<확률 변수> : 실험결과 마다 실수를 대응하는 함수. (A real value function defined on the sample space)

<확률 분포> : 확률변수 X가 특정한 값을 가질 확률을 나타내는 분포. (확률변수 X의 함수)

확률분포함수 = 누적분포함수 : $F(x) = P(X \le x)$.

E. 2.2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x=0 \\ \frac{3}{8} & x=1 \text{ or } 2 \\ \frac{1}{8} & x=3 \end{cases} \rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{8} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

• 결합확률분포

관심있는 확률변수가 여러개일때, 사용.

이산형: $f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$, 연속형 $P[(X,Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$.

E.2.5

$R:4$, $W:3$, $B:2$ $X=$ 하얀공의 수, $Y=$ 검은 공의 수.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{4}{3-x-y}}{\binom{9}{3}} \quad (x=0,1,2,3\ ;\ y=0,1,2\ ;\ 0 \le x+y \le 3)$$

E. 2.6

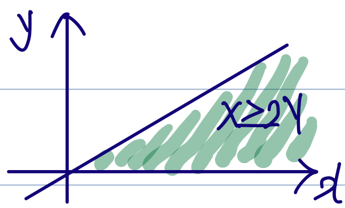
(연속형) X= TV 시청에 보내는 시간, Y= 숙제하는 데에 보내는 시간.

$f_{X,Y}(x,y) = xye^{-(x+y)}$ $x>0, y>0$ 으로 주어졌다고 하자. $X \ge 2Y$의 확률은?

$$P(X \ge 2Y) = P(2Y \le X) = P(Y \le \tfrac{X}{2}) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{x}{2}} xye^{-(x+y)}\,dy\,dx = \int_0^\infty xe^{-x} \int_0^{\frac{x}{2}} ye^{-y}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^\infty xe^{-x}\left[1-\left(\tfrac{x}{2}+1\right)e^{-\frac{x}{2}}\right]dx = \int_0^\infty xe^{-x}dx - \int_0^\infty xe^{-\frac{3}{2}x}dx - \int_0^\infty \tfrac{x^2}{2}e^{-\frac{3}{2}x}dx$$

$$= \frac{7}{27}$$



이 영역에서 적분한다.

• 결합확률분포.

$F(x_1, \cdots, x_k) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_k \le x_k)$

$$F(x_1, \cdots, x_k) = \begin{cases} \sum_{\text{모든 } X_i \le x_i} \cdots \sum f(X_1, \cdots, X_k) & \text{이산형} \\ \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(X_1, \cdots, X_k) dX_1 \cdots dX_k & \text{연속형.} \end{cases}$$

$$f(x_1, \cdots, x_k) = \frac{\partial}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} F(x_1, \cdots, x_k)$$

$F(x_1, x_2)$가 어떤 이변량 확률벡터 (X_1, X_2)의 결합 확률분포함수가 되는 필요충분조건는 다음과 같다.

모든 x_1에 대하여 $\lim_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$, $\lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = F(-\infty, x_2) = 0$.

$$\lim_{x_1 \to \infty, x_2 \to \infty} F(x_1, x_2) = F(\infty, \infty) = 1.$$

모든 $a<b$, $c<d$에 대하여 $F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \ge 0$

$$\lim_{h \to 0} F(x_1, x_2 + h) = \lim_{h \to 0} F(x_1 + h, x_2) = F(x_1, x_2)$$

E.2.7

$F_{X,Y}(x,y) = xy \quad (0<x<1,\ 0<y<1) \qquad f_{X,Y}(x,y) = ? \quad P(X^2<Y) = ?$

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = 1 \quad (0<x<1, 0<y<1)$$

$$P(X^2<Y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_{X,Y}(x,y)\, I(0<x<1, 0<y<1)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} 1\, dx\, dy = \frac{2}{3}$$

• 주변 확률분포.

$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

$f_{X_i}(x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_k} f(x_1, \cdots, x_k)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_k) dx_1 \cdots dx_k$.

E. 2.9

주사위를 n번 던진다.

X_1: 주사위의 눈이 1인 횟수 X_2: 주사위의 눈이 2, 3인 횟수. X_3: 주사위가 4,5,6인 횟수.

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x_1}\left(\frac{2}{6}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{6}\right)^{x_3}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2}\sum_{x_3} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2,n-x_1-x_2)$$

$$= \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,(n-x_1-x_2)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x_1}\left(\frac{2}{6}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-x_1-x_2}$$

$$= \frac{n!}{x_1!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x_1}\sum_{x_2=0}^{n-x_1}\frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!}\left(\frac{2}{6}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-x_1-x_2}\cdot\frac{1}{(n-x_1)!}$$

$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x_1}\sum_{x_2=0}^{n-x_1}\frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!}\left(\frac{2}{6}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-x_1-x_2}$$

$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x_1}\underline{\sum_{x_2=0}^{n-x_1}\binom{n-x_1}{x_2}\left(\frac{2}{6}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-x_1-x_2}}$$

↳ 이항정리.

$$= \binom{n}{x_1}\left(\frac{1}{6}\right)^{x_1}\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)^{n-x_1} = \binom{n}{x_1}\left(\frac{1}{6}\right)^{x_1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x_1}$$

$x_3 = n-x_1-x_2 \ge 0$ 이므로 $x_2 \le n-x_1$ 이다.

$x_2 \ge 0$ 이므로 x_2의 범위는 $0 \le x_2 \le n-x_1$ 이다.

$\binom{n}{x} = {}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x}$

E. 2.10)

$f_{X,Y}(x,y) = xye^{-(x+y)}$, $x>0$, $y>0$

$f_X(x) = \int_0^\infty xye^{-(x+y)}dy = xe^{-x}\int_0^\infty ye^{-y}dy = xe^{-x}$ $x>0$

$f_Y(y) = \int_0^\infty xye^{-(x+y)}dx = ye^{-y}\int_0^\infty xe^{-x}dx = ye^{-y}$ $y>0$

• 조건부 확률분포.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad (f_X(x) > 0)$$

$$f_{Y|X}(y|0) = \frac{f_{X,Y}(0,y)}{f_X(0)} = f_{Y|X}(y=0|0) + f_{Y|X}(y=1|0) + f_{Y|X}(y=2|0)$$

$$= \frac{f_{X,Y}(0,0)}{f_X(0)} + \frac{f_{X,Y}(0,1)}{f_X(0)} + \frac{f_{X,Y}(0,2)}{f_X(0)} = 1$$

• 독립확률변수.

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \rightarrow$ 인수분해가 가능하면 독립

E. 2.14

$f(x_1)f(x_2)f(x_3) = 27x_1^2x_2^2x_3^2 \quad 0 < x_1, x_2, x_3 < 1$

$$P(X_1 \le \tfrac{1}{2}, X_2 \le \tfrac{1}{2}, X_3 \le \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} 27x_1^2x_2^2x_3^2\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 3x_3^2\,dx_3 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} 3x_2^2\,dx_2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} 3x_1^2\,dx_1 = \left(\frac{1}{8}\right)^3$$

x_1, x_2, x_3가 모두 독립적이기에
결합확률 밀도함수는 곱으로 나타내어진다.

• 기댓값.

확률변수 X가 가지는 값들에 해당하는 확률가중을 사용한 가중평균(weighted average)이다.

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{\text{모든 } x_i} x_i f(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \end{cases}$$

E. 2.15)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x=0 \\ \frac{3}{8} & x=1,2 \\ \frac{1}{8} & x=3 \end{cases}$$

$E(X) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8}$
$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{\text{모든 } x_i} g(x_i) f_X(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx \end{cases}$$

($g(x) = Y$일 때, X의 pdf를 알면 그대로 $g(x)$로 사용.
X의 pdf를 모른다면 Y의 pdf를 구해서 $E_Y(Y)$를 계산한다.)

E. 2.17

$f_X(x) = xe^{-x}\ (x>0)$ 일 때, $Y = X^2+5$ $f_X(x)$를 알기에 $E(Y) = E(X^2+5)$을 구한다.

$$E(X^2+5) = \int_0^{\infty}(x^2+5)xe^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} x^3e^{-x} + 5xe^{-x}\,dx = 11$$

$Y=X^2+5$의 pdf인 $f_Y(y)$를 구할 수 있다면 $\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy$의 값과 같다.

$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot f_X(x)\,dx = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = c \cdot 1 = c$

$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax f_X(x) + b f_X(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx$

$= aE(X) + b$

E. 2.19

$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}\, I(x>0, y>0)$로 주어졌다면

$$E(X+Y) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (x+y) e^{-x-y}\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x e^{-x-y}\,dx\,dy}_{E(X)} + \underbrace{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y e^{-x-y}\,dy\,dx}_{E(Y)} = 1+1 = 2$$

증명

X와 Y는 독립

$$E(g(X)h(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y)\,dy = E(g(X)) \cdot E(h(Y))$$

· 분산

확률변수 X의 변동을 나타내는 척도. $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

(만약 확률변수 X를 내가 다르게 정의한다면 기댓값 및 분산은 달라진다. 그래서 문제의 맥락에 맞게 확률변수를 정의해야한다).

· 표준화

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$$

확률변수 X의 단위가 cm라면 $Var(X)$의 단위는 cm^2이다 ($E(X^2)$ 때문에).

이러한 점은 실제 문제에서 X의 흩어짐을 재는게 비합리적이다.

그래서 분산의 제곱근인 표준편차를 사용하여 단위를 동일한 후 변수의 흩어짐을 측정한다.

- $Y = aX+b$ 일때, $Var(Y) = a^2 Var(X)$.

- $X_1, \cdots, X_n$이 독립이라면 $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$가 성립한다.

E.2.22

X, Y가 독립이면 $Var(3X+Y) = 9Var(X) + Var(Y)$.

- 공분산

$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$ $\quad Cov(X,X) = Var(X)$, X, Y 독립 $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$.

공분산은 단위에 의존적이고 선형관계의 강도를 직접 나타내지는 않는다.

$Cov(aX+b, cY+d) = a \cdot c \cdot Cov(X,Y)$

$Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2\sum\sum_{j<k} Cov(X_j, X_k)$

공분산 : X와 Y의 선형관계에 대한 측도. 측정단위에 영향을 받는 공분산의 단점을 보완하기 위해 제안된 것이 상관관계이다.

- 조건부 기댓값.

$$E(Y|X=x) = \begin{cases} \sum_y y_i f_{Y|x}(y_i|x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y|x)\,dy \end{cases}$$

E.2.23)

$f_{X,Y}(x,y) = x^2 e^{-x(y+1)}$ $\quad 0<x,\ y<\infty$

$f_{Y|x}(y|x) = xe^{-xy}$, $y>0$

$$E(Y|X=x) = \int_0^\infty y \cdot f_{Y|x}(y|x)\,dy = \int_0^\infty yxe^{-xy}\,dy$$

$$= x\int_0^\infty ye^{-xy}\,dy = x\cdot\left(-\frac{y}{x}e^{-xy}\right)\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{x}\,dy$$

$$= -\frac{1}{x}e^{-xy}\Big|_0^\infty = -\left(-\frac{1}{x}\cdot 1\right) = \frac{1}{x}$$

- 이중 기댓값 정리

$E(E(Y|X)) = E(Y)$

(증명)

$$E(E(Y|X)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y|x) f_X(x)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f(y,x)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)\,dy = E(Y)$$

E. 2.24)

$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x \le y \le 2 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) I(0 \le x \le y \le 2) dy$

$= \int_x^2 \frac{1}{2} dy = [\frac{1}{2}y]_x^2 = 1 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(2-x) \; I(0 \le x \le 2)$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) I(0 \le x \le y \le 2) dx$

$= \int_0^y \frac{1}{2} dx = \frac{y}{2} I(0 \le y \le 2)$.

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}(2-x)}$

$= \frac{1}{2-x}$, $x \le y \le 2$

$E(E(Y|X)) = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{y}{2} I(0 \le y \le 2) dy = \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = [\frac{y^3}{6}]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) I(0 \le x \le y \le 2) dy = \int_x^2 y \cdot \frac{1}{2-x} dy = [\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{2-x}]_x^2 = \frac{4-x^2}{2(2-x)} = \frac{x+2}{2}$

$E(E(Y|X)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y,X}(y,x) dx dy$

E. 2.25

$x > 0$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ $\quad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \le y \le x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_0^x y \cdot \frac{1}{x} dy = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} I(x>0)$

$E(Y) = E(E(Y|X)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} I(x>0) dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx$ $\quad \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t$, $dx = 2dt$

$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \cdot t e^{-t} \cdot 2 dt = \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = 1$

정리 2.12

- X와 Y가 독립이면 $E(Y|x) = E(Y)$, $E(X|y) = E(X)$ 이 성립.

<증명> $E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E(Y)$

정리 2.11

$Var(Y|x) = E[\{Y - E(Y|x)\}^2 | x] = E(Y^2|x) - (E(Y|x))^2$

E. 2.26

$x > 0$ $\quad y > 0$일 때 $\quad f_{Y|X}(y|x) = x e^{-xy}$, $E(Y|x) = \frac{1}{x}$

$$E(Y^2|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x)\,dy = \int_0^{\infty} y^2 x e^{-xy}\,dy = \int_0^{\infty} 2y e^{-xy}\,dy = \int_0^{\infty} -\frac{2}{x} e^{-xy}\,dy = \frac{2}{x^2}$$

$$Var(Y|x) = E(Y^2|x) - (E(Y|x))^2 = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

정리 2.13

$$Var(Y) = E(Var(Y|X)) + Var(E(Y|X))$$

<증명>

추가.

$$E(Var(Y|X)) = \underbrace{E(E(Y^2|x))}_{\Downarrow\ E(Y^2)} - E((E(Y|x))^2) = E(Y^2) - E[E(Y|x)^2] - (E(Y))^2 + (E(E(Y|x)))^2$$

$$= E(Y^2) - (E(Y))^2 - \left(E(E(Y|x)^2) - (E[E(Y|x)])^2\right) = Var(Y) - Var(E(Y|x))$$

위의 식을 통해 $Var(Y) \ge Var(E(Y|x))$를 알 수 있다.

↳ 개별자체의 산포보다 그룹별 평균의 산포가 작다는 것을 생각하면 자명하다.

· 확률부등식.

<마르코프(Markov) 확률부등식>

$u(x) > 0$ 일 때, 임의의 확률변수 X는 임의의 상수 $c > 0$ 에 대하여 $P[u(X) \ge c] \le \frac{E[u(X)]}{c}$ 을 만족한다.

<증명>

$A = \{x : u(x) \ge c\}$인 A에 대해

$$E(u(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f_X(x)\,dx = \int_A u(x) f_X(x)\,dx + \int_{A^c} u(x) f_X(x)\,dx \ge \int_A u(x) f_X(x)\,dx \ge \int_A c \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= cP[X \in A] = c \cdot P[u(X) \ge c]$$

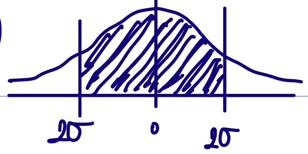
그러면 $u(x) = |x|^r$ $(r > 0)$을 택하면

$$P[|X| \ge c] \le \frac{E[|X|^r]}{c^r}$$ 가 성립.

<체비셰프(Chebyshev) 확률부등식>

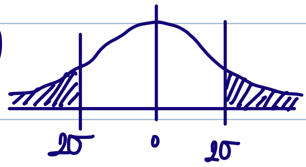
$$P[|X - \mu| < k\sigma] \ge 1 - \frac{1}{k^2} \rightarrow P[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma] \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$

확률변수 X가 표준편차 σ의 k배 범위 내의 값을 취할 확률은 적어도 $1 - \frac{1}{k^2}$이다.

ex) 

확률변수 X가 $-2\sigma < X < 2\sigma$에 값을 가질 확률은 적어도 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이다.

OR $P[|X-\mu| \ge k\sigma] \le \frac{1}{k^2} \Rightarrow P[X \le \mu - k\sigma, X \ge \mu + k\sigma] \le \frac{1}{k^2}$

ex) 

확률변수 X가 $X \le -2\sigma$, $X \ge 2\sigma$에 값을 가질 확률은 $\frac{1}{4}$보다 작다.

<증명>

$u(X)=(X-\mu)^2$, $c=k^2\sigma^2$ 을 사용. $P[(X-\mu)^2 \ge k^2\sigma^2] \le \frac{E(X-\mu)^2}{k^2\sigma^2} \rightarrow P[|X-\mu| \ge k\sigma] \le \frac{1}{k^2}$

$\sigma^2 < \infty$ 인 모든 확률변수에 사용가능 $\left(\frac{E(X-\mu)^2}{\sigma^2}=1\right)$

E. 2.27)

$\mu=25$, $\sigma^2=16$ $P[17 \le X \le 33]$의 하한은?

$P[|X-\mu| \le k\sigma] \ge 1-\frac{1}{k^2}$ 이므로 $P[25-4k \le X \le 25+4k] \ge 1-\frac{1}{k^2}$ $k=2$.

$P[17 \le X \le 33] \ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $\therefore \frac{3}{4}$

· 코시-슈바르츠(Cauchy-Schwarz) 부등식

$[E(XY)]^2 \le E(X^2) \cdot E(Y^2)$ (단, $E(X^2)<\infty$, $E(Y^2)<\infty$, 등식은 $E(Y=cX)=1$ 인 경우 성립)