nadine Karsten

Technische Universität Berlin

Modelle und Theorie Verteilter Systeme

Kann man bei formalen Beweisen beispielsweise Folgendes schreiben: „Sei x ≙ y in (A2), dann folgt Annahme (A3)"?

Wähle $x \triangleq y$

Sei x → Deklaration

A2: $\exists x. P(x)$

Sei x

mit $P(x)$

A2 $\forall x. P(x)$

Wähle $x \triangleq 2$

Ich wollte fragen, wie genau die Angaben beim Führen von Beweisen gemacht werden sollen. Reicht es zum Eintrag in der Formelsammlung zu verweisen (also "0.4.6") oder muss der Titel/Seitenzahl/.. auch angegeben werden?

In der letzten MK hatten Sie im Kahoot den Operatorenvorrang (FS 0.4.2) bei Konjunktion und Disjunktion folgendermaßen abgefragt: A ∧ B ∨ C ∧ D. Ebenfalls hatten Sie uns auf den Wikipedia-Artikel zu Operatorassoziativität hingewiesen, in dem steht: Zum Beispiel sind [in der Logik Konjunktion und Disjunktion] assoziative Operationen. Ich meine im Kahoot war die richtige Antwort, dass die obige Aussage nicht zulässig ist, da kein expliziter Vorrang mit Klammern verdeutlicht ist. Widersprechen sich hier Ihre ("in ForSA verboten!") und die Wikipedia Definition? Oder sind Konjunktion und Disjunktion immer Assoziativ und brauchen deshalb bei (atomaren) Aussagen keine Klammern?

- der Wikipedia-Artikel bezieht sich immer auf einen Operator

$$A \land B \land C \land D \equiv (A \land B) \land (C \land D) \equiv A \land (B \land C) \land D$$

kein Klammern notwendig

- $A \land B \lor C \land D$ benutzt Konjunktion <u>und</u> Disjunktion

Klammern notwendig

Eine Frage zu dem Kahoot Quiz. Ich hatte nicht ganz verstanden am Ende welches der beiden Versionen richtig ist: 1. Die Rechtsassoiziativität: (A -> (B-> (C->D))) oder 2. Die Linksassoziativität: (((A -> B) -> C) -> D) Ich beziehe mich natürlich auf den Kurs, also wie wir es anwenden müssten.

Klammern immer nötig

Formale Sprachen und Automaten MK02

"Kahoot!"

Nadine Karsten

Technische Universität Berlin

Modelle und Theorie Verteilter Systeme

Im SC von Svea zu Relationen, wird die Quizfrage gestellt, ob, wenn eine Relation A,B leer ist, also {}_{A,B} = {}, die Umkehrrelation B,A auch leer sein muss. Die richtige Antwort war hier "unter Umständen". Aber muss die Umkehrrelation per Def. F.S. 0.6.2 nicht auch leer sein? Wenn das kartesische Produkt in die eine Richtung leer ist, ist es dann nicht auch zwingendermaßen in die Andere, auch wenn es nicht die selbe Relation ist? Also wenn R: A,B leer ist, weil eine der beiden Mengen leer ist, dann müsste es doch auch R:B, A sein?

0.6.3 Definition (Relation)

Seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Mengen.
Sei $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$. Dann heißt

$$\underbrace{R}_{\text{Graph}} : \underbrace{(A_1, \ldots, A_n)}_{\text{Typ}}$$

n-*stellige Relation*. Der Spezialfall der 2-stelligen Relation heißt auch *binäre Relation*, alternativ mit Infixschreibweise $a \mathrel{R} b$ für $(a, b) \in R$.

Zwei Relationen $R_A : (A_1, \ldots, A_n)$ und $R_B : (B_1, \ldots, B_m)$ sind *gleich*, falls

1. $n = m$,
2. $\underline{A_i = B_i \text{ für}}$ alle $1 \leqslant i \leqslant n$, und
3. $R_A = R_B$.

$\emptyset_{A,B}$

$\emptyset_{B,A}$

$A = B$

Formale Sprachen und Automaten MK02

"Fragen"

Nadine Karsten

Technische Universität Berlin

Modelle und Theorie Verteilter Systeme

Kann zur Relation dieser Teil erneut erklärt werden? Ich verstehe nicht genau, was es heißt: Aus 0.6.4: • ∅A,B : (A,B) mit ∅A,B ≙ ∅ bezeichnet die leere Relation (mit Typ (A,B)). • ∇A,B : (A,B) mit ∇A,B ≙A×B bezeichnet die universelle Relation bzw. Allrelation (mit Typ (A,B)).

0.6.3 Definition (Relation)

Seien $A_1, \dots, A_n$ beliebige Mengen.
Sei $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$. Dann heißt

$$\underbrace{R}_{\text{Graph}} : \underbrace{(A_1, \dots, A_n)}_{\text{Typ}}$$

n-*stellige Relation*. Der Spezialfall der 2-stelligen Relation heißt auch *binäre Relation*, alternativ mit Infixschreibweise $a\ R\ b$ für $(a, b) \in R$.

Zwei Relationen $R_A : (A_1, \dots, A_n)$ und $R_B : (B_1, \dots, B_m)$ sind *gleich*, falls

1. $n = m$,
2. $A_i = B_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, und
3. $R_A = R_B$.

$A = \{1\} \quad B = \{a, b\}$

0.6.4 Definition (Spezialfälle)

Seien A und B beliebige Mengen.

- $\emptyset_{A,B} : (A, B) \quad$ mit $\quad \emptyset_{A,B} \triangleq \emptyset$
  bezeichnet die *leere Relation* (mit Typ (A, B)).
- $\nabla_{A,B} : (A, B) \quad$ mit $\quad \nabla_{A,B} \triangleq A \times B$
  bezeichnet die *universelle Relation* bzw. *Allrelation* (mit Typ (A, B)).

$\emptyset_{A,B} = \{\ \}$

$\nabla_{A,B} = \{(1,a), (1,b)\}$

Wenn der Typ implizit klar ist, kann der Index weggelassen werden.

Fragen zur Definiton von Relationen: 1.) Solange alle Elemente von R aus (A x B) sind, handelt es sich um eine Relation, egal wie viele Elemente es sind? 2.) Es reicht aber auch, wenn wir nur ein Tupel (x,y) in R haben mit x€A und y€B damit R: (A,B) eine binäre Relation ist? Bzw. wäre die leere Relation auch eine Relation von A und B?

1. $R_{=} \triangleq \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a=b\}$

2. $R_{=0} \triangleq \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a+b=0\}$

$R_{=-1} \triangleq \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a+b=-1\}$

Eine Frage zum Vergleich von Mengengrößen: Beschreiben die Begriffe "isomorph" und "äquipotent" den gleichen Zusammenhang? Beide setzen ja lediglich vorraus, dass eine Bijektion vom Typ A->B zwischen zwei Mengen A,B existiert.

0.7.7 Definition (Isomorphie)
Seien A und B zwei Mengen. Wenn eine Bijektion $f : A \to B$ existiert, dann heißen A und B *isomorph*, geschrieben $A \cong B$.

Bijektion $f: A \to B \Rightarrow A$ und B isomorph

0.9.3 Definition (Kardinalität; Vergleich von Mengengrößen)
Seien A und B zwei Mengen.

1. A und B haben die gleiche Kardinalität, geschrieben $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$, falls es eine *Bijektion* vom Typ $A \to B$ gibt. A und B heißen dann auch *äquipotent*.

Bijektion $f: A \to B \Rightarrow (\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$
$\wedge$ A und B äquipotent