Электрические вопросы

Open Source

Июнь 2020

Содержание

1 Дайте определение точечного заряда. 9

2 Фундаментальные свойства заряда. Закон сохранения заряда. 9

3 Сформулируйте закон Кулона. 11

4 Дайте определение напряженности электрического поля. 12

5 Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей. 12

6 Дайте определение потока напряженности электрического поля. 13

7 Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса. 14

8 Напряженности электростатических полей равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости. 15

9 Запишите граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля. 17

10 Как связана с плотностью заряда дивергенция вектора напряженности электрического поля? 18

11 Запишите формулы для напряженности электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда. 19

12 Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда. 19

13 Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля. 20

14 Приведите примеры эквипотенциальных поверхностей. 20

15 Что такое электрический диполь? Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя? 21

16 Дайте определение электрического дипольного момента нейтральной системы зарядов. 22

17 Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов. 23

18 Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля? Приведите доказательство для системы точечных зарядов. 24

19 Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля. 25

20 Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника? Приведите доказательства утверждений. 26

21 Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов? 27

22 Плоский конденсатор и его электроемкость. 27

23 Как рассчитать емкость батареи конденсаторов? 27

24 Дайте определение вектора электрической поляризации. 28

25 Что такое электрическая индукция поля? 29

26 Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и дифференциальной формах. 29

27 Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют? 30

28 Материальные уравнения для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость. 30

29 Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда. 31

30 Энергия системы непрерывно распределенных зарядов (формула). 31

31 Запишите формулы для энергии электростатического поля и ее объемной плотности. 32

32 Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле. 33

33 Дайте определения силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними? 34

34 Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах. 35

35 Условие стационарности тока. Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма. 35

36 Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника. 36

37 Как рассчитать сопротивление батареи проводников (формулы, рисунки)? 37

38 Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма. 37

39 Сформулируйте правила Кирхгофа. Убедите экзаменатора в умении их применять. 37

40 Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих ЭДС. 39

41 Запишите закон взаимодействия элементов тока – закон Ампера. 39

42 Что такое вектор магнитной индукции поля? Запишите закон Био-Савара-Лапласа. 39

43 Чему равна индукция магнитного поля прямого бесконечного провода с током? 40

44 Сформулируйте теорему о циркуляции магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах. 40

45 Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах. 41

46 Что такое векторный потенциал. Как он связан с магнитной индукцией. Условие калибровки. 41

47 Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током? 41

48 Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле? 41

49 Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях. 42

50 Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея и правило Ленца. 42

51 В чем заключается явление самоиндукции? 42

52 Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность)? 43

53 В чем заключается и чем характеризуется явление взаимной индукции? 43

54 Запишите формулы для энергия магнитного поля и ее объемной плотности. 44

55 Энергия системы замкнутых контуров с током (формула). 44

56 Молекулярные токи и вектор намагниченности. Магнитные свойства у различных материалов. 44

57 Дайте определение вектора напряженности магнитного поля. 46

58 Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (в интегральной и дифференциальной формах). 46

59 Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проница-

емость вещества. 46

60 Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля. 47

61 Что такое ток смещения? 47

62 Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме. 48

63 Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме. 48

64 Сколько решений имеет система уравнений Максвелла. Ответ обоснуйте. 49

65 Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова-Пойнтинга. 49

66 Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла. 49

67 Что такое плоская волна? 50

68 Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне 51

69 Чему равна плотность потока энергии электромагнитной волны? 51

70 Обоснуйте возможность введения скалярного и векторного потенциалов нестационарного электромагнитного поля. 51

71 Запишите условия калибровки Лоренца 51

72 Запишите уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля. 52

73 Какой вид имеют решения уравнения для векторного и скалярного потенциаловэлектромагнитного поля. 52

74 Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля электронейтральной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее 52

75 Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов на больших расстояниях от нее. 53

76 Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее 53

77 Чему равна средняя мощность, излучаемая электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее 54

78 Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов. 54

79 Приведите примеры расчета тока в электрических цепях при переходных процессах (RCи RL-цепи). 54

80 Собственные колебания в колебательном контуре. Амплитуда и начальная фаза при гармонических колебаниях. 55

81 Уравнение затухающих колебаний и его решение, время затухания. 56

82 Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы. 56

83 Формулы для амплитуды и фазы. 58

84 Резонанс токов и напряжений. Приведите примеры. 58

85 Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд (описание, обоснование, пример) 58

86 Что такое эффективные значения силы тока и напряжения? Запишите формулу для мощности переменного тока. 58

87 В чем заключается скин-эффект. Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях. 59

88 Запишите закон сохранения заряда с помощью четырехмерного вектора плотности тока. 59

89 Запишите уравнение, связывающее четырехмерный вектор потенциала с четырехмернымвектором плотности тока. 60

90 Запишите с помощью тензора электромагнитного поля уравнения Максвелла 61

91 Запишите закон преобразования напряженности электрического и индукции магнитного поля при переходе от одной инерциальной системе отсчета к другой при преобразованиях Лоренца. 61

92 Перечислите инварианты электромагнитного поля. 62

1 Дайте определение точечного заряда.

Назад в содержание — Δ
Точечный заряд - заряд, размерами носителя которого по сравнению с расстоянием, на котором рассматривается электростатическое взаимодействие, можно пренебречь.

2 Фундаментальные свойства заряда. Закон сохранения заряда.

Δ Заряд — это источник и объект действия электромагнитного поля.
Фундаментальные свойства заряда:

1. Заряд существует в двух видах: *положительный* и *отрицательный*. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.

2. В природе отрицательных зарядов столько же, сколько положительных. Возникновение заряженных тел обусловлено не рождением зарядов, а их перераспределением (возникающим, например, при трении).

3. В СИ единица измерения заряда — Кулон: $[q] =$ Кл.

4. Минимальный положительный заряд равен $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл (*элементарный заряд*). Минимальный отрицательный заряд - заряд электрона. Он равен элементарному заряду, взятому с противоположным знаком.

5. Величина заряда может принимать только дискретные значения, то есть любой заряд q кратен элементарному : $q = n \cdot e$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. В любой электрически изолированной системе тел алгебраическая сумма зарядов этих тел не изменяется во времени *(закон сохранения заряда)*.

7. Заряд является релятивистским инвариантом — его величина не зависит от системы отсчета и скорости.

Закон сохранения заряда — в изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех тел остается постоянной:

$$q_1 + \ldots + q_n = const$$

Закон сохранения заряда

1. Электроны и протоны — частицы с бесконечным временем жизни, их заряды инвариантны при переходе от одной инерциальной системы координат к другой и не зависят от скорости

2. При любом процессе взаимопревращения частиц их суммарный заряд до взаимодействия равен суммарному заряду после взаимодействия.

З.С.З может быть представлен в виде двух формулировок: **интегральной** и **дифференциальной**.

Исходя из З.С.З. как из экспериментального факта, выразим его в виде утверждения о том, что изменение заряда в некотором объёме может произойти только в результате втекания или вытекания заряда через замкнутую поверхность S, ограничивающую объём. Сие является **интегральной формулировкой**.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV = -\oint\limits_S \vec{j} d\vec{S} \;\Big|\; \text{Где } \vec{j} \text{ — вектор плотности тока.}$$

Знак "минус" учитывает то, что если положительный заряд внутри объёма уменьшается, то плотность тока направлена из объема V.

В этой формуле объем и поверхность постоянны, следовательно, производную по времени можно внести под интеграл. Правую же часть можно по формуле Гаусса-Остроградского преобразовать в интеграл по объёму.

$$\oint\limits_S \vec{j} d\vec{S} = \int\limits_V div\vec{j} dV$$

Перенося вправо, получаем:

$$\int\limits_V (\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}) dV = 0$$

Что справедливо для любого объёма. По очевидным причинам подынтегральное выражение равно нулю (если не равно, то в маленьком объёме около точки оно сохраняет знак $\Rightarrow$ интеграл не будет равен нулю, противоречие).

Тогда переписываем равенство как:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Что является выражением З.С.З. в **дифференциальной форме**. Также оно называется уравнением непрерывности.

3 Сформулируйте закон Кулона.

$\triangle$ **Закон Кулона** — силы взаимодействия неподвижных точечных зарядов в вакууме направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды, прямо пропорциональны произведению модулей зарядов q_1, q_2 и обратно пропорциональны квадрату расстояния r между ними:

$$\vec{F_{12}} = k \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

Где	F_{12}	—	Сила, с которой заряд 1 действует на заряд 2;
	r_{12}	—	Радиус-вектор, направленный от заряда 1 к заряду 2;
	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	—	$\approx 9 * 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ — Коэффициент пропорциональности.
	ϵ_0	—	Электрическая постоянная, примерно равная $8.85 \cdot 10^{-12}$

Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы.

Для того, чтобы закон был верен, необходимы:

1. **Точечность зарядов**, то есть расстояние между заряженными телами должно быть много больше их размеров. (Впрочем, можно доказать, что сила взаимодействия двух объёмно распределённых зарядов со сферически симметричными непересекающимися пространственными распределениями равна силе взаимодействия двух эквивалентных точечных зарядов, размещённых в центрах сферической симметрии;)

2. Их **неподвижность**. Иначе вступают в силу дополнительные эффекты: магнитное поле движущегося заряда и соответствующая ему дополнительная сила Лоренца, действующая на другой движущийся заряд;

3. Расположение зарядов в **вакууме**.

4 Дайте определение напряженности электрического поля.

$\triangle$ **Напряженность электрического поля** $\vec{E}$ — силовая характеристика электрического поля. Для измерения напряженности поля в данную точку помещают небольшой по величине (пробный) неподвижный заряд q_0 и определяют силу $\vec{F}$, действующую на него со стороны поля. Так как сила пропорциональна заряду (экспериментальный факт), *напряженность поля* в данной точке определяется как отношение силы, действующей на заряд в поле, к самому заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Пробный заряд должен быть небольшим, чтобы он не оказывал заметного действия на заряды, создающие электрическое поле.
Размерность напряженности в системе СИ: $[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$ (В — вольт, единица измерения электрического напряжения.)

Часто внесение заряда в точку сопровождается изменением напряженности поля в ней. В таком случае действие одного заряда на другой разделено на два этапа:

1. Точечный заряд создаёт в окружающем его пространстве электрическое поле, напряженность которого равна:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|r|^2}\frac{\vec{r}}{|r|}$$

Где	$\vec{r}$	—	Радиус-вектор, проведённый из точки нахождения заряда до точ в которой определяется напряженность;
	q	—	Пробный заряд.

2. Точечный заряд q, находящийся в точке поля с напряженностью $\vec{E}$, испытывает со стороны этого поля действие силы $\vec{F} = q\vec{E}$

5 Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

$\triangle$ Принцип суперпозиции является следствием эксперимента и заключается в том, что:

- Сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется в присутствии других зарядов.
- Сила, действующая на точеченый заряд со стороны двух других точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов при отсутствии другого.
- Сила, действующая на точечный заряд со стороны нескольких точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов при отсутствии остальных.

При наличии зарядов q_1 и q_2, сила F_3, действующая на заряд q_3 равна:

$$F_3 = F_{13} + F_{23} = q_3 E_{13} + q_3 E_{23}$$

Где E_{13} и E_{23} — напряженности поля, создаваемого первым и вторым зарядом, когда нет второго и первого соответственно.

Сила F_3 является свидетельством о наличии в точке нахождения заряда q_3 электрического поля с напряженность. E_3

Переписывая равенство, получаем:

$$E_3 = E_{13} + E_{23}$$

- Напряженность поля двух зарядов равна сумме напряженностей, создаваемых каждым из зарядов при отсутствии другого.

Очевидным образом принцип суперпозиции обобщается на случай многих зарядов:

- Напряженность поля любого числа точечных зарядов равна сумме напряженностей полей каждого из точечных зарядов при отсутствии всех других.

Разумеется, все силы и напряженности являются векторами. Суммы сил и напряженностей — это векторные суммы.

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

6 Дайте определение потока напряженности электрического поля.

Δ

Для начала определим **элементарный поток вектора напряженности электрического поля** — это физическая величина, численно равная произведению модуля вектора $\vec{E}$, площади dS и косинуса угла между вектором и нормалью к площадке, т.е. скалярное произведение вектора $\vec{E}$ и вектора $d\vec{S}$.

$$d\Phi_E = (\vec{E}, d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos\alpha \tag{1}$$

Тогда полный поток вектора напряженности электрического поля через S равен:

$$\Phi_E = \int\limits_S d\Phi_E = \int\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S} \tag{2}$$

Поток электрического поля может быть интерпретирован в терминах **силовых линий** — как *количество силовых линий, что проходят через площадку.*

Силовой линией электрического поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности $\vec{E}$. Они начинаются там, где $\operatorname{div}\vec{E} > 0$ и оканчиваются там, где $\operatorname{div}\vec{E} < 0$. Из-за этого положительные заряды принято называть *источниками* напряженности электрического поля, а отрицательные — *стоками.* Однако это различие между зарядами абсолютно условно и их роль в образовании поля абсолютно одинакова.

7 Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса.

Электростатическая теорема Гаусса устанавливает связь между потоком напряженности поля через электрическую поверхность и зарядом в объеме, ограниченным этой поверхностью.

Она гласит, что поток вектора напряжённости электрического поля через любую произвольно выбранную замкнутую поверхность пропорционален заключённому внутри этой поверхности электрическому заряду.

1. В интегральной форме:

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} \quad \text{— для дискретного распределения заряда}$$
$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{S}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{— для непрерывного распределения заряда}$$

Где $Q = \int\limits_V \rho dV$ — полный заряд, заключённый в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью S.

2. В дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{E} \equiv \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Здесь ρ — объёмная плотность заряда, ∇ — оператор набла.

Теорема Гаусса позволяет определить полный заряд, заключенный внутри объема, посредством измерения потока напряженности сквозь поверхность, ограничивающую объем.

8 Напряженности электростатических полей равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости.

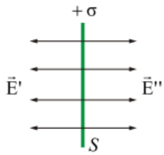
Δ

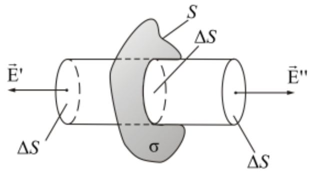
1. **Поле заряженной сферы**.
Внутри сферы заряды отсутствуют. Так что, по теореме Гаусса, поле внутри сферы отсутствует. Рассмотрим теперь сферу радиуса r больше радиуса оболочки R. Во всех точках этой сферы вектор напряженности направлен вдоль нормали к поверхности, а его модуль постоянен. Поэтому поток вектора напряженности через сферу равен произведению модуля напряженности на площадь сферы: $\varPhi_E = 4\pi r^2 \cdot E$. По теореме Гаусса этот поток равен заряду сферы, деленному на электрическую постоянную: $\varPhi_E = \dfrac{Q}{\epsilon_0}$. Приравниваем и получаем: $E = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Итоговый ответ:

$$E = \begin{cases} 0, & r < R; \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R. \end{cases}$$

2. **Поле бесконечной пластины**.
Пусть плоскость имеет бесконечную протяженность и заряд на единицу пло-

щади равен σ. Из симметрии следует, что поле направлено всюду перпендикулярно плоскости, и если не существует никаких других внешних зарядов, то поля по обе стороны плоскости должны быть одинаковы. Ограничим часть заряженной плоскости воображаемым цилиндрическим ящиком, таким образом, чтобы ящик рассекался пополам и его образующие были перпендикулярны, а два основания, имеющие площадь S каждое, параллельны заряженной плоскости. Суммарный поток вектора напряженности равен вектору $\vec{E}$, умноженному на площадь S первого основания, плюс поток вектора $\vec{E}$ через противоположное основание. Поток напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, т.к. линии напряженности их не пересекают. Таким образом: $\Phi_E = 2ES$. С другой стороны, по теореме Гаусса, поток равен: $\Phi_E = \dfrac{q}{\epsilon_0} = \dfrac{\sigma S}{\epsilon_0}$. Приравниваем и получаем итоговое значение поля:





$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

9 Запишите граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля.

Δ **Граничными условиями** называется связь между векторами поля по разные стороны поверхности, разграничивающей две области.

Выделим на поверхности проводника элемент поверхности ΔS и построим прямой цилиндр высотой h, который пересекает поверхность.

Применим к нему т. Гаусса:

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

В пределе $h \to 0$ боковая компонента потока стремится к нулю, следовательно:

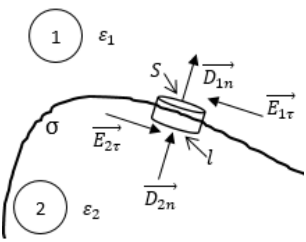
$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = \vec{E}_n \Delta S$$

Тогда мы можем сказать о том, что:

$$E_n \Delta S = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Положительным направлением нормали в теореме Гаусса считается внешная нормаль к замкнутой поверхности. В нашем случае положительная нормаль направлена во внешнюю сторону от поверхности проводника.

В случае наличия электрической индукции, мы говорим о том, что:



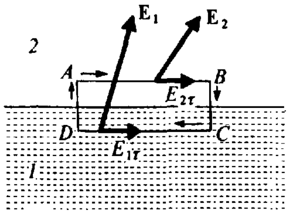
Для нормальной компоненты по теореме Гаусса:

$$(D_{2n} - D_{1n}) \cdot S = \sigma S$$

$$\epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_0 \epsilon_1 E_{1n} = \sigma$$

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Для тангенциальной компоненты:



По теореме о циркуляции $\oint\limits_{ABCDA} \mathbf{E}{\cdot}d\mathbf{l} = 0$. Интегралы по участкам BC и DA сколь угодно малы, так как AB и CD расположены бесконечно близко к поверхности раздела. Знаки интегралов по AB и CD противоположны ввиду того, что пути интегрирования проходят в противоположных направлениях. Поэтому $E_{1\tau} = E_{2\tau}$

10 Как связана с плотностью заряда дивергенция вектора напряженности электрического поля?

Δ

Поток $\vec{E}$ сквозь замкнутую поверхность можно преобразовать в интеграл по объему с помощью формулы Гаусса-Остроградского:

$$\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{E}dV$$

В результате чего электростатическая теорема Гаусса для непрерывного распределения зарядов принимает вид:

$$\int\limits_V (\operatorname{div}\vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0})dV = 0$$

Равенство нулю выполняется для произвольного объема. Отсюда следует, что подынтегральное выражение тождественно равно нулю.

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Это выражение является также дифференциальной формулировкой теоремы Гаусса (потому что его выполнимость обусловлена её справедливостью). В нашем случае оно выведено для неподвижного распределения зарядов, однако принимается, что оно справедливо для произвольного движения зарядов.

11 Запишите формулы для напряженности электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.

Δ

По принципу суперпозиции для напряженности поля совокупности дискретных источников имеем:

$$\vec{E} = \sum_l \vec{E_l}, \text{ где каждое } \vec{E_l} = \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r_l})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r_l}|^3},$$

$$\text{Тогда } \vec{E} = \sum_l \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r_l})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r_l}|^3}$$

Для непрерывного распределения аналогично:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r'})(\vec{r} - \vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3} dV$$

Где	V	—	Область пространства, где расположены заряды;
	$\vec{r}$	—	Радиус-вектор точки, в которой считаем напряженность;
	$\vec{r'}$	—	Радиус-вектор источника, пробегающий все точки области V при интегрировании;
	dV	—	Элемент объема.

12 Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.

Δ Если имеется система N дискретных зарядов, то с учетом формулы напряженности поля системы дискретных точечных зарядов и принципа суперпозиции:

$$\left(\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\right)$$

Потенциал создаваемого этими зарядами поля равен $\varphi(\mathbf{r}) = k\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$

В случае **непрерывного распределения заряда** по аналогии с формулой напряженности поля, создаваемого зарядами, непрерывно распределенными по поверхности и объему заряженных тел

$$\left(\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot dV\right)$$

для потенциала получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = k\int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot dV$$

Производная от потенциала по декартовой координате дает соответствующую компоненту напряженности электрического поля. Очевидно, что напряженность не может быть бесконечной. Следовательно, производные по координатам от потенциала конечные. Таким образом, потенциал является непрервной и конечной функцией с конечными производными по координатам. Эти условия важны при решении дифференциальных уравнений для потенциала (Пуассона и Лапласа в частности).

13 Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля.

△ Дифференциальной формулировка условия потенциальности электростатического поля является равенство нулю ротору вектора напряженности поля в каждой точке, т.е.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если напряженность представить в виде формулы ниже. Знак в ней выбран так, что напряженность направлена в сторону убывания скалярного потенциала.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

14 Приведите примеры эквипотенциальных поверхностей.

△ **Эквипотенциальная поверхность** — это поверхность, на которой скалярный потенциал данного потенциального поля принимает постоянное значение.

Другое, эквивалентное определение — поверхность, в любой своей точке ортогональная силовым линиям поля.
Первый пример: используя второе определение, ставим положительный заряд, рисуем расходящиеся силовые линии, потом перпендикулярно силовым линиям рисуем концентрические окружности. Эти окружности и будут эквипотенциальными поверхностями.

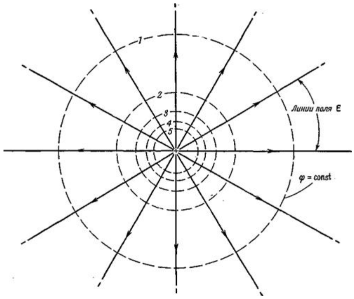


Рис. 1: Пример с одиночным зарядом. Указаны линии поля E (прямые) и линии равного потенциала (пунктир).

Второй пример: Проводник в состоянии электростатического равновесия — эквипотенциален по всему объему (в том числе и по поверхности).
**Электростатические системы достигают равновесия, когда между частями системы нет электрического тока (нет потока зарядов).*

15 Что такое электрический диполь? Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя?

△ **Электрический диполь** — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов (q^+, q^-), расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.
Дипольный момент диполя определяется, как:

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Где	$\vec{l}$	—	Вектор, проведённый из отрицательного заряда в положительны (плечо диполя)
	q	—	Модуль заряда

Напряженность поля диполя в произвольной точке (согласно принципу суперпозиции):

$$\vec{E} = \vec{E_+} + \vec{E_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{(+)}} - \frac{1}{r_{(-)}}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(+)}r_{(-)}}\right)$$

Где $\vec{E_+}$ и $\vec{E_-}$ — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами.

Так как $l << r$, то можно считать $r_{(-)} - r_{(+)} \approx l\cos\theta$, а $r_{(+)}r_{(-)} \approx r^2$ и охарактеризовать местоположение точки P радиус-вектором r с началом в любой точке диполя, поскольку диполь имеет сколь угодно малые размеры. Тогда так как
$ql\cos\theta = \dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r}$, то:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cdot\cos\alpha}{r^2}$$

Где α - угол между вектором $\vec{p}$ и направлением на точку наблюдения A. Заметим, что если сравнивать между собой потенциал поля точечного заряда и потенциал поля диполя, легко увидеть, что потенциал поля диполя убывает с расстоянием быстрее, чем потенциал поля точечного заряда.

$$\vec{E}(A) = k\left[\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{|r|^5} - \frac{\vec{p}}{|r|^3}\right]$$

16 Дайте определение электрического дипольного момента нейтральной системы зарядов.

Δ

Пусть в некотором объеме V имеется непрерывно распределённый с объемной плотностью ρ заряд, причём в целом объем электрически нейтрален. Однако это не значит, что в каждой точке внутри объема положительный и отрицательный заряд компенсируются. Такое может не происходить, если положительные и отрицательные заряды внутри объема распределены по разным законам.

Математически условие нейтральности объема V имеет вид:

$$\int_V \rho dV = 0$$

Дипольный момент - физическая величина, характеризующая электрические свойства системы заряженных частиц. Дипольный момент системы из n заряженных частиц равен:

$$p = \sum_{i}^{n} q_i r_i$$

Где e_i — Заряд i-той частицы;
r_i — Ее радиус-вектор.

Дипольный момент нейтральной в целом системы зарядов не зависит от выбора начала координат, а определяется относительным расположением (и величинами) зарядов в системе.
В частном случае, нейтральная система из двух зарядов (q^-, q^+) образует электрический диполь с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{q}\vec{\mathbf{l}}$, где $\mathbf{l}$ — радиус-вектор, проведённый от отрицательного заряда к положительному.

При непрерывном распределении зардов дипольный момент определяется следующей формулой:

$$\vec{p} = \int\limits_V \rho \vec{r} dV$$

Где радиус-вектор $\vec{r}$ отсчитывается от любой точки O, принятой за начало отсчета. Напряженность поля нейтральной системы с дипольным моментом $\vec{p}$ определяется формулами для напряженности и потенциала диполя.

17 Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

$\triangle$ Циркуляцией вектора напряженности называется работа, которую совершают электрические силы при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому пути **L**

$$\oint\limits_L \vec{E} d\vec{l} = \oint\limits_L E dl \cos\alpha = \oint\limits_L (\vec{E}, \vec{dl}) = 0$$

Доказательство:

1. Независимость работы от пути при перемещении заряда выражается равенством:
$$\int\limits_{L_1(A,B)} \vec{E}d\vec{l} = \int\limits_{L_2(A,B)} \vec{E}d\vec{l}$$
Где L_1 и L_2 — различные пути между точками A и B.

2. Учтём, что
$$\int\limits_{L_2(A,B)} \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_{L_2(B,A)} \vec{E}d\vec{l}$$

3. Тогда
$$\int\limits_{L_1(A,B)} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{L_2(B,A)} \vec{E}d\vec{l} = \oint\limits_{L} \vec{E}d\vec{l} = 0$$
Где $L = L_1 + L_2$

4. Таким образом получаем, что циркуляция вектора напряжённости равна нулю.

18 Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля? Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

$\triangle$ Ответ: $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$

Доказательство:

1. По доказательству из предыдущего билета, циркуляция вектора напряженности равна нулю.

2. Используя формулу Стокса, получаем, следующий результат:
$$\int\limits_{S} \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S} = \oint\limits_{L} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$
Где S — поверхность, ограничиваемая контуром L.

3. Ввиду произвольности поверхности из предыдущего утверждения следует то, что $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, что и требовалось доказать.

19 Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля.

Δ **Следует из:** $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \end{cases}$ подстановкой $\vec{E}$ в дивергенцию.

Лапласиан определяется как:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Если зарядов нет, то есть $\rho = 0$, то это **Уравнение Лапласа:**

$$\Delta\varphi = 0$$

Решение должно удовлетворять следующим требованиям:

1. Потенциал непрерывен,
2. Конечен,
3. Его производные по координатам конечны.

20 Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника? Приведите доказательства утверждений.

Δ

Напряженность $E = 0$, потенциал $\varphi = const$.
Доказательство:

1. В проводниках имеются свободные заряды, т.е. индукционные заряды разделяются. Для металлов свободными зарядами являются электроны.

2. В равновесии электрическое поле равно нулю $E = 0$ внутри проводника. Если поле не равно нулю в какой-то момент времени, то происходит перераспределение зарядов до создания такой ситуации, когда электрическое поле равно нулю внутри проводника. Отсюда получаем, что $divE = 0$ и, следовательно, объемная плотность зарядов внутри однородного проводника равна тоже нулю.

3. Так как поле $E = 0$, то потенциал $\varphi = const$ — проводник эквипотенциален.

Доказательство при помощи вектора плотности тока:

1. Исходя из дифференциальной формы закона Ома, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

2. В электростатике рассматривается случай неподвижных зарядов, то есть $\vec{E} = 0$

3. Из уравнения $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ при $\vec{E} = 0$ следует, что $\rho = 0$, то есть внутри проводника отсутствуют объемные заряды. Это означает, что заряд проводника концентрируется на его поверхности в слое атомарной толщины (конечно, внутри проводника имеются заряды разного знака, но они взаимно компенсируются и в целом внутренние области проводника нейтральны).

4. Исходя из равенства нулю напряженности, можем судить о константном характере потенциала.

21 Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов?

$\triangle$ Напряженность поля внутри проводника должна быть равна нулю $\vec{E} = 0$, исходя из предыдущего билета.

Напряженность поля на поверхности проводника должна быть перпендикулярна поверхности $\vec{E} = \vec{E_n}$. Следовательно, поверхность проводника при равновесии зарядов является эквипотенциальной.

При равновесии зарядов ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов – все они распределены по поверхности проводника с некоторой плотностью σ.

Рассмотрим замкнутую поверхность в форме цилиндра, образующие которого перпендикулярны поверхности проводника. На поверхности проводника расположены свободные заряды с поверхностной плотностью σ. Так как внутри проводника зарядов нет, то поток $\vec{D}$ через поверхность цилиндра внутри проводника равен нулю. Поток через верхнюю часть цилиндра вне проводника по теореме Гаусса равен:

$$\int \vec{D} d\vec{S} = Q = \sigma S = DS \Rightarrow D = \sigma \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon \epsilon_0.}$$

22 Плоский конденсатор и его электроемкость.

$\triangle$ **Плоский конденсатор** состоит из двух одинаковых пластин (называемых обкладками), разделённых диэлектриком, толщина которого мала по сравнению с размерами обкладок.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \epsilon_0 S}{d}$$

Вывод происходит следующим образом:

1. Пренебрегая краевыми эффектами посчитаем поле между двумя бесконечными пластинами
2. Разность потенциалов это интеграл от напряженнсти по dl от 0 до d
3. Подставляем в $C = \frac{Q}{U}$.

23 Как рассчитать емкость батареи конденсаторов?

$\triangle$ При параллельном соединении напряжение на всех обкладках одинаковое

($U_1 = U_2 = U$), а емкость батареи равняется сумме емкостей отдельных конденсаторов ($C = C_1 + C_2$)

* *это следует из определения емкости системы* $C = \dfrac{Q}{U}$

При последовательном соединении заряд на обкладках всех конденсаторов одинаков ($Q_1 = Q_2$), а напряжение батареи равняется сумме напряжений отдельных конденсаторов ($U = U_1 + U_2$). Емкость всей системы последовательно соединенных конденсаторов рассчитывается из соотношения: $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$ (следует из определения емкости системы $C = \dfrac{Q}{U}$)

24 Дайте определение вектора электрической поляризации.

Δ Диэлектриками называются вещества, в которых под действием электрического поля не возникает перемещения зарядов, как в проводниках (в целом, конечно, они сдвигаются, но не перемещаются на большие расстояния). Внешнее поле стремится сдвинуть положительные заряды в направлении напряженности, а отрицательные — в противоположное. Поэтому в направлении напряженности в диэлектрике образуется избыток положительного заряда, а в противоположном — недостаток. Этот процесс называется **поляризацией**.

Степень поляризации диэлектрика характеризует **вектор поляризации** — векторная физическая величина, равная дипольному моменту единицы объёма вещества, возникающему при его поляризации, количественная характеристика диэлектрической поляризации. Обозначается как $\vec{\mathbf{P}}$, в СИ измеряется в В/м.

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p_i}}{\Delta V}$$

где ΔV - бесконечно малый объем диэлектрика, а $\sum\limits_i p_i$ - сумма дипольных моментов, заключенных в этом объеме молекул.

Для линейного изотропного (восприимчивости по всем направлениям равны) диэлектрика вектор электрической поляризации линейно зависит от напряженности:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

Где χ — диэлектрическая восприимчивость вещества.
Данная формула **не является** определением вектора поляризации, а просто законом связи — одним из материальных уравнений!

В результате поляризации напряженность в диэлектрике ослабляется

25 Что такое электрическая индукция поля?

$\triangle$ **Электрическая индукция** — векторная величина, равная сумме вектора напряжённости электрического поля (умноженного на электрическую постоянную) и вектора поляризации.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Единственным источником $\vec{D}$ являются свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается. В точках без свободных зарядов (включая точки со связанными зарядами) он непрерывен.
Изменения напряженности поля, обусловленные связанными зарядами, уже учтены в самом векторе. Используя материальное уравнение для вектора поляризации, представим $\vec{D}$ в виде:

$$\vec{D} = \epsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

26 Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и дифференциальной формах.

$\triangle$ Поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность пропорционален заключённому внутри этой поверхности свободному электрическому заряду:

Интегральная форма:

$$\varPhi_D = \int\limits_S \vec{D} d\vec{S} = Q$$

Дифференциальная форма:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Важно знать, что за Q и ρ обозначены полная величина ***свободных зарядов*** *и плотность свободных зарядов соответственно,* ***то есть зарядов за исключением индуцируемых при поляризации диэлектрической среды*** *(тогда как в теореме Гаусса для напряженности имелись в виду полный заряд и полная плотность заряда). Совпадают полные величины и их аналоги для свободных зарядов только для случая вакуума.*

Электростатическая теорема Гаусса при наличии диэлекетриков справедлива при любом расположении диэлектриков и граничных поверхностей: часть или весь объем может быть заполнен различными диэлектриками, а поверхность S может проходить как в вакууме, так и пересекать диэлектрики.

27 Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют?

$\triangle$ На границе двух сред векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ удовлетворяют условиям:

1. $D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma$; n — проекция вектора D на нормаль к границе раздела двух сред;
2. $E_{t_1} = E_{t_2}$; t — тангенциальная проекция напряженности.

Данные граничные условия следуют из теоремы Гаусса:
Выделим вблизи границы раздела замкнутую поверхность в виде цилиндра, образующая которого перпендикулярна к границе раздела, а основания находятся на равном расстоянии от границы. В соответствие с теоремой Гаусса:

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = Q, \rightarrow D_{n_1}S - D_{n_2}S = \sigma S$$

Как следствие получаем первое утверждение. Доказательство второго здесь.

28 Материальные уравнения для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость.

$\triangle$

$\vec{D} = \varepsilon\epsilon_0\vec{E}$	—	Следует из подстановки в определение вектора $\vec{D}$ уравнения д
$\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$	—	Для линейных анизотропных сред выполняется всегда;
$\varepsilon = 1 + \chi$	—	По определению.

Диэлектрическая проницаемость ε – линейный коэффициент между вектором напряженности и индукцией электрического поля.
Диэлектрическая восприимчивость (или поляризуемость) вещества χ — физическая величина, мера способности вещества поляризоваться под действием электрического поля.
Диэлектрическая восприимчивость — коэффициент линейной связи между поляризацией диэлектрика P и внешним электрическим полем E в достаточно малых полях: Произведение $\epsilon_0\chi$ называется **абсолютной диэлектрической восприимчивостью.**

29 Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда.

$\mathit{\Delta}$ **Энергия взаимодействия двух зарядов**:

$$W^{'} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1^{'} + q_2\varphi_2^{'})$$

где $\varphi_1^{'}$ - потенциал, создаваемый вторым зарядом в точке первого

Собственная энергия заряда(одного заряда, но не точечного!!):

$$W^{''} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\mathit{\Delta} q_i\varphi_i^{'} = \frac{1}{2}q\varphi_{\text{соб}}$$

где $\varphi_{\text{соб}}$ собственный потенциал: сумма потенциалов взаимодействия всех кусочков друг с другом

30 Энергия системы непрерывно распределенных зарядов (формула).

$\mathit{\Delta}$

$$W = W^{'} + W^{''} = \frac{1}{2}\oint\rho(r)\varphi(r)dr$$

31 Запишите формулы для энергии электростатического поля и ее объемной плотности.

$\varDelta$ **Объемная плотность энергии:**

$$\omega = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D})$$

Энергия электростатического поля:

$$W = \int\limits_V d\omega = \frac{1}{2}\int\limits_V (\vec{E} \cdot \vec{D})dV$$

Что было в лекции Макарова

Энергия системы зарядов:

$$W = W' + W'' = \frac{1}{2}\oint \rho(r)\varphi(r)dr$$

Сейчас будет немного математики, чтобы переписать последнюю формулу без $\rho(r)$. Воспользуемся двумя формулами:

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dv = \oint\limits_S \vec{a}d\vec{s}$$

т.е. интеграл дивергенции по объему есть поток через поверхность, ограничивающую этот объем

$$\operatorname{div}\alpha\vec{b} = \alpha\operatorname{div}\vec{b} + \vec{b}\operatorname{grad}\alpha$$

Возьмем $\vec{a} = \varphi\operatorname{grad}\varphi$, $\alpha = \varphi$ и $\vec{b} = \operatorname{grad}\varphi$ берем первую формулу, все подставляем и вуаля:

$$\int\limits_V (\varphi\varDelta\varphi + (\operatorname{grad}\varphi)^2)dv = \oint\limits_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

если что $divgrad = \varDelta$

Вспоминаем уравнение Лапласа $\varDelta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, и что $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$

$$\int\limits_V (-\varphi\frac{\rho}{\varepsilon_0} + E^2)dv = \oint\limits_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

Покажем, что правая часть стремится к 0 при $V \to \infty$. Ранее мы рассматривали, что:

$$\varphi \sim \frac{1}{r} \text{ при } r \to \infty \text{ если } \sum q_i \neq 0$$

$$\varphi \sim \frac{1}{r^2} \text{ или } \frac{1}{r^3} \text{ при } r \to \infty \text{ если } \sum q_i = 0$$

Собственно, в худшем случае

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^2}, \text{ а } \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^3}$$

при этом $ds = r^2 d\Omega$, следовательно правая часть $\sim \frac{1}{r}, \to 0$ при $V \to \infty$

$$\int\limits_V (-\varphi\frac{\rho}{\varepsilon_0} + E^2)dv = 0$$

Перенесем одно слагаемое в правую часть

$$\int\limits_V E^2 dv = \int\limits_V \varphi\frac{\rho}{\varepsilon_0}dv$$

Из этого равенства уже можем выразить энергию системы зарядов без ρ

$$W = \frac{1}{2}\oint \rho\varphi dr = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint E^2 dr$$

32 Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле.

Δ **Сила**, действующая на диполь в электрическом поле равна сумме сил, приложенных к зарядам диполя, и равна скалярному произведению дипольного момента на градиент напряженности поля.

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E};$$

Момент сил, по определению — векторное произведение радиус-вектора и силы:

$$M = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{p} \times \vec{E}];$$

33 Дайте определения силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними?

Δ

Заряды в объеме движутся с разными скоростями. Их движение приводит к переносу заряда в направлении скорости. В результате этого образуется образуется некоторый средний перенос заряда в этом объеме. Его интенсивность характеризуется **вектором плотности тока**, который определяется формулой:

$$\vec{j} = \frac{1}{\Delta V_{\text{ф}}} \sum_{\Delta V_{\text{ф}}} e_i \vec{v_i}$$

Силой тока в общем случае определяется как физическая величина, равная отношению количества заряда, прошедшего за некоторое время через поперечное сечение проводника, к величине этого промежутка времени в пределе стремления промежутка времени к нулю:

$$I = \lim_{dt \to 0} \left(\frac{dq}{dt} \right) \text{ — } \mathbf{[1\ \ A]}$$

Формулируя при помощи вектора плотности тока:

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S}$$

Модуль вектора плотности тока в данной точке называется **плотности тока** и имеет смысл силы тока, протекающего за единицу площади.

$$|\vec{j}| = \frac{I}{S}$$

Силой тока называется физическая величина, равная отношению количества заряда, прошедшего за некоторое время через поперечное сечение проводника, к величине этого промежутка времени в пределе стремления промежутка времени к нулю:

Плотность тока — векторная физическая величина, имеющая смысл силы тока, протекающего через единицу площади.
Вектор плотности тока — вектор, модуль которого равен плотности тока в данной точке, а направление которого совпадает с направлением движения положительных зарядов в ней.

$$j = q^+ n^+ v^- - q^- n^- v^-,$$

— где q - заряд частиц, n - концентрация, а v - их скорость

В общем случае:

34 Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.

$\triangle$ **Дифференциальная форма:**

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Интегральная форма:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

Уравнение непрерывности можно интерпретировать так: плотность тока — это движение зарядов. Уравнение непрерывности гласит, что если заряд уходит из дифференциального объёма (то есть дивергенция плотности тока положительна), тогда количество заряда внутри объёма уменьшается. В этом случае приращение плотности заряда отрицательно.

35 Условие стационарности тока. Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма.

$\triangle$ Окружим участок проводника, по которому течет ток с плотностью $\vec{j}$, замкнутой поверхностью S. По определению вектора $\vec{j}$, его поток по этой поверхности равен суммарному току I, вытекающему из замкнутой поверхности S. Заряд не может бесследно исчезнуть или возникнуть в какой-либо области. Поэтому при изменении заряда в некоторой области он должен вытекать или втекать в нее, создавая электрический ток. Но если заряды в проводнике перераспределяются (в одной области суммарный заряд уменьшается, а в другой - увеличивается), то изменяются и потенциалы этих областей. А изменение потенциалов со временем приводит к изменению электрического поля. Поэтому и ток I не будет постоянным. Отсюда следует **условие стационарности тока:**

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0, \text{ или же } \oint\limits_S \vec{j}d\vec{S} = 0$$

Закон Ома для участка цепи: $I = \dfrac{U}{R}$
Дифференциальная форма закона Ома для участка цепи: $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$
Доказательство вывода закона Ома из его дифференциальной формы:

$$j = \sigma E \quad \Rightarrow \quad \frac{l \cdot S}{\sigma S} \cdot j = l \cdot E \quad \Rightarrow \quad \frac{l \cdot I}{\sigma S} = l \cdot E = \Delta\varphi = U$$

$R = \dfrac{l}{\sigma S}$ - сопротивление участка цепи, а $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$ называется удельным сопротивлением проводника (участка цепи).
Соответственно, величина $G = R^{-1} = \dfrac{\sigma S}{l}$ называется электропроводностью, а σ - удельной проводимостью.

36 Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника.

Δ **Электрическая проводимость** — способность тела проводить электрический ток, а также физическая величина, характеризующая эту способность и обратная электрическому сопротивлению. В СИ единицей измерения электрической проводимости является сименс. Для отрезка тонкого провода неизменного сечения : $R = \frac{l}{S}$ (l - длина проводника, а S - площадь его сечения).
Удельной проводимостью называют меру способности вещества проводить электрический ток. Согласно закону Ома удельная проводимость является коэффициентом пропорциональности между плотностью возникающего тока и величиной электрического поля в среде: $\vec{j} = \lambda\vec{E}$, где λ — удельная проводимость.
Электрическое сопротивление — физическая величина, характеризующая свойства проводника препятствовать прохождению электрического тока и равная отношению напряжения на концах проводника к силе тока, протекающего по нему. Рассчитывается, как $R = \dfrac{U}{I}$

Удельное электрическое сопротивление, или просто удельное сопротивление вещества характеризует его способность препятствовать прохождению электрического тока. $p = \dfrac{1}{\lambda}$

37 Как рассчитать сопротивление батареи проводников (формулы, рисунки)?

$\triangle$ При **параллельном соединении резисторов** сопротивление складываются величины, обратно пропорциональные сопротивлению, т.е. проводимости $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R2}$.

При **последовательном соединении резисторов** общее сопротивление – просто сумма всех сопротивлений $R = R_1 + R_2$

38 Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.

$\triangle$ Количество теплоты, выделяемое в единицу времени в рассматриваемом участке цепи, пропорционально произведению квадрата силы тока на этом участке и сопротивления участкаого поля.

$$dQ = I^2 R dt$$

$$Q = \int I^2 R dt$$

Мощность тепла, выделяемого в единице объёма среды при протекании постоянного электрического тока, равна произведению плотности электрического тока на величину напряженности электрического поля.

$$\omega = \vec{j}\vec{E} = \sigma E^2$$

39 Сформулируйте правила Кирхгофа. Убедите экзаменатора в умении их применять.

$\triangle$ 1-ое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма всех токов, втекающих в любой узел, равна нулю.

$$\sum_k I_k = 0$$

2-ое правило Кирхгофа: для любого контура сумма произведений алгебраических сил токов на сопротивление соответствующих участков каждого из контуров равна сумме ЭДС, действующих в этих контура. При составлении уравнений следует выбирать независимые контуры.

$$\sum_k I_k R_k = \sum_m \mathscr{E}_m$$

Если в цепи N узлов, то первое правило позволяет записать N - 1 линейно независимое уравнение, поэтому при составлении уравнений один узел (любой) следует исключить.

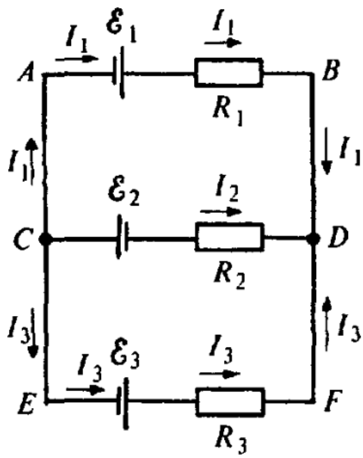


Рис. 2: Пример, с которым мы работаем

Теперь применим эти законы на примере:

1. По второму правилу Кирхгофа:
   (a) $I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$ (контур ABDCA)
   (b) $I_2 R_2 + I_2 r_2 - I_3 R_3 - I_3 r_3 = -\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3$ (контур CDFEC)
   (c) $I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_3 r_3 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3$ (контур ABFEA)
2. По первому правилу Кирхгофа:
   (a) $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (узел C);
   (b) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (узел D).

Нужно сказать сразу после правил, но места не хватило:

1. Направление положительного обхода во всех контурах следует выбрать одинаковым.
2. При составлении суммы сил токов, изображаемых стрелками с направлением от узла, берутся, например, со знаком "минус а с направлением к узлу — со знаком "плюс". Можно наоборот, однако это никак не изменит уравнений.

40 Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих ЭДС.

$\triangle$ Закон Ома для полной цепи записывается в виде

$$(R+r)I=\varepsilon$$

$$I\Delta t(R+r)I=\varepsilon I\Delta t$$

$$I^2\Delta tR+I^2\Delta tr=\frac{\Delta A_{e_x}}{\Delta q}\Delta q$$

Первый член в левой части $I^2\Delta tR$ тепло, выделяющееся на внешнем участке цепи за время Δt, второй член $I^2\Delta tr$ – тепло, выделяющееся внутри источника за то же время A_{e_x} – – работа сторонних сил.

41 Запишите закон взаимодействия элементов тока – закон Ампера.

$\triangle$ Сила $d\vec{F}$ с которой магнитное поле действует на элемент $d\vec{l}$ проводника с током,

находящегося в магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике и векторному произведению элемента длины $d\vec{l}$ проводника на магнитную индукцию $\vec{B}$:

$$d\vec{F}=I[d\vec{l},\vec{B}]$$

42 Что такое вектор магнитной индукции поля? Запишите закон Био-Савара-Лапласа.

$\triangle$ **Магнитная индукция** — векторная величина, являющаяся силовой характеристикой магнитного поля (его действия на заряженные частицы) в данной точке пространства.
Более конкретно — это вектор $\vec{B}$ такой, что сила Лоренца $\vec{F}_л$, действующая на движущийся со скоростью $\vec{v}$ заряд q, равна:

$$\vec{F}_л=q[\vec{v}\times\vec{B}]$$

Измеряется в Тл. $1\text{ Тл}=\dfrac{1\text{ Н}}{1\text{ А}\cdot 1\text{ м}}$

Закон Био-Савара-Лапласа Пусть постоянный ток течёт по контуру (провонику), находящемуся в вакууме, $\vec{r}$ вектор до точки, в которой ищется вектор магнитной индукции, создаваемый элементом проводника $d\vec{l}$, тогда

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{B} = \int\limits_L d\vec{B} = \int\limits_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{|r|^3} dV$$

где μ_0 - это магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{A^2}$

43 Чему равна индукция магнитного поля прямого бесконечного провода с током?

Δ

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

где r - расстояние до проводника

44 Сформулируйте теорему о циркуляции магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.

Δ **Интегральная форма:** Циркуляция магнитного поля постоянных токов по всякому замкнутому контуру пропорциональна сумме сил токов, пронизывающих контур циркуляции.

$$\oint\limits_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int\limits_S \vec{j} d\vec{s}$$

Дифференцильная форма:

$$rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

45 Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.

$\triangle$ **В интегральной форме:** Суммарный поток Φ_B вектора через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\Phi_B = \oint\limits_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Дифференциальная форма:

$$div\vec{B} = 0$$

46 Что такое векторный потенциал. Как он связан с магнитной индукцией. Условие калибровки.

$\triangle$ Векторный потенциал $\vec{A}$ – такая величина, что $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})d\vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Условие калибровки:

$$\operatorname{div} A = 0$$

47 Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током?

$\triangle$

$$\vec{B} = \int dB_{||} = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi r^3}\int\limits_0^{2\pi} dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}$$

где $r = \sqrt{R^2 + a^2}$, где a – расстояние до плоскости с витком.

48 Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле?

$\triangle$ На элемент тока dl в магнитном поле действует сила $\vec{df} = kI[\vec{dl}, \vec{B}]$, где k – коэффициент пропорциональности, I – сила тока, B – магнитная индукция в том месте, где помещается элемент dl. Величина этой силы считается по формуле $dF = kIBdlsin(\vec{dl}, \vec{B})$;

Момент силы $\vec{M} = kI \cdot [\vec{r} \times [\vec{dl}, \vec{B}]]$

49 Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях.

$\triangle$ **Сила Лоренца** — это сила, которая действует на заряженную частицу, движущуюся с определенной скоростью в магнитное поле. Величина этой силы зависит от величины магнитной индукции магнитного поля B, электрического заряда частицы q и скорости v, с которой частица падает в поле.

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

В постоянном электрическом поле сила Лоренца действует параллельно направлению вектора $\vec{E}$, поэтому заряд будет перемещаться вдоль прямой, а в постоянном магнитном поле сила Лоренца направлена перпендикулярно векторам $\vec{B}$ и $\vec{v}$. Так как направление вектора $\vec{v}$ будет меняться из-за действия силы, направленной не параллельно вектору $\vec{v}$, заряд будет описывать окружность в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$.

50 Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея и правило Ленца.

$\triangle$ Явление электромагнитной индукции заключается в том, что изменение магнитного потока, пронизывающего замкнутый проводящий контур, порождает в этом контуре эдс индукции. **Закон Фарадея:** Для любого замкнутого контура индуцированная электродвижущая сила (ЭДС) равна скорости изменения магнитного потока, проходящего через этот контур.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Правило Ленца определяет направление индукционного тока и гласит: Индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток. (поэтому в верхней формуле стоит минус)

51 В чем заключается явление самоиндукции?

$\triangle$ Если изменение магнитного потока через замкнутый проводящий контур связано с изменением силы тока в контуре, и , как следствие, с изменением индукции магнитного поля, порождаемого этим током, то говорят о самоиндукции. Величина ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения силы тока I:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

Коэффициент пропорциональности L называется коэффициентом самоиндукции или индуктивностью контура (катушки).

52 Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность)?

Δ Индуктивность (или коэффициент самоиндукции) — коэффициент пропорциональности между электрическим током, текущим в каком-либо замкнутом контуре, и магнитным потоком, создаваемым этим током через поверхность, краем которой является этот контур.
$\varphi = LI$
φ — магнитный поток, I — ток в контуре, L — индуктивность. Через индуктивность выражается ЭДС самоиндукции в контуре, возникающая при изменении в нём тока:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

Из этой формулы следует, что индуктивность численно равна ЭДС самоиндукции, возникающей в контуре при изменении силы тока на 1 А за 1 с. В системе единиц СИ индуктивность измеряется в генри(Гн).

53 В чем заключается и чем характеризуется явление взаимной индукции?

Δ Взаимоиндукция (взаимная индукция) — явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре при изменении силы тока во втором контуре и наоборот.

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L\frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L\frac{dI_2}{dt}$$

Взаимоиндукция — частный случай электромагнитной индукции. Явление взаимоиндукции применяется для повышения и понижения напряжения переменного тока в трансформаторах.

54 Запишите формулы для энергия магнитного поля и ее объемной плотности.

$\triangle$ **Энергия магнитного поля проводника с током**

$$W = \frac{LI^2}{2}, \text{при наличии магнетиков} - W = \frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}dV$$

Эта формула определяет энергию магнитного поля, создаваемого током силы I, текущим по контуру с индуктивностью L.
Плотность при наличии магнетиков:

$$\omega = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}$$

Плотность

$$B = \mu\mu_0\frac{IN}{l}$$

$$H = \frac{IN}{l}$$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}BHSl \Rightarrow \omega = \frac{BH}{2}$$

55 Энергия системы замкнутых контуров с током (формула).

$\triangle$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij}I_iI_j, \text{где } L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{L_i}\int\limits_{L_k}\frac{d\vec{l_i}d\vec{l_k}}{r_{ik}}, (i \neq k)$$

56 Молекулярные токи и вектор намагниченности. Магнитные свойства у различных материалов.

$\triangle$

Вектор намагниченности J - это магнитный дипольный момент единицы объёма.

Модель молекулярных токов Ампера:
В веществе циркулируют микроскопические замкнутые токи — молекулярные. При отсутствии внешнего магнитного поля их орбиты ориентированы

хаотически и суммарный магнитный момент равен нулю — вещество не проявляет магнитных свойств. Суммарный молекулярный ток через $dS = 0$.
При помещении вещества в магнитное поле магнитные моменты молекулярных тогов ориентируются вдоль поля - происходит намагничивание. Молекулярные токи ориентируются, что приводит к появлению макроскопических токов.
Рассмотрим элемент магнетика в виде скошенного цилиндра с длиной боковой стороны dl и площадью основания S. Если в намагниченном состоянии все дипольные моменты p_{mi} атомов выстроились вдоль единичного вектора $n_0 \perp S$, то сумма всех микротоков будет эквивалентна поверхностному молекулярному току $dI_{\text{мол}}$, протекающему по боковой поверхности цилиндра. Тогда магнитный дипольный момент фрагмента будет равен:

$$d\vec{p_m} = dI_{\text{мол}} \cdot S \cdot n_0 = \vec{J} \cdot dV = \vec{J} \cdot S \cdot cos\alpha$$

Отсюда получаем, что $dI_{\text{мол}} = \vec{J} \cdot \vec{dl}$ и что $\vec{J} = \frac{dp_m}{dV}$ в случае вещества.

Магнитные свойства у различных материалов
Как показывает опыт, в слабых магнетиках намагниченность пропорциональна индукции магнитного поля

$$\vec{J} = \frac{const}{\mu_0} \vec{B}$$

Однако исторически так сложилось, что принято описывать связь между намагниченностью вещества и напряженностью магнитного поля в нем. Для этого можно исключить индукцию поля и записать:

$$\vec{J} = \frac{1 - const}{const} \vec{H} = \chi \vec{H}$$

Где χ - магнитная восприимчивость вещества. Подставляяя в уравнение для $\vec{J}$ получаем

$$B = \mu_0(\vec{J} + \vec{H}) = \mu(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Величина $\mu = \chi + 1$ называется магнитной восприимчивостью вещества.
Магнетики в целом подразделяются на три класса:
Диамагнетики – плохо восприичивы к магнитам $\mu < 1$ ($N_2CO_2H_2O$, Ag, Bi)
Парамагнетики – неплохо восприимчивы к магнитам $\mu > 1$ (0_2, Pt, Al,$FeCl_3$)
Ферромагнетики – хорошо восприимчивы к магнитам $\mu >> 1$ ((Fe, Ni, Co, W - и другие, а так же их сплавы).
где μ – магнитная проницаемость.

57 Дайте определение вектора напряженности магнитного поля.

$\triangle$ Напряжённость магнитного поля (стандартное обозначение H) — векторная физическая величина, равная разности вектора магнитной индукции B и вектора намагниченности J.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

Где B – вектор магнитной индукции поля, μ_0 –

58 Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (в интегральной и дифференциальной формах).

$\triangle$ **В интегральной форме:** Циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, охватываемых этим контуром.

$$\oint\limits_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i$$

В дифференциальной форме:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$$

59 Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.

$\triangle$ **Уравнения состояний:**

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} = \mu_0(1+\chi)\vec{H}$$

$$\vec{J} = \chi\vec{H}$$

Где μ - относительная магнитная проницаемость, а χ - магнитная восприимчивость **Магнитная проницаемость** — физическая величина, коэффициент (зависящий от свойств среды), характеризующий связь между магнитной индукцией и напряжённостью магнитного поля в веществе. Для разных сред этот коэффициент различен, поэтому говорят о магнитной проницаемости конкретной среды (подразумевая ее состав, состояние, температуру и т. д.).

Магнитная восприимчивость — физическая величина, характеризующая связь между магнитным моментом (намагниченностью) вещества и магнитным полем в этом веществе.

60 Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.

$\triangle$ Из свойства соленоидальности (через любую поверхность поток B = 0 - теорема Гаусса для магнитной индукции) магнитного поля следует, что на границе раздела двух сред с различными значениями μ нормальные компоненты B непрерывны.

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\phi_B = \oint_S B_N dS = B_{n_1}S - B_{n_2}S + \mathit{\Delta\Phi}_{side} = 0$$

$$B_{n_1} = B_{n_2}$$

$$\mu_2 H_{n_1} = \mu_1 H_{n_2}$$

По теореме о циркуляции в отсутствии на границе раздела поверхностных токов проводимости тангенциальные компоненты вектора H непрерывны.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_{1_\tau} l - H_{2_\tau} l = 0$$

$$H_{1_\tau} = H_{2_\tau}$$

$$\frac{B_{2_\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1_\tau}}{\mu_1}$$

61 Что такое ток смещения?

$\triangle$ Анализируя закон электромагнитной индукции, Максвелл пришел к выводу, что изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, что нашло отражение в предложенном им уравнении $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Вместе с тем он обратил внимание на то, что уравнение для ротора напряженности $\operatorname{rot}\vec{H} = j$ вступало в противоречие, если применить к обеим частям дивергенцию. Левая часть становилась равной нулю, а с другой стороны $div\vec{j} \neq 0$. Чтобы устранить это противоречие, Максвелл в правую

часть добавил плотность тока смещения $\vec{j_{\text{см}}}$: $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}$
При этом должно выполняться условие: $\operatorname{div} j + j_{\text{см}}$. Из уравнения непрерывности $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j}$ и уравнения Максвелла $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ можем записать:

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

62 Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$\triangle$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \textbf{Закон Гаусса}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \textbf{Закон Гаусса для магнитного поля}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \textbf{Теорема о циркуляции магнитного поля}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \quad \textbf{Закон Гаусса}$$

63 Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.

$\triangle$

$$\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

Поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = Q$$

Поток электрической индукции через замкнутую поверхность пропорционален величине свободного заряда, находящегося в объёме, ограниченном этой поверхностью.

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\oint\limits_S \frac{\delta\vec{B}}{\delta t}d\vec{S}$$

Изменение потока магнитной индукции, проходящего через незамкнутую поверхность s, взятое с обратным знаком, пропорционально циркуляции электрического поля на замкнутом контуре l, который является границей поверхности s.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i$$

Полный электрический ток свободных зарядов и изменение потока электрической индукции через незамкнутую поверхность s пропорциональны циркуляции магнитного поля на замкнутом контуре l, который является границей поверхности s

64 Сколько решений имеет система уравнений Максвелла. Ответ обоснуйте.

$\triangle$

65 Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова-Пойнтинга.

$\triangle$ **Вектор Умова-Пойнтинга** – вектор плотности потока энергии электромагнитного поля.

Вектор Умова-Пойнтинга $\vec{S}$ можно определить через векторное произведение двух векторов:

$$S = [E \times H],$$

где E и H – векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно.
Модуль вектора Умова-Пойнтинга равен количеству энергии, переносимой через единичную площадь, нормальную к $\vec{S}$, в единицу времени. Своим направлением вектор определяет направление переноса энергии.

66 Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла.

$\triangle$

Пусть $\rho = 0$, и снова выпишем уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ div\vec{B} = 0 \\ rot\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{D} = \rho = 0 \end{cases}$$

Найдем $rotrot\vec{E}$:

$$rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E}(= 0 \Leftarrow \rho = 0) - \mathit{\Delta}\vec{E} =$$

но так же из третьего уравнения Максвелла:

$$rotrot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\mu_0\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}\mu\mu_0 = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

Приравниваем и получаем **неоднородное волновое уравнение**, у которого есть решение:

$$\mathit{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}, \qquad \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{\nu^2} \text{ (просто переобозначили)}$$

67 Что такое плоская волна?

$\triangle$ Важным частным случаем общего решения волнового уравнения является **плоская волна**, поле которой описывается формулами:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_A cos(\omega t - kz)$$

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H_A} cos(\omega t - kz)$$

, где $\overrightarrow{E_A}$ и $\overrightarrow{H_A}$ – амплитудные значения напряженности электрическткого и магнитного поля, ω – круговая частота волны, а k – ее волновое число определенное так:

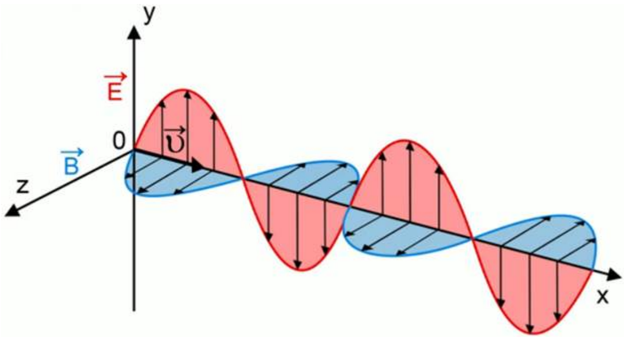
$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

, λ - длина волны.

Важность рассмотрения свойств плоских волн связана с тем, что принцип суперпозиции позволяет представить произвольную электромагнитную волну в виде суммы плоских волн при помощи преобразования Фурье.

68 Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне

Δ



69 Чему равна плотность потока энергии электромагнитной волны?

Δ

$$\frac{d\omega}{dt} = \vec{S}$$

$$\omega = \int \vec{S} dt$$

Где $\vec{S}$ - вектор Умова-Пойнтинга.

70 Обоснуйте возможность введения скалярного и векторного потенциалов нестационарного электромагнитного поля.

Δ

71 Запишите условия калибровки Лоренца

Δ В стационарном случае(на самом деле называется калибровкой Лондонов, но Макаров назвал калибровкой Лоренца):

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Калибровка Лоренца в нестационарном случае:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

72 Запишите уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля.

$\varDelta$

$$\varDelta\varphi-\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho(\mathbf{r},t)/\varepsilon\varepsilon_0 \text{ — скалярный}$$
$$\varDelta\mathbf{A}-\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \text{ — векторный}$$

73 Какой вид имеют решения уравнения для векторного и скалярного потенциаловэлектромагнитного поля.

$\varDelta$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec{r}',t-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|/v\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d\vec{r}' \text{ — скалярный}$$
$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}',t-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|/v\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d\vec{r}' \text{ — векторный}$$

74 Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля электронейтральной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее

$\varDelta$

$$\varphi(\mathbf{r},t)\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{p}(t-r/v)}{r}\right)$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\approx\frac{\mu\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial\mathbf{p}(t-r/v)}{\partial t}$$

75 **Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.**

$\triangle$

$$\frac{\mathbf{p}(t-r/v)}{r} = \mathbf{p}_0 f(\mathbf{r},t)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{p}_0 f(\vec{r},t)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{rotrot}\vec{p}_0 f(\vec{r},t)$$

76 **Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее**

$\triangle$

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{\exp[i\omega(t-r/v)]}{r}$$

Значится, мы в полярных координатах $\{r,\theta,\alpha\}$

Для $\vec{E}$ имеем:

$$E_\alpha = 0$$

$$E_r = \frac{p_0\cos\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp(i\omega(t-r/v))$$

$$E_\theta = \frac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{i\omega}{rv}-\frac{\omega^2}{v^2}\right)\exp(i\omega(t-r/v))$$

Для $\vec{B}$ имеем:

$$B_\alpha = \frac{i\mu\mu_0\omega p_0 \sin\theta}{4\pi r v}\left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v}\right)\exp(i\omega(t - r/v))$$

$$B_r = 0 \quad B_\theta = 0$$

77 Чему равна средняя мощность, излучаемая электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее

Δ

$$P = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon\varepsilon_0 v^3}$$

78 Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов.

Δ

Квазистационарный процесс – процесс, протекающий в ограниченной системе и распространяющийся в ней так быстро, что за время распространения этого процесса в пределах системы её состояние не успевает измениться.

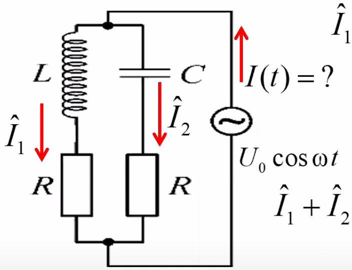
Простыми примерами квазистационарных процессов могут служить процессы, происходящие в RC- и RL-цепях при подключении и отключении источника постоянного тока.

RC цепь – электрическая цепь, состоящая из конденсатора и резистора.

RL цепь – электрическая цепь, состоящая из катушки индуктивности и резистора.

79 Приведите примеры расчета тока в электрических цепях при переходных процессах (RCи RL-цепи).

Δ



$$\hat{I}_1 = \frac{U_0}{R + i\omega L} \qquad \hat{I}_2 = \frac{U_0}{R + 1/i\omega C}$$

$$I(t) = \mathrm{Re}\left\{(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)\exp(i\omega t)\right\}$$

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = U_0 \frac{2R + i(\omega L - 1/\omega C)}{(R + i\omega L)(R + 1/i\omega C)}$$

$$I(t) = U_0 \frac{\sqrt{4R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}{\sqrt{(R^2 + L/C)^2 + R^2(\omega L - 1/\omega C)^2}} \times$$

$$\times \cos\left\{\omega t - \mathrm{arctg}(\omega L/R) + \mathrm{arctg}(1/\omega RC) + \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{2R}\right)\right\}$$

80 Собственные колебания в колебательном контуре. Амплитуда и начальная фаза при гармонических колебаниях.

$\triangle$ В идеальном колебательном контуре R=0. Поэтому полная энергия W остается постоянной в течение всего времени колебаний:

$W = W_C + W_L = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{LI^2}{2} = \text{const}$

Производная по времени w'(t)=0 (так как W=const) Следовательно,

$(\dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{LI^2}{2})' = \dfrac{qq'}{C} + LII' = 0$

$II' = -\dfrac{qq'}{LC}$

Но $I = q' \Rightarrow I' = q''$, тогда $q'' + \omega_0^2 q = 0$ — уравнение свободных электромагнитных колебаний в идеальном колебательном контуре. $(\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}})$

Решение этого уравнения имеет вид:

$q = q_0 \cos\omega_0 t$, где q_0 – начальное (амплитудное) значение заряда, сообщенного конденсаору;

ω_0 — собственная циклическая частота свободных электромагнитных колебаний в контуре

Продифференцировав по времени выражение для заряда, найдем, что:

$I = q' = -q_0\omega_0 \sin\omega_0 t = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

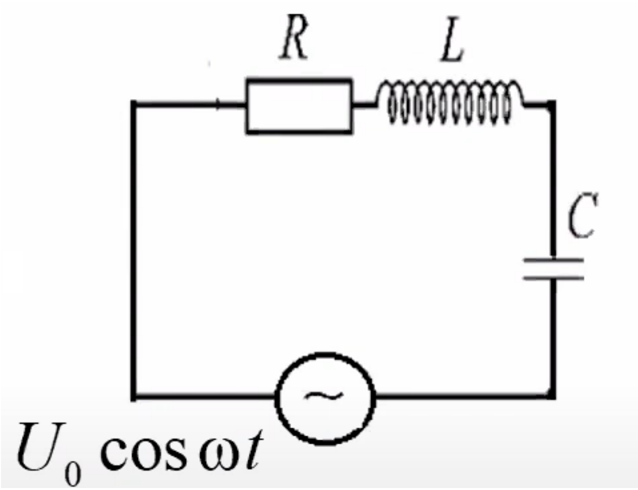
где $I_0 = q_0\omega_0$ Амплитудное значение силы тока. Следовательно, сила тока I в колебательном контуре совершает также гармонические колебания с той же частотой ω_0, но по фазе они смещены на $\frac{\pi}{2}$ относительно колебаний заряда.

81 Уравнение затухающих колебаний и его решение, время затухания.

Δ

82 Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы.

Δ



Из 2 правила Кхиргофа получаем дифур 2 порядка:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{U_0}{L}\cos\omega t$$

Переходим к уравнению по I

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\omega U_0 \sin\omega t$$

Запишем косинус через экспоненту:

$$U_0 \cos\omega t = U_0 \operatorname{Re}\{\exp(i\omega t)\}$$

Тогда ищем решение в виде:

$$I(t) = \operatorname{Re}\{\hat{I}\exp(i\omega t)\}$$

Наше уравнение принимает следующий вид:

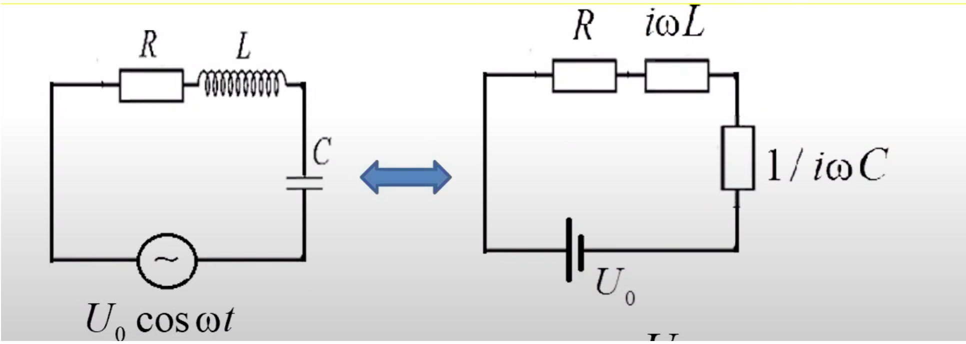
$$\mathrm{Re}\left\{\left[L\frac{d^2}{dt^2}+R\frac{d}{dt}+\frac{1}{C}\right]\hat{I}\exp(i\omega t)\right\}=U_0\,\mathrm{Re}\{i\omega\exp(i\omega t)\}$$

$$\left[L\frac{d^2}{dt^2}+R\frac{d}{dt}+\frac{1}{C}\right]\hat{I}\exp(i\omega t)=U_0\{i\omega\exp(i\omega t)\}$$

$$\left[-\omega^2L+i\omega R+\frac{1}{C}\right]\hat{I}=i\omega U_0$$

$$\left[i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}\right]\hat{I}=U_0$$

Заметим, что это соотношение сильно напоминает ситуацию с постоянным напряжение, только вместо индуктивности стоит сопротивление $i\omega L$, а вместо конденсатора $1/i\omega C$:



$$L\Rightarrow Z_L=i\omega L\quad R\Rightarrow Z_R=R\quad C\Rightarrow Z_C=1/i\omega C$$

$$[Z_L+Z_R+Z_C]\,\hat{I}=U_0\quad \hat{I}=\frac{U_0}{Z_L+Z_R+Z_C}$$

$$I(t)=\mathrm{Re}\{\hat{I}\exp(i\omega t)\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{U_0\exp(i\omega t)}{i\omega L+R+1/i\omega C}\right\}$$

$$I(t)=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}\cos\left(\omega t-\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L-1/\omega C}{R}\right)\right)$$

83 Формулы для амплитуды и фазы.

Δ

$$I_m = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)$$

$$\omega_0 \approx \omega_k = \sqrt{1/LC} - -\text{частота резонанса для тока}$$

$$\varphi\left(\omega_m \approx \omega_0\right) = 0$$

84 Резонанс токов и напряжений. Приведите примеры.

Δ

85 Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд (описание, обоснование, пример)

Δ Смотри билет 82

86 Что такое эффективные значения силы тока и напряжения? Запишите формулу для мощности переменного тока.

Δ

$$\delta A = \int_0^{\Delta t} U(t) I(t) dt$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) . U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = \int_0^T U_0 \sin(\omega t + \varphi) I_0 \sin \omega t = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi T$$

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$$

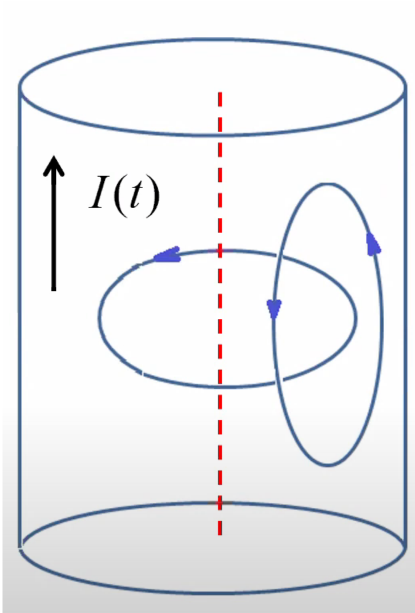
$$P_R = \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} = U_e I_e$$

,где U_e и I_e и есть эффективные значения тока и напряжения

87 В чем заключается скин-эффект. Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях.

$\triangle$ Скин эффект – токи высокой частоты проходят через диэлектрик, как токи смещения, не вызывая его пробоя. Толщина скин слоя в простейшем случае:

$$d = (\mu\mu_0\omega\sigma/2)^{-1/2}$$



Пусть $\dfrac{dI(t)}{dt} > 0$. Тогда во всех точках на горизонтальной окружности возникает магнитное поле, пропорциональное току $\Rightarrow E\uparrow \Rightarrow B\uparrow$. Если возьмем некоторый контур, лежащий в плоскости оси цилидра и одной из образующих(вот этот вертикальный крч), то через него поток вектора B будет возрастать => в точках этого контура будет возникать электрическое поле, которое направлено как показано на рисунке(в силу правила Ленца) => возникает дополнительный ток => у стенок ток увеличивается, а у центра уменьшается.

88 Запишите закон сохранения заряда с помощью четырехмерного вектора плотности тока.

$\triangle$

$$j_\alpha = \{j_x, j_y, j_z, ic\rho\}$$

$$r_\alpha = \{r_x, r_y, r_z, ict\}$$

$$\partial j_\alpha / \partial r_\alpha = 0$$

Чтобы это понять, надо вникнуть в лекцию про четырёхвектор:
Четырехвектор $r_\alpha = \{x, y, z, ict\} \quad \alpha = 1{,}2{,}3{,}4$
Переход от x', y', z', t' к x, y, z, t полностью эквивалентен повороту вектора r_α в четырехмерном пространстве с матрицей перехода $\quad r_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} r'_\beta$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \quad x = \gamma_{11} x' + \gamma_{14} ict' \Rightarrow x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$ict = \gamma_{41} x' + \gamma_{44} ict' = \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} x' + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} ict' \Rightarrow t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Обратное преобразование $\quad r'_\alpha = \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} r_\beta$

$$\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

Свойства матрицы $\gamma_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\rho} = \delta_{\beta\rho}$

89 Запишите уравнение, связывающее четырехмерный вектор потенциала с четырехмернымвектором плотности тока.

△ Чтобы это понять, надо вникнуть в лекцию про четырёхвектор

$$A_\alpha = \{r_x, r_y, r_z, i\varphi\}$$

$$\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial r_\mu^2} = -\frac{4\pi}{c} j_\alpha$$

90 Запишите с помощью тензора электромагнитного поля уравнения Максвелла

Δ

Четырехтензор электромагнитного поля

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнения Максвелла

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial r_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial r_\beta} = 0$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} = \frac{4\pi}{c} j_\alpha$$

Из первого получюатся поулчаются первые два уравнения Максвелла, из второго получаются последние 2 уравнения Максвелла. Используется следующий набор индексов :

α	β	γ
1	2	3
1	2	4
1	3	4
2	3	4

Например, если рассмотреть 1 случай, то мы поулчим второе уравнение Максвелла:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial r_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial r_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial r_2} = 0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

91 Запишите закон преобразования напряженности электрического и индукции магнитного поля при переходе от одной инерциальной системе отсчета к другой при преобразованиях Лоренца.

Δ

$$F_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\varsigma}\gamma_{\beta\xi}F'_{\varsigma\xi}$$

$$F_{12} = \gamma_{1\xi}\gamma_{2\xi}F'_{\varsigma\xi} = \gamma_{11}\gamma_{2\xi}F'_{1\xi} + \gamma_{14}\gamma_{2\xi}F'_{4\xi} = \gamma_{11}\gamma_{22}F'_{12} + \gamma_{14}\gamma_{22}F'_{42} =$$
$$= \frac{F'_{12} - i(v/c)F'_{42}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_z = \frac{H'_z + (v/c)E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Аналогично находим другие компонеты:

$$H_y = \frac{H'_y + (v/c)E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$H_x = {}'H_x$$

$$E_x = {}'E_x$$

$$E_y = \frac{(v/c)H'_z + E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E_z = \frac{-(v/c)H'_y + E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

92 Перечислите инварианты электромагнитного поля.

У матрицы 3x3 есть 3 собственных значения, то есть инварианта: сумма квадратов диагональных элементов, сумма квадратов и определитель. Для четырёхтензора второго ранга мы имеем четыре инварианта I_i: сумма квадратов диагональных элементов, сумма квадратов, сумма по дважды встречающимся индексам и определитель.

$$I_1 = \mathrm{Sp}\,\hat{F} \qquad I_2 = F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \qquad I_3 = F_{\alpha\beta}F_{\beta\delta}F_{\delta\alpha} \qquad I_4 = \det\hat{F}$$

Из них первый и третий для электромагнитного поля оказываются нулевыми, а остальные выглядят так:

Абсолютные характеристики электромагнитного поля

$$I_2 = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 \qquad I_4 = -(\mathbf{EH})^2$$

Например, если электрическое и магнитное поле в некоторой инерциальной системе отсчета перпендикулярны друг другу и $\mathbf{H}^2 > \mathbf{E}^2$, то можно найти систему отсчета в которой электрическое поле отсутствует.

Перпендикулярность полей приводит к тому, что инвариант I_4 равняется нулю

$\triangle$