

DSP2021 Homework 2

Due date: 11:59pm, Dec. 18, 2021

1. Suppose that three LTI systems are connected in cascade; i.e., the output of S_1 is the input of S_2 , and the output of S_2 is the input of S_3 . The three systems are specified as follows:

$$S_1: y_1[n] = x_1[n] + x_1[n-1],$$

$$S_2: y_2[n] = x_2[n] + 2x_2[n-1] - x_2[n-2],$$

$$S_3: y_3[n] = x_3[n-1] + x_3[n-2],$$

where the input of S_i is $x_i[n]$ and its output is $y_i[n]$.

- (a) Consider the equivalent system that is a single operation from the input $x[n]$ (into S_1) to the output $y[n]$ (the output of S_3). Thus, $x[n]$ is $x_1[n]$ and $y[n]$ is $y_3[n]$. Write down the **impulse response** of this system.

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$h_3[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$\Rightarrow h_1[n] * h_2[n] = \frac{\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3]}{\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3]}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (h_1[n] * h_2[n]) * h_3[n] \\ &= \frac{\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \delta[n-3] - \delta[n-4]}{\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 4\delta[n-4] - \delta[n-5]} \\ &\quad \delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \delta[n-5] \# \end{aligned}$$

- (b) Is this system **FIR** or **IIR**? Explain your answer.

由於(a)題可知, $y[n] = x[n-1] + 4x[n-2] + 4x[n-3] - x[n-5]$

現在的 output 是由現在以及有限個過去的 input 的線性組合所組成

因此為 FIR system。

但同時也可以解讀為：由於現在的 input 是過去的 output，且過去的

input 是再上一個的 output，因此過去的 output 被遞迴使用。總結即

是：現在的 output 可以是「現在 + 過去的 input」，以及「過去的

output」的線性組合， $y[n]$ 可以被寫成以下形式，所以也是 IIR system。

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b[k]x[n-k] + \sum_{k=1}^N a[k]y[n-k]$$

2. Consider the same LTI system above.

- (c) Write down the **frequency response** of this LTI system.

$$e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega} + 4e^{-j3\omega} - e^{-j5\omega}$$

- (d) Is this a **causal system**? Explain your answer.

因為 $y[n]$ 只會用到現在與過去的 input，不會參考到未來的 input，因

此是一個 causal system。