СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 3 семе из-за матана

Разработал

Никита Варламов @snitron

Почётный автор

Тимофей Белоусов @imodre

v0.0 alpha
Октябрь-Undefined 2022-2023

Заметки авторов
В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre

2. @snitron

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответвующему автору.
Known Issues
Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов. Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Норма линейного оператора

Пусть X, Y — нормированные линейные пространства, $A \in \mathbb{L}(X, Y)$ (это множество линейных отображений над $X \to Y$). Тогда нормой линейного оператора называется $||A||_{X,Y} = \sup_{x \in X_{|x|=1}} |Ax|_Y$

Замечания (для $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$):

1. По лемме об ограниченности нормы линейного оператора ($L = (l_{i,j}), |Lx| \le C_L|x| = C_L \cdot 1 = \sqrt{\sum l_{i,j}^2}$) — всегда ограничена!
2. $x \to |Lx|$ — непрерывная функция, заданная на компакте ($|x| = 1 \Leftrightarrow x \in S(0,1)$ — сфера), причём по Вейерштрассу, максимум достигается. (напоминаю, мы в $\mathbb{R}^m$!)
3. Верно неравенство $\forall x \in \mathbb{R}^m : |Lx| \le ||L|| \cdot |x|$ (тут у нас важно различать евклидову и неевклидову норму). КПК считает, что это очевидно:
   (a) $x = 0$ — равенство
   (b) $x \ne 0$ — делим на норму $x : |L\frac{x}{|x|}| \le ||L||$, это очевидно, т.к. наша новая норма задаётся как супремум значений $|x| = 1$, ну и мы вот сравниваем супремум с меньшими значениями.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^m$, если нашлось $C > 0 : |Lx| \le C \cdot |x| \Rightarrow ||L|| \le C$ — тупо по пункту 3, очевидно.

1.1.2 Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

Обобщение вот всей этой темы с диффеоморфизмами в одно толковое определение

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$, если:

- $\exists O \subset \mathbb{R}^k$ — открытое (область?)
- $\exists \Phi : O \to \mathbb{R}^m, \Phi(O) = M$ — гомеоморфизм (непрерывная биекция)
- $\Phi \in C^r(O)$
- $\forall x \in O : \operatorname{rank} \Phi'(x) = k$

Φ — гладкая параметризация.

1.1.3 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}, \Phi : E \to \mathbb{R}^n, \quad f, \Phi \in C^1$
- $M_\Phi \subset E : \{x \mid \Phi(x) = 0\}$
- $a \in E$ — точка относительного локального экстремума ($\forall x \in U(a) \cap M_\Phi, f(x_0) \le f(x)$ — это нестрогий максимум, остальное аналогично)
- $\Phi(a) = 0$ — уравнение связи

- $\operatorname{rank} \Phi'(a) = n$

это условия из необходимого условия

- $G(x) = f(x) - \lambda_1 \Phi_1(x) - \lambda_2 \Phi_2'(x) \dots \lambda_n \Phi_n(x) = f - \langle \lambda, \Phi \rangle$
- λ из необходимого условия
- $h \in \mathbb{R}^{m+n}, h = (h_x, h_y)$
- $\Phi'(a) \cdot h \neq 0 \Rightarrow$ можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$
- $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$ — это квадратичная форма

Тогда:

1. $Q(h_x)$ — положительно-определённая, тогда a — точка относительного локального минимума
2. $Q(h_x)$ — отрицательно-определённая, тогда a — точка относительного локального максимума
3. $Q(h_x)$ — незнако-определённая, тогда a — не точка относительного локального экстремума
4. $Q(h_x)$ — полу-определённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

1.2 Определения

1.2.1 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Квадратичная форма: $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \le i,j \le m} a_{ij} h_i h_j$$

- Положительно-: $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) > 0$
- Отрицательно-: $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0$
- Незнако-: $\exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0, \exists \widetilde{h} \neq 0 : Q(\widetilde{h}) > 0$
- Полуопределённая (положительно определённая вырожденая): $Q(h) \geq 0, \exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) = 0$

1.2.2 Локальный максимум, минимум, экстремум

Рассмотрим только максимум, остальное аналогично (+ строгий)

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in D$

Если $\exists U(a) : \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$, то a — точка локального максимума.

1.2.3 Диффеоморфизм

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ — открыто и связно (область)

- F — обратимо
- F — дифференцируемо
- F^{-1} — дифференцируемо

Тогда F — диффеоморфизм

1.2.4 Теорема о локальной обратимости

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $F \in C^1(O)$
- $x_0 \in O : \det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : F|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм

1.2.5 Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения в терминах систем уравнений

- $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$
- $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$
- $(x_0, y_0) : F(x_0) = y_0, \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$
- $\exists U(x_0), W(y_0) : \exists F : U \to W$ — диффеоморфизм : $\exists$ гладкое решение $\begin{cases} x_1(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ x_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ x_m(y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$

1.2.6 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

- $F = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$
- $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n), = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$
- $(x^0, y^0) : F(x^0, y^0) = 0, \det \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \neq 0$
- $\exists U(x^0) \in \mathbb{R}^m,\ \varphi(x) : F(x, \varphi(x)) = 0, x \in U(x_0)$ — гладкие решения

1.2.7 Касательное пространство к k-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$

Тогда $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, образ $\Phi'(t^0)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ. Ну вот оно и называется *касательным пространством* (T_pM).

Причём важно, что это пространство не обязано проходить через точку p. Это просто пространство касательных векторов, откладываемых от начала координат (???).

1.2.8 Набор функций, независимый в окрестности точки

Набор функций $f_1 \dots f_n : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ называется независимым в окрестности x_0, если:

$F := (f_1 \dots f_n) : O \to \mathbb{R}^n$

$F(x_0) := y_0$

$\forall$ достаточно малой окрестности $V(y_0)$ $\forall$ непрерывного G: $V(y_0) \to \mathbb{R}$ равенство $G(f_1(x) \dots f_n(x)) \equiv 0$ в $U(x_0)$ выполняется только если $G \equiv 0$.

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Достаточное условие экстремума

Формулировка:

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $a \in Int(D)$
- $\nabla f(a) = 0$
- $f \in C^2(D)$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$

Тогда:

1. $Q(h)$ — положительно-определённая, тогда a — точка локального минимума
2. $Q(h)$ — отрицательно-определённая, тогда a — точка локального максимума
3. $Q(h)$ — незнако-определённая, тогда a — не точка локального экстремума
4. $Q(h)$ — полу-определённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

Доказательство:

(1)

Давайте поближе присмотримся к $\forall h \in \mathbb{R}^m \ \forall t \in [0, 1] : \quad f(a+h) = f(a) + df(a, h) + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h)$ — это типа формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теперь рассмотрим разность $f(a + h) - f(a)$, и заметим, что $df(a, h) = 0$ по условию.

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{2!}(f''_{x_1,x_1}(a+th)h_1^2 + f''_{x_1,x_2}(a+th)h_1h_2 + \ldots) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!}(d^2 f(a+th, h) - Q(h)) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!}(d^2 f(a+th, h) - d^2 f(a, h)) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!}(f''_{x_1,x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1,x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_1,x_2}(a+th)h_1h_2 - \ldots)
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что если повыносить коэффициенты при двойных производных, получится что-то в стиле $(f_1'' - f_2'')(\sum_{i,j} h_i h_j)$, где левая скобка — б.м. при $h \to 0$, а правая оценивается $|h|^2$. Таким образом, все эти штуки есть ничто иное, как $\alpha(h)|h|^2$, где $\alpha(h)$ — б.м. при $h \to 0$.

В итоге получаем:

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} Q(h) + \alpha(h)|h|^2 \underset{\text{по лемме об оценке кв. формы}}{\geq} \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2 + \alpha(h)|h|^2$$

$$\underset{\text{при } h \to 0}{\geq} \frac{\gamma_Q}{4}|h|^2 \underset{h \neq 0}{>} 0$$

Получается, что в окрестности нашей точки a все значения больше, чем в ней самой. Получается, это по определению это точка локального минимимума.

(2)

Всё то же самое, только пусть мы рассматриваем функцию $g := -f$. С учётом отрицательно определённой квадратичной формы всё получится, и тут у нас точка локального максимума.

(3)

Шизофазия начинается тут. Т.к. у нас незнакоопределённая форма, значит $\exists h > 0 : Q(h) > 0, \quad \exists \widetilde{h} > 0 : Q(\widetilde{h}) < 0$

Раньше мы с вами считали, что h может быть любым. Теперь же давайте рассмотрим относительно вот этих существующих $h, \widetilde{h}$. Но чтобы устремлять всё это дело к 0, нам необходим некоторый параметр. Пусть он будет s. Тогда рассматриваем по тому же принципу: $f(a+sh)-f(a)$, рассуждения такие же, только там везде дополнительно вылезает s^2, и, таким образом, функции станут зависеть от него:

$$f(a+sh) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{s^2}{2}Q(h) - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h)s^2$$

Вот, тут у нас получилось, что это минимум. А если отработаем с $\widetilde{h}$, то получится наоборот.

(4)

Ну а тут, слава Богу, достаточно привести пример.

Пусть $f(x) := x_1^2 - x_2^4, \quad a = (0,0)$

$df(a,h) = 0, \quad d^2 f(a,h) = 2h_1^2$

Видно, что в этом случае мы можем бегать и по x_1, и по x_2, и в итоге получим разные значения, потому что форма вообще зависит только от одной компоненты.

А для почти идентичной $g(x) := x_1^2 + x_2^4$ уже всё наоборот, и существует строгий локальный минимум.

ч. т. д.

1.3.2 Теорема о неявном отображении

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$
- $(a,b) \in O, \quad a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$
- $F(a,b) = 0 \in \mathbb{R}^{m+n}$
- $F \in C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- $\det F'_y(a,b) \neq 0$

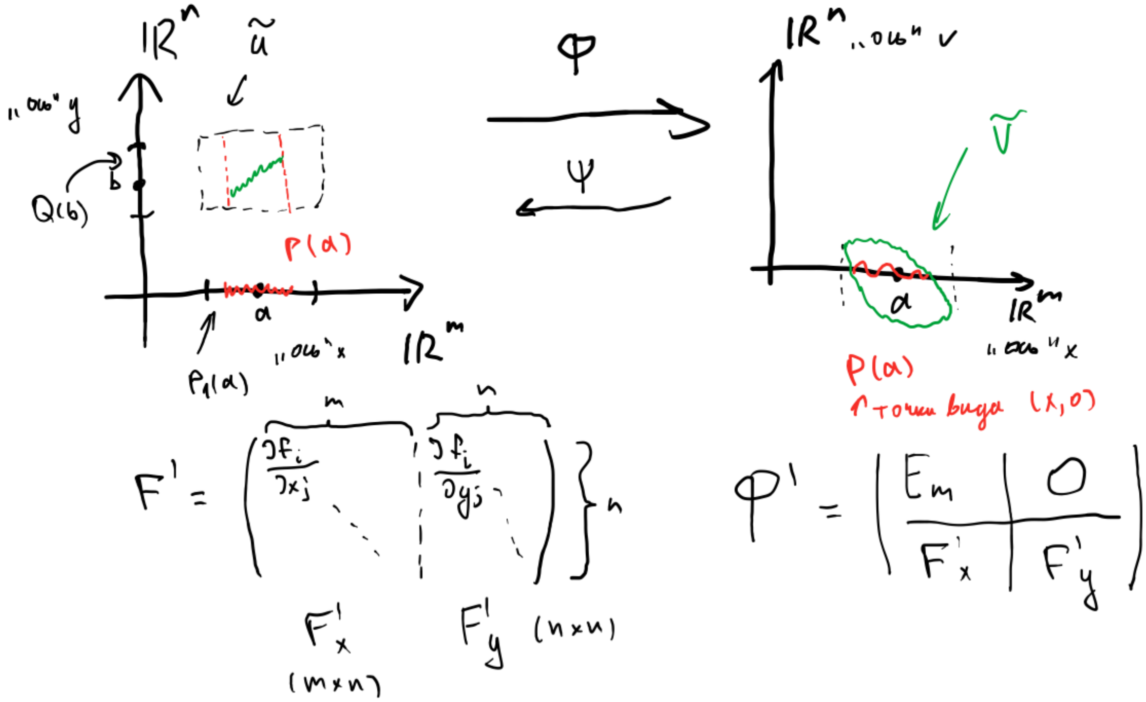
Тогда $\exists P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$ — окрестности, и $\exists! \varphi : P \to Q \in C^r$ гладкое:

$$\forall x \in P : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Бонус:

$\varphi'(x) = -(F'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \varphi(x)) \Leftrightarrow F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y \cdot \varphi'(x) = 0$ (продифференцировали условие)

Доказательство:



Нет, это не шутка. Всё доказательство строится вокруг одной картинки и яростного махания руками со знанием дела.

Заведём $\Phi(x, y) : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}, \quad \Phi(x, y) = (x, F(x, y))$. Логично, что по условию $\Phi(a, b) = (a, 0)$. Если посмотреть на производный оператор (а она дифференцируема, так как F — дифференцируема (?)), то прекрасно видно, что матрица квадратная, да ещё и блочная $\Rightarrow \det \Phi'(a, b) = \det E_m \cdot \det F'_y(a, b)$. По условию ничего из этого не 0, следовательно определитель невырожден. А поэтому, по теореме о локальной обратимости: Φ — локальный диффеоморфизм класса C^r.

Заведём окрестность (как декартово произведение, почему бы и нет) $\widetilde{U} = P_1 \times Q$. P_1 немного большевата для P, поэтому потом мы её немного подрежем. $\widetilde{V} = \Phi(\widetilde{U})$. Заметим, что все эти окрестности открыты по предыдущим теоремам.

Т.к. у нас $\Phi|_{\widetilde{U}}$ — диффеоморфизм, на прообразе и образе имеет место быть обратное отображение $\Psi : \widetilde{V} \to \widetilde{U} = \Phi^{-1}$.

Заметим, что отображение Φ не меняет "x"-овые координаты (по построению функции ,см. рисунок), "y"-овые же как-то колбасит, как показано зелёной областью. Значит и Ψ их тоже не меняет, т.к. диффеоморфизм. Именно поэтому справа у нас координаты (x, v). Можно представить $\Psi(x, v) = (x, H(x, v)), \quad H : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^n \in C^r$. Поэтому давайте выберем окрестность

$P \subset \mathbb{R}^m := \widetilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Она открыта по теореме (1 сем) о свойствах открытых множеств (конечное пересечение открытых открыто). $U = P \times Q$

Вooот. А теперь давайте предложим в качестве $\varphi(x) : P \to Q := H(x, 0)$. Она принадлежит классу C^r, т.к. все функции до этого в нём лежали. А почему выполняется условие $F(x, \varphi(x)) = 0, x \in P$? Ну давайте проследим путь. Что такое вообще $H(x, 0)$ — мы берём все точки вида $(x, 0)$ (см. картинку), и взаимно-однозначно отправляем их обратно в левую часть, тем самым вычисляя им значение $b_0 \in Q(b)$ (этим и занимается $H(x, v)$ по своей сути). Ну вот. А потом мы отправляем точку (x, b_0) в правую часть, и куда же она должна приехать, если уезжала из 0? Правильно, в 0. Ура, условие выполняется.

Осталось доказать едиственность, опять давайте помашем руками:

$$x \in P, y \in Q : F(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y) = (x, 0)$$

$$(x, y) = \Psi\Phi(x, y) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \varphi(x))$$

ч. т. д.

1.3.3 Необходимое условие относительного локального экстремума

Формулировка:

- $f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}, \Phi : E \to \mathbb{R}^n, \quad f, \Phi \in C^1$
- $M_\Phi \subset E : \{x \mid \Phi(x) = 0\}$
- $a \in E$ — точка относительного локального экстремума ($\forall x \in U(a) \cap M_\Phi, f(x_0) \leq f(x)$ — это нестрогий максимум, остальное аналогично)
- $\Phi(a) = 0$ — уравнение связи
- $\operatorname{rank} \Phi'(a) = n$

Тогда $\lambda \in \mathbb{R}^n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) : \begin{cases} f'(a) + \lambda\Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Второе условие бесплатное, оно из условия.

Доказательство:

Так как у нас ранг n на матрице производного оператора Φ', давайте считать, что он достигается на $m + 1 \ldots m + n$ (n штук) столбцах матрицы (это матрица n строк $\times$ $(m + n)$ столбцов). Тогда в стиле всех предыдущих теорем а-ля “неявное отображение” разделим переменные: $(x_1, x_2, \ldots, x_m), (x_{m+1}, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \mapsto (x, y)$. Точку a тоже: (a_x, a_y).

Запускаем теорему о неявном отображении: $\Phi(a) = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ — невырожденный оператор. Тогда существует $!\varphi : U(a_x) \to P(a_y), \Phi(x, \varphi(x)) = 0$. Замечаем, что $x \mapsto (x, \varphi(x))$ — параметризация простого гладкого m-мерного многобразия в $M_\Phi \cap \{U(a_x) \times P(a_y)\}$.

Тогда для $g(x) = f(x, \varphi(x))$ точка a_x — просто точка локального экстремума. Почему? Управляя теперь точкой x, мы с помощью g попадаем в M_Φ, внутри которого $\Phi(x) = 0$ всегда! Поэтому внутри хорошего (в рамках этой задачи) множества мы и ищем экстремум. Это можно легко понять, если представить поиск экстремума на какой-то области графика (ради этого всё и делается же).

Хорошо, давайте его искать. По необходимому условию экстремума, ЧП g должны быть равны нулю (φ' бывает только по x):

$$f'_x(a) + f'_y(a) \cdot \varphi'(a_x) = 0 \qquad (\in \mathbb{R}^m)$$

Начиинная с этого места опускаем подстановку точек, но они там есть! Вспоминаем, что у нас есть $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$. Также дифференцируем:

$$\Phi'_x + \Phi'_y \varphi' = 0 \qquad (\in Mat(n, m))$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m : \qquad \lambda\Phi'_x + \lambda\Phi'_y \varphi' = 0 \qquad (\in \mathbb{R}^m)$$

Тогда можно вычесть из уравнения с f уравнение с Φ — размерности сошлись:

$$f'_x - \lambda\Phi'_x + (f'_y - \lambda\Phi'_y)\varphi' = 0$$

Пусть $f'_y - \lambda\Phi'_y = 0$. Тогда:

$$\lambda = f'_y \cdot \left(\Phi'_y\right)^{-1}$$

Если мы берём это λ (а нас и просят её предъявить), то наше предположение верно. Раз разность 0, то и иксовая разность равна нулю:

$$\begin{cases} f'_y - \lambda\Phi'_y = 0 \\ f'_x - \lambda\Phi'_x = 0 \end{cases}$$

Это векторная запись точек, которые мы когда-то разъединили. Давайте соединим обратно:

$$f' - \lambda\Phi' = 0 \qquad \lambda = f'_y \cdot \left(\Phi'_y\right)^{-1}$$

ч. т. д.

1.4 Теоремы

1.4.1 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

Формулировка:

Пусть X, Y — нормированные линейные пространства, $A \in \mathbb{L}(X, Y)$.

Тогда следующие утверждения эквиваленты:

1. A — ограниченный оператор, в том смысле, что $||A||$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно на всём X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство: Для $||A|| \equiv 0$ — тривиально (супремум = 0, следовательно 0), поэтому далее считаем норму оператора ненулевой. Ну, во-первых, $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно, просто одно следует из другого.

Во-вторых, $2 \Rightarrow 1$:

По определению непрерывности в нуле: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \forall x \in B(0, \delta) : |Ax| < \varepsilon$ (это нам дано, значит можем пользоваться, как хотим)

Давайте рассмотрим $\varepsilon = 1 : |Ax| < 1$, потом делим на δ:

$$|A\frac{x}{\delta}| < \frac{1}{\delta}$$

Переназначим x и заметим, что $x \in \overline{B(0,1)} : |Ax| \leq \frac{1}{\delta}$ (обратите внимание, мы взяли замыкание шара и получили нестрогое неравенство)

Тогда для $x \in S(0,1) : |Ax| \leq \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} \cdot |x|$ — по замечанию 4 из определения, $||L|| \leq \frac{1}{\delta}$.

В-третих, $1 \Rightarrow 4$:

Давайте опять запишем определение равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Назначим $\delta := \frac{\varepsilon}{||A||}$

$$|Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$$

По линейности:

$$|A(x_1 - x_2) < ||A|| \cdot |x_1 - x_2| = ||A||\delta = ||A||\frac{\varepsilon}{||A||} = \varepsilon$$

ч.т.д.

1.4.2 Теорема Лагранжа для отображений

Формулировка: $F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, D$ — открытое

F — дифференцируемо на D, $[a, b] \subset D$

Тогда $\exists c \in [a, b] : |F(a) - F(b)| \leq ||F'(c)|| \cdot |b - a|$ *Доказательство:* Заведём функцию $f(t) = F(a + t(b - a)), t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. То есть как-бы двигаем точку по $[a, b]$.

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

Заметим, что это оператор $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$, т.к. $F'(a + t(b - a))$ — l, а $b - a$ — m (???)

Вспомним также теорему Лагранжа для векторнозначных функций:

$F : [a, b] \to \mathbb{R}^n, F$ — дифференцируема на $[a, b], \exists c \in [a, b]$

$$|F(a) - F(b)| = |F'(c)| \cdot |b - a|$$

Рассмотрим нашу функцию $f(t)$ по этой теореме в точках 0 и 1:

$$|f(1) - f(0)| = |f'(c)| \cdot |1 - 0|$$

Подставим:

$$|F(b) - F(a)| = |F'(a + c(b - a)) \cdot (b - a)| \underset{\text{по замечанию 3}}{\leq} ||F'(a + c(b - a))|| \cdot |b - a|$$

Ну а дальше, пусть $c := a + c(b - a)$ и всё супер.

ч.т.д.

1.4.3 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

Формулировка (безымянная лемма):

Возможно, она нахер не нужна, но пусть всё же будет

Пусть $B \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Если $c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m : |Bx| \geq c|x|$, тогда $B \in \Omega_m$ и $||B^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство:

B — очевидно инъективен, т.к. любой ненулевой вектор у нас отправляется в разные точки $\Rightarrow$ биекция $\Rightarrow$ обратимый $\Rightarrow \exists B^{-1}$

Теперь пусть $x = B^{-1}y \Rightarrow |Bx| = |y| \geq c|x| = c|B^{-1}y| \Rightarrow |B^{-1}y| \leq \frac{1}{c} \cdot |y| \underset{\text{по замечанию 3}}{\Rightarrow} ||B^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$

ч.т.д.

Замечание:

Если $A \in \Omega_m$, то можно провенуть такую штуку: $|x| = |A^{-1}Ax| \leq ||A^{-1}|| \cdot |Ax|$ (по 3 замечанию). Тогда:

$$|Ax| \geq \frac{1}{||A^{-1}||}|x|$$

Формулировка:

Пусть $L \in \Omega_m$ — обратимый оператор, $M \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $||L - M|| < \frac{1}{||L^{-1}||}$

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$ — обратимый
2. $||M^{-1}|| \leq \frac{1}{\frac{1}{|L^{-1}|} - ||L-M||}$
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}||}{\frac{1}{|L^{-1}|} - ||L-M||} \cdot ||L - M||$

Доказательство:

(1) и (2)

Рассмотрим $|Mx|$ с рандомным возможным x. По неравенству треугольника (это всё же норма) и оценкам по замечаниям сверху:

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M-L)x| \geq \frac{1}{||L^{-1}||}|x| - ||M - L|| \cdot |x| = \left(\frac{1}{||L^{-1}||} - ||M - L||\right)|x|$$

По безымянной лемме всё доказано (заметим, что выражение в скобочках — положительная константа).

(3)

Неповторимый оригинал:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{m - l}{ml}$$

Жалкая копия (доказывается тривиально, раскрытием скобок):

$$L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$$

Отнормируем:

$$||L^{-1} - M^{-1}|| \leq ||M^{-1}|| \cdot ||L - M|| \cdot ||L^{-1}||$$

Ну и просто подставим (2).

ч.т.д.

Следствие:

Отображение $\Omega_m \to \Omega_m : L \to L^{-1}$ непрерывно.

Доказательство:

Давайте по Гейне: если $B_k \to L$, то сходится ли $B_k^{-1} \to L^{-1}$????

Во-первых, начиная с некоторого места:

$$|B_k - L| \leq \frac{1}{||L^{-1}||}$$

$$|B_k^{-1} - L^{-1}| \leq \frac{||L^{-1}||}{\underbrace{\frac{1}{|L^{-1}|} - \underbrace{||L - B_k||}_{\to 0}}_{\text{огр.}}} \cdot ||L - B_k|| \to 0$$

ч.т.д.

1.4.4 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

Формулировка: $F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, F$ дифференцируема на $D, F' : D \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $F \in C^1(D) \Leftrightarrow \forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ — непрерывны
2. F' — непрерывно на $D : \forall x : \mathbb{R}^m\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \widetilde{x}\ |x - \widetilde{x}| < \delta\ ||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| < \varepsilon$

Доказательство:

(1) ⇒ (2)

Давайте зафиксируем какие-то i, j и относительно них рассмотрим наше условие непрерывности частных производных по отдельности. Также, применим китайскую грамоту и возьмём немного другой эпсилон:

$$\forall x : \mathbb{R}^m\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \widetilde{x}\ |x - \widetilde{x}| < \delta\ \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x})\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$$

Тогда, так как нам это уже известно, проверим условие (2):

$$||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| \underset{\text{по лемме об ограниченности нормы}}{\leq} \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x})\right)^2}$$

Ну а теперь просто оцениваем всё это дело эпсилоном!

$$\leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \sqrt{ml \cdot \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

(2) ⇒ (1)

Ну а вот тут душный пиздец. Идея в том, что мы хотим проверить для каждой частной производной с индексами (v, u) наше предположение.

Давайте выберем $h \in \mathbb{R}^m = (0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{u\text{-ое число}}, 0, \dots, 0, 0)^T$. Теперь нам известно, что:

$$|(F'(x) - F'(\widetilde{x}))h| \leq ||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| \cdot |h| \underset{|h|=1}{\leq} \varepsilon$$

Ну а с другой стороны, $(F'(x) - F'(\widetilde{x}))h$ есть ничто иное, как вектор $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\widetilde{x})\right)_{i=1\dots l}$. Поэтому давайте рассмотрим его норму по вышеиспользованной лемме:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\widetilde{x})\right)^2} \leq \varepsilon$$

Ну, раз уж у нас корень суммы квадратов меньше, то и каждое слагаемое по отдельности тоже меньше. Давайте зафиксируем $i = v$ и получим долгожданное:

$$\left|\frac{\partial f_v}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_v}{\partial x_u}(\widetilde{x})\right| \le \varepsilon$$

Так как данные эпсилон-дельта преамбуды везде были одинаковыми, то и тут всё супер. Доказано, не умаляя общности!!!!

ч. т. д.

1.4.5 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

Формулировка (Ферма):

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in Int(D), f$ — дифференцируема в точке a (точка локального экстремума)

Тогда $\forall l \in \mathbb{R}^m : |l| = 1$ (направление) $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

Доказательство:

Тривиалити, для $f|_{\text{прямая через } a \text{ по направлению } l}a$ — тоже точка локального экстремума, поэтому по одномерной теореме Ферма всё работает!

ч. т. д.

Следствие (Необходимое условие экстремума)

a — точка локального экстремума $\Rightarrow \forall k \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$

Следствие (Ролль)

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $K \subset D$ — компакт
- f — дифференцируема в $Int(K)$, непрерывна на K
- $f|_{\text{граница } K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in Int(K) : \nabla f \equiv 0$

Доказательство

По теореме Вейерштрасса (привет, 1 сем), на компакте функция достигает своего минимимума и максимума. Тогда либо у нас на $K f \equiv const$, тогда такая точка — любая, либо же по теореме Ферма она существует где-то внутри компакта.

ч. т. д.

1.4.6 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

Формулировка (Лемма об оценке квадратичной формы): Q — положительно определённая квадратичная форма.

Тогда $\exists \gamma_Q : \forall h \quad Q(h) \ge \gamma_Q \cdot |h|^2$

Доказательство:

А давайте так:
$$\gamma_Q := \min_{|x|=1} Q(x)$$
. Он достигается, так как мы гоняем по компакту (сфере), следовательно по Вейерштрассу всё хорошо.

Для $x = 0$ всё тривиально, поэтому при $x \neq 0 : Q(x) = |x|^2 Q(\frac{x}{|x|}) \underset{\frac{x}{|x|} \text{ по модулю равен 1 (сфера)}}{\geq} \gamma_Q |x|^2$

Формулировка (Лемма об эквивалентных нормах):

$p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists\ C_1, C_2 > 0 : \forall x \quad C_1|x| \leq p(x) \leq C_2|x|$

Доказательство:

То же самое:
$$C_1 := \min_{|x|=1} p(x), \quad C_2 := \max_{|x|=1} p(x)$$

почти локальной инъективностиДля минимума: $\forall x : p(x) = |x| \cdot p(\frac{x}{|x|}) \geq C_1|x|$, для максимума аналогично.

Осталось лишь доказать, что норма непрерывна, чтобы максимум и минимум достигался. Оценим (разложим по базису $\{e_i\}_{i=1}^n$):

$$p(x, y) \leq p\left(\sum (x_i - y_i)e_i\right) \underset{\text{неравенство треугольника}}{\leq} \sum |x_i - y_i| p(e_i) \underset{\text{КБШ}, M = \sqrt{\sum p^2(e_k)}}{\leq} M \cdot |x - y|$$

Ну всё, фигня, изменяется всего на какую-то константу, значит непрерывно.

ч. т. д.

1.4.7 Лемма о “почти локальной инъективности”

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $x_0 \in O$
- F — дифференцируема в x_0
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists C > 0, \delta > 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)\ |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$

Доказательство:

1. Если F — линейное отображение, то рассмотрим: $|h| = |F^{-1}Fh| \leq ||F^{-1}|| \cdot |Fh|$. По линейности:
$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |Fh| \geq \underbrace{\frac{1}{||F^{-1}||}}_{C} |h| \quad \forall \delta$$

2. В противном случае, запишем определение диффперецируемости: $|F(x_0+h)-F(x_0)| = |\underbrace{F'(x_0)h}_{>0} + |h|\cdot\underbrace{\alpha(h)}_{\text{б. м.}}| \underset{\text{нер-во треугольника}}{\geq} \underbrace{C}_{\text{из пункта 1}} |h| - \alpha(h)\cdot|h|$. Давайте выберем δ так, чтобы $\alpha(h) < \frac{C}{2}$

$$\ldots \geq \frac{C}{2}|h|$$

ч.т.д.

Замечание

При $\forall x \ \det F'(x) \neq 0$ не следует инъективность!

1.4.8 Теорема о сохранении области

Формулировка:

- $F: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ — открытое
- F — дифференцируемо
- $\forall x \in O: \ \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открытое множество.

Замечания

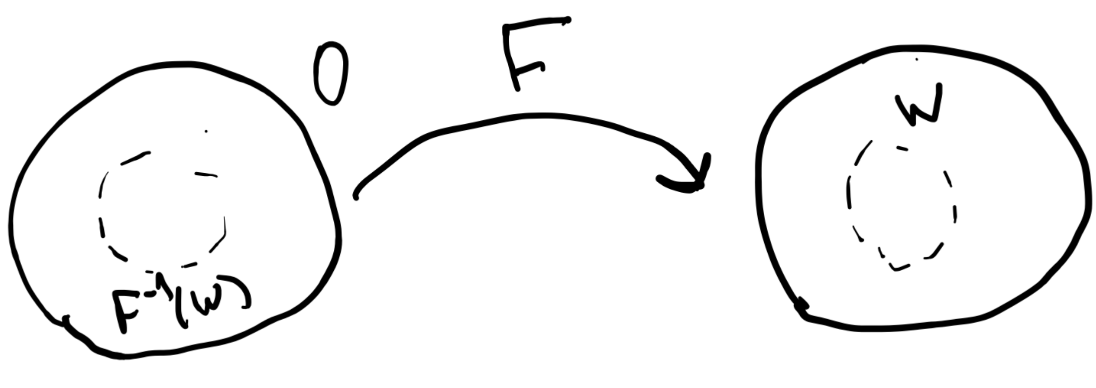
1. Если O — связное и F — непрерывное, то $F(O)$ — связное

   Доказательство:

   Ну, типа очев. Если у нас есть $W_1, W_2 \subset F(O)$, причём они не связны, то логично что получиться они могли только вследствие $F^{-1}(W_1) \cap F^{-1}(W_2) = \emptyset$

2. F — непрерывное $\Leftrightarrow \forall W \subset F(O)$ — открытого, $F^{-1}(W)$ — открыто *Доказательство:*

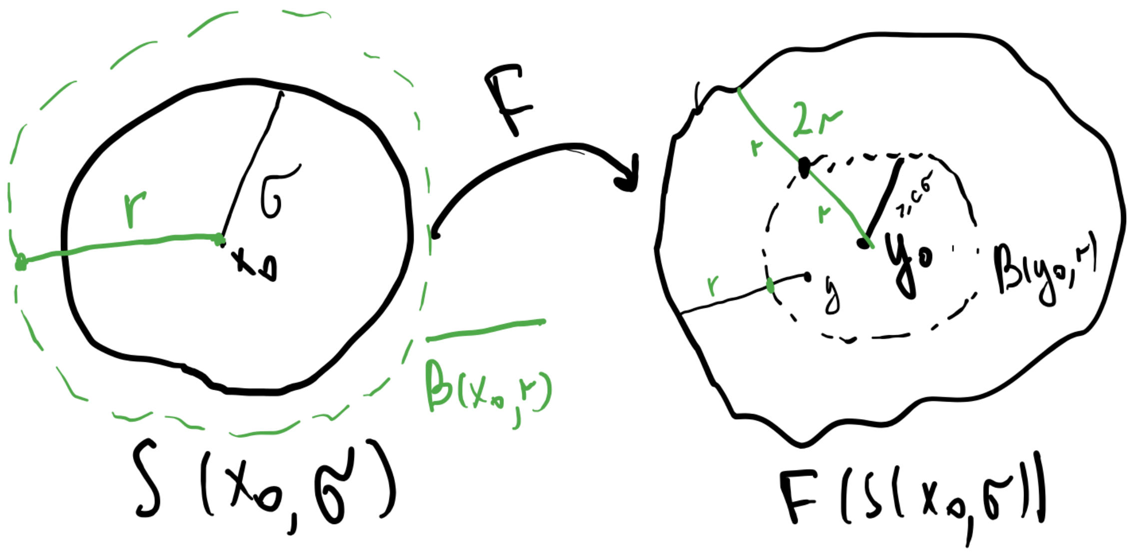
   По топологическому определению непрерывности (привет, 1 сем!).



Доказательство:

В общем, основная идея доказательства состоит в том, чтобы доказать, что любая точка из образа является внутренней, тогда по определению открытого множества мы докажем и вывод. $\forall x_0 \in O: \ y_0 = F(x_0)$.

По лемме выше, $\exists C > 0, \exists \delta > 0 : \forall h \in \overline{B(0,\delta)} : |F(x_0+h) - F(x_0)| \geq C|h|$. Не стоит смущаться при виде замкнутого шара, это мы просто провели двойную бухгалтерию. Причём, как видно на картинке, граница нашей области отображается куда-то далеко (аж на константу) больше, чем просто на δ.



Заведём расстояние $dist(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x,y)$ между точкой и множеством. Пусть $r = \frac{1}{2} \cdot dist(y_0, \underbrace{F(\underbrace{S(x_0,\delta)}_{\text{компакт}})}_{\text{непр.} \Rightarrow \text{компакт}})$.

Так как у нас там всё компакты то минимум достигается, и, что важнее всего, всё это больше нуля.

Теперь самое интересное: докажем, что $B(y_0, r) \subset F(O) : \forall y \in B(y_0, r) \; \exists x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$. Это докажет нам всё остальное.

$\forall y \in B(y_0, r) : \rho(y, F(S(x,\delta))) > r$. Это очевидно, на рисунке всё видно. Рассмотрим $g(x) := |F(x) - y|^2, x \in B(x_0, \delta)$. Как было сказано выше, мы доказываем, что у нас $\exists x \Leftrightarrow g(x) = 0$ возможно. Ну, очевидно, что, видимо, в если там и есть ноль, то это экстремум функции (модуль же, лол).

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 \underset{\text{очевидно по рисунку}}{\leq} r^2$$

Также, по рисунку очевидно, что для всех x с границы, наша функция отправляет их сильно дальше.

$$\forall x \in S(x, \delta) \quad g(x) \geq r^2$$

Получается, наш минимум лежит где-то внутри сферы. Поищем его. По определению евклидовой нормы:

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + (F_2(x) - y_2)^2 + \ldots + (F_m(x) - y_m)^2$$

По необходимому условию экстремума, $\nabla F(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

$$g'(x) = 2(F_1(x) - y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + 2(F_2(x) - y_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + 2(F_m(x) - y_m)\frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

Или в векторной форме:

$$2 \cdot (F(x) - y) \cdot F'(x) = 0$$

Однако, по условию у нас производный оператор невырожденный! Следовательно, остаётся только $F(x) = y$. А это то, что мы и искали!!!!

ч. т. д.

1.4.9 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

Формулировка:

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- O — открыто
- $l < m$
- $F \in C^1(O)$
- $\forall x \in O : \text{rank}(F') = l$

Тогда $F(O)$ — открыто

Доказательство:

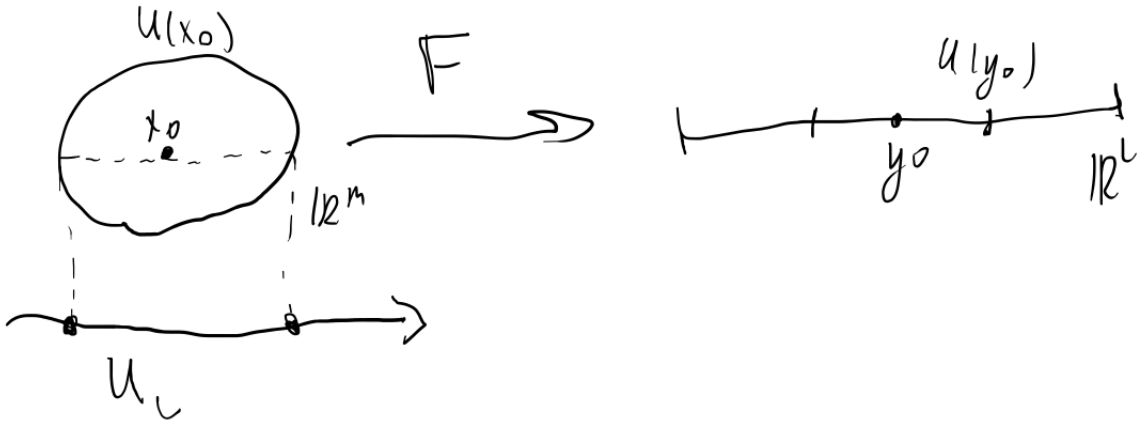
Зафиксируем $x_0 \in O$. Так как у нас матрица производного оператора теперь имеет вид не квадратный, а прямоугольный ($l \times m$), просто так применить предыдущую теорему не получится. Поэтому, не умаляя общности, давайте считать, что вот этот ЛНЗ набор векторов в матрице реализуется на позициях $1 \ldots l$. Тогда мы можем посчитать определитель этой матрицы:

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le l} (x_0) \neq 0$$

При этом, так как мы потребовали непрерывность, немножко пошевелив x_0 всё также будет работать:

$$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \quad \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le l} (x) \neq 0$$

Мы уже доказали, что $F(x_0)$ — внутренняя в $F(U(x_0))$ (по предыдущей теореме). Осталось немного пошаманить, чтобы доказать, что действительно из пространства большей в меньшую всё корректно отобразится.



Давайте заведём такую окрестность $U_l = (t_1, t_2, \dots, t_l) : (t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)$. Как видно на рисунке, это такая проекция в пространстве большей размерности на пространство меньшей. Теперь заведём $\widetilde{F} : U_l \to \mathbb{R}^l$ и посмотрим на её матрицу производных:

$$\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \right)$$

И вот теперь, по непрерывности $\widetilde{F}$ и прошлой теореме, всё по идее работает.

ч. т. д.

1.4.10 Теорема о гладкости обратного отображения

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F — обратимо
- $F \in C^r(O), r \in 1, 2, \dots$
- $\forall x \in C : \det F'(x) \neq 0$

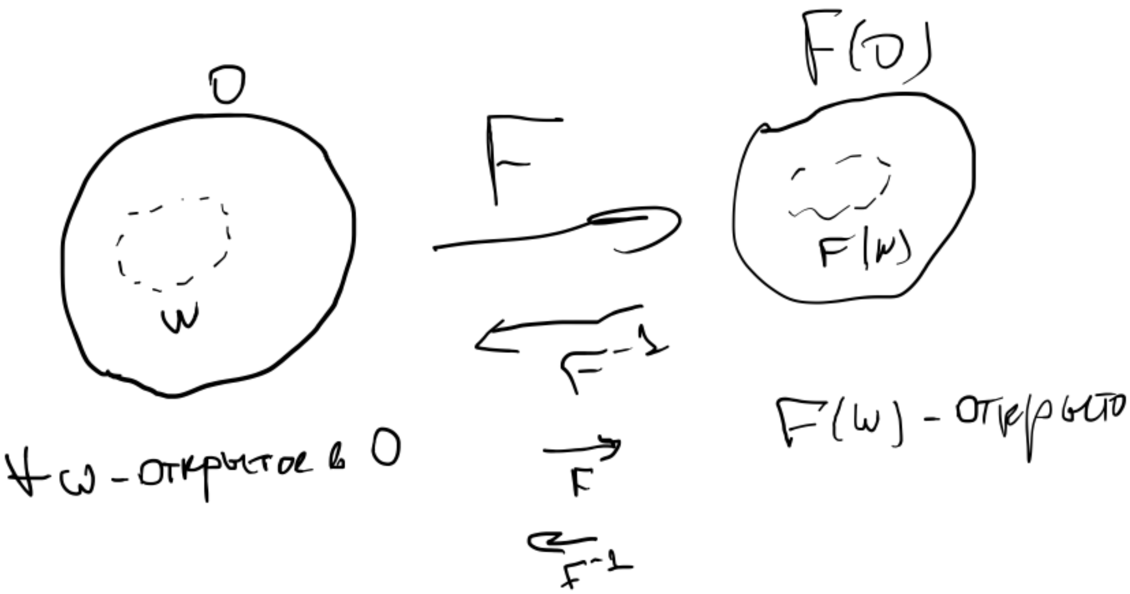
Тогда $F^{-1} \in C^r, \quad ((F^{-1}(y))' = (F'(x))^{-1})$ при $F(x) = y$

Доказательство:

Докажем по индукции по r. Замое запарное — база.

База:

Пусть $x_0 \in O, \quad F(x_0) = y_0$. $S := F^{-1}$. Заметим, что S — непрерывно по теореме о сохранении области и теореме о топологическом определении непрерывности (типа для любого открытого из прообраза образ тоже открыт)



По лемме о "почти" локальной инъективности:

$$\exists C,\delta>0:\forall x\in B(x_0,\delta)\quad |F(x)-F(x_0)|\geq C|x-x_0|\Rightarrow |x-x_0|\leq\frac{1}{C}|F(x)-F(x_0)|$$

Запишем определение дифференцируемости для F и сразу распишем всё в терминах y:

$$A=F'(x_0),\quad \underbrace{F(x)-F(x_0)}_{y-y_0}=A(\underbrace{x-x_0}_{S(y)-S(y_0)})+\alpha(\underbrace{x}_{S(y)})|x-x_0|$$

Выражаем $(S(y)-S(y_0)))$:

$$S(y)-S(y_0)=A^{-1}(y-y_0)-\underbrace{A^{-1}\alpha(S(y))|S(y)-S(y_0)|}_{\beta(y)\underset{???}{=}o(|y-y_0|)}$$

Получилось вполне себе нормальное определение для дифференцируемости S. Надо лишь доказать "о"-шку при $y\to y_0$. Оценим её с помощью вывода из леммы выше и стандартной оценки операторной нормы (не забываем, что мы как-бы управляем y ???):

$$\begin{aligned}|x-x_0|=|S(y)-S(y_0)|<\delta\underset{\text{при } y \text{ близких к } y_0}{\Rightarrow}|\beta(y)|&=|A^{-1}\alpha(S(y))|\cdot|S(y)-S(y_0)|\\&\leq\underbrace{\frac{||A^{-1}||}{C}}_{\text{const}}\cdot\underbrace{|y-y_0|}_{|F(x)-F(x_0)|}\cdot|\alpha(S(y))|\\&=o(|y-y_0|)\end{aligned}$$

Фактически "о"-шка доказана по определению. Тем самым доказана дифференцируемость. А что с непрерывностью производной то? Этого мы ещё не доказывали. Построим цепочку непрерывных отображений:

$$y \mapsto S(y) = x \mapsto A(x) \mapsto A^{-1}(x) = S'(y)$$

Непрерывность дифференцирования обратного производного оператора доказывается маханием руками на тему отдельнызх производных в матрице. Тем самым база доказана.

Переход

Достаточно тривиальный. Посмотрим при $m = 1 : (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f(x(y))}$. То есть, пусть $f \in C^{r+1}$, тогда надо доказать, что $f' \in C^r$. Ну там вот это и написано, обратная функция вообще C^∞, $f'(x) \in C^r$ — очев. Для многомерного случая всё тоже самое, только формула выглядит пафоснее $\ldots = (F'(x(y)))^{-1}$

ч. т. д.

1.4.11 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Формулировка:

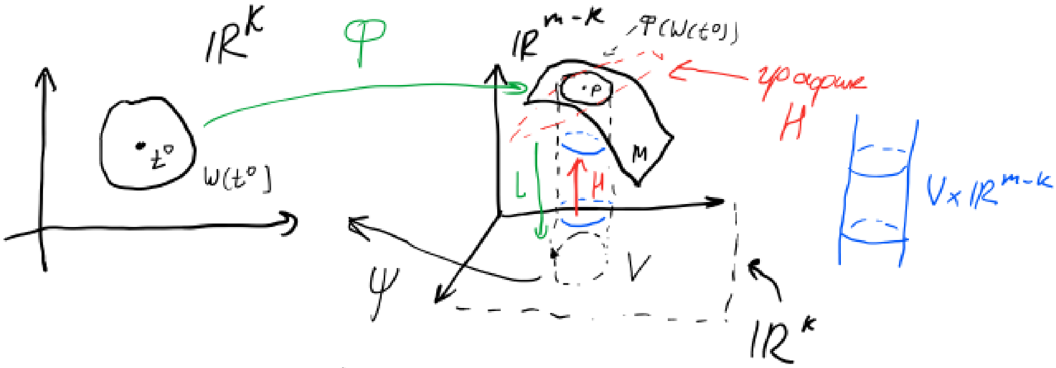
$M \subset \mathbb{R}^m, 1 \leq k \leq m, 1 \leq r \leq \infty$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists U(p) \in \mathbb{R}^m : M \cap U(p)$ — гладкое k-мерное C^r-гладкое многообразие
2. $\exists \widetilde{U}(p) \in \mathbb{R}^m : \exists (F_1, F_2, \ldots, F_{m-k}) : \widetilde{U} \to \mathbb{R}, F_i \in C^r$
   (a) $\forall x \in \widetilde{U} \cap M \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_{m-k} = 0$
   (b) $\boldsymbol{\nabla} F_1, \boldsymbol{\nabla} F_2, \ldots, \boldsymbol{\nabla} F_{m-k}$ — ЛНЗ

Доказательство (оставь надежду всяк сюда идущий):

(1) $\Rightarrow$ (2)



$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} F_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} F_{m-k} \end{pmatrix} = \left.\left(\begin{array}{ccc|cccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\right\} k$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{k} \quad \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{m-k}$$

Нам дано многобразие. А что это значит? $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \in C^r$ — гомеоморфизм. Давайте посмотрим на неё в смысле координатных функций: $\exists \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l), p = \Phi(t^0), \operatorname{rank} \Phi'(t^0) = k$. Всё по определнию.

У нас тут ЛНЗ набор (ранг k), поэтому давайте опять считать, что он реализуется на первых k векторов, поэтому:

$$\left(\det \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}\right)_{i=1\dots k} = 0$$

Теперь давайте, во-первых, примем за $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$ (на рисунке справа, всё логично). И заведём $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_k)$ — просто проекция первых k координат. Тогда заметим, что $(L \circ \Phi)'(t^0)$ — невырожденный оператор: всё просто, он мапит первые k координат, а оператор по ним невырожден по определению многообразия, вон, наверху написано. Значит, это локальный диффеоморфизм (по соответствующей теореме). А если $W(t^0)$ — окрестность, то $L \circ \Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k \in C^r$ — диффеорморфизм (класс гладкости сохраняется).

Тогда давайте введём ещё парочку отображений: $\Psi : V \to W := (L \circ \Phi)$ — обратное отображение, также диффеоморфизм, т. к. оно там всё диффеоморфизм, следовательно биекция сохраняется. Также, получается, раз у нас биекция, над V множество в R^{m-k} это график какого-то отображения. Оно точно существует, ведь L — биективно. Назовём его $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$

При $x' \in V : (\underbrace{x'}_{1\dots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\dots m-k}) = \Phi\Psi(x')$ — это правда, просто проехались по путям и вернулись. В L у нас только первые k координат, а H нам дорисовывает остальные $m-k$ штук. Ну и вот, в правой стороне равенства у нас диффеоморфизмы, слева проекция (там вообще всё гуд) и $H \Rightarrow$ это тоже диффеоморфизм класса C^r.

Почти всё. Осталось чётко определить, на какой окрестности будут определены наши функции. Смотрите, вообще наш график H может в принципе быть и шире, чем $W(t^0)$, и тогда $L($*график* $H)$ может быть больше, чем V, и мы не хотим со всем этим разбираться — зачем? Поэтому давайте аккуратненько всё подрежем. $V \times \mathbb{R}^{m-k}$ — открытое, такой типа цилиндр вверх. Φ — гомеоморфизм, поэтому $\Phi(W)$ — открытое. Но в M — это важно! Оно может и не быть открыто во всём $\mathbb{R}^m$, а конкретно на M с индуцированной метрикой точно открыто. Тогда вспоминаем теорему из 1-го семестра об открытом множестве в пространстве и подпространстве: $M \subset \mathbb{R}^m, \Phi(W) \subset M$ — открытое, тогда $\exists G \subset \mathbb{R}^m : G \cap M = \Phi(W), G$ — открытое. И тогда пусть область определения $\widetilde{U}(p) = G \cap \{V \times \mathbb{R}^{m-k}\}$ — открытое в $\mathbb{R}^m$, отрезали всё лишнее.

Ну всё, совсем немного осталось. Надо задать такие функции, что они будут нулевыми при $x \in \widetilde{U} \cap M$. Пусть $F_j(x) = H_j(L(x)) - x_{j+k}$. Что тут написано: мы берём x, отпрявляем его в L, оставляя только первые k координат. Потом H отправляем его обратно наверх, причём конкретно H_j вернёт нам x_{k+j}-ю координату, ведь, как мы писали выше, точки из графика H выглядят как $(\underbrace{x'}_{1\ldots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\ldots m-k})$. Ну всё, (A) выполнено автоматически. А что там с градиентами? Давайте просто их построим и увидим, что в конце будет просто $-E$, что и даст нам $m-k$ независимых векторов (ну, ранг такой).

(2) $\Rightarrow$ (1)

Тут нам сильно помогут наработки предков. Давайте подгоним наше условие под условие теоремы о неявном отображении (в смысле системы уравнений). У нас там была система из уравнений $F(x, y) = 0$, где x — "переменные", а y — "функции" и решение (x^0, y^0), такое что при $\forall x \in P(x^0), y \in Q(y^0) : F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi : P \to Q : \phi(x) = y$. Давайте назначим первые k координат переменными, а следующие $m-k$ — функциями. Опять же, у нас ЛНЗ лабор этих градиентов этих функций, а именно:

$$\left(\det \frac{\partial F_i}{\partial x_{j+k}}\right)_{1 \le i,k \le m-k} (x^0, y^0) \neq 0$$

Значит, условие теоремы выполнено, и параметризация есть ничто иное, как $\Phi : U(p_1, p_2, \ldots, p_k) \to \mathbb{R}^m \quad x' \mapsto (x', \varphi(x'))$ на $x \in M \cap \widetilde{U} \cap \{P \times Q\}$ (по сути график φ). В том числе это и гомеоморфизм, так как в одну сторону всё непрерывно, так как функции непрервыны $(x', \varphi(x'))$, а обратно — это по сути проекция, так что всё тоже непрерывно. Классы гладкости тоже переезжают из прошлой теоремы.

ч. т. д.

1.4.12 Следствие о двух параметризациях

Формулировка:

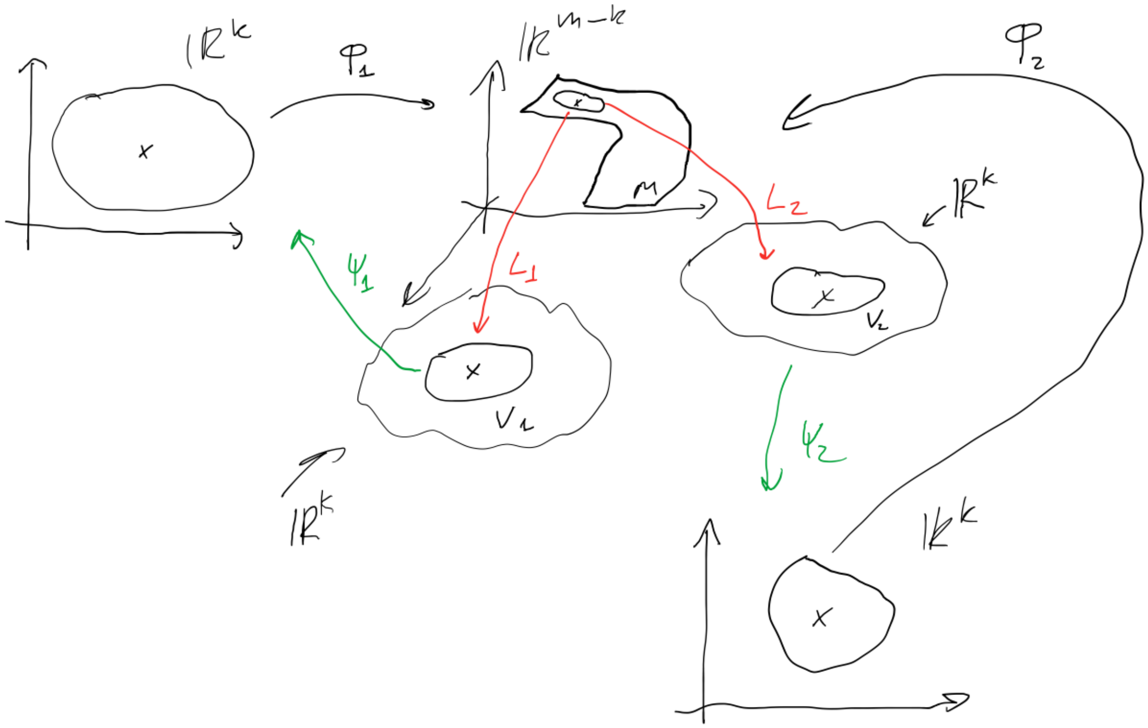
$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

1. $\exists \Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
2. $\exists \Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

— гладкие параметризации.

Тогда $\exists \Theta : O_1 \to O_2 : \Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$ — диффеоморфизм класса C^r

Доказательство:



Продолжаем повествование из прошлой теоремы. Гомеоморфизм $O_1 \to O_2$, вообще говоря, существует тривиально: $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$. Однако, так говорить не совсем правильно, потому что для корректного взятия обратной функции, необходимо сузить образ Φ_2 на его реальную область значений. Поэтому давайте поступим умнее: нарисуем возможные пути точки (крестика) на рисунке (кстати, важно заметить, что разные параметризации могут отправлять точки в разные пространства $\mathbb{R}^k$, ведь ранг может реализовываться на произвольных строчках матрицы производного опреатора; поэтому у нас народилось 2 пространства и соответствующие отображения между ними (см. картинку)).

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1) = \Psi_2 \circ \Theta$$

Супер, гомеоморфизм есть. А обратим ли он? Да пожалуйста:

$$\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Phi_2$$

А всякие гладкости и классы приходят просто из предыдущих отображений, всё там супер.

ч. т. д.

1.4.13 Лемма о корректности определения касательного пространства

Формулировка:

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация $M \cap U(p)$

- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор

Тогда образ $\Phi'(t^0)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ.

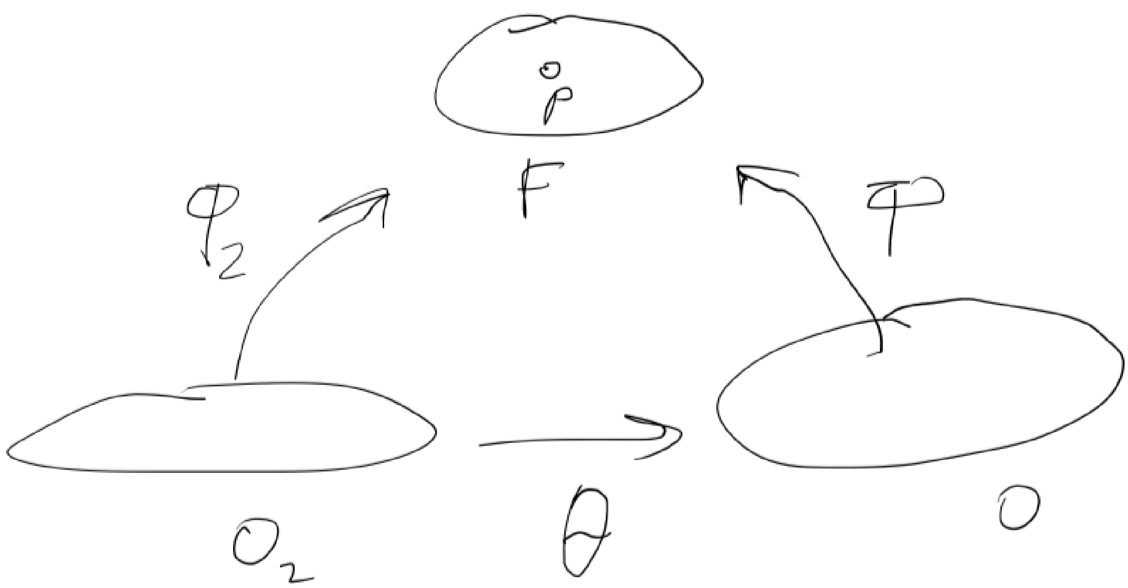
Доказательство:

Так как Φ — параметризация, $\operatorname{rank}\Phi = k$. Ну и тогда всё очевидно по знаниям из линейной алгебры, размерность пространства определяется количеством ЛНЗ столбцов.

По поводу независимости, по следствию о двух параметризациях:

$$\Phi_2 = \Phi \circ \Theta \Rightarrow \Phi_2' = \Phi'\Theta'$$

Θ — диффеоморфизм, следовательно $\Theta'(t^0)$ — невырожденный. Поэтому образ $\Phi_2' = \Phi'$ (см. картинку)



ч. т. д.

1.4.14 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Формулировка (Лемма):

$v \in T_pM$

Тогда $\exists$ гладкий $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

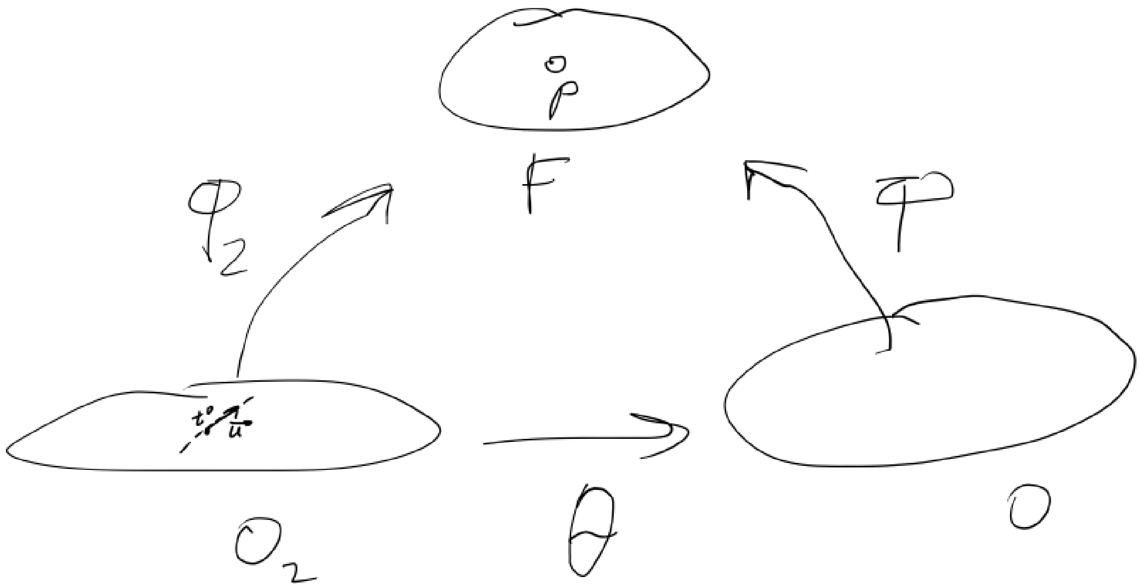
Доказательство:

Раз у нас есть v в образе, значит оно откуда-то пришло. Давайте найдём: $u = (\Phi'(t_0))^{-1}v$.

Тогда предъявим путь в $O : \widetilde{\gamma}(s) = t^0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Типа мы выбрали направление, и гоняем по нему в O.

А настоящий путь будет таким: $\gamma(s) = \Phi \circ \widetilde{\gamma}(s)$. Тогда $\gamma'(s) = \Phi' \circ \widetilde{\gamma}(s)$.

Проверим: $\gamma(0) = \Phi(t^0 + 0) = p, \quad \gamma'(0) = \Phi' u = v$



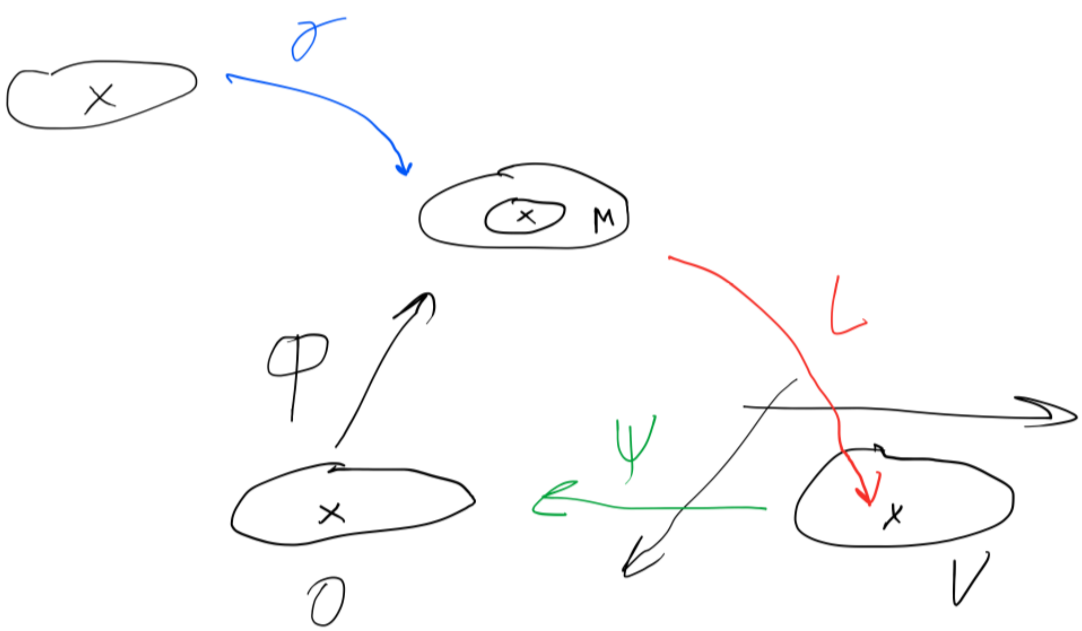
ч. т. д.

Формулировка:

$\exists$ гладкий путь $\gamma : [-1, 1] \to M, \gamma(0) = p$

Тогда $\gamma'(0) \in T_p M$

Доказательство:



Давайте опять прогуляемся по картинке из теоремы о задачи параметризации:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

Это очевидно, просто прошли по кругу.

$$\gamma'(0) = \Phi'(t^0)\Psi' L' \gamma'$$

Всё лежит в образе $\Phi'(t^0)$, так что по определению касательного пространства всё супер.

ч. т. д.

1.4.15 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

Формулировка (к графику функции):

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $f \in C^1$
- $y = f(x)$ — задаёт простое гладкое n-мерное многообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$ (???)
- есть точка $f(x^0) = y^0$

Тогда $y - y^0 = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)$ задаёт аффинное касательное пространство

Доказательство:

Пусть $\Phi : x \mapsto (x, f(x))$. Посмотрим на производный оператор этого отображения:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & f'_{x_3} & \dots & f'_{x_n} \end{pmatrix}$$

Заметим, что в нашей формуле неизвестные — y и x_i. Давайте рассмотрим вектор, образующийся перед x_i:

$$\begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ f'_{x_3} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что этот вектор ортогонален матрице производного оператора (при перемножении даёт нуль-вектор, следовательно косинус 0, по скалярному произведению). Ну это то, что нам нужно. Вектор (фактически нормаль) к касательному пространству. Ещё и через точку начальную проходит (x^0, y^0).

ч. т. д.

Формулировка (к уровню):

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — гладкая
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ — функция
- x^0 — точка, в которой ищем касательное пространство

Тогда касательное пространство задаётся уравнением $f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \ldots + f'_{x_m}(x_m - x_m^0)) = 0$

Доказательство:

Во-первых, давайте опять прогоним трюк с теоремой о неявном отображении: будем считать первые $m-1$ координату "неизвестными", а x_m — "функцией".

Тогда пусть $f'_{x_m}(x^0) \neq 0$. Значит, существует $x_m = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$. Ещё один трюк: $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}))$ — параметризация многообразия $f(x) = 0$ в окрестности точки x^0.

Тогда по предыдущему, что мы доказали, касательная плоскость задаётся $\sum_{i=1}^{m-1} \varphi'_i(x^0)(x_i - x_i^0) = x_m - x_m^0$, или:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \varphi'_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0$$

Это всё замечательно, но условие требует вывод в терминах f. А как они связаны? По условию:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})) = 0$$

Давайте вычислим рецепт замены φ_{x_i}:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: \quad f'_{x_i} + f'_{x_m} \cdot \varphi'_{x_i} = 0 \Rightarrow \varphi'_{x_i} = -\frac{f'_{x_i}}{f'_{x_m}} \qquad \big(f'_{x_m}(x^0) \neq 0 \text{ по усл.}\big)$$

Итого:

$$-\sum_{i=1}^{m-1} \frac{f'_{x_i}}{f'_{x_m}}(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0 \qquad | \cdot -f'_{x_m}$$

ч. т. д.

1.4.16 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

Формулировка:

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Тогда $||A|| = \max \sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A^T A)$ — множество собственных чисел.

Доказательство:

Рассмотрим $x \in S^{m-1} : \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = 1\}$.

$$||A||^2 = \sup_{x \in S^{m-1}} |Ax|^2 = \sup_{x \in S^{m-1}} \langle Ax, Ax \rangle = \sup_{x \in S^{m-1}} \langle \underbrace{A^T A}_{\text{симметричная}} x, x \rangle = \sup_{x \in S^{m-1}, \lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda |x|^2 = \max_{\lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda$$

Немного контекста: собственное число, это такое число, что A отображает x в λx. Матрица $A^T A$ — симметричная $(m \times n) \times (n \times m) = m \times m$. Так как у нас эта матрица вещественная, то и собственные числа у неё вещественные. Ну и значит, что максимальный вектор, который может получится, это вектор, домноженный на максимальное собственное число.

ч. т. д

1.4.17 Теорема о функциональной зависимости

Формулировка:

- $f_1, f_2, \ldots, f_n : O\mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \in C^1$
- $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : O \to \mathbb{R}^n$
- $\forall x \in O : \operatorname{rank} F'(x) \leq k$
- $x^0 \in O : \operatorname{rank} F'(x^0) = k$
- $y^0 = F(x^0)$

Тогда: $\exists U(x^0), \exists g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_n : V(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_k^0) \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$

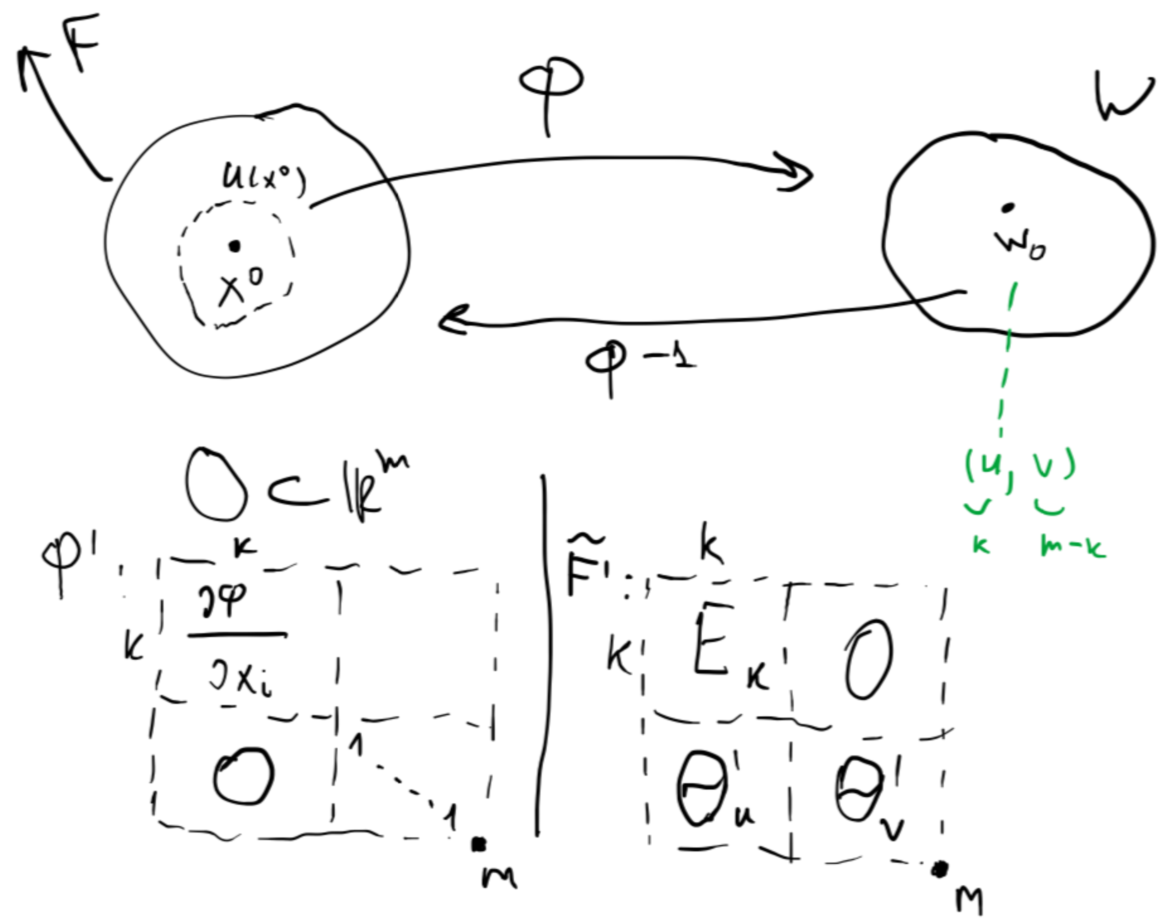
Что: $f_i = g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)), i = k+1 \ldots n, x \in U(x^0)$

Доказательство:

Пусть в точке x^0 ранг реализуется на первом k-миноре (строчки $1 \ldots k$, столбцы $1 \ldots k$).

Введём дополнительную функцию $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \Phi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), x_{k+1}, x_{k+1}, \ldots, x_k)$.

Тогда, если посмотреть на матрицу производного оператора $\Phi'(x^0)$ (см. рисунок), то окажется, что она невырождена: $\det \Phi'(x^0) \neq 0$. Поэтому Φ действует как локальный диффеоморфизм класса C^1 (по определению там внутри функции минимум C^1). Опять начинаем рисовать:



$\Phi(U(x^0)) = W, \Phi(x^0) = w_0$. Рассмотрим функцию $\widetilde{F} : W \to \mathbb{R}^n : F \circ \Phi^{-1}$. Посмотрим поподробнее на точку $w_0 = (u, v)$. Координата u вычислялась как $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_k(x_0)$, теперь мы снова отправляем её обратно, получая $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$, и шлём в F, снова применяя к точке функции f_i. Получается, что координата u отображается в саму себя. v же под действием какого-то отображения отображается во что-то другое: $\widetilde{F}(u, v) = (u, \Theta(u, v))$.

Рассмотрим производный оператор $\widetilde{F}' = F' \underbrace{\left(\Phi^{-1}\right)'}_{\text{невырожден}}$. Невырожденный оператор (кстати, не только в точке w, но и во всей окрестности, на которой работает локальный диффеоморфизм (W)) не меняет ранг матрицы, поэтому $\operatorname{rank} \widetilde{F} = k$. С другой стороны, если посмотреть на матрицу производного опреатора (см. рисунок), Θ'_v обязана быть тождественно равна 0, в противном случае мы могли бы сочинить минор большего ранга, чем k. Таким образом, $\Theta'_v = 0 \Rightarrow \Theta = \Theta(u)$ (зависит только от u).

Тогда давайте перенесём (домножим на обратную), выразим F и аккуратно распишем:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \widetilde{F} \circ \Phi(x) \\
&= \widetilde{F}(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m) \\
&= (f_1(x), \ldots, f_k(x), \Theta\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\right)_{k+1}, \ldots, \Theta\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\right)_n)
\end{aligned}
$$

ч. т. д.

2 Период Мезозойский

2.1 Важные определения

2.1.1 Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

- $(f_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$
- $f_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{мн-во}} \to \mathbb{R}$

Если $\exists f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall \ n > N \ \forall x \in E \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

— тогда f_n равномерно сходится к f на E ($f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$).

Это же условие равносильно $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

2.1.2 Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

$$a, z, z_0 \in \mathbb{C} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Вот такой ряд в шаре $B(z_0, R)$ называется *степенным рядом.*

Примечания:

Мы не особо раньше дружили с комплексными числами, но бояться их не нужно, потому что это числа вида $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$. А $|z|$ — и вовсе вещественное число, поэтому можно оценивать всё по модулю и работать как бы с вещественными числами.

Давайте попробуем абсолютно оценить сходимость такого ряда (по признаку Коши):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = |z - z_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \begin{cases} |z - z_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{— абсолютно сходится} \\ |z - z_0| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{— расходится} \end{cases}$$

Проблема лишь в том, что предел иногда может и не существовать, поэтому возьмём верхний предел, и всё получится. Эта формула (радиуса сходимости) называется *формулой Коши-Адамара*:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

2.2 Определения

2.2.1 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

- $(f_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$
- $f_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{мн-во}} \to \mathbb{R}$

Если $\exists f(x) : \forall x \in E$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall \ n > N \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

— тогда f_n поточечно сходится к f на E.

2.2.2 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ \forall p \ \forall x \in X \ \ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

2.2.3 Равномерная сходимость функционального ряда

$f_n : E \subset X \to \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ — функциональный ряд

$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ — частичная сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \underset{E}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow S_N(x) \underset{E}{\rightrightarrows} S(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in X \ \ |S_N(x) - S(x)| < \varepsilon$$

Замечания:

1. равномерная сходимость $\Rightarrow$ поточечная
2. $R_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x)$ — остаток ряда. $S_N(x) + R_N(x) = S(x)$. $\Rightarrow \sum f_n \underset{E}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow R_N(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$
3. $\sum f_n \underset{E}{\rightrightarrows} \Rightarrow f_n \underset{E}{\rightrightarrows}, f_n = R_N - R_{N-1}$

2.2.4 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \underset{E}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ \forall p \ \forall x \in E \ \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

2.2.5 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

- $a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$
- $\sum a_n(x)$ — равномерно ограничена ($\exists C_a > 0\ \forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n(x)| \le C_a$) и монотонна по n при любом x
- $\sum b_n \underset{X}{\rightrightarrows}$

Тогда $\sum a_n(x) b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

2.2.6 Преамбула к суммам расходящися рядов

В списке определений как-то подозрительно мало определений, и некоторые темы вообще непокрыты, хотя теоремы на них есть. Поэтому я решил расписать самую базу в формате "преамбулы", чтобы иметь общее представление о происходящем.

Смотрите, введём иерархию множеств всевозможных рядов: $\mathfrak{R}$ — вообще все ряды, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{R}$ — множество сходящихся рядов.

Теперь зададим сумму ряда как $F : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}$ — и будем называть это суммой в смысле F: $\sum a_n \underset{F}{=} S \in \mathbb{R}$

Посмотрим на примеры:

1. $S : \mathfrak{Q} \to \mathbb{R} = \lim_{n\to\infty} S_N$ — предел частичных сумм, наша самая простая и приятная версия, но она задана только на множестве сходящихся рядов. Сейчас хотелось бы создать такие суммы, чтобы они считались на большем множестве рядов, но при этом нормально считали бы и обычные ряды. Поэтому давайте дальше считать множество $\mathfrak{I}$ таким: $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{I} \subset \mathfrak{R}$ (это моя ремарка, но, кмк, так гораздо понятнее)
2. $\sum a_n x^n \underset{AP}{=} S_{AP}$ — сумма в смысле Абеля–Пуассона (раньше это просто называлось методом Абеля суммирования рядов, но тут КПК стал называть это методом Абеля–Пуассона)
3. $\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n+1}, \lim_{n\to\infty} \sigma_n \underset{\text{с. а.}}{=} S_{\text{с. а.}}$ — сумма в смысле среднего арифметического (сумма по Чезаро). Определяется через предел частичных срадних арифметических частичных сумм.

Вот все эти новые суммы нужны, чтобы получить возможность считать суммы большего количества рядов. Отсюда же берутся фокусы в стиле "сумма натуральных чисел равна $-\frac{1}{12}$" (через дзета-функцию Римана $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$)

2.2.7 Преамбула к асимптотическим рядам

Пусть $\varphi_i : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, или : $\langle b, a\rangle \to \mathbb{R}(a \in \overline{\mathbb{R}})$, или : $\langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ при $a \in (c, d)$ — шкала арифметического ряда. Причём:

$$\exists \dot{U}(a) \forall k \forall x \in \dot{U}(a) \cap \langle a, b\rangle \quad \varphi_k(x) \ne 0, \quad \varphi_{k+1}(x) \underset{x\to a}{=} o(\varphi_{k+1}(x))$$

Тогда, если существует последовательность равенств $\forall n (f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R})$:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$$
$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + o(\varphi_1(x))$$
$$\vdots$$
$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x))$$
$$\vdots$$

То можно сказать, что

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$$

При этом, если оказалось, что у $f(x)$ и $g(x)$ оказались одинаковые асимптотические разложения, то:

$$\forall k \quad f(x) - g(x) \sim o(\varphi_k(x))$$

Пример (ряд Тейлора):

$$f \in C^{\infty}(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n$$

Ещё нужно отметить, что асимптотические ряды выдерживают конечные линейные преобразования.

Интеграл Лапласа:

$$\int_a^b f(x) e^{A\varphi(x)} dx$$

2.3 Важные теоремы

2.3.1 Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

Формулировка (последовательности):

- $f_n, f : \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \to \mathbb{R}$
- $c \in X : f_n$ — непрерывно в c
- $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$

Тогда: f — непрерывно в c

Следствие:

$f_n \in C(X), f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C(X)$ — доказательства не требует, просто по всем точкам пробегаемся

Доказательство:

Зафиксируем ε из определения равномерной сходимости и распишем гига-неравенство треугольника:

$$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(c)|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{(3)}$$

Оно верно при всех n. Но нам дали равномерную сходимость, из чего мы достаём $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это обстоятельство с ходу говорит нам, что существует большое n, при котором (1) и (3) (то, что они $< \varepsilon$). С другой стороны, раз так, мы можем считать, что в (2) стоит вполне конкретная функция, непрерывная в $c \Leftrightarrow \forall x \in U(c) : (2) < \varepsilon$. Ну и всё, получается, что наше неравенство целиком меньше 3ε:

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| < 3\varepsilon$$

Ну и вот, по китайской методике в определении непрерывности всё работает.

ч. т. д.

Бонус:

☺

Доказательство работает и в топологических пространствах без единой правки, потому что мы разговариваем на языке окрестностей и метрику не трогаем!

Формулировка (ряды):

- $u_n : \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \to \underbrace{Y}_{\text{нормированное пространство}}$
- $c \in X : u_n$ — непрерывно в c
- $S_n(x) := \sum^n u_n(x)$

- $S(x) := \sum u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

Тогда $S(x)$ — непрерывно в c

Доказательство:

По предыдущей теореме $S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x), S_n(c)$ — непрерывно в $c \Rightarrow S(x)$ — непрерывно в c

ч. т. д.

2.3.2 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Формулировка:

- $\sum u_n(x)$ — функциональный ряд
- $u_n : \underbrace{X}_{\text{мн-во}} \to \mathbb{R}$
- $\exists (c_n)$ — вещественная последовательность, причём $\sum c_n$ — сходится
- $\forall n \in \mathbb{N}\ x \in X : |u_n(x)| \leq c_n$

Тогда $\sum u_n \underset{X}{\rightrightarrows}$

Доказательство:

Доказательство более-менее тривиально. Распишем определение равномерной сходимости:

$$n \to \infty : \quad \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sup_{x \in X} \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_n \longrightarrow 0$$

ч. т. д.

2.3.3 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Формулировка:

- $\sum a_n(x) b_n(x), \quad a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$
- $\sum a_n$ — равномерно ограничена ($\exists C_a\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \ |\sum_{k=1}^{n}(x)| \leq C_a$)
- $\sum b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$
- b_n — монотонны по n $\forall x \in X$

Тогда $\sum a_n(x) b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

Доказательство:

Пусть $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Рассмотрим такую сумму (опустим (x), но они там есть):

$$\sum_{N \le K \le M} a_K b_K = A_M b_M - A_{N-1} b_{N-1} + \sum_{N \le K \le M-1} (b_K - b_{K-1}) A_K$$

Если взять всё под модуль и применить неравенство треугольника, то получится выдержка из критерия Коши:

$$\left| \sum_{N \le K \le M} a_K b_K \right| \le |A_M b_M| - |A_{N-1} b_{N-1}| + \sum_{N \le K \le M-1} |b_K - b_{K-1}| \cdot |A_K| \qquad (*)$$

Вспоминаем, что b_n монотонна, поэтому можно раскрыть модуль внутри суммы и домножить всю сумму на “знак монотонности” (1, если возрастающая и -1, если убывающая). И потом просто оценить эту сумму сверху наибольшим членом и взять его с плюсом (оцениваем жеж). Ну и ещё оценим все A_i-шки константой из условия (у нас есть равномерная ограниченность):

$$(*) \le C_a \left(|b_M| + |b_{N-1}| + |b_K| + |b_{K-1}| \right) \qquad (**)$$

И ещё вспоминаем, что у нас ряд из b_n равномерно сходится, что значит (с небольшой китайской бухгалтерией):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \; \forall n > k \; \sup_{x \in X} |b_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a}$$

Тогда при достаточно больших N, M:

$$(**) \; C_a \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a} \right) < \varepsilon$$

Критерий выполнен, всё хорошо.

ч. т. д.

2.4 Теоремы

2.4.1 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

Формулировка:

- $\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ — метрика (это доказывалось на лекции, хз, надо ли тут, но там вроде всё тривиально: аксиомы тождества, симметрии и правило треугольника)
- X — компактное метрическое пространство

Тогда $(C(X), \rho)$ — полное метрическое пространство

Доказательство:

Полное метрическое пространство — это такое, в котором у любой фундаментальной последовательности есть предел:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \ \rho(f_n, f_m) = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Давайте возьмём какой-нибудь $x_0 \in X$ и заметим, что $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ (очев, раз супремум меньше, то и отдельный x_0 меньше). Значит $n \mapsto f_n(x_0)$ — фундаментальная **вещественная** последовательность (просто подставить в определение выше)! Ну а $\mathbb{R}$ — полное, поэтому у такой последовательности сущесвтует предел: $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ (к какой-то f). Получается, что пототочечно всё норм сходится. Но нам то надо равномерную (в силу того, какую метрику мы выбрали). Давайте немного перепишем определение фундаментальной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \ \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Сделаем предельный переход по $m \to \infty$ и подставим найдённую предельную функцию:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

А это — определение $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. Ну всё, супер, значит фундаментальная последовательность сходится.

А непрерывность приходит из теоремы Стокса-Зайдля. Значит наша фундаментальная последовательность имеет предел, и этот предел лежит в $C(X)$.

ч. т. д.

2.4.2 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

Формулировка (последовательности):

- $f_n \in C[a,b]$
- $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$

Тогда:

$$\int_a^b f_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство:

Тривиалити (скажем, что их разность стремится к 0, т. к. есть равномерная сходимость):

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b f_n(x) - f(x)dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)dx| \\ &\underset{\text{по метрике}}{\leq} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|(b-a) \to 0\end{aligned}$$

ч. т. д.

Формулировка (ряды):

- $u_n : C[a,b] \to \mathbb{R}$
- $\sum u_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$

Тогда $\int_a^b S(x)dx = \sum \int_a^b u_n(x)dx$, причём интегрировать можно, т. к. $S(x)$ — непрерывна по Стоксу-Зайдлю

Доказательство:

По теореме для последовательностей:

$$\int_a^b S_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b S(x)dx$$

С другой стороны:

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n u_n(x)dx \underset{\text{линейность интеграла}}{=} \sum_{i=1}^n \int_a^b u_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} = \sum_{i=1}^\infty \int_a^b u_n(x)dx$$

Ну и вот, у нас интеграл частичных сумм в пределе стремится одновременно к интергалу предельной суммы и ряду интегралов. Всё хорошо.

2.4.3 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

Формулировка:

- $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}, f(x,y)$
- f, f'_y — непрерывны на $[a,b] \times [c,d]$

- $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Тогда $\Phi(y)$ — дифференцируема и $\Phi(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$

Доказательство:

Ну, давайте попробуем подифференцировать. Возьмём какую-то $t_n \to 0$ и напишем а-ля определение дифференцируемости и применим теорему Лагранжа (привет, НТР!):

$$\frac{\Phi(y+t_n) - \Phi(y)}{t_n} = \Phi'(y + \Theta_x t_n) = \int_a^b f'_y(x, y + \Theta_x t_n)dx \underset{?}{\longrightarrow} \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

Ну и вот, мы теперь хотим понять, а действительно ли оно стремится? Применим "тяжёлую артиллерию": теорема Кантора о равномерной непрерывности:

$$f \text{ — непр. } \in C(K) \text{ (компакт)} \Rightarrow f \text{ — равномерно непрерывна}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \rho(x_1, x_2) < \delta \; |f(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon$$

У нас непрерывная функция на компакте, поэтому давайте подгоним под Кантора наше условие:

$$\exists N \; \forall n > N \; |t_n| < \delta, \;\; \rho((x, y + \Theta_x t_n), (x,y)) < \delta, \;\; \left| f'_y(x, y + \Theta_x t_n) - f'_y(x,y) \right| < \varepsilon$$

Тогда:

$$\left| \int_a^b f'_y(x, y + \Theta_x t_n)dx - \int_a^b f'_y(x,y)dx \right| \leq \varepsilon(b-a)$$

Следовательно, разность между ними меньше ε, тогда всё действительно стремится.

ч. т. д.

2.4.4 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

Формулировка (последовательности):

- $f_n \in C^1\langle a, b\rangle$
- $f_n \to f_0$ — поточечно
- $f'_n \underset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} \varphi$

Тогда $f_0 \in C^1\langle a, b\rangle$ и $f'_0 = \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

Доказательство:

Давайте (не умаляя общности) возьмём какой-то подотрезок $[x_0, x_1] \subset \langle a, b\rangle$. Тогда по предыдущей теореме (у нас непрерыно равномерно сходится по условию):

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n' \longrightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Интегрируем:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n' = f_n(x_1) - f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{=} f_0(x_1) - f_0(x_0) \underset{n\to\infty}{=} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Получается, что f_0 — первообразная φ. Причём, по Стоксу-Зайдлю, φ — непрерывна, значит и её первообразная тоже непрерывна ($f_0' = \varphi$).

ч. т. д.

Формулировка (ряды):

- $u_n \in C^1\langle a, b\rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$ — поточечно
- $\sum u_n'(x) \underset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} = \varphi(x)$

Тогда $S(x) \in C^1\langle a, b\rangle$ и $S'(x) = \varphi(x)$ на $\langle a, b\rangle$. То есть $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

Доказательство:

Запускаем теорему для последовательностей с вводными: $f_n = S_n, f_0 = S, f_n' = \sum_{k=1}^n u_k'$

ч. т. д.

2.4.5 Теорема о предельном переходе в суммах.

Формулировка:

- $u_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ — предельная точка E
- $\forall n$ $\exists$ конечный $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows}$

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x\to x_0} (\sum_{n=1}^\infty u_n(x))$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^\infty u_n(x) = \sum_{n=1}^\infty \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

Доказательство:

Нам, честно говоря, не за что зацепиться, поэтому давайте попробуем проверить, что a_n — фундаментальная последовательность, тогда у неё точно будет предел.

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_n(x), S_n^a = \sum_{k=1}^n a_n$

Опять распишем гига-неравенство треугольника:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \le \underbrace{|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)|}_{(1)} + \underbrace{|S_{n+p}(x) - S_n(x)|}_{(2)} + \underbrace{|S_n(x) - S_n^a|}_{(3)}$$

По критерию Больцано-Коши равномерной сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p : \sup_{x \in E} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Сейчас мы получили, что при достаточно большом n (2) $< \frac{\varepsilon}{3}$ при любых $x \in E$. Теперь заметим, что мы доказываем фундаментальность числовой последовательности, следовательно никаких ограничений на x изначально не наложено. (???) Поэтому давайте возьмём такой x, близкий к x_0, чтобы (1) и (3) были $\frac{\varepsilon}{3}$. Итого:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Мы взяли частичные суммы a_n, и проверили, что разности рядом лежащих сумм сколь угодно малы.

Ура, у a_n есть предел! А чему же он равен? Давайте заведём дополнительную функцию:

$$\widetilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), x \ne x_0 \\ a_n, x = x_0 \end{cases}$$

Такая сложность необходима для обеспечения непрерывности в x_0 (если x_0 лежит в E, то мы просто подменили значение, а если не лежала, то дополнили). Теперь эта функция непрерывна на x_0, ряд $\sum \widetilde{u}_n \underset{E \cup \{x_0\}}{\rightrightarrows}$ (*) $\Rightarrow$ по Стоксу-Зайдлю $S_{\widetilde{u}_n}(x)$ непрерывна в x_0. А поэтому:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u}_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u}_n(x) = \sum a_n$$

А равномерная сходимость ряда $\sum \widetilde{u}_n$ доказывается так:

$$(*) : \sup_{x \in E \cup \{x\}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{u}_k \right| = \max\{ \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{u}_k \right|, \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \} \le \underbrace{\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{u}_k \right|}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

ч. т. д.

2.4.6 Теорема о перестановке двух предельных переходов

Формулировка:

- $f_n : E \subset X \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ — предельная точка E
- $\forall n \in \mathbb{N} : \exists$ конечный $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$
- $f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} S(x)$ при $n \to \infty$

Тогда:

1. $\exists \lim_{n \to \infty} A_n \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{\text{равномерный, } S(x)} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\lim_{x \to x_0} f_n(x)}_{A_n}$$

Доказательство:

Это такая попытка сделать двойной предел и для функций. Подгоняем под предыдущую теорему: $u_1 = f_1, u_n = f_n - f_{n-1}, \quad a_1 = A_1, a_n = A_n - A_{n-1}$. $\sum_{k=1}^n u_k = f_n \underset{E}{\rightrightarrows} S(x)$, то есть $\sum u_n \underset{E}{\rightrightarrows}$. Супер, предыдущая теорема запущена. Пожинаем плоды ($\sum a_n$ сходится):

$$\sum_{k=1}^{n} A_n \text{ — имеет конечный предел}$$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \lim_{x \to x_0} S(x) = A$$

ч. т. д.

2.4.7 Теорема о круге сходимости степенного ряда

Формулировка:

$\sum a_n (z - z_0)^n$ — степенной ряд

Тогда верно одно из этого:

1. ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. ряд сходится только при $z = z_0$
3. $\exists R \in (0, \infty)$:
   (a) $|x - x_0| < R$ — ряд абсолютно сходится
   (b) $|x - x_0| > R$ — ряд расходится

Доказательство:

Вспомним преамбулу из определения формулы Коши-Адамара. Ну и всё, вот берём признак Коши, и если предел равен нулю, то (a) работает. Если бесконечности, то (b) работает. А иначе, просто берём за радиус формклу Коши-Адамара.

ч. т. д.

2.4.8 Теорема о непрерывности степенного ряда

Формулировка:

- $\sum a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд
- $0 < R \leq \infty$ — радиус сходимости

Тогда:

1. $\forall r : 0 < r < R$ ряд равномерно сходится в $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ — непрерывно на $B(z_0, R)$

Доказательство:

(1)

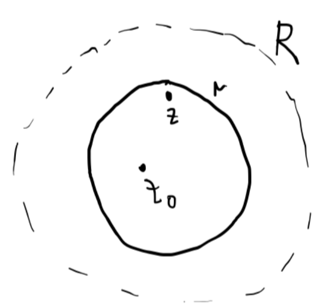
Давайте докажем по признаку Вейерштрасса, оценим каждый член по модулю:

$$|a_n \cdot (z-z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n = c_n$$

А почему же $\sum c_n$ сходится? Да всё очень просто. $\sum a_n(z-z_0)^n|_{z=z_0+r} = \sum a_n r^n$ — сходится абсолютно на $r \Rightarrow$ сходится и всё работает.

(2)

Вспоминаем нашу любимую теорему Стокса-Зайдля, и там у нас доказательство строилось на гига-неравенстве треугольника (всё по модулю). Поэтому наш переход к комплексным числам вообще не мещает, оцениваем то мы уже вещественные. Поэтому давайте для каждого z возьмём r чуть больший, чем $|z-z_0|$, но в пределе круга сходимости: $|z-z_0| < r < R$:



А на нём по **(1)** у нас есть равномерная сходимость, поэтому по Стоксу-Зайдлю $f(z)$ — непрерывна.

ч. т. д.

2.4.9 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

Предисловие о комплексном дифференцировании:

Чтобы определить комплексное дифференцирование, необходимо ввести какое-то определение а-ля дифференцируемости:

$$f'(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Но здесь A — комплексный производный оператор. Можно рассмотреть комплексное число $z = u + iv$ как вектор в $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f(u, v)$. Тогда производный оператор будет матрицей 2×2, подчиняющейся условию Коши-Римана:

$$A = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} u'_x = v'_y \\ v'_x = -u'_y \end{cases}$$

(его выводили на лекции, не уверен, что тут это нужно. Будет время, допишу)

Вместе с этим, можем доказать неравенство(оно же — дифференцируемость $f(z) = z^n$ по "школьному" определению):

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \ldots + z_0^{n-1})}{z - z_0} = nz^{n-1}$$

Типа у нас там в скобочке n слагаемых, и они все стремятся к z^{n-1}. И ещё мини-лемма:

Формулировка (лемма):

$w, w_0 \in \mathbb{C}, |w| \le r, |w_0| \le r$

Тогда: $|w^n - w_0^n| \le nr^{n-1}|w - w_0|$

Доказательство:

По тому же принципу, что и выше:

$$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot |w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \ldots + w_0^{n-1}| \le nr^{n-1}|w - w_0|$$

ч. т. д.

Формулировка:

1. $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n = f(z)$ — степенной ряд с радиусом сходимости $0 < R \le \infty$, равномерно сходится на нём
2. $\sum_{k=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$

Тогда:

1. (2) имеет такой же радиус сходимости, что и (1)
2. $\forall z \in B(z_0, R): \; f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$

Доказательство:

(1)

По формуле Коши-Адамара (для ряда $(z-z_0)\cdot(1) = \sum na_n(z-z_0)^n$, просто домножили на скобку, по идее нам ничего это не ломает, т. к. мы можем рассмотреть предел частичных сумм и там всё будет хорошо):

$$R_{(1)} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|}} \underset{\sqrt[n]{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1}{=} R$$

(2)

Найдём производную в произвольной точке $a \in B(z_0, r), 0 < r < R$:

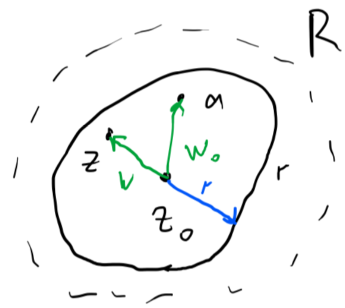
$$f'(a) = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

Заведём $w = z - z_0, w_0 = a - z_0$ и заменим в пределе функции на суммы:

$$\lim_{w\to w_0}\sum a_n\frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{w-w_0} = \lim_{w\to w_0}\sum a_n\frac{w^n-w_0^n}{w-w_0}$$

Мы хотим перейти к сумме пределов, но для этого, по теореме, которую мы доказывали ранее, нам надо, чтобы под переделом была равномерная сходимость. Давайте оценим по модулю по лемме:

$$|a_n|\frac{|w^n-w_0^n|}{|w-w_0|} \le |a_n|nr^{n-1}$$



Возьмём r из определения шара выше (w, w_0 по модулю меньше r, см. картинку) и заметим, что ряд $(1)|_{z=z_0+r}$ сходится. К чему бы всё это? Да к тому, что вся сумма под пределом сходится равномерно по Вейерштрассу (мажорирующая вещественаная последовательность сходится)! Значит можем поменять местами предел и сумму, и по дифференцируемости z^n:

$$\sum a_n\lim_{w\to w_0}\frac{w^n-w_0^n}{w-w_0} = \sum na_nw^{n-1} = \sum na_n(z-z_0)^{n-1} = (1)$$

Ну и всё, раз мы произвольно выбирали r, то для любых z из круга сходимости всё сошлось.

ч. т. д.

Следствия:

- $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n, R > 0 \Rightarrow f(z) \in C^\infty(B(z_0, R))$ (просто дифференцируем бесконечное число раз)
- Рассмотрим вещественный ряд $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$. Тогда $F = C + \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ — первообразная $f(x)$, и у него такой же радиус сходимости, как и у $f(x)$.

  Замечание:

  Если считать интеграл по какому-то промежутку, то константа сократится и $\int_{x_0}^x f(x)dx = \sum \int_{x_0}^x a_n(x-x_0)^n dx$

Пример:

Рассмотрим $f(x) = \arctan(x)$. Хотим разложить в ряд. Сложновато. А в производной что? $f'(x) = -\frac{1}{a+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$ при $x \in (-1, 1)$ — степенной ряд. Супер, давайте поинтегрируем:

$$\arctan(x) = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

Надо найти константу. КПК way: подствим $x = 0 : \arctan(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

ч. т. д.

2.4.10 Свойства экспоненты

Формулировка:

$$z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \infty$$

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(z) = \exp(z)$
3. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, где $\overline{z}$ — сопряжённое к z
4. $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

Доказательство:

(1)

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} = 1$$

(2)

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

(3)

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \exp(\overline{z})$$

(4)

Вспоминаем правило прямого перемножения рядов:

$$c_n = \left(\sum_{m=1}^{n} a_m\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = (a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_n b_n)$$

Ну и по нему:

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\frac{w^0}{0!} + \frac{z^{m-1}}{(m-1)!}\frac{w^1}{1!} + \ldots + \frac{z^0}{0!}\frac{w^m}{m!}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m} \frac{z^{m-k} \cdot w^k \cdot m!}{(m-k)! \cdot k!}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z+w)^m}{m!} = \exp(z+w)$$

ч. т. д.

P. S.

Там КПК рассказывал ещё весёлые выоды тригонометрических формул через экспоненту, но, КМК, оно тут не нужно

2.4.11 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

Формулировка:

- $\sum c_n$ — сходящийся вещественный ряд
- Пусть $f(x) = \sum c_n x^n$ при $x \in (-1, 1)$

Тогда: $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sum c_n$

Доказательство:

По признаку Абеля $f(x)$ сходится равномерно на $E = [0, 1]$ (x^n равномерно ограничено 1, а c_n — сходится $\Rightarrow$ равномерно сходится). Всё это вместе даёт нам непрерывность в 1 (на интервале нам её даёт теорема Стокса-Зайдля, но тут нам надо именно в 1, поэтому приходится использовать тяжёлую артиллерию).

ч. т. д.

Следствие:

- $\sum a_n = A, \sum b_n = B$
- $c_n = (\sum_{m=1}^{n} a_m) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k) = (a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_n b_n)$

- $\sum c_n = C$

Тогда: $\sum c_n = A \cdot B$

Доказательство:

Пусть $f(x) = \sum a_n x^n, \quad g(x) = \sum b_n x^n$ и $h(x) = \sum c_n x^n$ при $x \in [0,1]$. Тогда при $x < 1 : h(x) = f(x)g(x)$ (очевидно, просто перемножить по условию ивсё будет норм). При $x = 1$ это неочевидно, но мы применяем теорему, демаем предельный переход при $x \to 1 - 0 : C = A \cdot B$.

ч. т. д.

2.4.12 Единственность разложения функции в ряд (Тейлора)

Формулировка:

Ряд Тейлора: $(a_n)\ \exists U(x_0) : \ f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$

Бесплатно: $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$

Если существует разложение функции в ряд Тейлора, то оно единственно.

Доказательство:

Давайте посмотрим на k-ю производную функции:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k}, \quad f^{(k)}(x_0) = a_k k!$$

Тогда a_k однозначно можно определить:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Ничего не напоминает?

ч. т. д.

2.4.13 Разложение бинома в ряд Тейлора

Формулировка:

$\forall \sigma \in \mathbb{R} \quad (1+x)^\sigma = S(x) = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2!} x^2 + \dots$

Заметим, что если $\sigma \in \mathbb{N}$, то ряд в один момент обрубится и у нас просто будет бином.

Доказательство:

Для начала выясним радиус сходимости. В выводе формулы Коши-Адамара мы оценивали ряд абсолютно с помощью признака Коши. Давайте сделаем так же, но с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{(n+1)!}}{\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n-1)}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma - n|}{n} = 1$$

Получается, что $|x| < 1$. Теперь докажем, что $S'(x)(1-x) = \sigma S(x)$. Для этого достаточно показать, что $coef(x_k)$ у обоих частей равенства одинаковый (так как мы взяли первую производную и тут же домножили на $(1-x)$, тем самым изменились только коэффициенты при членах ряды).

$$coef_{left}(x_k) = coef(x_k) + coef(x_{k-1}) =$$

Можно представить себе как $S'(x)x + S'(x)$ (это x_k и x_{k-1})

$$= \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-k)}{k!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-k+1)k}{k!} =$$

Тут суммируем последнюю скобку $(\sigma - k)$:

$$= \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-k+1)}{k!}\sigma$$

Ну а справа:

$$coef_{right}(x_k) = \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-k+1)}{k!}\sigma$$

Всё равно. Супер. При этом — это диффур. То есть мы предполагаем, что:

$$S(x) = C \cdot (1+x)^\sigma \Leftrightarrow \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} = C$$

Продифференцируем с обоих сторон и удостоверимся, что это правда:

$$\left(\frac{S(x)}{(1+x)^\sigma}\right)' = \frac{S'(x)(1+x)^\sigma - S(x)\sigma(1+x)^{\sigma-1}}{(1+x)^{2\sigma}} = \frac{S'(x)(1+x)^\sigma - S'(x)(1+x)^\sigma}{(1+x)^{2\sigma}} = 0 = C'$$

Ну всё, функция действительно верно найдена. Поэтому осталось найти константу:

$$S(0) = 1 = C \cdot (1+0)^\sigma \Rightarrow C = 1$$

ч. т. д.

Следствия:

1. $\arcsin x = \sum \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, |x| < 1$ — доказывается дифференцированием и интегрированием
2. $\sum n(n-1)\dots(n-m+1)t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}, |t| < 1$ — выводится из формулы для геометрической прогессии дифференцированием

2.4.14 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

Формулировка:

- $f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$

Тогда:

$$f \text{ — разложима в } U(x_0) \ \Leftrightarrow\ \exists \delta, C, A > 0\ \forall n : |f^{(n)}(x)| \le C \cdot A^n \cdot n!, \quad |x - x_0| < \delta$$

Доказательство:

$\Leftarrow$

Запишем формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \overline{x} \in (x_0, x_0+x)}$$

Оценим остаток:

$$|R_n| \le \frac{\left|f^{(n+1)}(\overline{x})\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \le C \cdot (A \cdot |x-x_0|)^{n+1} \underset{|x-x_0|<\frac{1}{A}, |x-x_0|<\delta, n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Оценили и доказали.

$\Rightarrow$

Раз функция раскладывается, значит существует $U(x_0)$, в которой ряд Тейлора сходится. Давайте возьмём $x_1 \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ и оценим n-й член ряда Тейлора, который стремится к 0 при $n \to \infty$, раз ряд сходится, и, следовательно, ограничен:

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n\right| \le C$$

Оценим $|f^{(n)}(x_0)|$:

$$\left|f^{(n)}(x_0)\right| \le \frac{Ck!}{|x_1 - x_0|^n} \le$$

Пусть $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$:

$$\le CB^k k!$$

Теперь рассмотрим ряд в произвольной точке из окрестности, оценим её m-тую производную:

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \le \left|\sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} n(n-1)\ldots(n-m+1)(x-x_0)^{k-m}\right| \le$$

$$\le \sum \frac{\left|f^{(k)}(x_0)\right|}{k!} n(n-1)\ldots(n-m+1)|x-x_0|^{k-m} \le$$

Оценим сверху новейшими достижениями:

$$\le CB^m \sum n(n-1)\ldots(n-m+1)B^{k-m}|x-x_0|^{k-m} =$$

Тогда по следствию из предыдущей теоремы заменяем:

$$= CB^m \frac{m!}{(1-(B|x-x_0|))^{m+1}} \leq$$

Заметим, что это равенство существует только при $|x-x_0| < \frac{1}{2B}$ — чтобы под знаменателем не было нуля, и мы не вышли за радиус сходимости нашей формулы, по которой заменяли. Далее (оцениваем этим):

$$\leq CB^m m! 2^{m+1} = \underbrace{2C}_{C}(\underbrace{2B}_{A})^m \underbrace{m!}_{k!}$$

Ну всё, супер, осталось только аккуратно подобрать $\delta = \min\{\frac{1}{2B}, \text{радиус } U(x_0)\}$ — чтобы точно всё было хорошо.

ч. т. д.

2.4.15 Теорема Таубера о совпадении суммы ряда с суммой в смысле метода Абеля

Перед началом, советую прочитать "Преамбулу к сумме расходящихся рядов"

Формулировка:

$a_n = o(\frac{1}{n}), \sum a_n \underset{AP}{=} A \Rightarrow \sum a_n = A$

Доказательство:

Заведём $\delta_n = \max_{k \geq n} |ka_k|$ (ka_k тоже, поэтому всё хорошо, максимум есть). Эта последовательность также стремится к 0 монотонно.

Давайте рассмотрим такую разность частичныой суммы и найденного предела:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - A = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right)$$

И "бесцеремонно" оцениваем его модулями (в т. ч. модули под суммой):

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{N} |a_n|(1-x^n)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|n|a_n x^n}{n}}_{(2)} + \underbrace{\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right|}_{(3)} \quad (*)$$

(1) — вынесли a_n, и по определению метьода суммы Абеля $|x| < 1$, поэтому можно снять модуль.
(2) — просто записали так для более удобной дальнейшей оценки.

Давайте запустим стандартное ε определение: берём $\varepsilon > 0$, и вычисляем по нему такое N, чтобы:

$$\begin{cases} (3) < \varepsilon \\ \delta_{N+1} < \varepsilon^2 \end{cases}$$

Причём x будем выбирать согласованно с N по формуле $(1-x)N = \varepsilon$. Ещё вспомним неравнство Бернулли: $(1+x^n) \leq n(x+1)$ (это выводится из обычного неравенства Бернулли $(1-x)^n \leq 1-nx$ заменой $t = 1-x$). Погнали оценивать:

$$(1) \leq \sum |a_n| n(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{N} |na_n| \leq (1-x)N\delta_1$$

Оценили наибольшим членом, умноженным на количество членов.

$$(2) \leq \frac{\delta_{N+1}}{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n < \frac{\delta_{N+1}}{N+1}\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} < \frac{\delta_{N+1}}{N(1-x)} < \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon$$

Сначала мы оценили наибольшим членом (это валидно, так как δ_n монотонно стремится к 0, потом оценили ряд из x^n рядом из геометрической прогрессии (т. к. $|x| < 1$), ну а потом подогнали под условия выбора N). $(3) < \varepsilon$ по тем же причинам. Итого:

$$(*) < \varepsilon\delta_1 + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(\delta_1 + 2)$$

Ну всё, супер, разница между частичной суммой и ответом сколь угодно мала (на δ_1 не сильно смотрим, всё супер).

ч. т. д.

2.4.16 Теорема Коши о перманентности метода средних арифметических

Формулировка:

$\sum a_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \underset{\text{с. а.}}{=} S$

Доказательство:

Для начала, запишем определение сходимости обычной суммы:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n > N\ |S_n - S| < \varepsilon$$

А теперь попробуем оценить разность частичной суммы и ответа:

$$|\sigma_n - S| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k - \underbrace{S}_{\frac{(n+1)S}{n+1}}\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(S_k - S)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|S_k - S| \leq$$

По определению выше, мы берём ε, по нему вычисляем большой N_1, и говорим, что $n > N_1$. "Расчекрыживаем" сумму:

$$\leq \underbrace{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{N_1}|S_k - S|}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1+1}^{n}|S_k - S|}_{(2)} \leq$$

(2) уже сразу $< \varepsilon$, т. к. $n - (N_1 - 1)$ очевидно меньше, чем $n + 1$, так что по определению это работает. С другой стороны, мы можем управлять n, поэтому давайте выберем его таким, чтобы (1) было $< \varepsilon$. Вуаля:

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

ч. т. д.

2.4.17 Преобразование Абеля степенного ряда

Формулировка:

- $A_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$
- $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{k=0}^{N-1} A_k (x^k - x^{k+1}) + A_N x^N$

Тогда при $N \to \infty$ эту сумму можно заменить на

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

при $|x| < \min\{1, R_{\text{сходимости}}\}$

Доказательство:

Сначала докажем, что радиус сходимости у правого ряда не изменился относительно оригинального ряда. Возьмём рандомные r, r_1 так, чтобы $r < r_1 < R$. Теперь сужаем наш степенной ряд на $x = r$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)_{x = x_0 + r}, \forall n : |a_n| x^n \leq |a_n| r_1^n \underset{\text{на радиусе сходимости}}{\longrightarrow} 0$$

Значит, $a_n = o(\frac{1}{r_1^n}) \Rightarrow A_n = o(\frac{n}{r_1^n}) \Rightarrow \frac{A_n r_1^n}{n} \to 0$

Теперь оценим ряд после преобразования:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n| x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n| r_1^n \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \leq$$

Утверждается, что раз $|A_n| r_1^n$ растёт незначительно (порядка) $o(k)$, тогда можно оценить сверху константой (???):

$$\leq C \sum_{n=0}^{\infty} k \left(\frac{r}{r_1} \right)^n$$

И тут дробь, меньшая единицы в степени, против линейной функции, так что ряд сходится. Ну супер, тогда для любых r, r_1 ряд сходится и значит круг сходимости не изменился. Теперь гораздо интереснее то, почему второй член исходной суммы исчез. Давайте его оценим. Опять берём $|x| < r < \min\{1, R_{\text{сходимости}}\}$. Вот тут уже будет иметь значение то, что $r < 1$. И заметим, что раз в круге сходимости у нас ряд сходится, то $|a_n x^n| \leq |a_n r^n| \to 0$, значит эта последовательность ограничена:

$$\exists L > 0 : \forall n \ |a_n| r^n < L$$

И погнали оценивать ($|a_n| < \frac{L}{r^n}$):

$$|A_N x^N| \le L|x|^N \left(1 + \frac{1}{r} + \ldots + \frac{1}{r^n}\right) \le$$

Это — геометрическая прогрессия, заменяем по формуле:

$$\le L|x|^N \frac{\frac{1}{r^{N+1}} - 1}{1 - \frac{1}{r}} \le$$

Снизу у нас $r < 1$, поэтому оцениваем сверху, меняя знак, и раскрываем верхнюю скобку:

$$\le L|x|^N \frac{\frac{1}{r^{N+1}} - 1}{\frac{1}{r} - 1} = L|x|^N \frac{(\frac{1}{r^{N+1}} - 1)r}{r - 1} = \underbrace{\frac{L}{r-1}\left(\frac{|x|}{r}\right)^N}_{(1)} + \underbrace{\frac{Lr|x|^n}{r-1}}_{(2)}$$

Ну и всё, в (1) у нас дробь, меньшая единицы, в степени, поэтому при $N \to \infty$ стремится к 0, а (2) сам $|x| < 1$ в степени, поэтому тоже стремится к 0.

ч. т. д.

2.4.18 Теорема о связи суммируемости по Чезаро и по Абелю

Рассуждения:

Давайте оценим всякие суммы в смысле средних арифметических:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)$$

Если сходится, то:

$$\sigma_n \underset{n \Longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{n+1} \cdot \sigma_{n-1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Тогда давайте оценим частиыную сумму в пределе:

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\sigma_n - \frac{n}{n+1}\sigma_{n-1}}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad S_n = o(n)$$

И сами члены:

$$\frac{a_n}{n} = \frac{S_{n+1} - S_n}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad a_n = o(n)$$

Формулировка:

- $\sum a_n$ — числовой ряд

- $\sum a_n \underset{\text{с. а.}}{=} A$

Тогда $\exists \sum a_n \underset{AP}{=} A$

Доказательство:

Раз существует сумма в смысле средних арифметических, то $a_n = o(n) \Rightarrow f(x) = \sum a_n x^n$ при $x \in (0, 1)$. Тогда по преобразованию Абеля (оно работает, т. к. $|x| < 1$) (применим его 2 раза, это тоже законно, т. к. $a_n = o(n) \Rightarrow A_n = o(n^2)$ и всё равно сидим в круге сходимости 1, тогда ещё вспоминаем, что $(n+1)\sigma_n = \sum A_k$): $f(x) = (1-x)\sum A_n x^n = (1-x)^2 \sum (n+1)\sigma_n x^n$.

С другой стороны, нам сообщают секретную формулу: $1 = (1-x)^2 \sum (n+1)x^n$ (доказывается дифференцированием $\frac{1}{1-x}$ и соответствующего ряда ($\frac{1}{(1-x)^2} = \sum (n+1)x^n$)). Преобразуем её, домножив на $A : A = (1-x)^2 \sum (n+1)Ax_n$ и начинаем оценивать $A - f(x)$, фиксируя $\varepsilon > 0$:

$$A - f(x) = (1-x)^2 \sum (n+1)Ax_n - (1-x)^2 \sum (n+1)\sigma_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n(A - \sigma_n) =$$

Разобьём сумму каким-то N, пока не понятно каким, но мы это потом придумаем:

$$= (1+x)^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{N} (n+1)x^n(A - \sigma_n)}_{(3)} + \underbrace{(1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (n+1)x^n \underbrace{(A - \sigma_n)}_{(1)}}_{(2)} \leq$$

Заметим, что (1) уже очень маленькое ($< \varepsilon$) при больших N (по определению сходимости в смысле среднего арифметического). А сумму (2) мы умеем считать по секретной формуле (там, конечно, с нуля, а тут с $N+1$, но мы то оцениваем сверху). Поэтому (2) $< (1-x)^2 \frac{\varepsilon}{(1-x)^2} = \varepsilon$. Ну так давайте после выбора N выберем такое x, близкое к 1, чтобы (3) было меньше ε. Ну и всё, супер:

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

ч. т. д.

2.4.19 Две леммы об интегрировании асимптотических равенств

Формулировка (лемма 1):

- $f, g : C[a, b) \to \mathbb{R}$
- $g \geq 0, \int_a^b g(x)dx$ — расходящийся (и несобственный)
- $F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt$

Тогда:

1. $f = O(g) \Rightarrow F = O(G)$

2. $f = o(g) \Rightarrow F = o(G)$
3. $f \sim g \Rightarrow F \sim G$

Доказательство:

(1)

По определнию "O"-большого:

$$\exists M > 0\ \exists x_0 \in [a, b)\ \forall x \in [x_0, b) : |f(x)| < Mg(x)$$

Теперь давайте рассмотрим нормальный (не-несобственный) интеграл $\int_a^{x_0} |f(x)|dx = C_1 \geq 0$ и выберем $x_1 > x_0$ и вот такой интеграл $\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx = \alpha > 0$. Оцениваем $F(x)$ при любом $x > x_0$:

$$|F(x)| = \left|\int_a^x f(x)dx\right| \leq \int_a^x |f(x)|dx = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^x \leq C_1 + M\int_{x_0}^x g(x)dx \leq$$

Оценили константой и по определению "O"-большого. Теперь "присобачим" α:

$$\leq \frac{C_1}{\alpha}\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx + M\int_{x_0}^x g(x)dx \leq$$

А теперь цинично запихиваем всё под один интеграл $\int_a^x$ (только увеличиваем сумму):

$$\leq \underbrace{\left(\frac{C_1}{\alpha} + M\right)}_{M'}\int_a^x g(x)dx = M'G(x)$$

По определению доказано.

(2)

По определнию "o"-маленького:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in [a, b)\ \forall x \in [x_0, b) : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}g(x)$$

Теперь давайте рассмотрим нормальный (не-несобственный) интеграл $\int_a^{x_0} |f(x)|dx = C_1 \geq 0$ и выберем $x_1 > x_0$ и вот такой интеграл $\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx = \alpha > 0$ так, чтобы $\alpha >> C_1$ (вспоминаем, что исходный интеграл расходится, тогда мы можем выбрать x_1 так, чтобы $\frac{C_1}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$). Ну всё, запускаем рассуждения из прошлой теоремы при ($M \leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2}$) и получаем:

$$|F(x)| < \varepsilon G(x)$$

(3)

По определению $f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Для интегралов (вспомним, что они расходящиеся (g — по определению, f — по эквивалентности), поэтому можем применить правило Лопиталя для бесконечностей,, плюс у нас f, g — непрерывны):

$$\lim_{x\to b}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt}=\lim_{x\to b}\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

По определению доказано.

ч. т. д.

Формулировка (лемма 2):

1. - $\varphi_i\in C[a,b)$ — шкала при $x\to a$
   - $\int_a^b \varphi_i(x)dx$ — сходится для любого i
   - $\Phi_i(x)=\int_x^b \varphi_i(x)dx$

   Тогда Φ_i — тоже шкала
2. - $f\in C[a,b)$
   - $\int_a^b f(x)dx$ — сходится для любого i
   - Пусть $F(x)=\int_x^b f(x)dx$

   Тогда если $f\sim\sum c_n\varphi_n$, то $F\sim\sum c_n\Phi_n$

Доказательство:

(1)

$$\lim_{x\to b}\frac{\Phi_{i+1}(x)}{\Phi_i(x)}\underset{\text{Лопиталь }\frac{0}{0}+\text{непр. }\varphi_i}{=}\lim_{x\to b}\frac{\varphi_{i+1}(x)}{\varphi_i(x)}=0$$

Шкала — по определению.

(2)

Проверим, что $F-\sum_{k=0}^n c_k\Phi_k=o(\Phi_n)$.

$$\lim_{x\to b}\frac{F-\sum_{k=0}^n c_k\Phi_k}{\Phi_n(x)}\underset{\text{Лопиталь }\frac{0}{0}+\text{непр. }\varphi_i}{=}\lim_{x\to b}\frac{-(f-\sum_{k=0}^n c_k\varphi_k)}{-\varphi_n(x)}=0$$

Минусы вылазят из-за дифференцирования интегралов с переменным верхним пределом снизу.

ч. т. д.

2.4.20 Лемма о локализации для интегралов Лапласа

Я с ума сойду техать этот раздел...

Теорема О локализации Лапласовых Интегралов

$f \in C[a,b)$, $f \geq 0$, f — не исчезает вблизи т. a: $\int_a^{x_0} f(x)\,dx \neq 0$ для x_0, близких к a

φ – убывающая (может, с промежутками постоянства, но не сильно)

$\forall t \in (a,b)\ \exists t_1 \in (a,t)$:

$$0 < \varphi(t) < \varphi(t_1) < \varphi(a) = \lim_{x \to a+0} \varphi(x)$$

$\int_a^b f$ – сходится

Тогда: $\forall c \in (a,b)$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)\, e^{A\varphi(x)}}_{\chi(x)}\,dx \underset{A \to +\infty}{\sim} \int_a^c f(x)\, e^{A\varphi(x)}\,dx$$

($\int_a^b f(x)\, e^{A\varphi(x)}\,dx$ – Лапласов Интеграл)

Док-во:

Пусть $M = \int_a^b f(x)\,dx$ → сх-ся по определению.

$$\int_a^b \chi(x)\,dx = \int_a^c \chi(x)\,dx + \underbrace{\int_c^b \chi(x)\,dx}$$

$$0 \leq \int_c^b f(x)\, e^{A\varphi(x)}\,dx \leq e^{A\varphi(c)} \int_c^b f(x)\,dx \leq e^{A\varphi(c)} \int_a^b f(x)\,dx = e^{A\varphi(c)} M \quad (2)$$

наибольшее значение в точке c, т.к. φ – убывающая

≥ 0

$$\int_a^c f(x)\, e^{A\varphi(x)}\,dx \geq \int_a^{c_1} f(x)\, e^{A\varphi(x)}\,dx \geq e^{A\varphi(c_1)} \underbrace{\int_a^{c_1} f(x)\,dx}_{\neq 0 \text{ по условию}} \quad (1)$$

Не слишком большое.

наименьшее значение в c_1, т.к. φ — убывающая

Оценим снизу. ~~Подберём~~ Подберём $c_1 \in (a,c)$ такое, чтобы $\varphi(c_1) > \varphi(c)$

(1): $e^{A\varphi(c_1)} \underbrace{\int_a^{c_1} f(x)\,dx}_{M'}$

(2): $e^{A\varphi(c)} \underbrace{\int_a^{b} f(x)\,dx}_{M}$

$A \to \infty$

$\cancel{\lim_{A\to\infty} \frac{(1)}{(2)} = \frac{M'}{M} \cdot e^{A(\varphi(c_1)-\varphi(c))}}$

Делаем вывод, что $(1) = o((2))$. Т.е (2) бесконечно больше (1), т.к. в (2) мы устремляем $A \to \infty$

ч.т.д.

Следствия:

(1) При условиях теоремы, $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0\ \forall A > A_0$ $(\forall c \in (a, b))$

$$\underbrace{(1-\varepsilon)\int_a^c f(t)\, e^{A\varphi(t)}\,dt}_{(1)} \le \underbrace{\int_a^b f(t)\, e^{A\varphi(t)}\,dt}_{(2)} \le \underbrace{(1+\varepsilon)\int_a^c f(t)\, e^{A\varphi(t)}\,dt}_{(3)} \qquad (*)$$

Д-во: Очевидно, это просто оценка $\frac{(2)}{(3)} < (1+\varepsilon)$. Ну а $(2) > (1)$ очев. из леммы (если без $(1-\varepsilon)$, так)

(2) $g = O(f)$ при $x \to a$ $(g \geq 0)$

Тогда $\int_a^b g\, e^{A\varphi} = O\left[\int_a^b f e^{A\varphi}\right]$. И то же самое для $g = o(f)$, $g \sim f$

Д-во: Тривиально, по определению:

$g = O(f) \Longleftrightarrow \exists M > 0\ \forall x \in (a, c_1)$: $|g(x)| \leq M f(x)$

Тогда:

$$\left|\int_a^{c_1} g(x)\, e^{A\varphi(x)}\,dx\right| \le \int_a^{c_1} |g(x)|\, e^{A\varphi(x)}\,dx \le \int_a^{c_1} \{M f(x)\}\, e^{A\varphi(x)}\,dx \underset{(*)}{<} \int_a^b f(x)\, e^{A\varphi(x)}\,dx$$

Остальное аналогично (КПК)

ч.т.д.

Метод

2.4.21 Метод Лапласа

Метод Лапласа

Рассуждения: (условия из леммы о локализации) (*)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0\ \forall A > A_0$ ~~[illegible]~~ : $(1-\varepsilon)\int_a^c f e^{A\varphi} \leq \int_a^b f e^{A\varphi} < (1+\varepsilon)\int_a^c f e^{A\varphi}$

$\forall c \in (a,b)$

Замечания:

① $q > -1 \quad p > 0 \quad A > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^q e^{-At^p} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Замена} \\ x = At^p \\ t = \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{p}} \\ dt = \frac{1}{A^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{q}{p}} e^{-A\cdot\frac{x}{A}} \cdot \frac{1}{A^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \underbrace{x^{\frac{q+1}{p}-1} e^{-x}}_{x^{\frac{q+1}{p}-1} \cdot e^{-x} = \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)} dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$$

② $$\int_0^s t^q e^{-At^p} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Замена} \\ x = At^p \\ t = \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{p}} \\ dt = \frac{1}{A^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} \end{array} \right\} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \int_0^{As^p} x^{\frac{q+1}{p}-1} e^{-x} dx$$

↳ и вот эта фигня $\xrightarrow[A\to\infty]{} \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$

$\forall s > 0$

$\Rightarrow$ выведем неравенство ~~[illegible]~~ : $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0\ \forall A > A_0$:

$$\frac{(1-\varepsilon)}{p \cdot A^{\frac{q+1}{p}}} \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) < \int_0^s t^q e^{-At^p} < (1+\varepsilon)\, \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) \frac{1}{p A^{\frac{q+1}{p}}}$$

А теперь давайте переназначим $A := (1+\varepsilon)A$ и перепишем:

$\forall \varepsilon > 0$
$\forall s > 0 \quad \exists A_0\ \forall A > A_0$:

тут $\pm$ для варьирования, по идее не сильно влияет.

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \frac{1}{p \cdot A^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) < \int_0^s t^q e^{-(1\pm\varepsilon)At^p} < \frac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \frac{1}{p \cdot A^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$$

(**)

Теорема (Метод Лапласа)

$f \geq 0$, $\int\limits_a^b f < +\infty$ — сходится. Пусть $f(t) \sim L(t-a)^q$ $q > -1$

φ — строго убывающая $\varphi(a) - \varphi(t) \sim C(t-a)^p$

Тогда: $\int\limits_a^b f(t) e^{A\varphi(t)} dt \underset{A\to\infty}{\sim} \frac{L}{p} \frac{\Gamma(\frac{q+1}{p})}{(CA)^{\frac{q+1}{p}}} \cdot e^{A\varphi(a)}$

Доказательство:

Берём $\varepsilon > 0$. Выбираем δ, так чтобы $t \in [a, a+\delta)$ выполнялось:

$$1-\varepsilon < \frac{f(t)}{L(t-a)^q} < 1+\varepsilon \overset{(1)}{\Rightarrow} f(t) < (1+\varepsilon) L(t-a)^q$$

$$1-\varepsilon < \frac{\varphi(a)-\varphi(t)}{C(t-a)^p} < 1+\varepsilon \Rightarrow \varphi(a)-\varphi(t) > (1-\varepsilon) C t^p$$

Начинаем оценивать: Выберем A_0 так, чтобы выполнялось $(*)$ и $(**)$ $\varepsilon = a + \varepsilon$

$$\int\limits_a^b f(t) e^{A\varphi(t)} dt \underset{(*)}{<} (1+\varepsilon) \int\limits_a^{a+\delta} f(t) \cdot e^{A\varphi(t)} dt = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ t' = t - a \\ t \end{array} \right| \underset{(1)}{\leq}$$

$\Rightarrow$ оцениваем сверху так огр. стекаем

$$< (1+\varepsilon) e^{A\varphi(a)} \int\limits_0^\delta L(1+\varepsilon) t^q \cdot e^{-A(\varphi(a)-\varphi(t))} dt = (1+\varepsilon)^2 L e^{A\varphi(a)} \int\limits_0^\delta t^q e^{-A(\varphi(a)-\varphi(t))} dt <$$

$$\underset{(2)}{<} (1+\varepsilon)^2 L e^{A\varphi(a)} \int\limits_0^\delta t^q e^{-A(1-\varepsilon) C t^p} \underset{(**)}{\leq} \frac{(1+\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \overbrace{\frac{L}{p(CA)^{\frac{q+1}{p}}} \cdot \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) e^{A\varphi(a)}}$$

$\leftarrow C$ вылезло из степени, после замены $A = CA$

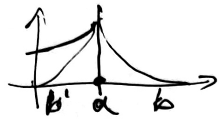
Ну всё. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_0$ $\forall A > A_0$:

$$\frac{\overbrace{(1+\varepsilon)^3}^{E}}{(1-\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}} \text{Laplace} \leq \int\limits_a^b f(t) e^{A\varphi(t)} dt \leq \frac{(1+\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}} \text{Laplace}$$

$\Rightarrow$ частное меньше E $\Rightarrow$ ч.т.д.

Замечания

① Если точка максимума φ, то в формуле П 4.2 (увеличится) внутри промежутка интегрирования:



② a – т.max φ на $[b_1, b_2]$ Внутри этого промежутка!!!

$\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) < 0$ $\Rightarrow$ $\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$

Тогда: $\underset{f \to L \text{ при } t \to a}{q = 0}$, $p = 2$, $c = -\frac{\varphi''(a)}{2}$. Пишем Лапласа:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(t)\, e^{A\varphi(t)}\, dt \underset{A \to \infty}{\sim} \underset{\text{из ①}}{\cancel{2}} \cdot \frac{L}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}^{=\sqrt{\pi}}}{\left(\left|\frac{\varphi''(a)}{2}\right| \cdot A\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{A\varphi(a)} =$$

$$= \frac{L \cdot \sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(a)|} \cdot \sqrt{A}} \cdot e^{A\varphi(a)}$$

Он отр. ещё и с минусом

2.4.22 Формула Стирлинга для гамма-функции

Пример 1. Формула Стирлинга: $\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \left| \frac{\text{замена}}{t = ux} \quad u = \frac{t}{x} \quad du = x\,dt \right| = \int_0^{+\infty} u^x x^{x+1} e^{-ux}\,du = x^{x+1}\int_0^{+\infty} u^x e^{-ux}\,du =$$

разнося переменные в степени

$$= x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{-ux+x\ln u}\,du = x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{-x\overset{-\varphi(u)}{(u-\ln u)}}\,du,$$

Ищем максимум $\varphi(u)$: $-\varphi'(u) = (-u+\ln u)' = -1+\frac{1}{u} = 0 \Rightarrow u = 1$ — точка максимума!

$\varphi''(u) = -\frac{1}{u^2}$ — ура, условия выполнены!

$\Longrightarrow$ Если не обращать внимание на условие $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$, то по замечанию 2 метода Лапласа:

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x} x^{x+1} \left(= x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\right)$$

Проверим условие: $\int_0^{+\infty} = \int_0^{100} + \int_{100}^{+\infty}$ ← оценим.

Под условие подходит.

При $u > 100$ $\ln u < \frac{u}{2} \Rightarrow$

$$\int_{100}^{+\infty} \ldots e^{-x(u-\ln u)} < \int_{100}^{\infty} \ldots e^{-\frac{xu}{2}} = \int_{100}^{\infty} e^{-50x}$$

Тогда совпадающий с условием интеграл $\int \ldots e^{-x}$, а оставшийся кусочек $< \int e^{-50x}$

Тут $-x$

Тут $-50x$ ← ничтожно мало!

ч.т.д.

2.4.23 Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами

Пример 2. (Теорема Вейерштрасса)

f — непр. на $[a,b]$ $\Rightarrow \forall x \in (a,b)$

$$\int_a^b f(t) \underbrace{\left(1-\left(\frac{t-x}{b-a}\right)^2\right)}_{\chi(t)}{}^n dt \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, f(x)\, |b-a|$$

Доказательство: Посчитаем максимум сразу, так проще:

Очев, что max при $t=x$. $\frac{t-x}{b-a}$ ← это точки в (a,b) $\Rightarrow$ эти дроби <1 $\Rightarrow$ max, когда дробь $=0$. Она ещё и в квадрате, поэтому всё хорошо.

Потенцируем: $\chi(t) = \exp(\ln(\chi(t))) =$

$$= \exp\{\underbrace{n \ln\left(1-\left[\frac{t-x}{b-a}\right]^2\right)}_{\varphi(t)}\}$$

$\varphi(x) = 0$

$\varphi'(x) = 0 \Longleftrightarrow$ ф-ия гладкая, в т. максимума 0

$\varphi''(x) - ?$ Рассмотрим при $t\to x$, разложим в Тейлора: $\ln\left(1-\left(\frac{t-x}{b-a}\right)^2\right) = 0 - \frac{(t-x)^2}{(b-a)^2} + o((t-x)^2)$

Распишем эквиваленту, она же ф. Тейлора, из неё берём 2-ю пр-ую $+ \frac{\varphi''(x)}{2}(t-x)^2$, $t\to x$

$\Rightarrow \varphi''(x) = -\frac{2}{(b-a)^2}$; $f(t) \underset{t\to x}{\to} f(x)$ ← Оценка на f

Расписываем Лапласа: Интеграл $\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f(x)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{2}{(b-a)^2}}\cdot\sqrt{n}} e^{n\cdot 0} =$

$= f(x)\,|b-a|\sqrt{\frac{\pi}{n}}$

ч.т.д.

Следствие

$$\underbrace{\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,\frac{1}{|b-a|}\int_a^b f(t)\left[1-\left(\frac{t-x}{b-a}\right)^2\right]^n dt}_{\text{многочлен от } x!\ P(x),\ \text{степени} \le 2n} \underset{n\to\infty}{\sim} f(x)$$

$\Rightarrow$ любая непрерывная функция на (a,b) эквивалентна $P(x)$! (аппроксимируется им!)

Могут быть проблемы на границах, поэтому рассматриваем $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$

2.4.24 Лемма о каноническом виде функции в окрестности стационарной точки

Лемма (о каноническом виде функции в окрестности стационарной точки)

$x_0 \in [a, b]$

Пусть $\varphi \in C^{n+k}[a,b]$, причём $\varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$

$\varphi^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists\, V(x_0), U(0)$ такие что $\exists\, \Psi : U(0) \to V(x_0)$

$\Psi \in C^k[a, b]$

и выполнено, что $\varphi(\Psi(y)) = \varphi(x_0) \pm y^n$ — этот знак вылезет позже

$\Psi(0) = x_0$, $\Psi'(0) = \left[\frac{n!}{|\varphi^{(n)}(x_0)|}\right]^{\frac{1}{n}}$

Доказательство: Распишем ф. Тейлора функции в окр x_0:

$f(x) = T(f, x_0)(x - x_0) + R_n$ ← а это остаток в интегральной форме (да, он пригодился)

$$R_{n-1} \overset{\varphi(x)}{=} \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-\tau)^{n-1} \varphi^{(n)}(\tau)\, d\tau = \left\{ \begin{array}{l} \text{замена} \\ \tau = x_0 + t(x - x_0) \mid d\tau = dt(x - x_0) \\ \Rightarrow t = \frac{\tau - x_0}{x - x_0} \\ x - \tau = x - x_0 - t(x - x_0) = (x - x_0)(1 - t) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \cdot \varphi^{(n)}(x_0 + t(x - x_0))\, dt = (x - x_0)^n \cdot \tilde{R}_{n-1}$$ ← ввели функцию.

Вспомнили новое достижение: метод дифференцирования Лейбница по параметру:

$\left(\int_a^b f(x,t)\, dt\right)'_x = \int_a^b f'_x(x,t)\, dt$ при f, f'_x непр. на $[x_0, x + x_0] \times [0, 1]$ ЧП

Ура, у нас по дефолту всё класса C^k (мы уже n раз продифференцировали в остатке) супер, значит $\tilde{R}_{n-1}(x) \in C^k$. В точке x_0: $\tilde{R}_{n-1}(x_0) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi^{(n)}(x_0)\, dt =$

$= \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1}\, dt = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{(n-1)!\, n} (1-t)^n \Big|_0^1 = -\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}$ ← Тут по идее минус, но у КПК его нету ☹

Заведём $\gamma(x) = (x - x_0) \sqrt[n]{|\tilde{R}_{n-1}(x)|} \in C^k$

C^k ← по теореме о стабилизации знака в $U(x_0)$ постоянного знака,

так что при дифференцировании просто фиксирует знак

$\gamma'(x_0) = \sqrt[n]{|\tilde{R}_{n-1}(x_0)|} + (x - x_0)\left(\sqrt[n]{|\tilde{R}_{n-1}|}\right)' = \sqrt[n]{|\tilde{R}_{n-1}(x_0)|} = \left|\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}$; $\gamma(x_0) = 0$

в 0 превращается

$\Psi := \gamma^{-1}$

Заметим, что $\neq 0$. Тогда выберем $V(x_0)$ так, чтобы γ вела себя там как диффеоморфизм. Тогда, по теореме о дифф. обр. отображения:

$\Psi'(0) = (\gamma'(x_0))^{-1} = \left(\frac{n!}{|\varphi^{(n)}(x_0)|}\right)^{\frac{1}{n}}$; $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \underbrace{(x - x_0)^n \tilde{R}_{n-1}}_{} = \pm\gamma^n(x)$

$\Psi(y)$ $\quad U(x)$

$\varphi(x) = T(\varphi, x_0)(x - x_0) + R_{n-1}$

$R_{n-1} = \varphi(x) - \varphi(x_0) = (x - x_0)^n \tilde{R}_{n-1} \in C^k$

$\Psi(y)$ $\quad y^n \Rightarrow$ ч.т.д.

(С минусами хуйня какая-то

2.4.25 Лемма Ватсона

Лемма (Ватсона)

$$W(A) = \int_0^{\alpha} x^{\beta-1} f(x) e^{-Ax^p} dx$$

$\beta > 0$, $p > 0$ $\quad \alpha \in (0, +\infty]$

1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + O(x^{n+1})$, $x \to 0$

Тогда $W(A) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma\left(\frac{k+\beta}{p}\right) A^{-\frac{k+\beta}{p}} + O\left(A^{-\frac{n+\beta+1}{p}}\right)$

2) $f \in C^\infty(U(0))$, тогда

$$W(A) \sim \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{p}\right) \cdot A^{-\frac{k+\beta}{p}}$$

+ можно дифференцировать по A сколько угодно раз

Доказательство:

Вспомним весёлые формулы: (тут всё доказательство построено на махании руками)

$$\int_0^{+\infty} t^q e^{-At^p} dt = \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) \cdot A^{-\left(\frac{q+1}{p}\right)} \frac{1}{p}$$

И из ф. Стирлинга: $\int_0^{\alpha} \to \int_0^{+\infty}$ $\quad W(A) = \int_0^{+\infty} - \int_{\alpha}^{+\infty}$ ← обычно экспоненциально мал по философии теоремы о локализации

2 следует из 1, т.к. мы просто расписали ф. Тейлора (слагаемые оказались удобными)

1) Пусть рассматриваем на $[0, \varepsilon]$: $|O(x^{n+1})| < Cx^{n+1}$

$\exists \varepsilon$ $\quad W(A) = \int_0^{\varepsilon} +$ экспоненциально малое выражение (по теореме о локализации)

Тогда $= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{\varepsilon} x^{\beta+k-1} e^{-Ax^p} dx + \text{огр} \cdot \int_0^{\varepsilon} x^{\beta+k} e^{-Ax^p} dx + \text{э.м.в.} =$

$=$ и устремляем к ∞

$= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{\infty} x^{\beta+k-1} e^{-Ax^p} dx + \text{огр} \cdot \int_0^{\infty} +$ много э.м.в.

$=$ ответ. Про дифф. по A показать руками

3 Период Кайнозойский

3.1 Важные определения

3.1.1 Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

Дизъюнктный набор множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такой, что $\bigcap_{1<i,j<n} A_iA_j = \varnothing$. Значит, что дизъюнктное объединение это: $\bigsqcup_{1<i<n} A_i$

Это такие системы множеств над X с разными прикольными свойствами:

1. $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо, если:
   (a) $\varnothing \in \mathcal{P}$
   (b) $\forall A, B \in \mathcal{P} : A \cup B \in \mathcal{P}$
   (c) $\forall A, B \in \mathcal{P} : \exists D_1, D_2, \ldots, D_n$ — дизъюнктные, такие что: $A \setminus B = \bigsqcup_i D_i$

   Свойства:

   (a) $A \in \mathcal{P} \nRightarrow A^c \in \mathcal{P}$
   (b) $A, B \in \mathcal{P} \nRightarrow (A \cup B | A \triangle B | A \setminus B) \in \mathcal{P}$
   (c) Аксиома 3^M: $\forall A, B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathcal{P} \exists D_1, D_2, \ldots D_n$ — дизъюнктные. Тогда $A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^n D_i$. Доказывается индукцией.

2. $\mathcal{A} \subset 2^X$ — алгебра, если:
   (a) $X \in \mathcal{A}$
   (b) $A, B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$

   Свойства:

   (a) $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$
   (b) $A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$
   (c) $A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$
   (d) $A \cup B = (A^C \cap B^C)^C$
   (e) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ — ну тоже тривиально
   (f) Всякая алгебра есть полукольцо

3. $\mathfrak{A} \subset 2^X$ — σ-алгебра — это просто алгебра, с аксиомой 3: $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ — счётный набор, тогда $\bigcup A_i \in \mathfrak{A}$

3.1.2 Объем

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — конечно-аддитивна, если:

1. не принимает одновременно + и $-\infty$ (это защита для физиков, там можно рассматривать кусочек поля и заряды разнознаковые)

2. $\mu(\varnothing) = 0$

3. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$ — дизъюнктные. Если $\bigsqcup_{i=1}^n A_i = A \in \mathcal{P}$, то $\mu A = \sum_{i=1}^n \mu A_i$

Если $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$, аддитивна, $\mu \geq 0$, тогда μ — *объём*. Если при этом $X \in \mathcal{P}, \mu X < +\infty$, то это — *конечный объём*.

Замечание:

Если $\mathcal{P}$ — алгебра, то аксиома 3 $\Leftrightarrow 3' : \forall A, B \in \mathcal{A}$ (дизъюнктные) $\mu(A \sqcup B) = \mu A + \mu B$

3.1.3 Ячейка

Это такой параллелепипед: $[a, b) \subset \mathbb{R}^m = \{x \mid a_i \leq x_i < b_i\}$

Кубическая ячейка: $a \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R}, \quad Q(a, r) = [a_1 - r, a_1 + r) \times [a_2 - r, a_2 + r) \times \ldots \times [a_m - r, a_m + r]$

3.1.4 Мера, пространство с мерой

Если $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём, счётно-аддитивна (в том смысле, что аддитивная не только для конечного, но и счётного множества подмножеств $\forall A, \quad \underbrace{A_1, A_2, \ldots}_{\text{дизъюнктны, НЧСЧ}} \quad, \bigsqcup_{i=1}^\infty A_i \Rightarrow \mu A = \sum_{i=1}^\infty \mu A_i$), то μ — мера.

$(\underbrace{X}_{\text{множество}}, \underbrace{\mathfrak{A}}_{\sigma-\text{алгебра}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера на } \mathfrak{A}})$ — пространство с мерой

3.1.5 Сигма-конечная мера

Если $\mathcal{P}$ — полукольцо, μ — мера на $\mathcal{P}$:

$$\exists P_1, P_2, \ldots \in \mathcal{P} \quad \forall k \ \mu P_k < +\infty \quad \bigcup P_k = X$$

то μ — σ-конечная

3.1.6 Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

Мера Лебега — лебеговское продолжение классического объёма.

$\mathfrak{M}^m$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств размерности m.

λ, λ_m — мера Лебега.

Свойства:

1. $\mathfrak{M}^m$ содержит все ячейки, их пересечения и объединения. В том числе и точки, которые имеют меру 0 (оцениваются с помощью одной кубичской ячейки радиуса $\frac{1}{n}$). Ещё, если $A_n \in \mathfrak{M}^m, \lambda A_n = 0 \ \bigcup A_n \Rightarrow \lambda \bigcup A_n = 0$.
2. Содержит все открытые и (следовательно) замкнутые множества
3. Канторово множество несчётно
4. Существуют неизмеримые множества

5. A — ограничено и измеримо $\Rightarrow \lambda A < +\infty$

6. A — открыто, $\lambda A > 0$

7. E — измеримо, $\lambda E = 0 \Rightarrow$ у E нет внутренних точек

8. $A \in \mathfrak{M}^m, \forall \varepsilon > 0$:

   (a) $\exists$ открытое $G_\varepsilon : A \subset G_\varepsilon : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$

   (b) $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon : G_\varepsilon \subset A : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

9. Парадокс Хаусфорда-Банаха-Тарского — нельзя создать меру уже для $\mathbb{R}^3$, покрывающую все подмножества и устойчивую к преобразованиям (конгруэнтным?).

3.1.7 Измеримая функция

$f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

Лебеговы множества функции f (*):

- $E(f < a) = \{x \in E \mid f(x) < a\}$
- $E(f \leq a) = \{x \in E \mid f(x) \leq a\}$
- $E(f > a) = \{x \in E \mid f(x) > a\}$
- $E(f \geq a) = \{x \in E \mid f(x) \geq a\}$

Замечани:

- $$E(f > a) = (E(f \leq a))^C \quad \text{дополнение в } E$$
- $$E(f \leq a) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E(f < a + \frac{1}{n})$$

Тогда:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}, E \in \mathfrak{E}$

f — *измерима на множестве* E, если $\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ — измерима

Пример:

$X = \mathbb{R}^m, \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^m, f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывная на $X \Rightarrow f$ — измерима

Замечания:

- f — измерима $=$ f — измерима на X
- $X = \mathbb{R}^m, \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^m, f$ — измерима по Лебегу, если она измерима на $X = \mathbb{R}^m$

- Эквивалентны все 4 (*) определения измеримых множеств по Лебегу для $\forall a \in \mathbb{R}$ (следует из предыдущего замечания)
- f — измерима $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \quad E(f = a) = E(f \geq a) \cap E(f \leq a)$ — измеримо (обратное неверно)
- f — измерима $\Rightarrow (-)$ — измеримо
  - $\alpha f (\alpha \in \mathbb{R}), -f$
  - на (E_k), то и на $\bigcup_k E_k$
  - на E, $E' \subset E$, то и на E'
  - при $f \neq 0$, то и $\frac{1}{f}$
  - при $f \geq 0$, на E, то и на $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ f^α

3.1.8 Сходимость почти везде

Даны $f_n, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, тогда $f_n \to f$ *почти везде (п. в.)*, если $\exists e \subset E, \mu e = 0, \forall x \in E \setminus e \quad f_n \to f$ всюду.

Пример:

$x^n \to 0$ почти везде на $[0, 1]$

Свойства:

1. $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f_n$ — измерима, $f_n \to f$ почти всюду. Тогда f — измерима. Доказывается отбрсыванием плохих точек меры 0.
2. $g, f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f = g$ почти всюду, тогда g — измерима на X
3. μ — необязательно полная. $f : X \setminus e \to \overline{\mathbb{R}}, \mu e = 0, f$ — измерима на $X \setminus e$. Тогда $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримая на X, такая что $f = g$ почти всюду
4. $f \sim g$, если $f = g$ почти всюду

3.1.9 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$ — измерима

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X g d\mu, g \text{ — ступенчатые}, 0 \leq g \leq f\}$$

Замечания:

1. если f — ступенчатая, то интеграл равен интегралу ступенчатой
2. $0 \leq \int_X f d\mu \leq +\infty$
3. ступенчатая $g \leq f \Rightarrow \int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$

3.1.10 Суммируемая функция

$E \subset X$ — измеримо, f — измерима на X, f — суммируема на E, если:

$$\int_X f^+ \chi_E < +\infty, \int_X f^- \chi_E < +\infty$$

3.2 Определения

3.2.1 Классический объем в $\mathbb{R}^m$

Это из серии примеров, было на лекции, будет время, допишу и остальное.

$$\mu[a,b) \subset \mathbb{R}^m = \prod_{i=1}^{m} |b_i - a_i|$$

Про аддитивность там помахали руками, сказали дробить на мелкие кусочки и всё получится.

3.2.2 Формулировка теоремы о непрерывности меры снизу

Формулировка:

$\mathfrak{A}$ — алгебра, $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- μ — мера (то есть счётно-аддитивна)
- μ — непрерывна снизу, то есть:

$$\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}, \quad A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow A = \lim_{i\to\infty} A_i$$

3.2.3 Полная мера

Если $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, μ — мера на $\mathfrak{A}$. Тогда μ — полная, если $\forall A \subset B, B \in \mathfrak{A}, \mu B = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{A}, \mu A = 0$

3.2.4 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

X — множество, $\mathcal{P}$ — полукольцо подмнжеств в X, μ_0 — σ-конечная мера на $\mathcal{P}$.

Тогда существуют $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра и μ — мера на $\mathfrak{A}$, такие что:

1. $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}, \mu|_{\mathcal{P}} = \mu_0$
2. μ — полная мера
3. Если μ_1 — мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}_1 \supset \mathcal{P}$, полная, $\mu_1|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, то $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}$ и $\mu_1|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если μ_2 — мера на алгебре $\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}_2$, $\mu_2|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, то $\mu|_{\mathfrak{A}_2} = \mu_2$
5. $\forall A \in \mathfrak{A}: \quad \mu A = \inf\left(\sum \mu P_k, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}\right)$

3.2.5 Болерелевская σ-алгебра

$\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгбера в $\mathbb{R}^m$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества (ячейки).

Следствия:

1. $\forall A \subset \mathfrak{M}^m\ \exists B, C$ — борелевские, такие что $B \subset A \subset C, \lambda_m(C \setminus A) = \lambda_m(A \setminus B) = 0$. Доказывается по 8 свойству меры Лебега.

2. $\forall A \in \mathfrak{M}^m$ представимо в виде $A = B \cup \mathcal{N}$, где B — борелевское, а $\mu\mathcal{N} = 0$

3. Регулярность меры Лебега

3.2.6 Теорема о мерах, инвариантных относительно сдвигов

- μ — мера на $\mathfrak{M}^m$
- μ — инвариантна относительно сдвигов

$$\forall a \in \mathbb{R}^m\ \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(a + E) = \mu(E)$$

- μ — любого ограниченного множества конечна

Тогда:

$$\exists k \in [0, +\infty), \quad \mu = k \cdot \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \forall E : \mu E = k \cdot \lambda E$$

3.2.7 Ступенчатая функция

$f : X \to \mathbb{R}$ называется *ступенчатой*, если существует *разбиение* (конечное), такое что $X = \bigsqcup_{i=1}^n e_i, \quad \forall k\ f|_{e_k} = \text{const}_k$

Пример:

Характеристическая функция множества e_k:

$$\chi_{e_k}(x) = \begin{cases} 1, x \in e_k \\ 0, x \notin e_k \end{cases}$$

Общий вид ступенчатой функции:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{e_i}(x)$$

Замечание:

Если $\exists f, g$ — ступенчатые, то можно разбиения подразбить на конечное число кусочков, чтобы оно было общим для обоих функций ($\exists$ разбиение $X = \bigsqcup_{i=1}^n e_i$, такое что $f|_{e_i} = \text{const}, g|_{e_i} = \text{const}$)

3.2.8 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

См. выше

3.2.9 Свойство, выполняющееся почти везде

$W(x)$ — высказывание (true или false), вычисляемое относительно точки

Говорят, что утверждение $W(x)$ *выполнено почти всюду (почти везде) на* E, если $\exists e \subset E, \mu E = 0$, и для $\forall x \in E \setminus e$ $W(x) == true$

Важный принцип:

Если есть последовательность высказываний $W_n(x)$, тогда утверждение "$\forall n$ $W_n(x)$ — истинно" выполнено при почти всех x.

3.2.10 Сходимость по мере

$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ почти везде конечны, измеримы. Тогда $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ сходится по мере (при $n \to \infty$), если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

3.2.11 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — измеримы, почти везде конечны
- $f_n \to f$ почти везде

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists e \subset X, \; \mu e < \varepsilon \quad f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$$

3.2.12 Интеграл ступенчатой функции

$f \geq 0, f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{E_i}(x)$ — ступенчатая, $\bigsqcup_{i=1}^{k} E_i = X$ — допустимое разбиение

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu E_i$$

Свойства:

1. Не зависит от представления f (можно передробить кусочки и получить то же самое)
2. Монотонен $f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

3.2.13 Интеграл суммируемой функции (интеграл Лебега)

Пусть f — измеримая функция, и при этом хотя бы один из этих интегралов конечен $\int_X f^+, \int_X f^-$, тогда *интеграл Лебега это*:

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Если оказалось, что оба интеграла конечны, то функция называется *суммируемой*.

Замечания:

1. $f \geq 0$ — измерима, тогда интеграл Лебега равен интегралу неотрицательной измеримой функции
2. $$\int_E f d\mu := \int_E f \chi_E d\mu$$
3. $$f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, \quad \int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$$
4. $f \geq 0$ — измерима
$$\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g d\mu, 0 \leq g \leq f, g \text{ — ступенчатые}\}$$
5. $\int_E f d\mu$ — не зависит от значений вне E

3.3 Важные теоремы

3.3.1 Регулярность меры Лебега

Теорема Регулярность Меры Лебега

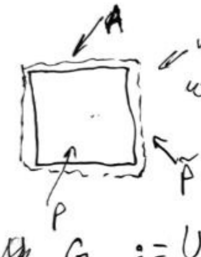
[Лемма $\forall \varepsilon > 0$ ① $\exists$ откр. G_ε : $A \subset G_\varepsilon$ $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$

$A \in \mathfrak{M}^m$ ② $\exists$ замк. F_ε : $F_\varepsilon \subset A$ $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$]

Доказательство (леммы):

① Если A - ограничено, тогда по Сл. Теоремы о Лебеговском продолжении меры: $\lambda A = \inf(\Sigma \lambda P_k,\ A \subset \bigcup P_k,\ P_k \subset \mathcal{P}) \Rightarrow$

$\lambda A \le \Sigma \lambda P_k \le \lambda A + \varepsilon$ ← отличается на чуть-чуть.



чтобы множество было открытым, давайте немного раздуем ячейки, чтобы $(\widetilde{P}_n)$ $\lambda \widetilde{P}_k \le \lambda P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$ ← каждый по отдельности

Тогда $\Sigma \lambda \widetilde{P}_k \le \Sigma \lambda P_k + \varepsilon \le \lambda A + 2\varepsilon$

↑ шикарно

$G_{2\varepsilon} := \bigcup \widetilde{P}_k$

A - неограничено. Тогда запускаем σ-ограниченность : $\Rightarrow \mathbb{R}^m = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ ← ячейки можно представить

Рассмотрим A как $= \bigsqcup (\overbrace{A \cap Q_i}^{\text{огр., т.к. } Q_i \text{ - огр.}})$, ~~Тогда G_ε~~

пусть это $G_{i\varepsilon}$, чтобы $\lambda(G_{i\varepsilon} \setminus (A \cap Q_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}$

└ открытое

Тогда $G_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{i\varepsilon}$ — объед. открытых $\Rightarrow$ открыто

② Просто выражаем через открытое: Возьмём A^c, и возьмём G_ε - открытое для A^c

$\Gamma - G_\varepsilon$ Тогда $(G_\varepsilon)^c$ - замкнутое, очевидно, что если

$$\left.\begin{array}{c} \lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon \\ \Updownarrow \\ \lambda(A \setminus \underbrace{G_\varepsilon^c}_{F_\varepsilon}) < \varepsilon \end{array}\right\} F_\varepsilon := G_\varepsilon^c$$

ч.т.д.

Регулярность Меры Лебега: $\lambda A = \inf\limits_{\substack{(1)\ G \supset A \subset G \\ \text{откр.}}} \lambda G = \sup\limits_{\substack{(2)\ F \subset A \\ \text{замк.}}} \lambda F = \sup\limits_{\substack{(3)\ K \subset A \\ \text{компакт}}} \lambda K$; $A \subset \mathfrak{M}^m$

(1) = (2) Из леммы выше по опр. inf., sup. ; (3) Если A-огр, просто выбираем замкнутое и считаем sup.

A -неогр. Введём Q_n - куб с центром в 0 и длиной стороны $2n$: $\lambda(A \cap Q_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda A$

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ можно подобрать N, чтобы разность $< \varepsilon$

3.3.2 Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

Теорема О преобразовании меры Лебега при линейном отображении

$V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m$ $V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство:

Рассмотрим 2 случая

1) $\det V = 0$ тогда $\operatorname{Im} V \subsetneq \mathbb{R}^m$ (линейное подпространство) $\Rightarrow$ по замечанию (следствию)

$\forall E$ $V(E) \subset \operatorname{Im} V$ — нулевой меры

а это тоже (полных)

2) $\det V \neq 0$

$\Rightarrow$ отображение V — биекция, поэтому по 1-й лемме $\mu E = \lambda(V(E))$ — мера

По предыдущей теореме (инв. от. орт. пр.) μ — инвариантна отн. сдвигов

Запускаем лемму о компактном операторе: Q — единичный куб на векторах g_i (орты)

$V(x) = \sum s_i \langle g_i \rangle h_i$

$V(g_i) = s_i h_i \Rightarrow V(Q)$ = параллелепипед на h_i

или уменьшаются

Тут они немного увеличиваются,

да и пофигу, у нас инвариант

$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \cdot s_2 \cdots s_m = |\det V| = |\det V| \lambda Q$ — единичный куб

параллелепипед на h_i; по предыдущей лемме

$\mu = |\det V| \cdot \lambda$

Ч.Т.Д.

3.3.3 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия

Теорема (О характеризации измеримых функций с помощью ступенчатых)

Дано: $f \geq 0$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая

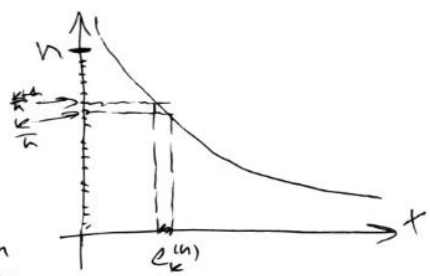
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Тогда: $\exists f_n$ — ступенчатые функции:

1) $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots \leq f$ — монотонность

2) $\forall x \ f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

Доказательство:

Фиксируем n. Отметим на оси „y" отрезок $[0, n]$. Разделим на кусочки длиной $\frac{1}{n}$, и заведём измеримые множества:



$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}\right)$ I тип ← такие точки x-а, которые дают f в $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

$e_{n^2}^{(n)} \overset{def}{=} X(f \geq n)$ II тип, $k \in [0, n^2-1]$

→ заметим, что это — разбиение X. Тогда давайте зададим:

$g_n = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k^{(n)}}(x)$ ← ступенчатая функция. $0 \leq g_n(x) \leq f$ — очев:

↑ значения функции

1) f — конечная, тогда $\exists$ дост. большое n: $\forall x \in e_k^{(n)}$ I типа $|f(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} g_n(x) \to f(x)$

$\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) = f(x)$

2) f — не конечная $\Rightarrow \forall x \ x \in e_{n^2}^{(n)} \Rightarrow g(x) = n \xrightarrow[n \to \infty]{} f = \infty$

Осталось обеспечить монотонность. Пусть $f_n(x) = \sup(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))$

$$\left.\begin{array}{ccccc} g_n(x) & \leq & f_n(x) & \leq & f(x) \\ \big\downarrow{\scriptstyle n \to \infty} & & & & \big\downarrow \\ f(x) & & & & f(x) \end{array}\right\} \text{ по теореме о 2х городовых}$$

ч.т.д.

Следствия (Теоремы о характеризации измеримой функции ступенчатыми)

(1) f — произвольная изм. функция (не обяз. $f \geq 0$)

Тогда $\exists$ ступ. f_n $\quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \quad$ $|f_n| \leq f$

Возьмём $f = f^+ - f^-$

$$\underset{\uparrow\, g_n}{f^+} - \underset{\uparrow\, h_n}{f^-} \Rightarrow f_n = g_n - h_n$$

аппроксимируем ~~аппр.~~ g_n, h_n ≥ 0

(2) f, g — измеримые. Тогда fg — измеримые, считая $[0 \cdot \infty = 0]$

Док-во: $\exists$ f_n, g_n, ступ. $\left.\begin{matrix} f_n \to f \\ g_n \to g \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{\text{ступ.}}{f_n g_n} \to fg$

(3) f, g — измеримые, Тогда $f+g$ — измеримые

[считаем, что $\nexists x$ $f(x), g(x)$ — разных знаков]

Док-во: То же самое: $f_n + g_n \to f+g$

$f_n \to f$

$g_n \to g$

Оказывается, что мы используем эту теорему для выражения всех арифметических свойств над ~~функцию~~ функциями (измеримыми)

3.3.4 Теорема Леви

<u>Теорема</u> (Леви) (о предельном переходе под знаком интеграла)

f, f_n — измеримы на X', $(X, \mathcal{A}, \mu)$

$0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le \ldots$ — при почти всех x (на X' — везде)

(*) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ — при п. в. x (на X' — везде) Переназначим $X' = X \setminus e$ ← мн-во, на котором ломается п. в.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu$

Док-во: из $\int\limits_{X'}$ следует $\int\limits_X$, т.к. $\int\limits_{X'} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\int\limits_e}} = \int\limits_X$, поэтому можно не требовать, из (*) уже следует измеримость f, поэтому можно не требовать этого в условии. $\left(\int\limits_e \ldots = 0, \text{ т.к. } \mu e = 0\right)$

$\le$ $\quad f_n \le f \Rightarrow \lim \int\limits_X f_n \le \int\limits_X f$

$\ge$ Достаточно доказать, что $\forall g$ — ступенчатая, $0 \le g \le f$

Выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \ge \int\limits_X g$ — т.к. там можно сделать предельный переход и всё такое.

А потом запускаем „хитрость — второе счастье“ (о-), и говорим, что достаточно доказать это и для $\forall c \in (0, 1)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \ge \int\limits_X cg$ (то есть ещё немножко уменьшим функцию).

Как это работает?

Пусть $E_n = X(gc \le f_n)$

Тогда, т.к. f_n — возрастающие, $E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$

Утверждаем, что $\bigcup E_n = X$ (т.к. мы немножко уменьшили g, значит начиная с больших n все точки попадут). Теперь ещё давайте вспомним, что $\nu: E_n \mapsto \int\limits_E g$ — мера (по св-ву интеграла). И оценим пределы: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n \geq \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{E_n} cg = c\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{E_n} g = c\int\limits_{E_n} g$

оно стремится к X

по теореме о непрерывности меры снизу

Ну и вот, считаем, что это при $\forall c \in (0,1)$ считается и всё хорошо.

ч.т.д.

3.4 Теоремы

3.4.1 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

Формулировка:

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда:

1. $\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}_{\text{дизъюнктные}} \in \mathcal{P}, \bigsqcup_{i=1}^{n} \subset A$ выполняется $\sum \mu A_i \le \mu A$ (усиленная монотонность)
2. $\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, тогда $\mu A \le \sum \mu A_i$ (конечная аддитивность)
3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P}, \mu B < +\infty$. Тогда $\mu(A \setminus B) \ge \mu A - \mu B$

Замечание:

В (1) и (2) мы не предполагаем, что $\bigcup A_i \in \mathcal{P}$

Доказательство:

(1)

По 3 аксиоме полукольца:

$$A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i$$

Тогда:

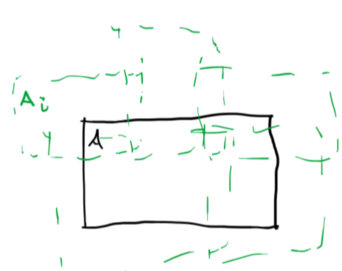
$$A = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i$$

Тогда по замечанию для объёма:

$$\mu A = \sum_{i=1}^{k} \mu A_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu D_i}_{\ge 0} \ge \sum_{i=1}^{k} \mu A_i$$

(2)

Давайте соорудим множества для каждого i, которые содержат только кусочки из $A : B_i = A \cap A_i$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$



Теперь проблема в том, что это объединение не дизъюнктно. Исправим это: $C_1 = B_1, C_2 = B_2 \setminus C_1, \ldots, C_n = B_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i)$. Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$. Осталась лишь проблема, что C_n совершенно не обязаны жить внутри $\mathcal{P}$ (в свойствах написано). Но мы опять вспоминаем 3ю аксиому полукольца и то, что B-шки то лежат внутри $\mathcal{P}$, поэтому переопределяем: $C_k = B_k \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i) = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{P}$. Тогда $A = \bigsqcup_{i,j} D_{ij}$, и по тому же замечанию для объёма $\mu A = \sum_{\text{кон.}} \mu D_{ij}$:

$$\forall i \in [1, n] : \bigsqcup D_{ij} \subset C_i \subset B_i \subset A_i, \quad \sum \mu D_{ij} \le \mu A_i$$

Тогда:

$$\mu A = \sum_i \sum_j D_{ij} \le \sum_k \mu A_k$$

(3)

Рассмотрим два случая:

1. $B \subset A : A = B \sqcup (A \setminus B)$ — дизъюнктно. При $\mu B < +\infty$ можно перебросить в другую сторону $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$
2. $B \not\subseteq A$: рассмотрим $A \subset B = A \subset (A \cap B)$ — это правда (так как когда мы вычитаем B, достаточно вычесть лишь пересечение. А пересечение лежит внутри A, поэтому для него работает пункт (1)):

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) = \mu A - \mu(A \cap B) \underset{\text{очевидно, уменьшаем сумму (лок. мон. по } B)}{\ge} \mu A - \mu B$$

ч. т. д.

3.4.2 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности

Формулировка:

$\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквиваленты два утверждения:

1. μ — счётно-аддитивна (μ — мера)
2. μ — счётно-полуаддитивна (тут нет дизъюнктности):

$$\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}, \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \mu A \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Доказательство:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Просто заменяем все подчёркнутые строчки в предыдущем доказательстве с конечных операций на счётные (так как у нас мера, всё работает).

(2) $\Rightarrow$ (1)

Чтобы проверить счётную аддитивность, надо проверить следующее:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \underset{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Тогда по усиленной монотонности:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A$$

Но с другой стороны, по определению счётной полуаддитивности:

$$\mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Получается, что в конечном случае у нас мера множества больше конечной сумме мер, а в бесконечном — меньше. Получается, это возмоожно только при:

$$\mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Посылка выполнена.

ч. т. д.

3.4.3 Теорема о непрерывности меры сверху

Формулировка:

$\mathfrak{A}$ — алгебра, $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ — объём. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

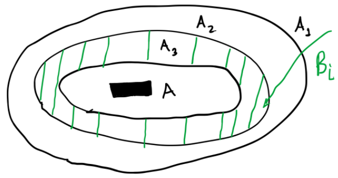
- μ — мера (то есть счётно-аддитивна)
- μ — непрерывна сверху, то есть:

$$\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}, \quad A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow A = \lim_{i \to \infty} A_i$$

Доказательство:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Давайте рассмотрим $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$:



Очевидно, что все такие B_i дизъюнктны относительно друг друга. Тогда очевидно (из рисунка), что:

$$A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \sqcup A$$

Т. к. нам дана мера, давайте применим её (сработала счётная аддитивность):

$$\mu A_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i + \mu A$$

Но нам то интересно, что будет при $i \to \infty$, поэтому смотрим, что будет для i-го:

$$\mu A_i = \sum_{k=i}^{\infty} \mu B_k + \mu A$$

Ну а теперь в пределе $i \to \infty$ (вспоминаем, что по условию $\mu A_1 < +\infty$ и $\sum \mu B_k$ — сходится (т.к. на дизъюнктном объединении)):

$$\lim_{i\to\infty} \mu A_i = 0 + \mu A$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Ну а тут всё по накатанной. Проверяем счётную аддитивность: $C = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i \underset{?}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} \mu C_i$. Соорудим C_i:

$$A_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} C_k$$

Тогда у нас будет работать условие $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, однако работать с этим не супер удобно. Давайте запишем по-другому:

$$A_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} C_k = C \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{i} C_k \right)$$

Супер, такое мы любим, это по 3й аксиоме полукольца лежит в $\mathfrak{A}$. Заметим также (так как дизъюнктное разбиение в конце ничего не останется):

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing \quad \Rightarrow \mu A_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 = \mu A$$

Перезапишем теперь посылку в терминах C и A_i:

$$C = \bigsqcup_{k=1}^{i-1} C_k \sqcup A_i$$

И по конечной аддитивности:

$$\mu C = \sum_{k=1}^{i-1} \mu C_k + \mu A_i$$

Ну а в пределе $i \to \infty$:

$$\mu C = \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k + 0$$

Посылка доказана.

ч. т. д.

3.4.4 Счетная аддитивность классического объема

Формулировка:

$\mathcal{P}^m$ — множемтво всех ячеек на $\mathbb{R}^m$, μ — классический объём.

Тогда μ — σ-конечная мера.

Доказательство:

σ-конечность очевидна по определению, просто рисуем ячейки (клеточки), вот тепе и покрытие.

Гораздо интереснее, как сейчас будем разбираться со счётной аддитивностью. Изначально у нас задана мера $\mu[a, b) = \prod_{i=1}^{m} |b_i - a_i|$. Пусть $P = [a, b), P_n = [a_n, b_n)$, и проверяем на счётную аддитивность, а точнее, на счётную полуаддитивность, ведь мы раньше доказали, что они эквивалентны!

$$P \subset \bigcup P_n \quad ?\mu P \leq \sum \mu P_n$$

Будем оценивать каждую часть неравенства. Во-первых, можно считать, что $P \neq \emptyset$. Потом, давайте подгоинм под определение компактности (неожиданно): возьмём сначала b' чуть "меньше" b (вообще-то это векотра), чтобы $[a, b'] \subset [a, b)$. Тогда пусть это "меньше" описывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \ : \mu P - \mu[a, b') < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$$

Это мы оценили P. Теперь P_n: берём a'_n чуть "больше", чем a_n, чтобы $(a'_n, b_n) \subset [a_n, b_n)$:

$$\mu(a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad \mu((a'_n, b_n) \setminus [a_n, b_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Ну всё, супер:

$$[a, b'] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a', b)$$

По определению компакта (отрезка), существует конечное открытое подпокрытие:

$$[a, b') \subset \underbrace{[a, b'] \subset \bigcup_{i=1}^{N} (a'_n, b_n)} \subset \bigcup_{i=1}^{N} [a'_n, b_n)$$

Класс. Значит запускаем на этом конечном подпокрытии свойство конечной полуаддитвности и оцениваем:

$$\mu P - \varepsilon \le \underbrace{\mu[a, b') \le \sum_{i=1}^{N} \mu[a'_i, b_i)} \le \sum_{i=1}^{N} \mu[a_i, b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\mu P - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{N} \mu[a_i, b_i) + \varepsilon$$

Устремляем $N \to \infty$:

$$\mu P - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{\infty} P_i + \varepsilon$$

Полуаддитивность доказана, занчит всё хорошо.

ч. т. д.

3.4.5 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

Лемма (о структуре открытых множеств и множеств меры 0)

1) $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое

Тогда его можно представить в виде $O = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, где Q_i — кубические ячейки (с рациональными / с двоично-рациональными ~~коэфф~~ координатами) (причём $\forall i$ $Q_i \subset \overline{Q_i} \subset O$) (*)

2) $E \in \mathfrak{M}^m$, $\lambda E = 0$. Тогда: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q_i$ — куб. ячейка: $E \subset \bigcup Q_i$, $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$

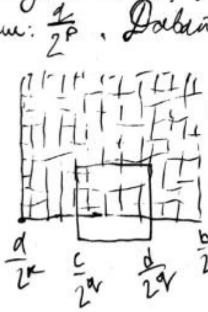
($\exists B_i$ — открытые шары $E \subset \bigcup B_i$ $\sum \lambda B_i < \varepsilon$)

Доказательство

① $\forall x \in O$ очевидно, что можно создать $Q(x)$ с рац. коорд.; $x \in Q_i$

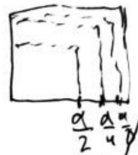
Тогда очев, что $O = \bigcup_{x \in X} Q(x)$. Однако, они с рац. коорд $\Rightarrow$ их счётное к-во $\Rightarrow$ давайте их пронумеруем: $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ = дизъюнктуем = $O = \bigsqcup_{k=1} \left(Q_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_k\right)\right)$

↳ хм, а почему это куб. ячейка? Давайте считать, что они там с двоичными рац. коэффициентами: $\frac{a}{2^p}$. Давайте возьмём $\max\{2^p\} \Rightarrow$ разобьём O на такую сетку:



/ сетка $\frac{1}{2^q}$ и разобьём всё на кубические ячейки. В итоге для каждого k всё супер разбивается

(*) — если тут попадутся какие-то ячейка, то значит они вылезут на границу ($\overline{Q}$ ...)



Ну не проблема. Давайте половинным делением будем подгонять ячейки к краю вправо. Ура, мы замечательные.

Вспоминаем п.5 теоремы Лебега о продолжении меры: $\mu A = \inf\{\sum \mu P_n, \bigcup P_n, P_n \in \mathcal{P}\} = \lambda E = 0$

Ну супер, давайте брать в качестве P кубические ячейки:

② ~~...~~

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists (P_k)$ $E \subset \bigcup P_k$ $\sum \lambda P_k < \varepsilon$, Оценка для Q:

$k > 0$ $\exists (Q_k)$ $\lambda P_k < \sum \lambda Q_k < \lambda P_k + \varepsilon$

Тогда, если $\frac{1}{N}\cdot\max l < \varepsilon$, то всё хорошо, неравенство на P выполняется

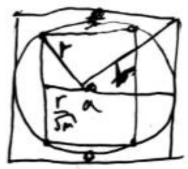
сторона клетки

С шарами духота:

$$\lambda Q\left(a, \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \le \lambda B(a, r) \le \lambda Q(a, r)$$

Оценивает куб. клетками.

Мера - объём (классический)



$$\lambda Q\left(a, \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \le \lambda B(a, r) \le \lambda Q(a, r)$$

$$\left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m \xleftrightarrow[\text{в } m^{\frac{m}{2}} \text{ раз}]{\text{разница}} (2r)^m$$

Ну всё, это константа, применяем китайскую границу и $\sum \lambda B_k < \frac{\varepsilon}{m^{\frac{m}{2}}}$

и т.д.

3.4.6 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Пример Неизмеримого по Лебегу множества

Рассмотрим $A = \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ $\mathbb{R}/_\sim$ — разобьём $\mathbb{R}$ на классы эквивалентности по отношению $a \sim b : a - b \in \mathbb{Q}$

Значит, можно считать, что $A \subset [0,1]$: $[0,1]/_\sim = A$

Оно измеримо?

→ т.к. по 1 точке из каждого класса экв. Ну вот все они лежат на $[0,1]$ (выбрали такое)

Заметим, что

$\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (A+q) = \mathbb{R}$, дополняем все классы эквивалентности

"сдвиг"

т.к. конечно сдвинули

$[0,1] \underset{②}{\subset} \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A+q) \underset{③}{\subset} [-1,2]$
① сдвинулись на максимум

① Объединение дизъюнктно!

Пусть $\exists x \in (A+q_1) \cap (A+q_2) \Rightarrow$

$x - q_1 \in A$ — что невозможно,
$x - q_2 \in A$ они в одном классе эквивалентности

② По счётной аддитивности: $1 = \lambda[0,1] \le \sum \lambda(A+q) \Rightarrow \lambda A > 0$ хотя бы

③ по условию $\lambda\left(\bigcup (A+q)\right) = \sum\limits_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(A+q) \le \lambda[-1,2] = 3$

тут счётное к-во слагаемых => оно может быть < 3 только при $\lambda A = 0$ => противоречие.

=> A — неизмеримо.

ч.т.д. (множество Витали!)

3.4.7 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

Лемма (о ~~???~~ сохранении измеримости при непрерывном отображении)

Лемма 1 (берётся за основу очень часто!)

$(X', \mathcal{A}', \nu')$ — пространство с мерой

$(X, \mathcal{A}, \nu)$ — претендент на пространство с мерой

$T: X \to X'$ — биекция и $\forall A \in \mathcal{A}$ $T(A) \in \mathcal{A}'$

причём $T(\varnothing) \stackrel{def}{=} \varnothing$. Тогда $\nu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$: $\nu A = \nu'(TA)$ — мера

Д-во: Проверим это: $\nu A = \nu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right) = \nu'\left(T\left(\bigsqcup_{i=1} Q_i\right)\right) \underset{\text{по биектив-ности}}{=} \nu'\left(\bigsqcup_{i=1} TQ_i\right) =$

$= \sum_i \nu'(TQ_i) = \sum_i \nu(Q_i)$

ч.т.д.

Замечание: без биективности $T(\mathcal{A})$ — не σ-алг.

$\left(\begin{array}{l} T(A) = T(B) = C \\ \nu(A) = \nu'(TA) = \nu'(TB) = \nu(B) \\ \Rightarrow \nu(A \cup B) \text{ — бред} \end{array}\right)$

Правильно: $T: X \to X'$ $\nu'(A') = \nu(T^{-1}(A'))$

Собственно, Лемма:

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непр., пусть $\forall E \in \mathfrak{M}^m$ $\lambda E = 0$, вып. $\lambda TE = 0$

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m$ $T(A) \in \mathfrak{M}^m$

Док-во:

Из определения борелевской σ-алгебры, но следствию: $\forall A \in \mathfrak{M}^m$ $\exists B, C$ — борелевские $B \subset A \subset C$: $\lambda_m(C \setminus A) \neq 0$, $\lambda_m(A \setminus B) = 0$

Док-во: из леммы (+ регулярность меры Лебега)

$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$, $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$

$\lambda(A \setminus B) \le \lambda(A \setminus F_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n}$

$\lambda(C \setminus A) \le \lambda(G_{\frac{1}{n}} \setminus A) < \frac{1}{n}$

по сл.: $\forall A \in \mathfrak{M}^m$ A представимо в виде $A = B \cup N$, где B — борелевское, N — меры 0

Давайте возьмём $\forall A \in \mathfrak{M}^m$: $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cup N$

Тогда $TA = \bigcup_{j=1}^{\infty} TB_j \cup TN$ компакт (образ, по Вейерштрассу), причём это — компакт (по регулярности меры Лебега + сл. 1)

$\lambda TA = \sum_{j=1} \lambda B_j + \lambda N$, $\lambda N = 0$ $\Rightarrow TA$ — измеримо.

3.4.8 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

Лемма (О сохранении измеримости при гладком отображении.)

$\Phi: \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^1$ } Тогда $\forall A \subset O,\ A \in \mathfrak{M}^m \Rightarrow \Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$

Док-во:

~~Но только откр-ве ...~~ Достаточно проверить, что $\forall E \in \mathfrak{M}^m: \lambda E = 0 \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$, чтобы запустить предыдущую лемму. Рассмотрим НУО E: $\lambda E = 0$. Тогда, по теореме о мн-ве меры 0: $\forall \varepsilon\ \exists \underset{\text{набор ячеек}}{(Q_k)}$ $E \subset \bigcup_k Q_k$, $\sum_k \lambda Q_k < \varepsilon$ ($\lambda E = 0$)

Рассмотрим 2 случая:

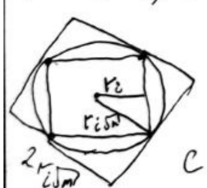
1) $E \subset P = \overline{P} \subset O$ — запускаем Теорему Лагранжа (вкратце). Пусть:

$L := \sup_{x \in P} \|\Phi'(x)\| \Rightarrow \forall x, y \in P$ $|\Phi(x) - \Phi(y)| \le L \cdot |x - y|$ $\left(\frac{|\Phi(x) - \Phi(y)|}{|x-y|} \le L\right)$

Тогда у нас Φ „развозит" точки не более, чем в L. Тогда давайте оценивать:

$E \subset \bigcup Q_i \Rightarrow \Phi(E) \subset \bigcup \Phi(Q_i)$. Отдельно оценим каждый: $\Phi(Q_i) \subset$

$\Phi(Q_i(x_i, r_i)) \subset \underset{\text{одеваем шаром}}{\Phi(B(x_i, r_i\sqrt{m}))} = B(\Phi(x_i), L\sqrt{m}\, r_i) \subset Q(\Phi(x_i), r_i\sqrt{m}L)$



$\Rightarrow \Phi(Q_i) \subset Q(\Phi(x_i), r_i\sqrt{m}L)$

$\lambda \Phi Q_i \le (2r_i\sqrt{m}L)^m = (L\sqrt{m})^m \cdot (2r_i)^m = (L\sqrt{m})^m \lambda Q_i$

С другой стороны,

$\lambda Q_i = \lambda Q_i(x_i, r_i) = (2r_i)^m$

$\Rightarrow \sum_i \lambda Q_i(\Phi(x_i), r_i\sqrt{m}L) \le (L\sqrt{m})^m \cdot \sum_i \lambda Q_i \le (L\sqrt{m})^m \cdot \varepsilon$ (из самого начала)

$\Rightarrow$ значит в $\Phi(*)$ тоже 0

2) $E \subset O$ — произвольное множество, запускаем первый пункт той теоремы. $\Rightarrow \underset{\text{открытое}}{O} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ ← ячейки $\overline{Q_i} \subset O$

$\Rightarrow E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (E \cap Q_i)$ ← ну просто по „опр" или с покрытием

$\lambda(\cdot) = 0$, $E \cap Q_i \subset Q_i$ (очев.) $\xRightarrow{(1)} \lambda\Phi(E \cap Q_i) = 0 \Rightarrow \Phi(E) = \bigcup_i \Phi(E \cap Q_i)$ = мера 0 (счётное объединение)

3.4.9 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

Следствие (инвариантность меры Лебега)

λ_m — инвариантна отн. сдвигов в $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{M}^m$ — инв. отн. сдвигов

Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — ортогональное линейное отобр. сохраняет длины векторов,

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m$ 1) $TA \in \mathfrak{M}^m$ (измерима)

2) $\lambda TA = \lambda A$

Доказательство: Сохраняется измеримость (п. 1.) по ~~теореме~~ лемме о сохранении измеримости при гладком изображении) Ура!

Теперь запускаем теорему о инв. относительно сдвигов, надо проверить усл. μ. Докажем, что $\mu A = \lambda TA$ — это мера.

$\mu(a+A) = \lambda(\underbrace{T(a+A)}_{\text{по линейности}}) = \lambda(\overset{\shortparallel}{Ta} + TA) \overset{0}{=} \lambda TA = \mu A$. 1-й пункт выполнен

Тогда найдём константу. Пусть A — шар $B(0,r)$, тогда $\mu A = \lambda TA = \lambda A$

шар затем, чтобы опираться на ортогональность отображения! (не меняет нормы, длины и т.д.)

$\Rightarrow \mu A = \underset{1}{k} \lambda A$

$\Rightarrow k = 1$

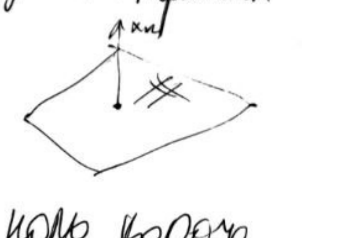
ч. т. д.

Следствие 1 λ(произвольного параллелепипеда) $= \prod$ длин сторон

Следствие 2 $L \subsetneq \mathbb{R}^m$ — линейное подпространство $\Rightarrow \lambda_m L = 0$

Док-во: НУО будем считать $\dim L = m-1$, если нет, дополним. Применим $T: TL = \{x \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\} \Rightarrow \mathbb{R}^{m-1} = \bigsqcup_{i=1} Q_i$

Надстроим $Q_i \times [-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}) = \widetilde{Q}_i$ $\lambda_{m-1} Q_i = 1$



$\Rightarrow \lambda_m \widetilde{Q}_i = \frac{2\varepsilon}{2^i} \lambda_{m-1} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{Q_i}}$

$\Rightarrow L \subset \bigcup \widetilde{Q}_i \Rightarrow \sum \lambda_m \widetilde{Q}_i = 2\varepsilon \sum \frac{1}{2^i} = 2\varepsilon$ ноль, короче.

3.4.10 Лемма "о структуре компактного оператора"

Лемма (О структуре компактного оператора)

$V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – линейный невырожденный оператор

Тогда $\exists$ ортогон. базисы $g_1, g_2, \dots, g_m$

$h_1, h_2, \dots, h_m$

и $\exists$ числа $s_1, s_2, \dots, s_m > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$

При этом $|\det V| = s_1 \cdot s_2 \cdots s_m$

Док-во:

Рассмотрим $W = V^* V$

$V^* V$

в $\mathbb{R}^m$ – транспонирование. в $\mathbb{C}^n$ ещё сопряжение

Заметим, что:

$V^* V$ – кв. симметр. матрица $\Rightarrow$

И пусть W имеет базис из собс. векторов g_i

и собс. ч. σ_i

$c_i \geq 0$ — т.к. W – вещественная

По опр. собст. векторов $c_i = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V^* V g_i, g_i \rangle \underset{(*)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle$

(*) поясним этот переход:

$V: v_{ij}$

$V^*: v_{ji}$

Тогда $Wx = V^* V x$

$\langle V^* V a, b \rangle \quad a_{ij}$

$v_{il} v_{ij} a_j b_l$

сначала применим $v_{ij} \cdot a_j$

потом $v_{il} \cdot (\quad) = (V^T)_{li} (\quad)$

Итого, это равно $\underbrace{v_{ij} a_j} \cdot \underbrace{b_l v_{il}} \Rightarrow = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$

Тогда пусть $h_i = \frac{1}{\sqrt{c_i}} V g_i, \quad s_i = \sqrt{c_i}$

Тогда: $\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \underbrace{\langle V g_i, V g_k \rangle}_{\text{орт.}} \Rightarrow \{h_j\}$ – орт. базис

$= \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_k, g_i \rangle = \frac{c_k}{s_k s_i} \langle g_k, g_i \rangle = 0$

g_k – собст. вект. W

Следовательно x можно разложить по базису $\{g_i\}_{i=0}^m$: $x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$

$\Rightarrow V x = \sum \langle x, g_i \rangle V g_i \overset{h_i}{=} \sum \langle x, g_i \rangle s_i h_i = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$

по мультипл. св-ву

$|\det V|^2 = \det |V^* V| = c_1 \cdots c_m$

$\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ 0 & & c_m \end{pmatrix}$

почему? квадратную симметричную матрицу можно диагонализовать

3.4.11 Теорема об измеримости пределов и супремумов

Теорема (об измеримости пределов и супремумов)

Пусть f_n — измеримые функции на X

Тогда 1) $\sup\limits_{n\to\infty} f_n = f$ — измеримая, $\inf\limits_{n\to\infty}(f_n)$

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n = f$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n = f$ — измеримые

3) Если $\forall x$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, тогда $f(x)$ — измерима.

Доказательство:

1) для sup

$g(x) = \sup\limits_{n\to\infty} f_n$. Рассмотрим мн-во (лебегово) $X(g > a)$

Докажем, что $X(g>a) = \bigcup\limits_n X(f_n > a)$

($\Rightarrow$) $g = \sup f_n > a \Rightarrow \exists n_0 : a < f_{n_0}(x) \le \sup f_{n_0}(x)$

$x \in X(g>a)$ ну, просто опр. супремума. Тогда очевидно, что такая точка x (удовл. нер-ву) попадет ($\Rightarrow$)

($\Leftarrow$) $x \in \left(\bigcup\limits_n X(f_n > a)\right) \Rightarrow \exists n_0 : x \in X(f_n > a)$

ну, а сл., $x \in X(g>a)$ (потому, что g есть супремум по f_n $\Rightarrow$ x обязан лежать в $X(g>a)$) (он больше всех)

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n =$ ~~sup~~ $\inf(\sup(f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots), n \in \mathbb{N})$ — измерим — аналогично

z_n — пос-ть ~~верхних~~ частичных пределов

3) Тривиально, $\overline{\lim} = \underline{\lim} = \lim$

Ч.т.д.

3.4.12 Измеримость функции непрерывной на множестве полной меры

Теорема (об измеримости функции, непрерывной на множестве полной меры) (по Лебегу)

$E \subset \mathbb{R}^m$ $e \subset E$ $\lambda_m e = 0$

измеримое

$f: E' \to \mathbb{R}$, непр. на $E' = E \setminus \{e\}$, тогда f - измерима на E

доопределим до e произвольным образом

Доказательство

Заметим, что $E'(f<a)$ - открыто в E' (логично, прообраз открытого - открыт) по непрерывности

$\Rightarrow$ по теореме об откр. мн-вах в пр-ве и подпр-ве $E' = \underset{\text{откр}}{G} \cap E' =$

$= \underset{\text{откр}}{G} \cap \underbrace{(E \setminus e)}_{\text{изм.}}$ - измеримое в E

$\Rightarrow E(f<a) = \underset{\text{изм}}{E'(f<a)} \sqcup e(f<a)$ по полноте $\Rightarrow$ меры

$\subset e$, $\lambda e = 0$ f измерима на E'

ч.т.д.

Замечание

А что, если μ - не полная? Тогда тоже можно, но доопределять f на e надо не как попало, а как-то предсказуемо, например $f|_e = const$

$E = E' \sqcup e$, $\mu e = 0$

$f: E' \to \mathbb{R}$ - изм $f|_e = const$ Тогда f - изм. на E

$E(f<a) = \underset{\text{измеримо}}{E'(f<a)} \sqcup e(f<d)$ либо входит константа, либо нет

$\varnothing$ или e ч.т.д.

($\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A}_E = \{A \cap E, A \in \mathfrak{A}\}$

объединение измеримых измеримо (в т.ч. в под-алгебрах))

Следствие: (о-) - тяжёлая артиллерия

$f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ - монотонн. - $\Rightarrow$ изм. по Лебегу

3.4.13 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

Теорема (Лебега о сх. п.в. и по мере)

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\mu X < +\infty$!!!

$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы, п.в. конечны, $f_n \to f$ п.в.

Тогда $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Доказательство: Подправим f_n, f на мн-вах меры 0, чтобы $f_n \to f$ всюду

Частный случай: f_n - монотонно убывающая к 0, $f \equiv 0$

Тогда $X(|f_n| \geq \varepsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \varepsilon) \supset X(|f_{n+2}| \geq \varepsilon) \supset \dots$

$\forall \varepsilon$ => по теореме о непр. меры сверху $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X(|f_i| \geq \varepsilon) = \varnothing$

$\mu(X(f_n \geq \varepsilon)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Общий случай: рассмотрим $\varphi_n(x) = \sup\limits_{k \geq n} |f(x) - f_k(x)|$ (идея как в суммировании беск. пр. сумм). Тогда очев, что $\varphi_n \to 0$ монотонно => частный случай.

ч.т.д.

3.4.14 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

Теорема (Рисса о сх. по мере и сх. п.в.)

$f_n, f: X \to \mathbb{R}$ $\quad f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ п.в.

Доказательство:

~~Рассмотрим~~ $\cancel{E_k = \bigcup_{j=k} X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k})}$. ~~Заметим~~ $\cancel{\varepsilon = \forall k}$

Что мы извлекаем из сходимости по мере?

$\forall k = \frac{1}{\varepsilon} \quad \mu X(|f_k - f| \geq \frac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Значит, что $\exists n_k \quad \forall n > n_k \quad \mu(X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$

(фиксируем n_k, и идём вперёд, пока не получим желаемый результат)

Проверим это. Кстати, можно считать, что $n_1 < n_2 < \ldots$

Рассмотрим $E_k = \bigcup_{j=k} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$. Во-первых, $E_k \supset E_{k+1} \supset E_{k+2}$

(тут мы берём n_j по очереди, значит разность уменьшается постоянно. это верно)

$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k = E_0 \quad \mu E_0 = 0$

Ещё мы знаем, что E_k – маленькие: $\mu E_k = \sum_{j=k}^{\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$

Тогда можно $\exists k: \forall m > k \quad x \notin E_n$

для $\forall x \in E_0$ Что это значит? $\Rightarrow$ при $\forall m > k \quad |f_{n_m}(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$

ну, собственно говоря, вот $f_{n_m} \to f$. В некотором счётном мн-ве точек этого б нет, но по фиг, уже п.в.

ч.т.д.

Следствие: $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Пусть $\exists g$ - интегрир.ф.: $\forall n \; |f_n| \leq g$ п.в.

Тогда $|f| \leq g$ п.в. (Док-во: вдоль f_{n_k} п.в.)

3.4.15 Простейшие свойства интеграла Лебега

Теорема Простейшие свойства интеграла Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$

f, g — измеримы
$E \subset X$ — измеримы

1) Монотонность $\int_E g$

$$f \le g \Rightarrow \int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu$$

Док-во: 1) $f, g \ge 0$ — очев (по опр.)

2) $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$; $f^+ \le g^+$, $f^- \ge g^-$ $\Rightarrow (f^+ - f^- \le g^+ - g^-)$

$$\int_E f^+ \le \int_E g^+, \quad \int_E f^- \ge \int_E g^-$$

(по п. 1) $\int_E f \le \int_E g$

2) Простые ф-ции: $\int_E 1\, d\mu = \mu E$, $\int_E 0\, d\mu = 0$

3) $\mu E = 0$, f — изм. $\Rightarrow \int_E f = 0$

Док-во: 1) f — ступ. $\Rightarrow$ тривиально по определению

2) $f \ge 0$, изм. $\Rightarrow \sup\limits^{\text{ступ}} = 0$ (по определению)

3) f — сумм. $\Rightarrow \int_E f^+ = \int_E f^- = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$

4) $\int_E -f\, d\mu = -\int_E f\, d\mu^{(1)}$, $\int c f\, d\mu \overset{(2)}{=} c\int f\, d\mu$

Док-во:
(1) $f = f^+ - f^-$
$(-f) = (-f)^+ + (-f)^- = f^- - f^+$
очев.

(2): если $c > 0$, то так же: $(cf) = (cf)^+$ ...
$c < 0$, возьмём $|c|$ и поменяем знак

5) $\exists \int_E f(x)\, d\mu \Rightarrow \left|\int_E f(x)\, d\mu\right| \le \int_E |f(x)|\, d\mu$

Док-во: $-|f| \le f \le |f|$ — очев.

$-\int |f| \le \int f \le \int |f|$ интегрируем по п. 1

6) f - изм. на E, $\mu E < +\infty$ $a \le f \le b$

$$a\mu E \le \int\limits_E f \le b\mu E$$

$$a\chi_E \le f \le b\chi_E$$

интегрируем

Следствие. f - изм., огр. $\mu E < +\infty \Rightarrow f$ - суммируема на E

7) f - сумм. на $E \Rightarrow f$ - п. в. конечно

1) $f \geq 0$ Представим, что $f = +\infty$ на $A \subset E$

Тогда $f \geq n\chi_A$

$\int\limits_E f \geq n\mu A$ — сколь угодно велико

значит у пол. огр. функц. т.к. интеграл ∞. А это невозможно у суммируемой функции.

2) Разобьем $f = f^+ - f^-$ заменяем пункт 1)

ч.т.д.

3.4.16 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

Теорема Счётная аддитивность интеграла (по множеству)

f - изм. $:X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (измеримы), тогда $\int_A f = \sum \int_{A_i} f$

Сначала докажем лемму для ступенчатых.

Лемма

g - ступенчатая, $g \geq 0$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ - измеримы. Тогда $\int_A g = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} g$

Доказательство: Распишем опять по определению:

$$\int_A g \underset{\text{опр.}}{=} \sum \lambda_k \mu(E_k \cap A) =$$

а это дизъюнкт. по усл. опр.

$$= \sum_k \sum_i \lambda_k \mu(E_k \cap A_i)$$

Давайте переставим сумму местами (да, тут счётное к-во слагаемых, но они все неотрицательные)

$$= \sum_i \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \int_{A_i} g$$

ч.т.д.

Докажем $\leq$ и $\geq$

($\leq$) $\forall f$ возьмём $0 \leq g \leq f$ (ступенчатая), тогда $\int_A g\, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g\, d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} f d\mu$

sup.

$\int_A f d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} f d\mu$

($\geq$) 1. $A = A_1 \sqcup A_2$ рассмотрим ситуацию, когда у нас счётное мн-во A есть объединение (дизъюнктное) двух множеств.

Тогда давайте возьмём ступенчатые g_1, g_2 так: $0 \leq g_1 \leq f \cdot \chi_{A_1}$, $0 \leq g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2}$

То есть, автоматически можно считать, что $g_1 + g_2 \leq f\chi_{A_1}$ $\leq f\chi_{A_2}$

т.к. $g_1 \equiv 0$ на A_2

$g_2 \equiv 0$ на A_1

Тогда давайте опять запускать ~~супремацию~~ интегрирование по A:

$$g_1 + g_2 \le f\chi_{A_1} + f\chi_{A_2}$$

$$\int_A g_1 + g_2 = \int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \le \int_A (f\chi_{A_1} + f\chi_{A_2})$$

и по очереди по супремумам: определение $= f\chi_A$

$$\int_{A_1} f + \int_A g_2 \le \int_A f$$

$$A_2$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \le \int_A f$$

~~шаг~~

2. Тогда давайте считать, что для каждого числа это правильно по индукции: (конечная аддитивность по множеству) $\int_A f = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} f$

т.к. 2 уже доказано!

3. Тогда докажем счётную аддитивность.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B, \text{ где } B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$$

Тогда ~~...~~

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_B f \ge \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

ну а из этого просто следует, что и

$$\int_A f \ge \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$$

ч.т.д.

3.4.17 Линейность интеграла Лебега

Теорема (Линейность интеграла Лебега)
доп. данная

f, g — измеримые на ~~$(X, \mathcal{A}, \mu)$~~ $E \subset X$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$

$f, g \geq 0$

Тогда: $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$ (на α умножения на константу тривиально)

Доказательство:

берём ступенчатые $0 \leq f_n \leq f$, $0 \leq g_n \leq g$ } из теоремы о характеризации измеримых функций — ступенчатыми. (они являются возрастающие)

$\lim_{n\to\infty} \int f_n + g_n \overset{\text{т. Леви}}{=} \int f + g$

$\| \lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$

$+ \lim_{n\to\infty} \int g_n = \int g$

ч.т.д.

Следствие: f, g — суммируемы на E

Тогда $f+g$ — суммируемы, $\int_E f+g = \int_E f + \int_E g$

Доказательство: суммируемость — $|f+g| \leq |f| + |g|$ (нер-во Δ-ка)

$|f+g|^+ \leq |f+g| \leq f^+ + g^+ + f^- + g^-$

Рассмотрим $h = f+g =$

$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$

$h^+ + f^- + g^- = f^+ + h^- + g^+$

интегрируем:

$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E f^+ + \int_E h^- + \int_E g^+$

$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$ ← это всё ≥ 0 ф-ции

ч.т.д. $\int_E f+g = \int_E f + \int_E g$