ここではポアソン分布のパラメタ推定にベイズ統計を使います。ポアソン分布の自然共役事前分布はガンマ分布で、事後分布もガンマ分布になります。

ポアソン分布 (ただし、に従う個のデータについて、の事前分布としてガンマ分布をとると、その事後分布はになる。ここで、

である(涌井、身に付くベイズ統計学, p180)

1. の事後分布算出

ポアソン分布の尤度関数：

は観測データ

ガンマ事前分布 :

ベイズの定理 :

上記の式から事後分布はガンマ分布になるので、

となり、の事後分布は

1. 得られたの事後分布からのMAP（Maximum A Posteriori）推定

MAP推定は事後分布を最大化するの値を見つけることです。

ガンマ分布の場合は、のとき

となる。ガンマ分布の最大値はそのモード(最頻値)となる性質がある。

1. 事後予測分布の算出

事後予測分布の式：

(ポアソン分布のパラメータがガンマ分布に従う場合、結果として得られる事後予測分布は負の二項分布（またはポリヤ分布）になります。)

負の二項分布の確率質量関数（PMF）:

1. MCMCでのサンプリング(事後予測分布のサンプリング)

[例題]

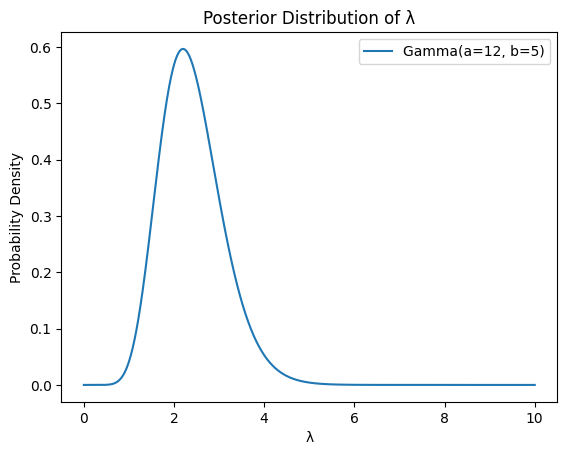
ある交通のカウントデータがポアソン分布に従うとして、一日あたりの平均交通量 に関する情報を更新したいとします。事前分布 がガンマ分布に従うと考え、そのパラメータを （形状パラメータ）、（レートパラメータ）とします。

ある日の交通量のカウントデータ*X*=(3,2,1,4) を観測した場合、この情報を用いて の事後分布を求めてください。

(解答)

事後分布のパラメタ

観測データ*X*=(3,2,1,4) をもとに更新した後の の事後分布はガンマ分布 Γ(12,5)となる。



MAP推定値:

事後予測分布

を代入し、分布を描くと図のようになる。

グラフ, ヒストグラム

自動的に生成された説明

MCMCでの実施

グラフィカル ユーザー インターフェイス が含まれている画像

自動的に生成された説明

ダイアグラム

自動的に生成された説明

テーブル

中程度の精度で自動的に生成された説明

グラフィカル ユーザー インターフェイス, アプリケーション

自動的に生成された説明

グラフ

自動的に生成された説明

ソースコード：

<https://colab.research.google.com/drive/1XxuN3GCkE4IHqmB4-23E1UjocyCrH9PF?usp=sharing>

[Bakery Sales Dataset]

Market Basket Analysis : Association Rule Mining

https://www.kaggle.com/datasets/akashdeepkuila/bakery/

データセット : [Bakery.csv](https://jtnd-my.sharepoint.com/:x:/g/personal/s_mizuno_kc_m_juntendo_ac_jp/EeYNcHdFbe5PtWYhaNhuWckB8zV7aURIWI_bgzwT2Ft02Q?e=gvwby3)

データには以下の列が含まれています：

* TransactionNo：トランザクションの番号。
* Items：購入されたアイテム。
* DateTime：トランザクションの日時。
* Daypart：一日の中での時間帯（例：朝、午後）。
* DayType：日のタイプ（平日または週末）。

159日間での平均来客数は約59.5人、標準偏差は約19.0人です。最小来客数は1人で、最大来客数は139人です。

ソースコード https://colab.research.google.com/drive/1pJFD7VPhDY50Bh3uJvOl3en8Z-SN\_FNP?usp=sharing

1. 事後分布の導出

1日あたりの来客数はポアソン分布(パラメタ:)に従うとする。事前分布をガンマ分布()とし、事後分布を求める。

事前分布は

となる。ポアソン分布の尤度関数は、日間の来客数データが与えられた場合、

となる。この尤度と事前分布より、事後分布を算出する。

事後分布がガンマ分布であることを示しています。

今回の事前分布とデータで事後分布パラメタを求めると

となる。

1. MAP推定値

の事後確率がガンマ分布に従う場合、確率密度関数が最大となる点は、形状パラメータと尺度パラメータに基づいて計算されます。

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

事後予測分布

グラフ, ヒストグラム

自動的に生成された説明

MCMCを使う場合

グラフ, ヒストグラム

自動的に生成された説明

ダイアグラム

自動的に生成された説明

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明