Tutorium 2

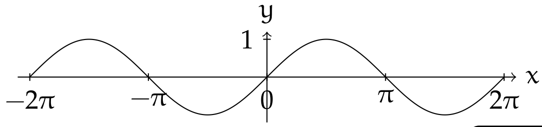
Aufgabe 1: Abbildungen vs. Relation (Grundlagen)

Gib an: Welche der Eigenschaften (linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, rechtseindeutig) haben die folgenden Relationen?
Gib an: Welche der Eigenschaften (surjektiv, injektiv, bijektiv) haben die folgenden Relationen, bei denen es sich um partielle Abbildungen handelt, außerdem?

1.a) $\sin : \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$

Lösung

- Die Relation ist linkstotal.
- Die Relation ist rechtseindeutig, also eine Abbildung.
- Die Relation ist nicht rechtstotal bzw. (als partielle Abbildung) nicht surjektiv: 2 ist nicht im Bild: $2 \notin \sin(\mathbb{R})$
- Die Relation ist nicht linkseindeutig bzw. (als partielle Abbildung) nicht injektiv: $\sin(\pi) = 0 = \sin(0)$
- Die Relation ist somit (als partielle Abbildung) nicht bijektiv.

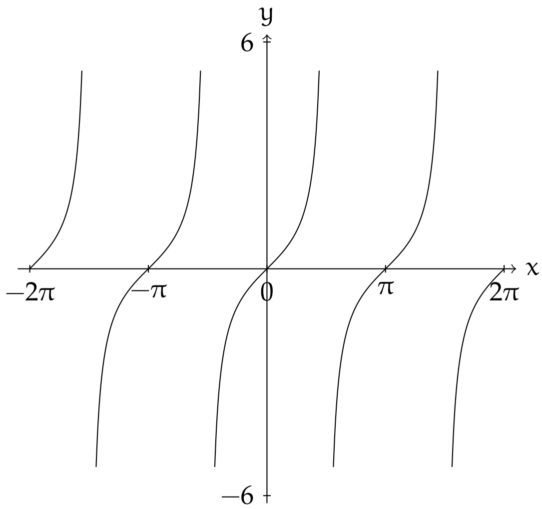


/Lösung

1.b) $\tan : \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$

Lösung

- Die Relation ist nicht linkstotal: $\frac{\pi}{2} \notin \mathrm{Def}(\tan)$.
- Die Relation ist rechtseindeutig, also eine partielle Abbildung.
- Die Relation ist rechtstotal also auch (als partielle Abbildung) surjektiv.
- Die Relation ist nicht linkseindeutig bzw. (als partielle Abbildung) nicht injektiv: $\tan(\pi) = \tan(0) = 0$
- Die Relation ist somit (als partielle Abbildung) nicht bijektiv.



/Lösung

1.c) $R_1 : (\{ a, b, c, d \}, \{ e, f, g \})$ mit $R_1 \triangleq \{ (c, e), (d, f), (a, f), (b, g) \}$

Lösung

- Die Relation ist linkstotal.
- Die Relation ist rechtseindeutig, also eine Abbildung.
- Die Relation ist rechtstotal bzw. (als partielle Abbildung) surjektiv.
- Die Relation ist nicht linkseindeutig bzw. (als partielle Abbildung) nicht injektiv: $(d, f), (a, f) \in R_1$
- Die Relation ist somit (als partielle Abbildung) nicht bijektiv.

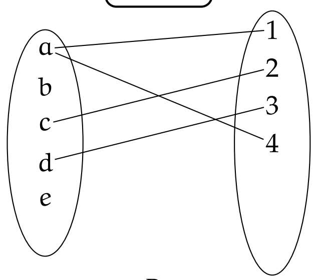
/Lösung

Aufgabe 2: Relationen

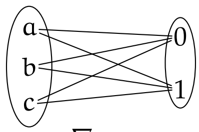
Gegeben seien die Mengen $A \triangleq \{ 0, 1 \}$, $B \triangleq \{ a, b, c, d, e \}$, $C \triangleq \{ 1, 2, 3, 4 \}$ und $D \triangleq \{ a, b, c \}$, sowie die Relation $R_2 : (B, C)$ mit $R_2 \triangleq \{ (a, 1), (c, 2), (d, 3), (a, 4) \}$

2.a) *Gib* die Relation R_2 graphisch *an*.
Gib die Relationen $\nabla_{D,A}$ und $\emptyset_{A,D}$ jeweils graphisch und in Mengenschreibweise *an*.

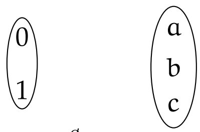
Lösung



R_2



$\nabla_{D,A}$



$\emptyset_{A,D}$

$\nabla_{D,A} = \{ (a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1) \}$
$\emptyset_{A,D} = \emptyset$

/Lösung

2.b) *Widerlege:* R_2 ist linkstotal.

Lösung

$b \in B$ aber es gibt kein $y \in C$, so dass $(b, y) \in R_2$. Also ist R_2 nicht linkstotal.

/Lösung

2.c) *Widerlege:* R_2 ist rechtseindeutig.

Lösung

$(a, 1) \in R_2$ und $(a, 4) \in R_2$, aber $1 \neq 4$. Also ist R_2 nicht rechtseindeutig.

/Lösung

Aufgabe 3: Umkehrung und Komposition

3.a) *Widerlege:* Für alle totalen Funktionen $f : A \to B$ mit beliebigen Mengen A und B gilt, f^{-1} ist surjektiv.

Lösung

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines Gegenbeispiels.
Wir wählen die Mengen A und B mit: $A \triangleq \{ 1, 2 \}$, $B \triangleq \{ 0 \}$

Wähle $f : A \to B$ mit $f \triangleq \{ (1,\ 0),\ (2,\ 0) \}$.

f ist per Definition eine totale Funktion. Die Umkehrrelation $f^{-1} \overset{\text{Def. }^{-1}}{=} \{ (0,\ 1),\ (0,\ 2) \}$ ist nicht rechtseindeutig, da $(0,\ 1), (0,\ 2) \in f^{-1}$, aber $1 \neq 2$ und daher keine partielle Abbildung. Surjektivität ist nur für partielle Abbildungen definiert. Somit ist die Aussage widerlegt.

/Lösung

3.b) *Beweise:* Für alle Mengen X, Y, Z und alle Relationen $R : (X,\ Y)$ und $S : (Y,\ Z)$ gilt $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.
Hinweis: Ihr dürft die folgende Gleichheit verwenden:

$$(a, b) \in R = (b, a) \in R^{-1} \tag{H}$$

Lösung

Seien X, Y, Z Mengen, R eine Relation mit $R : (X,\ Y)$ und S eine Relation mit $S : (Y,\ Z)$.

$$\begin{aligned}
&(RS)^{-1} \\
\overset{\text{Def. }^{-1}}{=}\ &\{ (c,\ a) \mid (a,\ c) \in RS \} \\
\overset{\text{Def. };}{=}\ &\{ (c,\ a) \mid (a,\ c) \in \{ (x,\ z) \in R \mid \exists y \in Y .\ (x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in S \} \} \\
\overset{\text{Prop. 0.3.5}}{=}\ &\{ (c,\ a) \mid \exists b \in Y .\ (a,\ b) \in R \wedge (b,\ c) \in S \} \\
\overset{\text{H}}{=}\ &\{ (c,\ a) \mid \exists b \in Y .\ (b,\ a) \in R^{-1} \wedge (c,\ b) \in S^{-1} \} \\
\overset{\text{Komm.}}{=}\ &\{ (c,\ a) \mid \exists b \in Y .\ (c,\ b) \in S^{-1} \wedge (b,\ a) \in R^{-1} \} \\
\overset{\text{Def. };}{=}\ &S^{-1}R^{-1}
\end{aligned}$$

/Lösung

Aufgabe 4: Größe von Mengen und Kardinalität

4.a) Wie kann man die Größe von zwei unendlichen Mengen vergleichen?

Lösung

Dafür wurde der Begriff *Kardinalität* eingeführt. Seien $A,\ B$ zwei Mengen:

- A und B haben die gleiche Kardinalität, $\text{card}(A) = \text{card}(B)$, falls es eine *Bijektion* vom Typ $A \to B$ gibt.
- A hat höchstens die Kardinalität von B, $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$, falls es eine *injektive* Funktion vom Typ $A \to B$ gibt.
- A hat mindestens die Kardinalität von B, $\text{card}(A) \geqslant \text{card}(B)$, falls es eine *surjektive* Funktion vom Typ $A \to B$ gibt.
- A hat eine echt kleinere Kardinalität als B, $\text{card}(A) < \text{card}(B)$, falls $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$ und $\text{card}(A) \neq \text{card}(B)$

Die letzte Zeile heißt, dass damit die Kardinalität von A echt kleiner ist als die von B, also muss es eine injektive Funktion vom Typ $A \to B$ geben, aber es gibt keine surjektive Funktion $f : A \to B$ und somit auch keine Bijektion.

/Lösung

4.b) *Beweise:* $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Z})$

Lösung

Behauptung: Wir geben eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ an.

$$x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & ,\ x \bmod 2 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} & ,\ x \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

Die Funktion f ist für jedes $x \in \mathbb{N}$ eindeutig definiert und bildet ausschließlich auf ganze Zahlen ab. (Wir begründen den Typ von f.)

Wir geben eine weitere Funktion $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ an.

$$x \mapsto \begin{cases} -2x & , x \leqslant 0 \\ 2x-1 & , x > 0 \end{cases}$$

Die Funktion g ist für jedes $x \in \mathbb{Z}$ eindeutig, da die Fallunterscheidung so gewählt ist, dass für jede ganze Zahl nur eine eindeutige natürliche Zahl als Ergebnis möglich ist.

Zu Zeigen (Z1): Bijektion(f).
Wenn $f \circ g = \Delta_{\mathbb{Z}}$ und $g \circ f = \Delta_{\mathbb{N}}$, dann ist laut Formelsammlung 0.7.8 f eine Bijektion.
Teil 1: *Zu Zeigen (Z1.1):* $\forall x \in \mathbb{Z} \,.\, (f \circ g)(x) = \Delta_{\mathbb{Z}}(x)$.
Sei $x \in \mathbb{Z}$ (beliebig aber fest).
Fall 1: $x \leqslant 0$

$$(f \circ g)(x) \overset{\text{Def. }\circ}{=} f(g(x)) \overset{\text{Def. } g,\, x \leqslant 0}{=} f(-2x) \overset{\substack{\text{Def. } f,\\ (-2x) \bmod 2 = 0}}{=} -\frac{-2x}{2} = x \overset{\text{Def. }\Delta}{=} \Delta_{\mathbb{Z}}(x)$$

Fall 2: $x > 0$

$$(f \circ g)(x) \overset{\text{Def. }\circ}{=} f(g(x)) \overset{\text{Def. } g,\, x > 0}{=} f(2x-1) \overset{\substack{\text{Def. } f,\\ (2x-1) \bmod 2 = 1}}{=} \frac{(2x-1)+1}{2} = x \overset{\text{Def. }\Delta}{=} \Delta_{\mathbb{Z}}(x)$$

Teil 2: *Zu Zeigen (Z2.1):* $\forall x \in \mathbb{N} \,.\, (g \circ f)(x) = \Delta_{\mathbb{N}}(x)$.
Sei $x \in \mathbb{N}$ (beliebig aber fest).
Fall 1: $x \bmod 2 = 0$

$$(g \circ f)(x) \overset{\text{Def. }\circ}{=} g(f(x)) \overset{\substack{\text{Def. } f,\\ x \bmod 2 = 0}}{=} g(-\frac{x}{2}) \overset{\text{Def. } g,\, x \leqslant 0}{=} -2(-\frac{x}{2}) = x \overset{\text{Def. }\Delta}{=} \Delta_{\mathbb{N}}(x)$$

Fall 2: $x \bmod 2 = 1$

$$(g \circ f)(x) \overset{\text{Def. }\circ}{=} g(f(x)) \overset{\substack{\text{Def. } f,\\ x \bmod 2 = 1}}{=} g(\frac{x+1}{2}) \overset{\text{Def. } g,\, x > 0}{=} 2(\frac{x+1}{2}) - 1 = x \overset{\text{Def. }\Delta}{=} \Delta_{\mathbb{N}}(x)$$

Da wir Z1.1 und Z2.1 gezeigt haben, gilt: f ist eine Bijektion. Somit gilt die Aussage.

/Lösung

Lösung

Alternative Lösung:
Wir benutzen die bereits angegebene Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
Zu Zeigen (Z1): bijektiv(f).
Wir beweisen injektiv(f) und surjektiv(f). (nach Formelsammlung)

- *Zu Zeigen (Z1.1):* injektiv(f).
  Zu Zeigen (Z1.2): $\forall x, y \in \mathbb{N} \,.\, \forall b \in \mathbb{Z} \,.\, f(x) = b \wedge f(y) = b \to x = y$.
  Seien $x, y \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$ (beliebig aber fest).
  Annahme (A1): $f(x) = b \wedge f(y) = b$.
  Zu Zeigen (Z1.3): $x = y$.
  Annahme (A2): $f(x) = f(y)$. (aus A1)
  Wir machen eine Fallunterscheidung.
  Fall 1: $x \bmod 2 = 0$, $y \bmod 2 = 0$

$$\begin{aligned} & f(x) = f(y) \\ \overset{\text{Def. } f}{\Rightarrow}\; & -\frac{x}{2} = -\frac{y}{2} \\ \Rightarrow\; & x = y \end{aligned}$$

Fall 2: $x \bmod 2 = 1, y \bmod 2 = 0$

$$\begin{aligned} & f(x) = f(y) \\ \overset{\text{Def. } f}{\Rightarrow} \; & \frac{x+1}{2} = -\frac{y}{2} \end{aligned}$$

Es gilt $0 < \frac{x+1}{2} = -\frac{y}{2} \leqslant 0$.
Dies ist offensichtlich falsch. Damit ist dieser Fall nicht eintrifft.

Fall 3: $x \bmod 2 = 0, y \bmod 2 = 1$

$$\begin{aligned} & f(x) = f(y) \\ \overset{\text{Def. } f}{\Rightarrow} \; & -\frac{x}{2} = \frac{y+1}{2} \end{aligned}$$

Es gilt $0 \geqslant -\frac{x}{2} = \frac{y+1}{2} > 0$.
Dies ist offensichtlich falsch. Damit ist dieser Fall nicht eintrifft.

Fall 4: $x \bmod 2 = 1, y \bmod 2 = 1$

$$\begin{aligned} & f(x) = f(y) \\ \overset{\text{Def. } f}{\Rightarrow} \; & \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{2} \\ \Rightarrow \; & x = y \end{aligned}$$

- *Zu Zeigen (Z2.1):* surjektiv(f).
  $Z2.1 \overset{\text{Def. surjektiv}}{\equiv} \forall x \in \mathbb{Z} \,.\, \exists n \in \mathbb{N} \,.\, f(n) = x$
  Sei $x \in \mathbb{Z}$.
  Zu Zeigen (Z2.2): $\exists n \in \mathbb{N} \,.\, f(n) = x$.
  Wir machen eine Fallunterscheidung.
  Fall 1: $x \leqslant 0$. Wähle $n \triangleq -2x$ mit $-2x \in \mathbb{N}$.
  Zu Zeigen (Z2.1.1): $f(-2x) = x$.

$$f(-2x) \overset{\substack{\text{Def. } f, \\ (-2x) \bmod 2 = 0}}{=} -\frac{-2x}{2} = x$$

  Fall 2: $x > 0$. Wähle $n \triangleq 2x - 1$ mit $2x - 1 \in \mathbb{N}$.
  Zu Zeigen (Z2.2.1): $f(2x - 1) = x$.

$$f(2x-1) \overset{\substack{\text{Def. } f, \\ (2x-1) \bmod 2 = 1}}{=} \frac{2x-1+1}{2} = x$$

Da f total, injektiv und surjektiv ist, ist f eine Bijektion. Somit gilt die Aussage.

/Lösung