

1. 补充去除激光雷达运动畸变模块的代码；(6 分)

```
//TODO
//W为世界坐标系（odom坐标系），B为激光起始坐标系，S-E为激光采样过程中变化的坐标系（start to end frame），B和S-E都是激光坐标系，只是在不同的时间
//B   W -1   W   S-E
// P = T   *   T *   P
//     B       S-E
for(int i = 0; i < beam_number; ++i)
{
    double x = ranges[startIndex+i] * cos(angles[startIndex+i]);
    double y = ranges[startIndex+i] * sin(angles[startIndex+i]);

    tf::Vector3 v = frame_start_pose.getOrigin().lerp(frame_end_pose.getOrigin(), (double)i/(beam_number-1));
    tf::Quaternion q = frame_start_pose.getRotation().slerp(frame_end_pose.getRotation(), (double)i/(beam_number-1));

    tf::Vector3 v_cal = frame_base_pose.inverse() * tf::Transform(q, v) * tf::Vector3(x, y, 1);

    ranges[startIndex+i] = sqrt(v_cal.getX()*v_cal.getX() + v_cal.getY()*v_cal.getY());
    angles[startIndex+i] = atan2(v_cal.getY(), v_cal.getX());

    // double yawW = tf::getYaw(q);
    // double xW = x * cos(yawW) - y * sin(yawW) + v.getX();
    // double yW = x * sin(yawW) + y * cos(yawW) + v.getY();

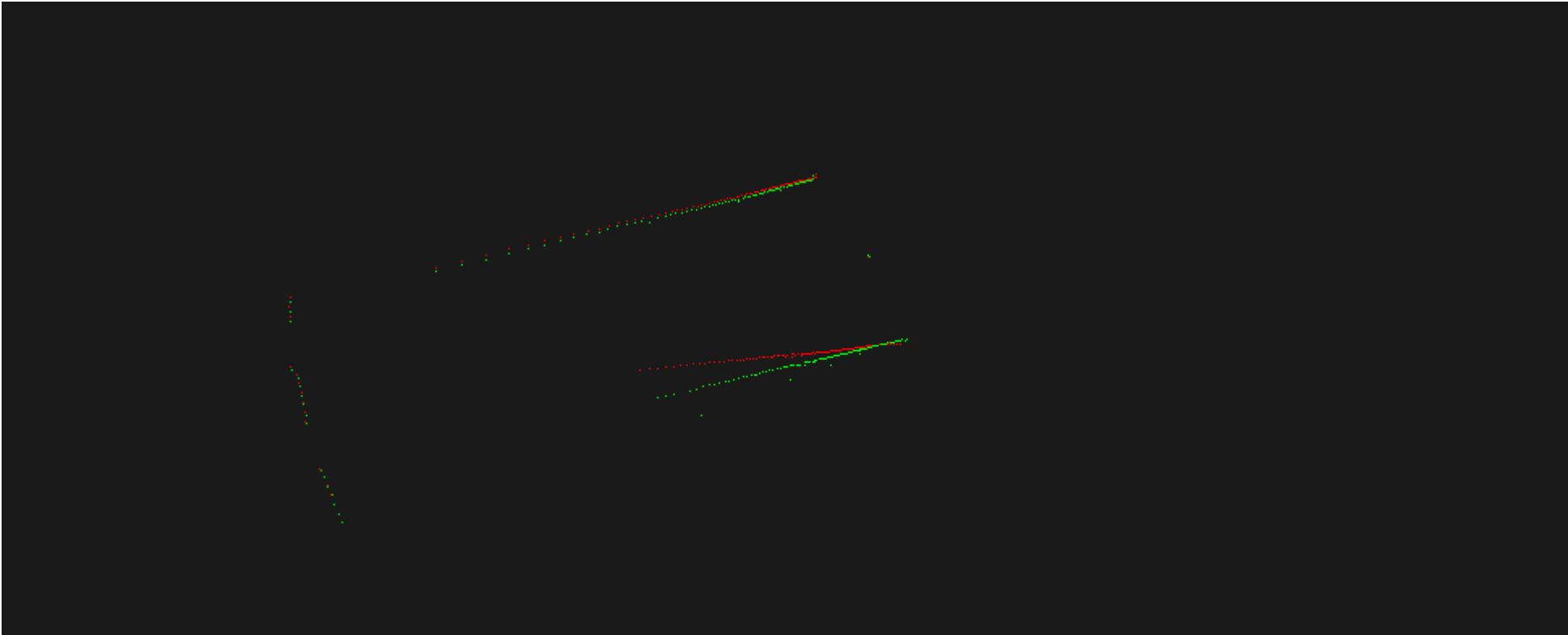
    // double yawB = tf::getYaw(frame_base_pose.getRotation());
    // double xB = (xW - frame_base_pose.getOrigin().getX()) * cos(yawB) + (yW - frame_base_pose.getOrigin().getY()) * sin(yawB);
    // double yB = -(xW - frame_base_pose.getOrigin().getX()) * sin(yawB) + (yW - frame_base_pose.getOrigin().getY()) * cos(yawB);

    // ranges[startIndex+i] = sqrt(xB*xB + yB*yB);
    // angles[startIndex+i] = atan2(yB, xB);
}
//end of TODO
```

两个窗口分别运行下述命令：

```
$ roslaunch LaserUndistortion LaserUndistortion.launch
$ rosbag play laser.bag --clock
```

得到结果（有时候有散点）：



2. 阅读论文 Least-Squares Fitting of Two 3-D Points Sets, 推导并证明已知对应点的 ICP 求解方法; (2 分)

问题描述：有两个已知对应点的点云 $\{p_i\}$ 和 $\{p'_i\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N$), 两组点云可以用下面的式子表示：

$$p'_i = R p_i + T + N_i \quad (R \text{ 是旋转矩阵, } T \text{ 是平移向量, } N_i \text{ 是噪声向量})$$

需要找到R和T使得下式最小：

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \|p'_i - (R p_i + T)\|^2$$

题目中已知两组点云是已知对应点的，所以如果最小二乘解是 \hat{R} 和 \hat{T} , 那么 $\{p'_i\}$ 和 $\{p''_i \triangleq \hat{R} p_i + \hat{T}\}$ 有相同的质心，即

$$p' = p''$$

这里

$$\begin{aligned} p' &\triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i \\ p'' &\triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p''_i = \hat{R} p + \hat{T} \\ p &\triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \end{aligned}$$

两组点云分别减去其质心（就相当于把两组点云都挪到原点，只剩旋转了）：

$$\begin{aligned}q_i &\triangleq p_i - p \\ q'_i &\triangleq p'_i - p'\end{aligned}$$

因此目标函数转换为：

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \|q'_i - Rq_i\|^2$$

原始的最小二乘问题转换为两部分：

- (i) 找到 \hat{R} 使得 Σ^2 最小；
- (ii) 代入 $\hat{T} = p' - \hat{R}p$ 得到 \hat{T} 。

下面开始求解 \hat{R} ：

$$\begin{aligned}\Sigma^2 &= \sum_{i=1}^N (q'_i - Rq_i)^T (q'_i - Rq_i) \\ &= \sum_{i=1}^N (q_i'^T - q_i^T R^T)(q'_i - Rq_i) \\ &= \sum_{i=1}^N (q_i'^T q'_i - q_i'^T Rq_i - q_i^T R^T q'_i + q_i^T R^T Rq_i) \\ &= \sum_{i=1}^N (q_i'^T q'_i + q_i^T q_i - 2q_i'^T Rq_i) \quad (\text{标量的转置等于其本身})\end{aligned}$$

求 Σ^2 的最大值等价于求下式的最小值：

$$\begin{aligned}F &= \sum_{i=1}^N q_i'^T Rq_i \\ &= \text{Trace}(q_i'^T Rq_i) \quad (\text{标量的迹是其本身}) \\ &= \text{Trace}(Rq_i q_i'^T) \quad (\text{Trace}(AB) = \text{Trace}(BA), \text{这里不要求} A, B \text{为方阵, 只要} A * B \text{是方阵即可}) \\ &= \text{Trace}(RH) \quad (H \triangleq \sum_{i=1}^N q_i q_i'^T)\end{aligned}$$

已知，对于正定对称矩阵 A ，任意的正交矩阵 B ，都有 $\text{Trace}(A) \geq \text{Trace}(BA)$ ； H 为非正定对称矩阵，需要构造正定对称矩阵才能应用上述式子，SVD分解 $H = U \Sigma V^T$ ；构建正交矩阵 X ，令 $X =$

VU^T ; $XH = VU^T U \Sigma V^T = V \Sigma V^T$, 为正定对称矩阵 (代入 A) 。
对于任意正交矩阵 B , 可得 $\text{Trace}(XH) \geq \text{Trace}(BXH)$, 将 R 代入 BX 可得 $\text{Trace}(RH) \leq \text{Trace}(XH)$, 只有 $R = X$ 时, $\text{Trace}(RH)$ 取得最大值, 得到:

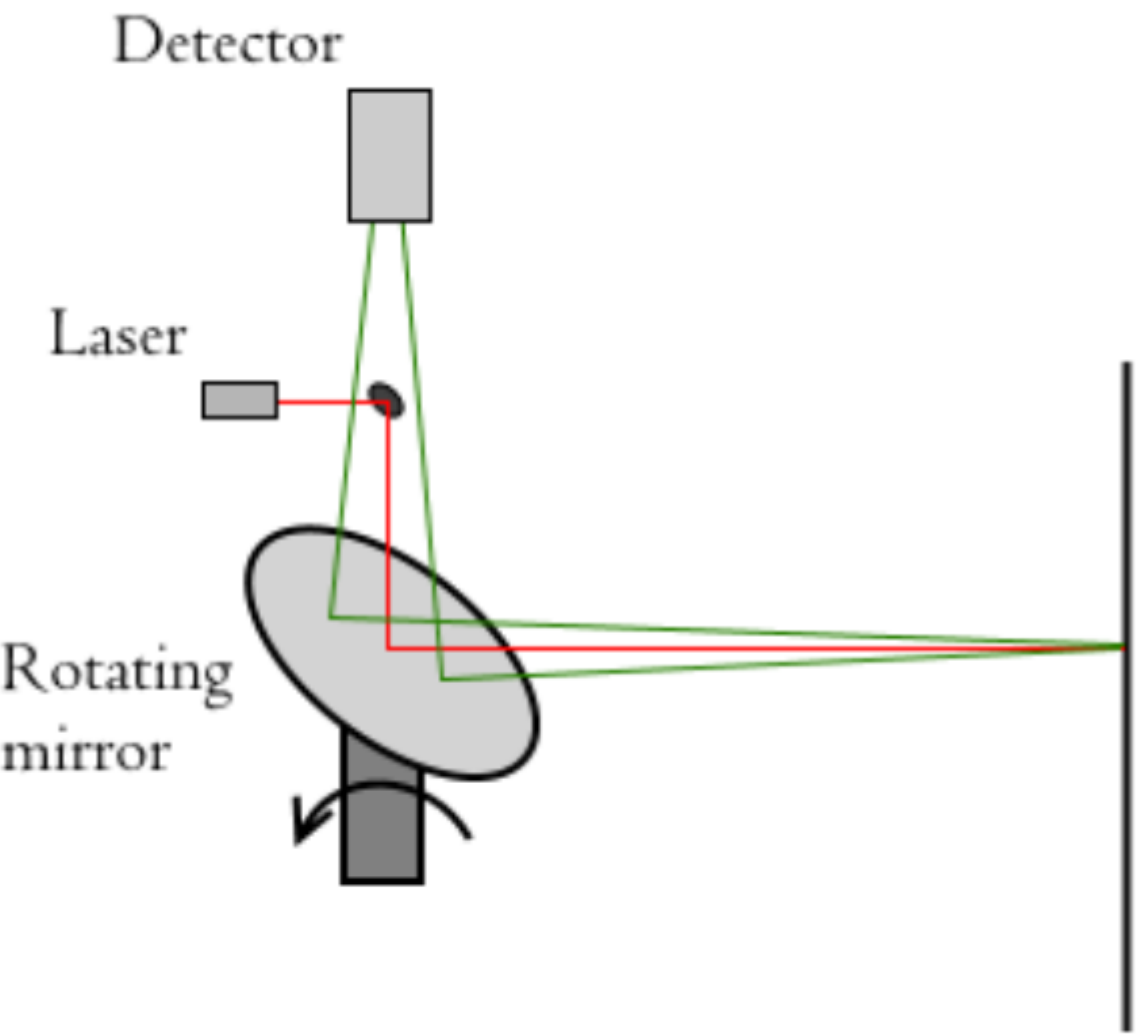
$$\hat{R} = X = VU^T$$
$$\hat{T} = p' - \hat{R}p$$

3. 阅读论文 Precise indoor localization for mobile laser scanner 前两章, 回答问题。 (2 分)

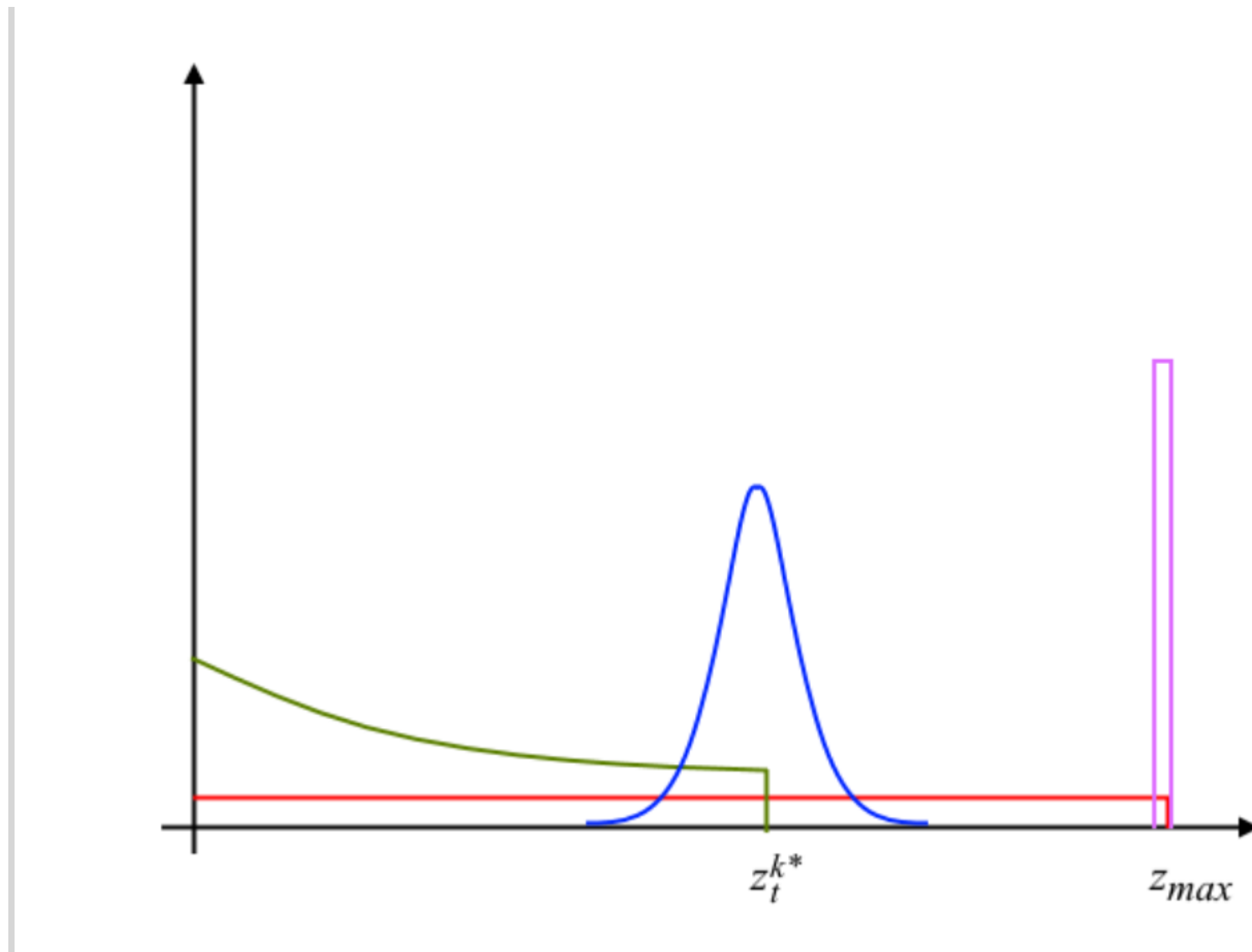
1. 根据第二章内容, 简述激光雷达测距原理;

这里介绍下反光镜旋转的激光雷达原理, 如下图所示, 激光发射头通过光路经过反射镜照射到物体上, 接着激光反射回再次经过反射镜被检测装置检测到, 当反射镜旋转时, 就可以测到该平面的物体的距离信息。

这里有两种方式测量距离, 分别为飞行时间法 (TOF) 和波形相位差法。飞行时间法可以直接获得激光发射的时间和接收到激光的时间差 Δt , 通过公式 $r = \frac{\Delta t \cdot c}{n \cdot 2}$ (r 为距离, c 为光速, n 为光空气中的折射率) 来得到距离; 相位差法首先需要通过公式 $\Delta t = \frac{\Delta \varphi}{2\pi \cdot f_m}$ ($\Delta \varphi$ 为测量所得, f_m 为已知的调制频率) 来获取时间差, 接着代入飞行时间法的公式中即可获取距离值。



1. 简要介绍一下下图的含义。



蓝色表示具有局部测量噪声的正确范围(高斯分布); 绿色表示目标前方可能存在的动态障碍(指数分布); 红色表示来自意外来源的随机噪声 (均匀分布); 粉色表示测量失败的可能性 (均匀分布)。

4. 简答题，开放性答案：设计使用 IMU 去除激光雷达运动畸变的方法并回答问题。（2 分）

1. 仅用 IMU 去除运动畸变可能会有哪些不足之处？

IMU可以直接获得角速度和线加速度，测量角速度比较精确，但是线加速度精度太差，在局部二次积分后精度依然很差，所以使用IMU去除激光雷达运动畸变会存在旋转校准得比较好，但是平移校准得比较差的情况。

2. 在仅有 IMU 和激光雷达传感器的情况下，你会如何设计运动畸变去除方案(平移+旋转)，达到较好的畸变去除效果？

可以使用IMU校准加匹配方法相结合的方式进行校准，先使用IMU进行校正，去除大部分畸变；认为IMU存在误差，但是误差是线性分布的；用ICP方法进行匹配，匹配结果作为正确值，得到IMU的误差值；把误差值均摊到每一个点上，重新进行激光点位置修正；再一次进行ICP迭代，知道收敛位置。