# Aussagen- und Prädikatenlogik

Im Umgang mit Logik unterscheiden wir drei Ebenen:

| Ebene | erlaubte Symbole | Beschreibung |
|---|---|---|
| Beweisebene | $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ | zum Trennen von Beweisschritten<br>Schritte mit Formeln und natürlicher Sprache<br>$[\![ p \to q ]\!]^\beta = 1 \overset{\text{Def.}\to}{\Leftrightarrow} [\![ p ]\!]^\beta = 0$ oder $[\![ q ]\!]^\beta = 1$ |
| Logische Äquivalenzen | $\equiv$ | zum Umformen von Formeln<br>$\neg(\neg p \wedge \neg p) \overset{\text{Idempotenz von } \wedge}{\equiv} \neg\neg p \overset{\text{doppelte Negation}}{\equiv} p$ |
| Formelebene | $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \to,$<br>$\leftrightarrow, \forall, \exists, (, )$<br>Variablen: $x, p, \ldots$<br>Funktionssymb.: $f, g, \ldots$<br>Prädikatssymb.: $\mathrm{P}, \mathrm{P}_1, \ldots$ | zum Aufbauen von Formeln |

Aussagen, die als logische Formeln angegeben sind, können wir beweisen, in dem wir die folgenden Regeln zum Eliminieren von Junktoren benutzen. Dabei wird immer der äußerste Junktor einer (Teil-)Formel eliminiert.

| Junktor | in der Annahme (A1) | im Ziel (*Z1*) |
|---|---|---|
| $\mathrm{P}_1(x) \wedge \mathrm{P}_2(y)$ | Annahme (A2): $\mathrm{P}_1(x)$.<br>Annahme (A3): $\mathrm{P}_2(y)$. | Verzweigung<br>Teil 1: *Zu Zeigen (Z2.1):* $\mathrm{P}_1(x)$ .<br>Teil 2: *Zu Zeigen (Z3.1):* $\mathrm{P}_2(y)$ . |
| $\mathrm{P}_1(x) \vee \mathrm{P}_2(y)$ | Verzweigung<br>Fall 1: Annahme (A2.1): $\mathrm{P}_1(x)$.<br>Fall 2: Annahme (A3.1): $\mathrm{P}_2(y)$. | *Zu Zeigen (Z2):* $\mathrm{P}_\mathrm{i}(z)$ .<br>(wähle eines der Ziele) |
| $\mathrm{P}_1(x) \to \mathrm{P}_2(y)$ | (braucht Annahme (A0): $\mathrm{P}_1(x)$.)<br>Aus (A1) und (A0) folgt<br>Annahme (A3): $\mathrm{P}_2(y)$. | Annahme (A1): $\mathrm{P}_1(x)$.<br>*Zu Zeigen (Z2):* $\mathrm{P}_2(y)$ . |
| $\forall x \in M\ .\ \mathrm{P}(x)$ | Wähle $x \triangleq 5$ mit $5 \in M$ in (A1).<br>Annahme (A2): $\mathrm{P}(5)$.<br>(auch mehrfach wählen erlaubt) | Sei $x \in M$ in *Z1*.<br>*Zu Zeigen (Z2):* $\mathrm{P}(x)$ .<br>($x$ ist beliebiger Variablenname) |
| $\exists x \in M\ .\ \mathrm{P}(x)$ | Sei $x \in M$ in (A1).<br>Annahme (A2): $\mathrm{P}(x)$.<br>($x$ ist beliebiger Variablenname) | Wähle $x \triangleq 5$ mit $5 \in M$ in *Z1*.<br>*Zu Zeigen (Z2):* $\mathrm{P}(5)$ .<br>(zeige $\mathrm{P}$ für ein gewähltes $x$) |

**Spezialfall:** Als zusätzliche Schlussregel haben wir im Widerspruchsbeweis:
*Zu Zeigen (Z1):* $Q(x)$.
Annahme (A0): $\neg Q(x)$.
$\vdots$
Annahme (A1): $\mathrm{P}(x)$.
Annahme (A2): $\neg\,\mathrm{P}(x)$.
*Zu Zeigen (Z2):* $\bot$. folgt aus A2 und A3

Wir nummerieren Ziele und Annahmen durch. Beweisschritte können ein Ziel $\boxed{\textit{Zu Zeigen (Zn):}\ \mathrm{P}\ .}$ durch ein Ziel $\boxed{\textit{Zu Zeigen (Zn+1):}\ \mathrm{P}'\ .}$ ersetzen. Das ältere Ziel kann damit als erledigt betrachtet werden. Annahmen werden dagegen im Laufe eines Beweises nur ergänzt. Nach jedem Beweisschritt können also alle bisherigen Annahmen benutzt werden, um das aktuelle Ziel zu zeigen, also das Ziel mit dem höchsten Index. Konjunktionen im Ziel oder Disjunktionen in den Annahmen verzweigen einen Beweis, so dass jeder Zweig seine eigenen Annahmen und sein eigenes Ziel haben kann. Wir benutzen dafür Nummerierungen mit '.', wie z.B. A1.1, A1.2.1, ... und *Z1.1*, *Z1.2.1*, ....