第一章 行列式

2019年9月18日 18:21

行列式表示一个值

行列式的基本形式:	下三角行列式	上三角行列式	三对角行列式

行列式的基本操作:	求值	转置	展开

行列式的基本性质

性质1： 行列互换，行列式的值不变，即$D=D^T$.

性质2：对换行列式中的两行（列）的位置，行列式只改变符号 .

推论1：如果行列式中有两行（列）完全相同，则行列式的值为零 .

可由性质2得出.

交换相同的两行（列）.

则有 $D=-D$，所以有$D=0$.

性质3：如果行列式中某一行（列）每个元素都有公有因子k，则k可以提到行列式符号外.

按行（列）提取公因子。（乘除） （与矩阵区别）

推论1： 如果有一行（列）元素全为0，则行列式的值为0.

提取0到外面。

推论2： 如果行列式中有两行（列）元素对应成比例，则行列式的值为零.

把对应成比例的系数提取之后，变成两行（列）相同的行列式，参考性质2的推论1。

性质4： 某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和. 这两个行列式的这一行（列）元素分别为对应的两个加数之一，其余和原行列式相同。

按行（列）加减。 --与性质3对应记忆

性质5： 行乐事的某一行（列）的各元素乘以同一个数k然后加到另一行（列）上，行列式的值不变。

倍加变换。

行列式展开

基本概念：	代数余子式

划去a_{ij}所在行和（列）的元素，由剩下的元素按原来顺序构成的低一级的行列式，称A_{ij} 为a_{ij}的代数余子式。

$A_{ij} = (-1)^{i+j} * a_{ij}$

性质1：行列式的值等于它任意一行（列）的各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和。

$$M_{ij} = \sum_{i=1,j=1}^{i,j} a_{ij^*}A_{ij}$$

通常在利用展开式求值时，要求展开的那一行只有一个非零元素，这样按展开式求值公式计算时，不需要求和，只需计算非零项的值即可。

性质2：行列式某一行（列）的各元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式的乘积之和为零。

--乘以自己对应的代数余子式多好，能求值，非得乘别人的代数余子式，变成0了吧~

递推法

范德蒙行列式

克拉默法则

如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

记作 $D = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \cdots & \mathbf{a_{an}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix}$ 为方程组的系数行列式 。

就有 $x_n = \frac{D_n}{D}$.　　其中Dn为D中将第n列的未知数系数替换成等式右侧的b_n。

若方程组中等式右侧的b_n全都为0，则称此方程为齐次线性方程组。

显然当所有x取零时，方程组始终成立，故齐次线性方程组一定有零解。但是我们更关心的是它的非零解。

性质1 ： 应用克拉默法则，就有D ≠ 0时，只存在零解.

推论1 ： 如果齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 D = 0 .

至于为什么，参考 第三章线性方程组

行列式的基本性质

2019年11月12日　　22:03

行列式的基本性质

性质1： 行列互换，行列式的值不变，即D=D^T.

性质2： 对换行列式中的两行（列）的位置，行列式只改变符号 .

推论1：如果行列式中有两行（列）完全相同，则行列式的值为零 .

可由性质2得出.

交换相同的两行（列）.

则有 $D=-D$，所以有$D=0$.

性质3：如果行列式中某一行（列）每个元素都有公有因子k，则k可以提到行列式符号外.

按行（列）提取公因子。（乘除）（与矩阵区别）

推论1： 如果有一行（列）元素全为0，则行列式的值为0.

提取0到外面。

推论2： 如果行列式中有两行（列）元素对应成比例，则行列式的值为零.

把对应成比例的系数提取之后，变成两行（列）相同的行列式，参考性质2的推论1。

性质4： 某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和. 这两个行列式的这一行（列）元素分别为对应的两个加数之一，其余和原行列式相同。

按行（列）加减。　　--与性质3对应记忆

性质5： 行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数k然后加到另一行（列）上，行列式的值不变。

倍加变换。

行列式展开

2019年11月12日 22:03

行列式展开

消消乐玩过吧？把a_{ij}当作消十字型的道具，剩下的按照原来的顺序就好了。

基本概念：	代数余子式

划去a_{ij}所在行和（列）的元素，由剩下的元素按原来顺序构成的低一级的行列式，称A_{ij} 为a_{ij}的代数余子式。

$A_{ij} = (-1)^{i+j} * a_{ij}$

性质1：行列式的值等于它任意一行（列）的各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和。

$$M_{ij} = \sum_{i=1,j=1}^{i,j} a_{ij}*A_{ij}$$

通常在利用展开式求值时，要求展开的那一行只有一个非零元素，这样按展开式求值公式计算时，不需要求和，只需计算非零项的值即可。

性质2：行列式某一行（列）的各元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式的乘积之和为零。

--乘以自己对应的代数余子式多好，能求值，非得乘别人的代数余子式，变成0了吧~

递推法

范德蒙行列式

克拉默法则

2019年11月12日　　22:03

克拉默法则

如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

记作 $D = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{an} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}$ 为方程组的系数行列式。

就有 $x_n = \frac{D_n}{D}$.　　其中Dn为D中将第n列的未知数系数替换成等式右侧的b_n。

若方程组中等式右侧的b_n全都为0，则称此方程为齐次线性方程组。
显然当所有x取零时，方程组始终成立，故齐次线性方程组一定有零解。但是我们更关心的是它的非零解。

性质1：应用克拉默法则，就有$\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$时，只存在零解.
推论1：如果齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.
至于为什么，参考 第三章线性方程组

范德蒙行列式

2019年11月6日 16:51

$$D_n = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \dots & \mathbf{x_n} \\ \mathbf{x_1^2} & \mathbf{x_2^2} & \dots & \mathbf{x_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{x_1^{n-1}} & \mathbf{x_2^{n-1}} & \dots & \mathbf{x_n^{n-1}} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} \left(\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}\right)$$ -----累乘符号

第二章 矩阵

2019年11月6日 15:11

与行列式区别，矩阵不是值，矩阵的行列式才是值。

矩阵的运算

2019年11月12日 22:05

矩阵的运算

线性运算	乘法运算	方阵的幂	矩阵转置	方阵的行列式	增广矩阵

矩阵的线性运算

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\ \boldsymbol{C}\,)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\,)+\boldsymbol{C}$
3. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$
4. $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$
5. $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$
6. $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{A}$
7. $(\boldsymbol{\lambda}+\ \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A}+\ \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{A}$
8. $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\ \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A}+\ \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{B}$

矩阵的乘法运算

尤其注意左乘和右乘是不一样的！！！！

矩阵乘法规则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\times\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\times\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\times\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\times\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\times\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\times\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\times\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\times\boldsymbol{B}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{31}\times\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{32}\times\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{31}\times\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{32}\times\boldsymbol{B}_{21} \end{bmatrix}$$

观察不难得出：

1. 左边的矩阵取行，右边的矩阵取列
    - 矩阵算是行列式的升级版，行列式行列式，前面的取行，后面的取列。
2. 对应相乘相加
    - 即 左矩阵每行的元素 = 右矩阵每列元素的个数。 （也就是左矩阵的列数等于右矩阵的行数）
3. 取行的决定乘积后的行，取列的决定乘积后的列

- 如 $A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21}$ 这一项，A的都取自左矩阵的第一行，B都取自右矩阵的第一列。故其在新矩阵的位置是（1,1）。

乘法运算规律：

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

注意左乘和右乘的区别

矩阵的逆（矩阵的除法）　　（重点讲）

矩阵的转置

就是行列下标互换

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$　　(注意AB顺序换了！！)

方阵的幂

A 的m次幂 记作 A^m

且有 $A^0 = E$ （E为单位矩阵）

1. $A^k A^l = A^{k+l}$
2. $(A^k)^l = A^{kl}$

方阵的行列式

方阵 A 代表一个数表，而 $|A|$ 是由该数表按一定的运算法则确定的一个数。

1. $|A^T| = |A|$
2. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
3. $|AB| = |A||B|$

增广矩阵

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$　　$B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$

增广矩阵记为 $\bar{A} = (A, B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{vmatrix}$。

矩阵的逆

2019年11月12日 22:05

逆矩阵	伴随矩阵

相等于矩阵的除法。
只有非零矩阵才有逆。
A 的逆记作 A^{-1} $(\frac{1}{A})$ ，则有 $A \cdot A^{-1} = 1$。 1 在矩阵中用 E (单位矩阵)表示。

定义 若$AB = E$，则 $BA = E$.
则称A为可逆矩阵，简称A可逆。 其次由于乘法运算的规则，可得出AB均为方阵（因为E为方阵）。

即只有 非零方阵 才可逆，且其的逆矩阵是 唯一 的。

若矩阵A的行列式 $|A| \neq 0$，则称A是 **非奇异的（或 非退化的）**，否则称A为 **奇异的（或 退化的）**。
[主要记这几个名称，不要出现了却不认识]

伴随矩阵法

由 $\boldsymbol{A}$ 矩阵 各元素对应的代数余子式 组成的矩阵的 转置，称为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^*$ 或 $adj\boldsymbol{A}$ 。

可得 $AA^* = |A|E$ 由此得 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$。

公式别记反就好，
毕竟矩阵除一个数字还是矩阵，
但是数字除矩阵。。。我就不知道了

结合行列展开式里的性质2自己推导嘛

运算规律

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 可以和矩阵的转置一起记忆。

可逆矩阵的消去律

$AB = AC$ 则同时左乘 A^{-1}，则有 $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ 如果右乘则为 $ABA^{-1} = ACA^{-1}$ 消不掉 。

通过矩阵的初等变换计算逆矩阵 --------------矩阵的初等变换

分块矩阵

2019年11月12日 22:07

可以任意将矩阵分成若干小矩阵，每个矩阵为A的子块，以子块元素的矩阵为分块矩阵。

$$A=\left|\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|$$

分块矩阵的运算 与 矩阵一般运算相似。

分块矩阵的转置，除了将行列子块交换外，还要将每个子块转置。

分块矩阵求逆（用定义求）

$D=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ 设 $D^{-1}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

根据 $DD^{-1}=E$

再 依据 乘法运算规律 得

$$\begin{cases} AX_{11}=E_k \\ AX_{12}=O \\ CX_{11}+BX_{21}=O \\ CX_{12}+BX_{22}=E_r \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_{11}=A^{-1} \\ X_{12}=A^{-1}O=O \\ X_{21}=-B^{-1}CA^{-1} \\ X_{22}=B^{-1} \end{cases}$$

代入回去 便可得 D^{-1}。

特别的有

$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$ 时，有 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{bmatrix}$ （其实还是基本运算规律）

注意：在乘法时，用分块的话，要保证矩阵符合乘法规律。即左列数等于右行数。

矩阵的初等变换与初等矩阵

2019年11月12日　　22:07

初等变换	等价矩阵	行阶梯形矩阵	等价标准矩阵（标准型矩阵）	初等矩阵

初等变换有：

1. 倍乘变换
2. 行列互换
3. 倍加变换

如果B可以通过有限次初等变换变成A，则记作 $A \cong B$ 。（A和B为**等价矩阵**）

等价矩阵具有：

反身性：$A \cong A$

对称性：$A \cong B$ ，　则 $B \cong A$

传递性：$A \cong B$ ，$B \cong C$ ，则 $A \cong C$

行阶梯形矩阵

1. 若有零行（矩阵中的元素全为零的行），则零行都位于矩阵的下方。
2. 从第一行起，没吭第一个非零元前面零的个数逐行增加。

例： $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

行简化阶梯形矩阵

即阶梯形矩阵中非零行第一个非零元素为1，切起所对应的列的其他元素都为零。

例： $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

等价标准型矩阵（标准型矩阵）

1. 位于左上角的子块是一个r阶单位矩阵
2. 其余的子块（如果有的话）都是零矩阵

例： $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

定理1： **任意矩阵都可以通过若干次初等变换化为行阶梯形矩阵，行简化阶梯型矩阵，标准型矩阵。**

初等矩阵

单位矩阵E作一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵。

由于矩阵乘法运算的特点，发现，矩阵的初等行（列）变换可用初等矩阵于该矩阵作乘法运算来实现。

定理2： 对于$m \times n$矩阵A 作一次初等行变换相当于对A左乘相应的m阶初等矩阵；
作一次初等列变换相当于对A右乘相应的n阶初等矩阵；

同样利用 “行列式” 的名字记忆
左边是行，右边是列。
左乘变行，右乘变列。

求逆矩阵的初等变换法

n阶可逆矩阵A可逆的充分必要条件是它可以表示为若干个初等矩阵的乘积。
因为A可逆，由 定理1和2 可知，存在初等矩阵P_1，P_2，P_3 … Ps与Q_1，Q_2 …Qt，使得

$$\boldsymbol{P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E}$$ （注意左乘和右乘的区别，以及乘的顺序）

因此有 $\boldsymbol{A = P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_S^{-1}EQ_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_S^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}}$
故矩阵A可表示为若干个初等矩阵的乘积

若 $A = P_1P_2\cdots P_s$ ，则 $A^{-1} = P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$， 因此 $P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}A = A^{-1}A = E$

所以只要对A进行若干次初等变换就可以将它变为单位矩阵。

所以构造 $D = [A|E]$ 对于D不断左乘初等矩阵，便可得到 $D = \left[A^{-1}A|A^{-1}E\right] = \left[E|A^{-1}\right]$
又因为左乘即相当于初等行变换。 （只能对行进行操作）
对于分块矩阵D进行(换行，数乘，倍加)变换，将前一个子块有A变为E时，后子块自然会由E变为A^{-1}。

若要进行列变换，即要构造
$$D = \left[\frac{A}{E}\right] \to \left[\frac{E}{A^{-1}}\right]$$

矩阵的秩

2019年11月12日　　22:07

主要是概念，应用多在后面

定义：　在一个$m \times n$矩阵A中任意选定k行k列，交点元素按照原顺序构成的行列式，称为k阶行列式，称为A的一个k阶子式。　（k阶子式不只一个）

定义：若A的r阶子式不为零，同时所有$r+1$阶子式全为零，则称A的秩为r，记为秩(A)或$r(A)$。

1. 零矩阵的秩规定为0。
2. 若A为非零矩阵，则$r(A) \geq 1$ 。
3. 若A为$m \times n$矩阵，则$0 \leq r(A) \leq min(m,n)$
4. $r\left(A^T\right) = r(A)\,;\, r(kA) = r(A) \;\; k \neq 0$
5. 若A有一个r阶子式不为零，则$r(A) \geq r$；若A的所有$r+1$阶子式全为零，则 $r(A) \leq r$
6. 对于矩阵A，它的n阶子式只有一个$|A|$，且A不存在$n+1$阶子式，
   故$r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$；　（没有零行，规定满秩）
   $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$；（有零行，或者可以化简出零行，故秩小于$n$）
   由于n阶可逆矩阵的秩等于n，所以可逆矩阵也称为满秩矩阵。（可逆矩阵的行列式不等于0）

定理2.5： 初等变换不改变矩阵的秩
推论1： 若矩阵AB等价，则$r(A) = r(B)$

定理2.6：　阶梯型矩阵的秩等于其中非零行的个数（常用的算矩阵的秩的方法）

第三章 线性方程组

2019年11月6日　　13:49

高斯消元法

2019年11月12日　　22:07

用矩阵的变换来完成消元求解方程组。

矩阵的初等变换相当于在方程组之间加加减减，例如在求方程$\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\end{cases}$时，会用到方程相加减 。

同样地，线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_n\end{cases}$ 中

用 n 表示未知数个数，m是方程的个数， a 为系数， b 是常数。

将系数和常数组成一个增广矩阵，并通过初等变换，变成阶梯矩阵。

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}&b_n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\dots&c_{1r}&\dots&c_{1n}&d_1\\0&c_{22}&\dots&c_{2r}&\dots&c_{2n}&d_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&c_{rr}&\dots&c_{rn}&d_r\\0&0&\dots&0&\dots&0&d_{r+1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&0&\dots&0&0\end{bmatrix}$$

1. 若$d_{r+1}\neq 0$，相当于在方程组中出现一个 $0=C$（常数）的式子，所以方程无解。
2. 若$d_{r+1}=0$，即方程组中不会化简出无解方程。
   a. 若 r = n，则说明方程组有唯一解。

      相当于有几个未知数就有几个方程，就有唯一解。
   b. 若 r < n，则说明方程可以把x_1到x_r（通解 / 一般解）通过x_{r+1}到x_n（自由未知变量）表示。

      说明未知数个数大于方程数，通过若干变量来表示方程的解。方程有无穷多解。

      就好比二元一次方程：$x+y=1$。两个未知数，只有一个方程，只能解得通解：$x=1-y$。

      具体看一下书78页。

定理3.5：线性方程组有解的判别定理

非齐次方程组（常数项不全为零）

化简后的系数矩阵和增广矩阵有相同的秩。若$r(A)=r(\bar{A})=n$，有唯一解；

若$r(A)=r(\bar{A})<n$，则有无穷多解。

化简后增广矩阵除了最后一列的元素，前面的所组成的就是化简后的系数矩阵。

所以有相同的秩就是在说$d_{r+1} = 0$。后面的条件也是上面的分类讨论。

齐次线性方程组（常数项全为零）

若$r(A) = n$，系数不全为0，则方程只有零解。若$r(A) < n$，则方程组有非零解。

当齐次线性方程组方程的个数等于未知量个数时，则它有非零解的充分必要条件是系数行列式等于0。（系数为零了，就与x无关了）

n维向量

2019年11月12日 22:07

行矩阵就是行向量，列矩阵就是列向量。

可以把一个矩阵的每一列（行）都看作一个列 （行）向量，一起称为列（行）向量组。

故可以将线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$ 改写成：

$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots x_na_n = b$ (线性非齐次方程组) 方程是否有解⇔线性关系式是否成立。

$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots x_na_n = 0$ （线性齐次方程组）是否有非零解⇔线性组合的系数是否非零。

向量组的线性相关

2019年11月12日 22:08

向量的线性组合与线性表示

比例关系	；线性组合；	线性表示（线性表出）；	表出系数。

任意一个n维向量都可以n维单位向量组表示。（可联系n维空间向量记忆）

$\mathrm{b} = k_1 a_1 + \cdots k_s a_s$等价于一个 线性非齐次方程组 。因此$b$能否用$a$的向量组表示取决于该方程组$k$是否有解。

线性非齐次方程

同样地，令$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \cdots \boldsymbol{a_s})$，$x = (k_1, k_2 \cdots k_s)^T$，则变成$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$。该方程的解就是线性表示的表出系数。

$r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}, b) = r(\boldsymbol{A})$时，有解且：

1.$r(A) = s$时，有唯一线性表出；

2.$r(A) < s$ 时，有无穷线性表出。

和之前的线性非齐次方程解的判断其实是一样的。
在1的条件下是方程有唯一解，那么也就是表出系数k是唯一的；
在2的条件下是方程有无穷多解，那么表出系数也就不唯一了。

总的来说还是记忆对应方程的解的判断

线性相关性

若存在s个不全为零的系数，使得 $k_1\boldsymbol{a_1} + \cdots k_s\boldsymbol{a_s} = 0$成立，则称$a$向量组线性相关。（线性齐次方程组）

对于单个向量来说，因为系数只有一个。因为$k \neq 0$，但要求$k\boldsymbol{a} = 0$，所以必有 $\boldsymbol{a} = 0$。

由 n维单位向量 组成的向量组是线性无关的。

所以0向量和任何向量都线性相关。

线性齐次方程

同样地，令$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \cdots \boldsymbol{a_s})$，$x = (k_1, k_2 \cdots k_s)^T$，则变成$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$。该方程的解就是线性表示的表出系数。

~~本身就成立~~ 增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩才有解

$r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}, b) = r(\boldsymbol{A})$时

1.$r(\boldsymbol{A}) = s$时，线性无关；

2.$r(\boldsymbol{A}) < s$ 时，线性相关。

和之前的线性齐次方程解的判断其实是一样的。
在1的条件下是方程只有零解，只有k全为 0才成立，故线性无关。
在2的条件下是方程有非零解，那么k就不全为0，所以现行相关。

推论1：对于s个n维向量构成的向量组$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \cdots \boldsymbol{a_s}$，若s>n，则向量组必然线性相关。

（s相当于未知数个数，n相当于方程个数，未知数量大于方程数，则必然有非零解）

注意区分

推论2：设n个n维向量组成向量组

1.该向量组线性相关当且仅当$|A| = 0$；

2.该向量组线性无关当且仅当$|A| \neq 0$；

应用：当矩阵A是方阵时，其行列式为零时，向量组线性相关。

当|A|= 0 时，说明系数矩阵，有一行全为零，或者有相同的两行。这在方程组中的反映为，有一组多余的方程，所以还是说明当未知数个数大于方程数时，线性相关。反之，则无关。

定理3.5：线性相关的向量组，减少若干分量后，依然线性相关。线性无关的向量组，添加若干分量后，依然线性无关。

通过方程组求解和结构方面考虑。

对于线性无关向量组，原来的表出系数全为零，在添加一个方程后，原来的解依然满足，故还是只有零解。
对于线性有关的也可用这种方法考虑。

定理3.6：向量组如果线性相关，则至少有一个向量能被其余向量线性表出。（类似于得有一个中间变量）

推论1：任意包含零向量的向量组线性相关。因为零向量可以别任意向量线性表出。（线性表出可以系数全为零）

推论2：如果a向量组线性无关，而a向量组和b线性相关，则b可以用a向量组线性表出，且表示法唯一。

定理3.8：如果向量组的部分线性相关，那么向量组就线性相关。（结合定理3.5记忆，其实是一回事）

推论1：如果向量组线性无关，则任意部分都线性无关。

两个向量组之间的表示关系

若有两个同维向量组a和b，若b中的每个向量都可以由a向量组线性表出，则称b向量组可以由a向量组线性表示；
若a和b可以互相线性表示，则称a向量组和b向量组等价；
类似于等价矩阵：也具有反身性；对称性；传递性。

若向量组$B(t)$可以由向量组$A(s)$线性表出，可以表示$B = AK$。（$K = \left(k_{ij}\right)_{s\times t}$是表出系数矩阵）

若$B(t)$能被$A(s)$线性表示，且$B = AK$成立，对于$B(t)$是否线性相关。
令$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})\,x = 0$，即$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{K}x = 0$，也就是$\boldsymbol{K}x = 0$。
1.若$r(\boldsymbol{K}) < t$，则$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$必线性相关。
2.若$r(\boldsymbol{K}) = t$且$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})$线性无关，则$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$线性无关。

推论1：若向量组$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$可以由数量更少的$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})$线性表示，则$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$肯定线性相关。$t \geq s$

推论2：两个线性无关的等价向量组，必含有相同个数的向量。

若个数不同，又因为等价，势必有数量教多的向量组由较小的线性表示，则数量较多必线性相关，与条件矛盾。

定理3.10：如果$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$能被$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})$线性表示，且$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{K}$成立，且$\boldsymbol{K}$是方阵，对于$\boldsymbol{K}x = 0$有：

1.如果$|K| = 0$，则不管$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})$是否线性相关，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$必然线性相关；

2.如果$|K| \neq 0$，则$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})$和$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$是等价的。（具有相同的线性相关性）

向量组的秩

2019年11月12日　22:09

极大线性无关组

向量组的一部分，这部分线性无关，且添加任意一个分量就线性相关。

一个线性无关向量组的极大线性无关组就是它本身。

任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价。

定理3.11： 一向量组的极大无关组都含有相同个数的向量。

一向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的。

定义： 向量组的极大无关组所含的向量个数称为该**向量组的秩**，记作$r(\alpha_1, a_2 \cdots \alpha_s)$。

仅含零向量的向量组没有极大线性无关组，我们规定它的秩为零。

等价的向量组必有相同的秩。

向量组的秩和矩阵的秩的关系

定义： 矩阵的**行（列）秩**就是指矩阵的**行（列）**向量组的秩；

定理3.12： 矩阵的行秩和列秩相等。

定理3.13： 矩阵的行（列）秩等于矩阵的秩。

向量空间

2019年11月12日　22:09　　(类比高中的平面向量，空间向量)

向量空间的概念

定义：设V为n维向量，如果对属于V的任意两个向量的和，数乘仍旧属于V，则称V为**向量空间（线性空间）。**

数学语言：对$\forall \alpha, \forall \beta \in V$，都有$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$，$k\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，则称$\boldsymbol{V}$为**向量空间。**

对于V中的向量 $\alpha_1, \alpha_{2,\ldots}\alpha_r$ 有：

1. $\alpha_1, \alpha_{2,\ldots}\alpha_r$线性无关。（类似于平面向量的不共线，空间向量的不共面）
2. V中的任意向量都可以用 $\alpha_1, \alpha_{2,\ldots}\alpha_r$ 线性表示，则称 $\alpha_1, \alpha_{2,\ldots}\alpha_r$ 为一组**基**，r称向量空间$\boldsymbol{V}$的维数，记为$dim\boldsymbol{V} = r$，并称$\boldsymbol{V}$为**$\boldsymbol{r}$维空间向量**。而单位向量组称为**标准基**。（同样类似平面、空间向量的基底）
3. 只有$\{0\}$的空间称为零向量空间，维数为零。

定义：$\boldsymbol{U}$是$\boldsymbol{R}^n$的非空子集，如果对$\boldsymbol{U}$也满足向量空间的要求，则称$\boldsymbol{U}$为$\boldsymbol{R}^n$的一个**子空间。**

零向量空间与本身也是自己的子空间，称为**平凡子空间**，其余的为**非平凡子空间。**（子集的扩展）

若$\boldsymbol{A} = x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots x_n\boldsymbol{a_n}$，则称向量$\boldsymbol{A}$在$(a_1, a_2 \ldots a_n)$基下的坐标为$(x_1, x_2 \cdots x_n)^T$，或$(x_1, x_2, \cdots x_n)$。

基坐标与坐标变换

基变换公式

设$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$和$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n})$是向量空间的两组基。

若有$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{C}$，该公式称为**基变换公式。**而$\boldsymbol{C}$是由$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$转换为$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n})$的**过渡矩阵。**

可知，$\boldsymbol{C}$是可逆矩阵，且$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 。

坐标变换公式

若向量$\boldsymbol{D}$在$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$基下的坐标为$(x_1, x_2 \cdots x_n)^T$，在$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n})$基下的坐标为$(y_1, y_2 \cdots y_n)^T$。

所以$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})\,(x_1, x_2 \cdots x_n)^T$，$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{n})\,(y_1, y_2 \cdots y_n)^T = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{C}\,(y_1, y_2 \cdots y_n)^T$。

由于$\boldsymbol{D}$在 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$基下的坐标应该唯一，所以$(x_1, x_2 \cdots x_n)^T = \boldsymbol{C}\,(y_1, y_2 \cdots y_n)^T$ 称为坐标变换公式。

线性方程组解的结构

2019年11月12日　　22:09

可参考高等数学中的微分方程的通解与特解。

齐次线性方程组解的结构

对于齐次线性方程 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=0 \end{cases}$ 在解不唯一（非零解）的情况下：

通解

定义：齐次线性方程组的一组解$\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\cdots\boldsymbol{\eta_s}$称为其的一个**基础解系**。在求基础解系时，自由未知变量取单位向量。

1.任意解都可被基础解系表示。

2.基础解系线性无关。

定义：基础解系所含解的个数为$n-r$，n是未知数个数，r是方程系数矩阵的秩。

非齐次线性方程组解的结构

对于非齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$，称其对应的齐次方程组为它的导出组。

性质：设$\boldsymbol{\eta}_1^*,\boldsymbol{\eta}_2^*$是非齐次方程组的两个解，$\boldsymbol{\eta}$是它对应导出方程组的解，则

特解

1.$\boldsymbol{\eta}_1^*-\boldsymbol{\eta}_2^*$是导出方程组的解。

2.$\boldsymbol{\eta}_1^*+\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次方程组的解。

定理3.15：设$\boldsymbol{\eta}^*$是方程组的一个解（特解），$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta_2}\cdots\boldsymbol{\eta_{n-r}}$是其导出组的一个基础解系，则方程组的全部解为：

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\eta}+k_2\boldsymbol{\eta_2}\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta_{n-r}}$（$k$为任意常数）（通解）

推论：方程组有解的情况下，解是唯一的充要条件是它的导出组只有零解。

第四章 方阵的特征值和特征向量

2019年11月20日　　19:47

矩阵的特征值和特征向量

2019年11月27日　15:59

概念

存在$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，则称α是$\boldsymbol{A}$的一个特征向量，$\lambda$是$\boldsymbol{A}$的一个特征值。（$\lambda$是数，α是n维向量）

恒有 $\mathbf{E}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$,所以$\lambda = 1$是$\boldsymbol{E}$的一个特征值，任一非零的$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}$都是$\boldsymbol{E}$的属于特征值$\lambda = 1$的特征向量。

特征值和特征向量的求法

1. **求方阵的全部特征值**
   $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$
   由于$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，因此α是齐次线性方程组$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$的非零解。
   即，$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$。 即可求出λ。

   称 $f(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$为方阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式，$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$ 为方阵$\boldsymbol{A}$的特征方程。
2. **对于每一个特征值，求出一组基础解系，则特征向量** $\alpha = k_1\alpha_1 + .. + k_{n-r_i}\alpha_{n-r_i}$
   r_i为矩阵$\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$的秩。

**对于矩阵多项式的特征值求解，只要λ是$\boldsymbol{A}$的特征值，那么λ就是由$\boldsymbol{A}$组成的矩阵多项式的特征值。

矩阵的特征值和特征向量的性质

1. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}a_{ii}$　　等式右侧式子称为$\boldsymbol{A}$的**迹**，记为**tr(A)**，即$\boldsymbol{A}$的主对角元素和。
2. $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |\boldsymbol{A}|$　　等式左侧的都包括**重特征值**，即重复的解也算。

推论 方阵A的可逆的充分必要条件是A的特征值全不为零。
　　只有非零矩阵才可逆。根据上面的性质2，若有零，则A的行列式为零，就不满足可逆条件。

定理4.2 若α是矩阵A的属于特征值λ_0的特征向量，则对非零k，kα也是矩阵A属于特征值λ_0的特征向量。
　　若α和β是矩阵A的属于特征值λ_0的特征向量，则α + β也是矩阵A属于特征值λ_0的特征向量。

记为特征向量的可加性和可倍性?

定理4.3 矩阵转置前后特征值不变，但特征向量却可能改变。（因它们有相同的特征多项式）

定理4.4 若λ是方阵$\boldsymbol{A}$的特征值，α是$\boldsymbol{A}$的属于λ的特征向量。则对λ和$\boldsymbol{A}$经过相同运算后，特征向量不变。
　　例如: $k\lambda \leftrightarrow k\boldsymbol{A}$
　　　　$\lambda^m \leftrightarrow \boldsymbol{A}^m$
　　　　$\lambda^{-1} \leftrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}$
　　　　$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\boldsymbol{\lambda}} \leftrightarrow \frac{|\boldsymbol{A}|}{\boldsymbol{A}}$ 即$(\boldsymbol{A}^*)$

记为特征向量与特征值、方阵的同运算不变性?

定理4.5 属于不同特征值下的特征向量线性无关。

定理4.6 属于各个特征的线性无关向量合在一起仍然线性无关。

定理4.7 若λ是方阵$\boldsymbol{A}$的k重特征值，则对应与λ的线性无关特征向量不会超过k个。

相似矩阵与矩阵的对角化

2019年11月27日　　15:59

相似矩阵的概念和性质

1. **概念**

   设A与B是n阶可逆方阵，若存在n阶可逆方阵P，使得 $P^{-1}AP = B$，则称矩阵AB相似，记作A~B

   同样具有反身性，对称性，传递性。

2. **性质**

   a. **定理4.8及其推论**

   相似矩阵具有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。但具有相同特征值的矩阵不一定相似。

   故还有相同的行列式，迹，秩。

   单位矩阵只能与自身相似。

   b. **定理4.9**

   设A~B，则

   $\boldsymbol{A}^T \sim \boldsymbol{B}^T$;

   $\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m$;

   $\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}, \boldsymbol{A}^* \sim \boldsymbol{B}^*$ (如果可逆)

矩阵可相似对角化的条件

概念

如果方阵$\boldsymbol{A}$相似于一个对角矩阵（只有主对角元素非零），则称$\boldsymbol{A}$可（相似）对角化。

条件

定理4.10 n阶矩阵为可对角化矩阵的充要条件是$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量。

一般对于n阶方阵会有n个特征值，每个特征值对应一个特征向量。

然后有些时候，有k重根，即同一个值，对应于多个λ。

则此时将λ，带回$|\lambda E - A|$时，k重根就能得到k个特征向量。取不同维的向量来求对应特征向量。

只有符合了才能说明矩阵A可对角化。

并写下特征向量的矩阵，以及特征向量对应特征值的对角矩阵。（一一对应）。

对角化后的矩阵就是矩阵A的特征值所构成的对角矩阵。

定理： 若A的相似对角矩阵是B，则$A^m = P\,B^m\,P^{-1}$。

根据 $A = P\,B\,P^{-1}$展开即可获得。因为对角矩阵对于幂次计算更加方便。

实对称矩阵的对角化

2019年11月27日　　16:00

一般的矩阵不一定可相似对角化，然而实对称矩阵却一定可相似对对角化。

向量的内积

n维向量的内积，即为对应的数字相乘求和。
记作$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$。

基本性质：

a. 对称性(交换律？）$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$
b. 线性性　$(\mathrm{k}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.　$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$
c. 正定性　$(\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\alpha})\geq\mathbf{0}$

定义：设α是n维实向量，将$\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}}$ 定义为 α的长度，记为$||\boldsymbol{\alpha}||$。
长度为1时，为单位向量。
且 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{||\boldsymbol{\alpha}||}$是单位向量，且方向和α相同，将此称为**向量的单位化。**

标准正交基和正交矩阵

标准正交基

正交: 两向量内积为0.（平面向量的垂直的扩展）
正交向量组：n维非零向量组两两正交。

性质：正交向量组线性无关。（垂直当然不可能线性相关）
但是线性无关不一定正交。（没有线性关系不一定垂直，因为可能有非线性的关系）
进一步，如果正交向量组中的向量都是单位向量。则称为**标准（规范）正交基。**

记作 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\delta}_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

如何将**线性无关向量组**化为标准正交基？　**施密特正交化方法**

$$\beta_1=\alpha_1$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$
$$\dots\dots$$
$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\dots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

第一条式子相当于将α_1当作一个基准值。
第二个式子是在β_2中将β_1的影响部分减去。
如此类推。
第s个式子，要将前s-1个向量的影响减去，使得它们可正交。

正交矩阵

定义：如果n阶矩阵Q，有$Q^TQ=E$,则称Q为正交矩阵。（单位矩阵就是正交矩阵）

性质：

1. 矩阵Q为正交矩阵的充要条件是逆和转置相等。
2. 正交矩阵是满秩的，且其行列式为1或-1.
3. 正交矩阵的逆矩阵仍为正交矩阵。
4. 正交矩阵的伴随矩阵仍为正交矩阵。
5. 两个正交矩阵的之积仍为正交矩阵 。

Q为正交矩阵的充要条件是Q的行（列）向量组都是**标准**正交向量组。
每个行向量中的各个分量的平方和都为1，且任意两个行向量内积为0.

实对称矩阵的对角化

定义4.10： 元素为复数的矩阵和向量，称为**复矩阵**和**复向量。**

定理4.14： 实对称矩阵的特征值都是实数。

定理4.15： 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量彼此正交。

求正交矩阵使其对角化

先按一般求法算出使其对角化的特征向量，再将线性无关向量组标准化。（运用施密特正交化法）

第五章 实二次型

2019年11月27日 16:00

实二次型的基本概念

2019年11月27日 16:01

定义

太简单了看书吧还是。

对应系数下标就是对应x下标乘积的系数和 。且有对称性。

可表示成 $f(x_1, \dots, x_n) = x^T A x$

称A是**二次型f的矩阵**。

f也叫对称矩阵A的**二次型**。

对称矩阵的秩称**二次型f的秩**。

定义线性变换与矩阵的合同

定义5.2：若有n维$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$向量。且有对应矩阵使$\boldsymbol{xC} = \boldsymbol{y}$。

则称C为**线性变换矩阵**。

当$|\mathbf{C}| \neq \mathbf{0}$时，称这种变换是**可逆的/非退化的**。

当C是正交矩阵时，称这种线性变换为**正交线性变换**。

将二次型代入则有

$\boldsymbol{x^T A x} = (\boldsymbol{Cy})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A} (\boldsymbol{Cy}) = \boldsymbol{y^T} (\boldsymbol{C^T AC})\boldsymbol{y}$

由于A是实对称矩阵，则$\boldsymbol{C^T AC}$也是实对称矩阵，且是一个以y为变量的二次型矩阵。

经过一个可逆的线性变换后，二次型依然是二次型。

定义5.3：若存在，n阶可逆矩阵（行列式不为0）C，有

$$B = C^T A C$$

则称，A与B是**合同的**，或A合同与B，记作$A \simeq B$.

合同也是矩阵的一种关系。同样具有反身性，对称性，传递性。

Tips：当所用的可逆线性变换是正交变换时，矩阵合同和矩阵相似是等价的。

若是正交矩阵：C的转置和逆相等。通过定义考虑。故合同和相似是等价的。

定理5.1：任意实对称矩阵必合同于对角矩阵。

记得有实对称矩阵必可相似对角化，即有 $P^{-1}AP = B$

又因为B此时可以是一个对角矩阵，而且P矩阵可以正交化。故有$P^T = P^{-1}$。

所以也就有$P^T AP = B$.

所以有A合同于B，且B是一个对角矩阵。

二次型的标准形

2019年11月27日　　16:01

标准形：二次型的矩阵只有对角元素是非零的。

用正交变换法化二次型为标准形

首先二次型矩阵必定是一个实对称矩阵。

所谓的正交法，就是求该矩阵的特征值，特征向量。来化成一个对角矩阵（主对角是特征值）。

求它的特征向量组正交后的正交矩阵。

最后补上转化后的二次型标准形。

用配方法化二次型为标准形

就是凑完全平方。找出线性关系。

直接含有平方项的话，就用平方项凑。

没有平方项的话，要先进行一步变换。

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \end{cases}$$

i，j就是两个特殊值而已。

用初等变换法化二次型为标准形

类似于分块矩阵求逆的方法。

构造除法的分块矩阵。

进行初等列变换，当分子上的原矩阵变成对角矩阵时，分母上的单位矩阵也就称为了要求的可逆矩阵P。

对分子进行对应的行列两种变换，对分母只进行列变换。

对应的两种行列变换，互为转置。

二次型的规范形与惯性定理

2019年11月27日 16:01

主要利用惯性定理来判断矩阵是否合同。

标准形的二次型是只有平方项，且每项系数为特征值。
而规范型则是在次基础上进一步变换，使系数都为1或-1。

正负惯性指数即为A的正负特征值个数。

惯性定理：任意一个秩为r的实对称矩阵A与对角矩阵 $\begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O_{n-r} \end{bmatrix}$ 合同。

E_p是正惯性系数构成的对角矩阵。
$-E_{r-p}$是负惯性指数构成的对角矩阵。
O_{n-r}是其余的也就是系数为0构成的对角矩阵。

利用惯性定理可得到实对称矩阵合同的判别方法。
定理5.4： 对于实对称矩阵AB，其合同的**充要条件**是 AB具有相同的秩和相同的正惯性系数。

正定二次型和正定矩阵

2019年11月27日 16:02

定义5.7: 特征值都为正数的二次型称为**正定二次型**。

二次型矩阵也叫**正定矩阵**。

定理5.6: 实二次型为正定的充要条件是它的标准型系数都为1，也就是正惯性指数和为n（共有n个未知数）。

与实二次型的正定性等价的命题:

1. $f = x^T Ax$是正定二次型（或A是正定矩阵）。
2. 矩阵A的特征值均大于0.
3. A与同阶单位矩阵合同。（因为有相同个数的正惯性系数，也就是特征值都大于0，也有相同的秩。）
4. 存在可逆矩阵P，使 $A = P^T P$.

   由3可知， $E = P^T A P$(合同的定义)

定理5.8：若A是正定矩阵，则

(1) A的主对角元都大于0.

(2) $|A| > 0$。

定义5.8: 按顺序数k行k列构成的行列式，为原矩阵的k阶**顺序主子式。**

定理5.9: 二次型正定的充要条件是二次型的矩阵A的全部顺序主子式均大于0.（从1到n）n为A的阶数。

正定矩阵的逆矩阵也是正定矩阵。

定义5.9: 对于任意x

1. 若恒有$f = x^T Ax > 0$, 则A是正定矩阵。
2. 若恒有$f = x^T Ax \geq 0$, 则A是半正定矩阵。
3. 若恒有$f = x^T Ax < 0$, 则A是负定矩阵。
4. 若恒有$f = x^T Ax \leq 0$, 则A是半负定矩阵。
5. 除了上述情况，则称f是不定二次型。

定理5.10: 下列命题等价

(1) f是负定二次型

(2) f的负惯性指数p = n。

(3) A的特征值均小于0.

(4) A的奇数顺序主子式全小于0，偶数顺序主子数全大于0.