Zusatzaufgaben 0

Aufgabenformulierungen Es gibt verschiedene Formulierungen in ForSA.

- *Begründe:* — Eine textuelle Erläuterung soll angegeben werden. Ein Beweis ist zulässig, aber nicht notwendig. Es muss ein klarer und logischer Argumentationsweg erkennbar sein.
- *Beweise:* — Ein formaler Beweis soll angegeben werden. Dabei muss jeder Schritt einzeln ausgeführt und begründet werden.

Aufgabe 1: Beweisen mit dem (prädikaten-)logischen Kalkül

In den folgenden Teilaufgaben sind drei prädikatenlogische Formeln mit je einem Beweisvorschlag für diese angegeben. Alle angegeben Vorschläge enthalten Fehler.
Finde die Fehler und *begründe*, warum es sich hierbei um Fehler handelt. *Beweise* anschließend die Aussage im prädikatenlogischen Kalkül.

1.a) Wir wollen beweisen: Wenn die Tatsache X die Tatsache Y impliziert und die Tatsache Y die Tatsache Z impliziert, dann können wir unter der Annahme von X folgern, dass auch Z gelten muss. Wir formalisieren die Aussage wie folgt:

Zu Zeigen (Z1): $(X \to Y) \land (Y \to Z) \to (X \to Z)$.

Beweis:
Zu Zeigen (Z1): $(X \to Y) \land (Y \to Z) \to (X \to Z)$.
Zu Zeigen (Z2): $X \to Y$.
Zu Zeigen (Z3): $(Y \to Z) \to (X \to Z)$.
Annahme (A1): Y.
Zu Zeigen (Z4): X.
Annahme (A2): $Y \to Z$.
Zu Zeigen (Z5): $X \to Z$.
Annahme (A3): X.
Zu Zeigen (Z6): Z.
Aus (A3) folgt (Z4).
Aus (A1) und (A2) folgt:
Annahme (A4): Z.
Aus (A4) folgt (Z6).

1.b) Wir wollen beweisen: Wenn die Tatsache X oder die Tatsache Y gilt und die Tatsache Y die Tatsache Z impliziert, dann gilt entweder X oder Z. Wir formalisieren die Aussage wie folgt:

Zu Zeigen (Z1): $(X \lor Y) \land (Y \to Z) \to X \lor Z$.

Beweis:
Zu Zeigen (Z1): $(X \lor Y) \land (Y \to Z) \to X \lor Z$.
Annahme (A1): $(X \lor Y) \land (Y \to Z)$.
Annahme (A2): $X \lor Y$.
Annahme (A3): $Y \to Z$.
Zu Zeigen (Z2): $X \lor Z$.
Zu Zeigen (Z3): X.

Fall 1: Annahme (A3.1): X.
Aus (A3.1) folgt (Z3).
Fall 2: Annahme (A4.1): Y.
Aus (A3.1) folgt (Z3).

1.c) Wir wollen beweisen: Wenn für alle Elemente y das Prädikat P_1 gilt, dann gilt für alle Elemente x, dass ein Element z existiert, sodass wenn P_2 für z gilt, dann P_1 für x und P_2 für z gilt. Wir formalisieren die Aussage wie folgt:

Zu Zeigen (Z1): $(\forall y \,.\, P_1(y)) \rightarrow (\forall x \,.\, \exists z \,.\, (P_2(z) \rightarrow (P_1(x) \wedge P_2(z))))$.

Beweis:
Zu Zeigen (Z1): $(\forall y \,.\, P_1(y)) \rightarrow (\forall x \,.\, \exists z \,.\, (P_2(z) \rightarrow (P_1(x) \wedge P_2(z))))$.
Annahme (A1): $\forall y \,.\, P_1(y)$.
Zu Zeigen (Z2): $(\forall x \,.\, \exists z \,.\, (P_2(z) \rightarrow (P_1(x) \wedge P_2(z))))$.
Wähle $y \triangleq x$ in (A1).
Annahme (A2): $P_1(x)$.
Sei x in (Z2).
Zu Zeigen (Z3): $\exists z \,.\, (P_2(z) \rightarrow (P_1(x) \wedge P_2(z)))$.
Sei y in (Z3).
Zu Zeigen (Z4): $P_2(y) \rightarrow (P_1(x) \wedge P_2(y))$.
Annahme (A3): $P_2(y)$.
Zu Zeigen (Z5): $(P_1(x) \wedge P_2(y))$.
Zu Zeigen (Z6): $P_1(x)$.
Aus (A2) folgt (Z6).