〈확률 이론〉

결정모형 (deterministic model) vs 확률모형 (statistics model)

반복시행할 때마다 같은 결과가 나오는 모형 ↳ 반복시행할 때마다 다른 결과가 나오는 모형

↳ 결과가 확률에 의해 결정되는 모형.

"비결정 수리모형으로 통계적 정착성을 규명하기 위하여 확률모형을 고려하기로 한다"

↳ 큰 샘플이나 반복적인 관찰에서 데이터가 일정한 패턴이나 규칙을 따르게 되는 경향.

↳ 무작위로 보이는 데이터에서 일정한 패턴을 찾기위해 확률을 이용한 수학적 모델링을 하겠다.

〈용어정리〉

- 실험 : 어떤 현상의 관찰결과를 얻기위한 과정.
- 표본공간 : 모든 관찰가능한 결과의 집합
- 사건 : 표본공간의 부분집합.

E. 1.1

동전을 3회 던진다.

표본공간 (S) = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

2회 앞면이 나오는 사건 A = {HHT, HTH, THH}

E. 1.2

E. 1.1 실험에서 앞면이 나오는 횟수를 고려하면 $S = \{0, 1, 2, 3\}$

최소한 1번 앞면이 나오는 사건 $A = \{1, 2, 3\}$

E. 1.4

수명시간에 대한 측정 $S = \{x \mid 0 \le x \le \infty\}$

20시간 이상 작동할 사건 $A = \{x \mid x \ge 20\}$

E. 1.5

주사위를 1회 던져 나오는 눈의 수 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

짝수 사건 $A=\{2,4,6\}$ 3의 배수 사건 $B=\{3,6\}$

A와 B의 공통부분 $A\cap B=\{6\}$ A와 B의 합 $A\cup B=\{2,3,4,6\}$

1.2 확률의 정의

확률: 여러 가능한 결과 중 하나가 일어날 가능성을 0과 1사이의 값으로 나타낸 것.

1. 상대도수의 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}=P(A)$: 어떤 실험을 1회 시행하면 표본공간 S안에서 사건 A가 일어나든지 일어나지 않든가 둘 중의 하나가 된다. 이 실험을 n회 반복할 때, 사건 A의 발생횟수가 m이라고 하면 $\frac{m}{n}$이다. $\frac{m}{n}$이 비결정적이지만 n이 커지면 $\frac{m}{n}$의 값은 안정화된다. 이 $\frac{m}{n}$값을 $P(A)$라고 정의한다.

2. 공리적으로 정의 - 콜모고로프
   (1) 임의의 사건 A에 대하여 $P(A)\geq 0$ 이다.
   (2) $P(S)=1$ 이다.
   (3) 표본공간 S에 정의된 사건열 $A_1, A_2, \cdots$ 가 있다고 하자. 이제 모든 $i\neq j$에 대하여 $A_i\cap A_j=\emptyset$ 이라면 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$ 이다.

확률: Sample space의 subset의 모임을 정의역으로 하면서 위 세 공리를 만족하는 함수.

1.3 조건부확률. The probability of an event under the condition that a specific event occurs.

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ B가 일어났다는 것을 알면 B^c는 관심이 없다. 즉 전체 공간이 $P(B)$가 된다.

<조건부확률의 성질>

· $P(A|B)\geq 0$, $P(S|B)=1$, $P(A^c|B)=1-P(A|B)$, $P(\emptyset|B)=0$, $A_1\subset A_2$ 이면 $P(A_1|B)\leq P(A_2|B)$

· $A_1\cap A_2=\emptyset$, $P(A_1\cup A_2|B)=\frac{P[(A_1\cup A_2)\cap B]}{P(B)}=\frac{P((A_1\cap B)\cup(A_2\cap B))}{P(B)}=\frac{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}{P(B)}$

$=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

- $A_1\cap A_2 \neq \emptyset$, $P(A_1\cup A_2|B) = P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1\cap A_2|B)$

E.1.14

w개의 하얀 공, b개의 검은 공. $P(W_1\cap W_2)=?$

$P(W_1\cap W_2) = P(W_1)\times P(W_2|W_1)$ $\qquad P(W_1)=\frac{w}{w+b}$, $P(W_2|W_1)=\frac{w+a}{w+b+a}$

즉, $P(W_1\cap W_2)=\frac{w}{w+b}\times\frac{w+a}{w+b+a}$

$P(B\cap W_2) = P(B)\times P(W_2|B_1)$ $\qquad P(B)=\frac{b}{w+b}$, $P(W_2|B)=\frac{w}{w+b+a}$

즉, $P(B\cap W_2)=\frac{b}{w+b}\times\frac{w}{w+b+a}$

$\underline{P(W_2)=P(W_1\cap W_2)+P(B_1\cap W_2)} = \frac{w}{w+b}\times\frac{w+a}{w+b+a}+\frac{b}{w+b}\times\frac{w}{w+b+a} = \frac{w}{b+w}$ 이다.

즉, $P(W_1)=P(W_2)$가 된다. 같은 방법으로 $P(B_1)=P(B_2)$가 성립.

전확률공식

$P(W_1\cap W_2) = P(W_2)\times P(W_1|W_2) + P(W_2)\times P(B|W_2) = P(W_2)\times\underline{(P(W_1|W_2)+P(B|W_2))} = P(W_2)$

W_2가 발생했다는 가정하에 W_1과 B_1는 배반이기에 $P(W_1|W_2)+P(B_1|W_2)=1$이다.

- 전확률공식

사건 $B_1, B_2, \cdots, B_k$는 상호배반이며 $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$라고 한다.

이때, $P(A)=\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$이 성립한다.

<증명>

$P(A)=P(A\cap S)=P[A\cap(\bigcup_{i=1}^{k}B_i)]=\sum_{i=1}^{k}P[A\cap B_i]=\sum_{i=1}^{k}P(B_i)P(A|B_i)$

E.1.15

Red : 1 white : 9 sampling without replacement, 4번째 추출시 빨간 공이 나올 확률

$P(R_4)=P(W_1\cap W_2\cap W_3\cap R_4)=P(W_1)P(W_2|W_1)P(W_3|W_1\cap W_2)P(R_4|W_1\cap W_2\cap W_3)$

$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{10}$

E.1.16

$P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C) = 0.5\times 0.02+0.3\times 0.05+0.2\times 0.1 = 0.045$.

A,B,C 생산라인이 모두 상호배반이므로 사건 D를 사건 B,C,D로 분할하여 계산이 가능하다.

• 베이즈정리.

$B_i \cap B_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$ 라고 하자.

증명 : $P(B_j|A) = \frac{P(A\cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)}$ 인데 전확률공식에 의해 $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$ 이므로

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$ 이 성립한다.

E. 1.17)

$P(+|A) = 0.95$, $P(+|A^c) = 0.10$, $P(A) = 0.01$

$$P(A|+) = \frac{P(A\cap +)}{P(+)} = \frac{P(A)P(+|A)}{P(A)P(+|A) + P(A^c)P(+|A^c)} = \frac{0.01\times 0.95}{0.01\times 0.95 + 0.99\times 0.10} = 0.088$$

→ 우리가 알고있는 확률로 바꾸는 과정이 중요하다.

E. 1.16.

주머니 1 ⇒ W: 1 B: 4 주머니 2 ⇒ W: 2 B: 3 주머니 3 ⇒ W: 3 B: 2

사건 A : 하얀 공이 뽑히는 것. 사건 B_i : 주머니 i가 뽑히는 것.

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(W|B_1) + P(B_2)\cdot P(W|B_2) + P(B_3)\cdot P(W|B_3) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(W|B_i)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{2}{5}$$ by 전확률공식

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A\cap B_3)}{P(A)} = \frac{P(B_3)P(A\cap B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(W|B_i)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

→ 알아볼 수 있는 것끼리 풀 해보.

정의 1.5

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ 서로 독립.

E. 1. 19

사건 K: 킹을 뽑는 사건. 사건 D: 다이아몬드를 뽑는 사건.

$P(K\cap D) = P(K)\times P(D) = \frac{1}{13}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{52}$ 이므로 K, D는 독립.

E. 1. 20

$P(C_1\cap C_2) = P(C_1)\times P(C_2)$ $P(C_1\cup C_2) = P(C_1) + P(C_2)$

E.1.21

H_1 : 첫번째 던진 결과가 앞면일 사건. $P(H_1)=P(T_2)=P(H_3)=\frac{1}{2}$

T_2 : 두번째 " 뒷면일 사건 $P(H_1\cap T_2)=P(H_1T_2H_3, H_1T_2T_3)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=P(H_1)\times P(T_2)$

H_3 : 세번째 " 앞면일 사건. $P(H_1\cap H_3)$, $P(T_2\cap H_3)$도 증명하면 된다.

E.1.22

카드의 첫번째 숫자가 1인 사건을 A, 카드의 두번째 숫자가 1인 사건을 B, 세번째 숫자가 1인 사건을 C.

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$ $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{1}{4}$ 이므로 둘씩 짝으로는 독립이다.

하지만 $P(A\cap B\cap C)=\frac{2}{8}$이므로 사건 A, B, C는 독립이 아니다.

1.4. 경우의 수.

이항정리 : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^n\cdot b^{n-k}$

다항정리 : $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n}\binom{n}{r_1,r_2\cdots r_k}a_1^{r_1}a_2^{r_2}\cdots a_k^{r_k}$

E.1.25

n개의 공을 n개의 바구니에 임의로 던질 때, 모든 바구니가 한개씩의 공을 갖게 될 확률

n개의 공을 n개의 바구니에 넣는 경우의 수 : n^n

모든 바구니가 공을 가질 경우의 수 : $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1=n!$ $\therefore \frac{n!}{n^n}$

E.1.26

k개의 공을 n개의 바구니에 넣는 경우의 수 : n^k

하나 이하의 공을 가지는 경우의 수 : $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)={}_nP_k$ $\therefore \frac{{}_nP_k}{n^k}$

E. 1.27

White : 5 Black : 10 사건 A : W=2, B=1

i) Sampling with replacement

$$\frac{5}{15}\times\frac{5}{15}\times\frac{10}{15}\times 3=\frac{3\times 5^2\times 10}{15^3}$$

순서를 고려, 구체적인 순서를 제시 X.

ii) Sampling without replacement

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{\frac{5\times 4}{2!}\times 10}{\frac{15\times 14\times 13}{3!}}=\frac{3\cancel{3!}\times 10\times 5\times 4}{\cancel{2!}\times 15\times 14\times 13}$$

$$=3\times\frac{5}{15}\times\frac{4}{15}\times\frac{10}{13}$$

순서를 고려 X.

순서를 고려하라고 하여도 구체적인 순서를 제시하지 않는다면, 순서를 고려하지 않는 경우와 같다.

순서 고려 X ⇒ 결국 모든 순서를 고려하여 곱을 해야함.

순서 고려 o ⇒ 구체적인 순서를 제시한 사건에는 다른 순서를 고려할 필요가 없음.

E. 1.28

포커에서 스트레이트일 확률은? (스트레이트 플러쉬는 제외)

(에이스, 2, 3, 4, 5) $10\times(4^5-4)$, 전체 경우의 수: $\binom{52}{5}$ $\therefore \frac{10(4^5-4)}{\binom{52}{5}}=0.0039$이다.