· 확률변수들의 함수.

실험을 통해 얻는 확률변수 X의 관측값이 중간적으로 궁금하지 않거나 $Y=g(X)$인 경우 Y가 궁금할 수 있다.

이럴 때 Y를 구하기 위해 실험을 또 하는 것은 효율적이지 않기에 관계식 확률밀도함수 or 확률변수를

이용하여 변환된 변수의 확률밀도함수를 구하는 방법을 배우자.

1. 누적분포함수를 이용하는 방법.

E. 2.39

$Y=\frac{9}{5}X+32$의 확률밀도함수는?

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\frac{9}{5}X+32\le y)=P(X\le\frac{5}{9}(y-32))$ 즉 $F_Y(y)=F_X(\frac{5}{9}(y-32))$

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{5}{9}f_X(\frac{5}{9}(y-32))$$

E. 2.40

$Y=X^2$ Y의 확률밀도함수는?

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})-f_X(-\sqrt{y})]$

E. 2.41

$X\sim U(0,1)$ $Y=-\lambda\ln X$ $(\lambda>0)$의 확률밀도함수.

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\lambda\ln X\le y)=P(X\ge e^{-\frac{y}{\lambda}})=1-e^{-\frac{y}{\lambda}}$

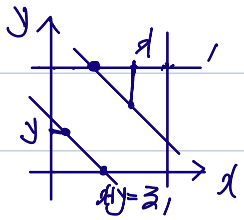
$f_Y(y)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}$ 모수가 λ인 지수분포의 확률밀도함수.

E. 2.42

$X,Y\sim U(0,1)$ $Z=X+Y$의 확률밀도함수. 독립이므로 $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$이다.

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z}f_X(x)f_Y(y)\,I(0\le x\le1,\ 0\le y\le1)\,dx\,dy$. ⇒ 적분범위를 생각해보면

↳ Z는 X,Y로 정의되므로 X,Y의 결합확률밀도함수..!



$$F(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \int_0^{z}\int_0^{z-y} 1\,dx\,dy & 0 < z \le 1 \\ 1 - \int_{z-1}^{1}\int_{z-x}^{1} 1\,dy\,dx & 1 < z \le 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} z & 0 < z \le 1 \\ 2-z & 1 < z \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$f_X(x)$ 일 때 $Y=g(x)$라는 변환

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y)) = f_X(\underline{g^{-1}(y)}) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

y에 대한 식이어야하므로 $g^{-1}(y)$인 채로 두는 것.

· 결합변환.

앞에서 다룬 확률변수의 변환을 조금 더 일반화시키는 경우.

$X=(X_1,\dots,X_n)$의 변환된 $k \le n$개의 확률변수 $Y_1=g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_k(x_1,\dots,x_n)$이 있을 때,

$X_1,\dots,X_n$의 결합확률밀도함수가 $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$일 때 k차원 $Y=(Y_1,\dots,Y_k)$의 jpdf를 구하려 한다.

$n=k$의 경우는 $X_1,\dots,X_n$과 함수 $g_1,\dots,g_k$가 일대일 대응이므로 $Y=g(X)$라고 할 때,

Y의 jpdf는 $f_Y(g(x_1),\dots,g(x_n)) = f_Y(y_1,\dots,y_n) = \frac{d}{dy}f_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$

↳ 여러 개의 변수로 일반화된 자코비안(Jacobian)을 사용가능하다.

E. 2.43

(x_1, x_2)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$Y_1 = g_1(X_1,X_2) = X_1+X_2 \quad Y_2 = g_2(X_1,X_2) = X_1 \cdot X_2$의 jpdf를 구하라.

$f_{Y_1,Y_2}(0,0) = f_{X_1,X_2}(0,0) = \frac{1}{4}$

$f_{Y_1,Y_2}(1,0) = f_{X_1X_2}(1,0) + f_{X_1X_2}(0,1) = \frac{1}{2}$

$f_{Y_1,Y_2}(1,1) = f_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{1}{4}$

E.2.44

X_1, X_2, X_3의 jpdf

(x_1,x_2,x_3)	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,1)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$f_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$Y_1 = g_1(X_1,X_2,X_3) = X_1+X_2+X_3$ $\quad$ $Y_2 = g_2(X_1,X_2,X_3) = |X_3 - X_2|$ 의 jpdf는?

$f_{Y_1,Y_2}(0,0) = f_{X_1,X_2,X_3}(0,0,0) = \frac{3}{8}$ $\quad$ $f_{Y_1,Y_2}(1,1) = f_{X_1,X_2,X_3}(0,0,1) = \frac{1}{8}$

$f_{Y_1,Y_2}(2,0) = f_{X_1,X_2,X_3}(0,1,1) = \frac{1}{8}$ $\quad$ $f_{Y_1,Y_2}(2,1) = f_{X_1,X_2,X_3}(1,0,1) + f_{X_1,X_2,X_3}(1,1,0) = \frac{2}{8}$

$f_{Y_1,Y_2}(3,0) = f_{X_1,X_2,X_3}(1,1,1) = \frac{1}{8}$

이산형이 아닌 연속형의 확률변수는?

$A = \{(x_1,\cdots,x_n) : f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) > 0\}$라고 정의한다.

$k<n$ 이라면 $n-k$개의 적절한 새로운 변수들 $Y_{k+1} = g_{k+1}(X_1,\cdots,X_n), \cdots, Y_n = g_n(X_1,\cdots,X_n)$을 추가하여

n차원에서 n차원으로의 함수를 고려하여 $Y_1,\cdots,Y_n$의 결합분포를 구하게 된다.

jpdf를 바탕으로 $Y_1,\cdots,Y_k$ 의 주변분포를 구할 수 있다.

연속형 확률변수에 대한 결합변환은 역함수의 미분값을 여러개의 변수의 경우로 자코비안을 사용할 수 있다.

$$\text{Jacobian} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

정리 2.25

$f_Y(y_1,\cdots,y_n) = f_X(h_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,h_n(y_1,\cdots,y_n))\,|J|$

h는 g^{-1}과 같다. $|J| = \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{dh(y)}{dy}$

E.2.45

(1) X_1, X_2 서로 독립, $\lambda=1$인 지수분포 $f(x_1,x_2) = e^{-x_1-x_2} I(x_1>0, x_2>0)$

$Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$의 jpdf를 구하시오.

$(y_1,y_2) = g(x_1,x_2)$의 역함수는 $x_1 = g_1^{-1}(y_1,y_2) = y_1$, $x_2 = g_2^{-1}(y_1,y_2) = y_2 - y_1$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1, y_2-y_1)\cdot|J| = e^{-y_1-y_2+y_1} = e^{-y_2} \qquad |J| = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(2) $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_1 + X_2$ $\quad Y = g(X_1, X_2)$

$x_1 = g_1^{-1}(y_1,y_2) = x_2 + y_1 \qquad x_2 = g_2^{-1}(y_1,y_2) = y_2 - x_1$

$x_1 = x_2 + y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_2+y_1}{2}$

$x_2 = y_2 - x_2 - y_1 \Rightarrow x_2 = \frac{y_2-y_1}{2}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_2+y_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}\right)\cdot|J| = f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_2+y_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-y_2}$$

$x_1 = \frac{y_2+y_1}{2} > 0$, $x_2 = \frac{y_2-y_1}{2} > 0$ 이므로 $-y_2 < y_1 < y_2$, $y_2 > 0$ 이다.

E. 2.46

$X_1, X_2 \sim N(0,1)$ 이고 서로 독립. $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$. $\quad y_1, y_2 = g(x_1, x_2)$.

$x_1 = g_1^{-1}(y_1,y_2) = y_1 - x_2 \qquad x_2 = g_2^{-1}(y_1,y_2) = \frac{x_1}{y_2} = \frac{y_1 - x_2}{y_2} \Rightarrow x_2 y_2 = y_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{y_1}{1+y_2}$

$x_1 = y_1 - \frac{y_1}{1+y_2} = \frac{y_1 + y_1 y_2}{1+y_2} - \frac{y_1}{1+y_2} = \frac{y_1 y_2}{1+y_2}$

$$\therefore x_1 = \frac{y_1 y_2}{1+y_2}, \quad x_2 = \frac{y_1}{1+y_2} \qquad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y_2}{1+y_2} & \frac{y_1}{(1+y_2)^2} \\ \frac{1}{1+y_2} & \frac{-y_1}{(1+y_2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{y_1}{(1+y_2)^2}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1y_2}{1+y_2}, \frac{y_1}{1+y_2}\right)\cdot\frac{|y_1|}{(1+y_2)^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{|y_1|}{(1+y_2)^2}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+y_2^2)\cdot y_1^2}{(1+y_2)^2}}$$

$Y_2 \sim N(0,2)$ 이다.

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{|y_1|}{(1+y_2)^2}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+y_2^2)\cdot y_1^2}{(1+y_2)^2}}dy_1 = \frac{1}{2\pi\cdot(1+y_2)^2}\underline{\int_{-\infty}^{\infty}|y_1|e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+y_2^2)\cdot y_1^2}{(1+y_2)^2}}dy_1}$$

↳ $f(-y_1) = f(y_1)$을 만족하므로 우함수이다.

$$= \frac{1}{\pi(1+y_2)^2}\int_0^{\infty} y_1 e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+y_2^2)\cdot y_1^2}{(1+y_2)^2}}dy_1 = \frac{1}{\pi(1+y_2)^2}\int_0^{\infty}\frac{(1+y_2)^2}{1+y_2^2}e^{-u}du$$

$$u = \frac{(1+y_2^2)}{2(1+y_2)^2}y_1^2, \quad du = \frac{(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}y_1\,dy_1 \qquad = \frac{1}{\pi(1+y_2^2)}\int_0^{\infty}e^{-u}du = \underline{\frac{1}{\pi(1+y_2^2)}}, \quad -\infty < y_2 < \infty$$

↳ 코시 [illegible]
따라서 서로 독립인 두 표준정규 확률변수의 비는
코시 분포를 따른다.

· 합성곱 공식 (Convolution formula)

$Z = X+Y$ 　　 이산형 : $f_Z(z) = \sum_{모든 x} f_X(x) f_Y(z-x)$

X, Y는 독립. 　　 연속형 : $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$

<증명> $P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X+Y \le z \mid X=x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(x+Y \le z) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) f_X(x)\, dx$

즉 $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) f_X(x)\, dx$.

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}\cdot F_Y(z-x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x)\, dx.$$

E.2.47

X와 Y는 균일분포를 따른다. $Z = X+Y$의 pdf? 　　 $u<z$, $z-1<u$

결합변환을 위해 $U = X$라고 두자. $f_{Z,U}(z,u) = f_{X,Y}(u, z-u)|J|$ 　 $0<u<1$, $u<z<1+u$

→ u에 대한 범위로 변환.

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |-1| = 1$$

$\max\{0, z-1\} < u < \min\{z, 1\}$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \text{i) } 0<z\le 1 & \int_0^z 1\, dz = z \\ \text{ii) } 1<z\le 2 & \int_{z-1}^1 1\, dz = -z+2 \\ \text{iii) otherwise} & 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} I_{(0,1)}(z-x) I_{(0,1)}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{ I_{(0,z)}(x) I_{(0,1)}(z) + I_{(z-1,1)}(x) I_{[1,2)}(x) \}\, dx$$

· 적률생성함수.

확률변수의 적률은 분포형태를 결정하는데 중요한 역할을 한다

평균, 분산, 왜도, 첨도 모두 적률의 함수.

이는 확률변수의 형태를 결정, 확률변수들의 합에 대한 분포를 알아내는데 매우 유리

정의 2.15

확률변수 X의 함수 $g(X)=X^r$에 대한 기댓값

$\mu_r' = E(X^r)$을 X의 r차 적률(r^{th} moment)라고 하며,

$\mu_r = E[(X-\mu)^r]$을 평균 $\mu = E(X)$에 대한 X의 r차 중심적률(r^{th} central moment) 라고 정의한다.

중심적률 중 μ_3은 pdf의 비대칭성을 나타내는 왜도, μ_4는 꼬리의 두께를 재는 척도이다.

$\frac{\mu_3}{\sigma^3}$는 왜도계수, $\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$을 첨도계수라고 한다.

한편, 만약 k차 적률이 존재하면 k차보다 작은 차수의 적률은 항상 존재한다.

정의 2.16

$h>0$에 대하여 $-h<t<h$를 만족하는 모든 t에서 $E(e^{tX})<\infty$일 때,

$M_X(t) = E[e^{tX}]$를 확률변수 X의 적률생성함수라고 한다.

E.2.46

$X \sim B(n,p)$의 적률생성함수.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$= (1-p+pe^t)^n$$ 이항정리.

E.2.49

$X \sim Exp(\lambda)$의 적률생성함수.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} I(x>0)\,dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{(t-\frac{1}{\lambda})x}\,dx = \frac{1}{\lambda(t-\frac{1}{\lambda})}\Big[e^{(t-\frac{1}{\lambda})x}\Big]_0^\infty = \frac{1}{\lambda t-1}\Big(\lim_{x\to\infty} e^{(t-\frac{1}{\lambda})x} - 1\Big)$$

$= \frac{1}{1-\lambda t}$, $t<\frac{1}{\lambda}$, $t\ge\frac{1}{\lambda}$인 경우에는 $E(e^{tX})$가 정의 X.

$\frac{1}{\lambda}$가 양의 값을 가지므로 $\frac{1}{\lambda}>0$, $-\frac{1}{\lambda}<t<\frac{1}{\lambda}$를 만족. 즉 지수분포는 적률생성함수가 존재한다.

E.2.50

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{tz}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}+tz}dz = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-t)^2}{2}+\frac{t^2}{2}}dz$$

$$= e^{t^2}\underbrace{\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}dz}_{\to N(t,1)} = e^{t^2}$$

E.2.51

$X\sim GAM(k,\theta)$의 적률생성함수.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^\infty e^{tx}\cdot\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}x^{k-1}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}I(x>0)\,dx = \frac{1}{\theta^k\Gamma(\theta)}\int_0^\infty e^{tx}\cdot x^{k-1}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$= \frac{1}{\theta^k\Gamma(\theta)}\int_0^\infty x^{k-1}\cdot \underline{e^{(t-\frac{1}{\theta})x}}\,dx = \frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_0^\infty\Big(\frac{u}{\frac{1}{\theta}-t}\Big)^{k-1}\cdot e^{-u}\cdot\Big(\frac{1}{\theta}-t\Big)^{-1}du$$

$u = -(t-\frac{1}{\theta})x$ 이라고 변환.

$$= \frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_0^\infty u^{k-1}\cdot\Big(\frac{1}{\theta}-t\Big)^{-k+1}\cdot e^{-u}\cdot\Big(\frac{1}{\theta}-t\Big)^{-1}du$$

$x = \frac{u}{-(t-\frac{1}{\theta})}$

$$= \frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\cdot\Big(\frac{1}{\theta}-t\Big)^{-k}\int_0^\infty u^{k-1}\cdot e^{-u}du$$

$du = -(t-\frac{1}{\theta})dx$

$$= \frac{1}{\cancel{\theta^k}}\cdot\frac{\cancel{\theta^k}}{(1-\theta t)^k}\cdot\underbrace{\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\infty u^{k-1}\cdot e^{-u}du}_{\to\Gamma(k)}$$

적분이 수렴하려면 $t<\frac{1}{\theta}$이어야 한다.

$$= (1-\theta t)^{-k},\quad t<\frac{1}{\theta}$$

$GAM(k,\theta) = \frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_0^\infty x^{k-1}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}dx$ 과 비교하다.

$U\sim GAM(k,1)$의 pdf는 $\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\infty u^{k-1}\cdot e^{-u}du$이다.

즉 $\int_0^\infty u^{k-1}\cdot e^{-u}du = \Gamma(k)$이다.

정리. 2.27

$M_X^{(r)}(0)=E(X^r)$ 이 성립한다.

즉 적률생성함수의 $t=0$에서의 r차 미분값이 r차 적률과 동일하다.

증명.

$$M_X^{(2)}(0)=\frac{d^2}{dt^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\cdot f_X(x)\,dx\Big|_{t=0}=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2}{dt^2}\cdot e^{tx}\Big|_{t=0}}\cdot f_X(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot e^{tx}\Big|_{t=0}\cdot f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_X(x)\,dx=E(X^2)$$

미분과 적분의 순서를 바꿀 때
적률생성함수가 존재하면 바꿀 수 있다.

정리. 2.28

X와 Y가 같은 적률생성함수를 가지면 두 확률변수는 같은 확률분포함수를 가진다.

↳ 분포의 형태는 적률에 의하여 표현된다. → 적률생성함수를 이용하여 변수변환을 쉽게 수행할 수 있다.

E. 2.54

$X\sim N(0,1)$을 따른다. $Y=X^2$의 분포를 구하여라.

$$M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{tX^2})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(1-2t)\cdot x^2}dx$$

$(1-2t)^{-1}=\sigma^2$ 으로 치환.

$(1-2t)^{-\frac{1}{2}}=\sigma$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\sigma^2}}\cdot\sigma\,dx=(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\sigma^2}}dx}_{N(0,(1-2t)^{-1})}$$

$$=(1-2t)^{-\frac{1}{2}},\quad t<\frac{1}{2}$$

E. 2.55

$X\sim GAM(k,\theta)$, $Y=\frac{2X}{\theta}$의 분포는?

$$M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{\frac{2t}{\theta}X})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{2tx}{\theta}}\cdot\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\cdot x^{k-1}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}I(x>0)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^k\cdot\Gamma(k)}\cdot x^{k-1}\cdot e^{\frac{(2t-1)}{\theta}\cdot x}dx$$

$x=\frac{-\theta}{2t-1}u$

$-\frac{2t-1}{\theta}x=u\Rightarrow-\frac{2t-1}{\theta}dx=du$

$\Rightarrow dx=\frac{-\theta}{2t-1}du$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\cdot\left(\frac{\theta u}{1-2t}\right)^{k-1}\cdot e^{-u}\cdot\frac{\theta}{1-2t}du$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\cdot\theta^{k-1}\cdot u^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k-1}\cdot e^{-u}\cdot\theta\cdot\frac{1}{1-2t}du$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\theta^k\cdot\left(\frac{1}{1-2t}\right)^k\cdot u^{k-1}\cdot e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\cdot\theta^k\cdot\left(\frac{1}{1-2t}\right)^k\cdot\int_0^{\infty}u^{k-1}\cdot e^{-u}du=\cancel{\frac{1}{\theta^k}}\cdot\cancel{\theta^k}\cdot(1-2t)^{-k}$$

$$=(1-2t)^{-k}$$

정리. 2.29

(1) 확률변수 X의 mgf가 $M_X(t)$일 때 $Y=aX+b$의 mgf는 $M_Y(t)=e^{bt}M_X(at)$이다

(1) 확률변수 X의 mgf가 $M_X(t)$라면 $Y=aX+b$의 mgf는 $M_Y(t)=e^{bt}M_X(at)$이다.

(2) 독립인 $X_1,\dots,X_n$이 각각 mgf를 가진다면 $Y=X_1+\cdots+X_n$의 mgf는 $M_Y(t)=M_{X_1}(t)\times\cdots\times M_{X_n}(t)$

<증명>

(1) $M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{t(aX+b)})=E(e^{taX}\cdot e^{tb})=e^{tb}\cdot E(e^{taX})=e^{tb}\cdot M_X(at)$

(2) $M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{t(X_1+\cdots+X_n)})=E(e^{tX_1}\times\cdots\times e^{tX_n})=E(e^{tX_1})\times\cdots\times E(e^{tX_n})$

$=M_{X_1}(t)\times\cdots\times M_{X_n}(t)$

E. 2.56

$X_1,\cdots,X_n$이 모두 독립. X는 베르누이를 따른다.

$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0,1}e^{tx}\cdot p^x(1-p)^{1-x}=pe^t+(1-p)$

$Y=X_1+\cdots+X_n$ $\quad M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{tX_1}\times\cdots\times e^{tX_n})=E(e^{tX_1})\times\cdots\times E(e^{tX_n})$

$=M_{X_1}(t)\times\cdots\times M_{X_n}(t)=(pe^t+(1-p))^n$

E. 2.57

$X_1,\cdots,X_n$이 독립, $X\sim POI(\lambda)$.

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^x}{x!}}_{\text{매클로린 급수 } e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}=e^{-\lambda}\cdot e^{e^t\cdot\lambda}=e^{\lambda(e^t-1)}$$

$Y=X_1+\cdots+X_n$

$M_Y(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda_i(e^t-1)}=e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(e^t-1)}$ $\quad Y\sim POI(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$

↳ 평균이 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$인 포아송 확률변수의 적률생성함수.

E. 2.58

$X_1,\cdots,X_n$이 독립, $\quad X\sim EXP(\lambda)$

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\frac{(1-t\lambda)}{\lambda}x}=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{1-t\lambda}\cdot\frac{1-t\lambda}{\lambda}\cdot e^{-\frac{(1-t\lambda)}{\lambda}x}dx$$

$$=\frac{1}{1-t\lambda}\int_0^\infty\frac{1-t\lambda}{\lambda}e^{-\frac{(1-t\lambda)}{\lambda}x}dx=(1-\lambda t)^{-1},\ t<\frac{1}{\lambda}$$

$Y=X_1+\cdots+X_n$

$M_Y(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)=\left(\frac{1}{1-\lambda t}\right)^n,\ t<\frac{1}{\lambda}$

↳ $GAM(n,\lambda)$의 mgf. $\quad Y\sim GAM(n,\lambda)$

E.2.59

$X_1,\cdots,X_n$ 독립. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx$ $\qquad \frac{x-\mu}{\sigma}=z.\ \ \underline{x=z\sigma+\mu}$

$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx(z\sigma+\mu)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\cancel{\sigma}dz$ $\qquad \frac{1}{\sigma}\cdot dx=dz$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(z\sigma+\mu)}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=e^{\mu t}\cdot M_Z(\sigma t)=e^{\mu t}\cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2t^2}=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

$Y=\sum_{i=1}^n a_iX$ 라고 한다면 $\quad M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{t\cdot\sum_{i=1}^n a_iX})=\prod_{i=1}^n M_{a_iX_i}(t)$

$=e^{\sum_{i=1}^n a_i\mu_i t+\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}a_i^2\sigma_i^2t^2}$

즉, $N(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)$의 적률생성함수. $\quad Y\sim N(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)$

· 결합 적률생성함수.

$X=(X_1,\cdots,X_n)$의 결합 적률생성함수는 다음과 같이 정의된다.

$M_X(t)=E(e^{\sum_{i=1}^k t_iX_i})$

X와 Y가 독립일 필요충분조건은 결합적률생성함수가 각각의 적률생성함수의 곱과 같다는 것이다.

X,Y가 독립이라면 $\quad M_{X,Y}(t_1,t_2)=M_X(t_1)\times M_Y(t_2)$ 가 성립한다.

E.2.60

$X=(X_1,X_2,X_3)\sim MULT(n,p_1,p_2,p_3)$라고 하자.

$M_X(t)=E(e^{\sum_{i=1}^3 t_iX_i})=\sum_{\text{모든 } x_1,x_2,x_3}\sum\sum e^{tx}\cdot p^x(1-p)^{1-x}=(e^{t_1}p_1+e^{t_2}p_2+e^{t_3}p_3)^n$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (단, $p_1+p_2+p_3=1$)

$M_{X_1}(t_1)=M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,0,0)=(e^{t_1}p_1+(1-p_1))^n$ 즉 $X_1\sim B(n,p_1)$

· 확률생성함수.

이산형 확률변수 X의 확률생성함수는 $G_X(s)=E(s^X)=\sum_{j=0}^{\infty}p_js^j$ 로 정의된다.

확률생성함수(pgf)는 이산형 확률변수의 확률분포를 표현하는 도구이다. 이산형의 pdf를 특성화하기 위해 사용됨. 주로 확률변수의 분포에 대한 정보를 분석하거나 기댓값, 분산 등 통계적 특성을 계산하는데 사용.

1. $E(X) = G_X'(1) = \frac{d}{ds}G_X(s)\Big|_{s=1}$

2. 서로 독립인 확률변수 X와 Y의 합인 $Z = X + Y$의 pdf는 $G_Z(s) = G_X(s) \times G_Y(s)$ 이다.

3. $p(X=k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}G_X(s)\Big|_{s=0}$