Zusatzaufgaben 1

Aufgabe 1: Aussagenlogik

1.a) *Beweise* nur mit Hilfe von Äquivalenzumformungen, dass $(p \to \neg q) \land \neg (p \land r)$ und $\neg ((q \lor r) \land p)$ logisch äquivalent sind.

1.b) *Beweise oder widerlege* mit Hilfe einer Wahrheitstabelle:

$$(p \to q) \land (p \lor \neg q) \equiv \neg (\neg p \leftrightarrow q)$$

1.c) *Beweise oder widerlege:* $(p \land q) \lor r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$.

1.d) *Beweise oder widerlege* mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass $(q \land (\neg q \lor p)) \to p$ allgemeingültig ist.

1.e) *Beweise oder widerlege* mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass $(p \land (q \lor \neg r)) \leftrightarrow p$ ist erfüllbar.

1.f) *Beweise oder widerlege* mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass $(p \to q) \leftrightarrow p \land \neg q$ erfüllbar ist.

Aufgabe 2: Prädikatenlogik, Widerspruch und Kontraposition

2.a) *Beweise:* $\forall y \,.\, \forall z \,.\, (\exists! x \,.\, P(x)) \land (P(y) \land P(z)) \to y = z$ für das einstellige Prädikat P.

2.b) *Beweise:* $(\exists x \,.\, P_1(x) \to P_2(x)) \to ((\forall y \,.\, P_1(y)) \to \exists z \,.\, P_2(z))$ für die einstelligen Prädikate P_1 und P_2.

2.c) *Beweise:* $(\forall x \in \mathbb{N} \,.\, P(x) \to P(x+1)) \land (\exists n \in \mathbb{N} \,.\, P(n)) \to \exists y \in \mathbb{N} \,.\, P(y) \land P(y+1)$ für das einstellige Prädikat P über natürlichen Zahlen.

2.d) *Beweise per Widerspruch:* Es gibt unendlich viele Primzahlen.

2.e) *Beweise per Widerspruch:* $\sqrt{2}$ ist irrational.
Hinweis: Eine Zahl r ist rational, falls es einen vollständig gekürzten Bruch $\frac{n}{m}$ gibt mit $r = \frac{n}{m}$.

2.f) *Beweise per Kontraposition:* Für aussagenlogische Formeln ψ, χ gilt:

$$\neg (\neg (\chi \to \bot) \land (\psi \to \bot)) \equiv \top \Rightarrow (\chi \equiv \bot \text{ oder } \psi \not\equiv \bot)$$

2.g) *Beweise per Kontraposition:*

$$(\exists x \in \mathbb{Z} \,.\, \neg P_1(x) \land \neg P_2(x)) \to$$
$$(\exists y \in \mathbb{Z} \,.\, \neg (P_1(y-1) \lor P_2(y))) \lor (\exists z \in \mathbb{Z} \,.\, \neg (P_2(z) \to P_2(z-1)))$$

für die einstelligen Prädikate P_1 und P_2 über ganzen Zahlen.

Aufgabe 3: Induktion

3.a) Gegeben sei die Funktion $\text{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zur Berechnung der Fibonacci Folge mit:

$$\text{fib}(n) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 0 \\ 1 & \text{, falls } n = 1 \\ \text{fib}(n-2) + \text{fib}(n-1) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Beweise per Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \sum_{k=0}^{n} \text{fib}(k) = \text{fib}(n+2) - 1$

3.b) Sei $\mathbb{N}_{*3} \triangleq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \mod 3 = 0 \,\}$. *Beweise per Induktion:* $\forall n \in \mathbb{N}_{*3} \,.\, (\text{fib}(n+2) \mod 2 = 0)$
Hinweis: $\forall x, y, z \,.\, (x + y) \mod z = ((x \mod z) + (y \mod z)) \mod z$ *(H2)*

3.c) *Beweise per Induktion* die Aussage $\forall x \in \mathbb{Z} \,.\, f(x) = -x$, wobei:

$$f(x) = \begin{cases} f(x+1) + 1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ f(x-1) - 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$