# 分治法

## 概述

在计算机科学中，分治法是一种很重要的算法思想。从字面理解，“分治”即“分而治之，逐个击破”，就是把一个较大、较复杂的问题分解为多个规模更小的相同或者相似的子问题，再把子问题进一步分成更小的子问题……，直到最后子问题可以简单的直接求解，将所有子问题的解进行合并即得出原问题的解。很多算法都参照了分治法的思想，如快速排序、归并排序。

## 简介

任何一个可以用计算机求解的问题所需的计算时间都与其规模有关。问题的规模越小，越容易直接求解，解题所需的计算时间也越少。例如，对于n个元素的排序问题：

当n=1时，不需任何计算；

当n=2时，只要作1次比较即可排好序；

当n=3时，只要作3次比较即可……

而当n较大时，问题就不那么容易处理了。要想直接解决一个规模较大的问题，有时是相当困难的。

## 思想

分治法的设计思想是，将一个难以直接解决的大问题，分割成一些规模较小的相同问题，以便各个击破，分而治之。

## 分治策略

对于一个规模为n的问题，若该问题可以容易地解决（比如说规模n较小）则直接解决，否则将其分解为k个规模较小的子问题，这些子问题互相独立且与原问题形式相同，[递归](https://baike.baidu.com/item/%E9%80%92%E5%BD%92)地解这些子问题，然后将各子问题的解合并得到原问题的解。

## 分治与递归

如果原问题可分割成k个子问题，1<k≤n ，且这些子问题都可解并可利用这些子问题的解求出原问题的解，那么这种分治法就是可行的。由分治法产生的子问题往往是原问题的较小模式，这就为使用[递归](https://baike.baidu.com/item/%E9%80%92%E5%BD%92)技术提供了方便。在这种情况下，反复应用分治手段，可以使子问题与原问题类型一致而其规模却不断缩小，最终使子问题缩小到很容易直接求出其解。这自然导致[递归](https://baike.baidu.com/item/%E9%80%92%E5%BD%92)过程的产生。分治与[递归](https://baike.baidu.com/item/%E9%80%92%E5%BD%92)像一对孪生兄弟，经常同时应用在算法设计之中，并由此产生许多高效算法。

## 适用场景

分治法所能解决的问题一般具有以下几个特征：

1）该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决

2）该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题，即该问题具有最优子结构性质。

3）利用该问题分解出的子问题的解可以合并为该问题的解。

4）该问题所分解出的各个子问题是相互独立的，即子问题之间不包含公共的子问题。

上述的第一条特征是绝大多数问题都可以满足的，因为问题的计算复杂性一般是随着问题规模的增加而增加；第二条特征是应用分治法的前提它也是大多数问题可以满足的，此特征反映了递归思想的应用；第三条特征是关键，能否利用分治法完全取决于问题是否具有第三条特征，如果具备了第一条和第二条特征，而不具备第三条特征，则可以考虑用贪心法或[动态规划法](https://baike.baidu.com/item/%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92%E6%B3%95)。第四条特征涉及到分治法的效率，如果各子问题是不独立的则分治法要做许多不必要的工作，重复地解公共的子问题，此时虽然可用分治法，但一般用[动态规划法](https://baike.baidu.com/item/%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92%E6%B3%95)较好。

## 应用步骤

分治法在每一层递归上都有三个步骤：

分解：将原问题分解为若干个规模较小，相互独立，与原问题形式相同的子问题；

解决：若子问题规模较小而容易被解决则直接解，否则递归地解各个子问题；

合并：将各个子问题的解合并为原问题的解。

## 其他

### 各个子问题地规模为多少才最为适用？

答：人们从大量实践中发现，在用分治法设计算法时，最好使子问题的规模大致相同。换句话说，将一个问题分成大小相等的k个子问题的处理方法是行之有效的。许多问题可以取 k = 2。这种使子问题规模大致相等的做法是出自一种平衡(balancing)子问题的思想，它几乎总是比子问题规模不等的做法要好。