Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической логики и высшей алгебры

Направление: прикладная математика и информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Тема:
«Исследование одного класса стохастических КС-грамматик с разложимой матрицей первых моментов»

Заведующий кафедрой:
Д. ф.-м. н. Шевченко Валерий Николаевич

Выполнил: студент группы 84-03
Мартынов Игорь Михайлович

Нижний Новгород
2011

1 Основные определения

Стохастической КС-грамматикой называется система $G =< V_T, V_N, R, s >$, где V_T и V_N — алфавиты терминальных и нетерминальных символов (*терминалов* и *нетерминалов*) соответственно, s — аксиома грамматики, R — множество правил вывода, представимое в виде $R = \cup_{i=1}^{k} R_i$, где $k = |V_N|$, и R_i — множество правил вида

$$r_{ij} : A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij} \quad (A_i \in V_N, \beta_{ij} \in (V_N \cup V_T)^*)\,, \tag{1}$$

и p_{ij} — вероятность применения правила r_{ij}, причём при фиксированном i вероятности r_{ij} задают вероятностное распределение на множестве R_i:

$$0 < p_{ij} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

где $n_i = |R_i|$.

Слово β называется *непосредственно выводимым* из α (обозначается $\alpha \Rightarrow \beta$), если существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_N)^*$, для которых $\alpha = \alpha_1 A_i \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \beta_{ij} \alpha_2$ и в R имеется правило $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij}$.

Через $\Rightarrow_*$ обозначим рефлексивное транзитивное замыкание $\Rightarrow$. Если $\alpha \Rightarrow_* \beta$, говорят, что β *выводимо* из α. Язык L_G, *порождаемый* грамматикой G определяется как множество слов $\alpha \in V_T^*$, выводимых из аксиомы s грамматики G.

Последовательность правил грамматики $\omega(\alpha) = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$, последовательное применение которых к s даёт слово α, называется *выводом* этого слова. Если на каждом шаге правило применяется к самому левому нетерминалу в слове, вывод назвается *левым*.

Вероятность вывода определяется как $p(\omega(\alpha)) = p(r_1) \cdot p(r_2) \cdot \ldots \cdot p(r_k)$, где $p(r_i)$ — вероятность соответствующего правила. Вероятность слова определяется как сумма вероятностей всех его левых выводов.

Грамматика G называется *согласованной*, если

$$\sum_{\alpha \in L_G} p(\alpha) = 1. \tag{3}$$

Согласованная грамматика G задаёт распределение вероятностей P на L_G, и определяет *стохастический КС-язык* $\mathfrak{L} = (L, P)$. В дальнейшем всюду предполагается, что грамматика согласованна.

По выводу слова может быть построено *дерево вывода*. В корень дерева помещается аксиома s, далее на каждом ярусе дерева ко всем нетерминалам этого яруса применяется правило, соответствующее выводу. Символы этого слова записываются слева направо в дереве, присоединяясь к исходному нетерминалу как к родителю.

Обозначим D_l^t — множество деревьев вывода высоты t, порождаемых грамматикой G при замене её аксиомы на A_l. Аналогично, $D_l^{\leqslant t}$ — множество деревьев вывода, высота которых не превосходит $t-1$.

Для исследования вероятностных характеристик стохастической КС-грамматики применяются производящие функции

$$F_i(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij} \in R}}^{n_i} p_{ij} s_1^{l_1} s_2^{l_2} \ldots s_k^{l_k}, \tag{4}$$

где $l_m = l_m(i,j)$ — число вхождений нетерминала A_m в β_{ij}.

Величины

$$a_j^i = \left. \frac{\partial F_i(s_1, s_2, \ldots, s_k)}{\partial s_j} \right|_{s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 1} \tag{5}$$

называются *первыми моментами* грамматики G. Матрица $A = (a_j^i)$ называется *матрицей первых моментов* грамматики G.

Матрица A, по построению, неотрицательна. По теореме Фробениуса, доказанной в [1], существует максимальный по модулю вещественный неотрицательный собственный корень r. Известно, что критерием согласованности стохастической КС-грамматики при отсутствии бесполезных нетерминалов является условие $r \leqslant 1$.

Говорят, что нетерминал A_j *непосредственно следует* за нетерминалом A_i (обозначается $A_i \to A_j$), если в R имеется правило $A_i \overset{(}{\to} p_{ij})\alpha_1 A_j \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_T)^*$. Транзитивное замыкание отношения $\to$ обозначается $\to_*$. Если $A_i \to_* A_j$, говорят, что A_j *выводится* из A_i.

Введём также отношение $\leftrightarrow_*$. Будем считать, что $A_i \leftrightarrow_* A_j$, если одновременно $A_i \to_* A_j$ и $A_j \to_* A_i$. Очевидно, отношение $\leftrightarrow_*$ есть отношение эквивалентности, и потому разбивает множество нетерминалов на классы $V_N = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m : K_i \cap K_j = \varnothing (i \neq j)$. Класс, содержащий ровно один нетерминал, будем называть *особым*. Множество классов $\{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ обозначим $\mathcal{K}$.

Если все нетерминалы грамматики образуют один класс, она называется *неразложимой*. В противном случае она называется *разложимой*. Очевидно, разложимой грамматике соответствует разложимая [1] матрица первых моментов.

Говорят, что класс K_j *непосредственно следует* за классом K_i (обозначается $K_i \prec K_j$), если существуют $A_1 \in K_i$ и $A_2 \in K_j$ такие, что $A_1 \to A_2$. Рефлексивное транзитивное замыкание $\prec$ обозначим $\prec_*$, и назовём отношением *следования*.

Будем говорить, что грамматика имеет вид *«цепочки»*, если она разложима, и граф, построенный на множестве $\mathfrak{K}$ по отношению $\prec$, имеет вид P_m. Пронумеруем классы грамматики таким образом, что $K_i \prec K_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, m-1$. Пронумеруем нетерминалы так, что для любых $A_i \in K_p$ и $A_j \in K_q$ условия $i < j$ и $p < q$ равносильны. После этого матрица первых моментов грамматики приобретает вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m,m} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Блоки $A_{i,i}(i = 1, 2, \ldots, m)$ являются неразложимыми неотрицательными матрицами. Не уменьшая общности, будем считать их положительными и непериодичными [1]. Этого можно добиться с помощью метода укрупнения правил грамматики. Пусть r_i — перронов корень матрицы $A_{i,i}$. По построению матрицы A, $r = \max_i\{r_i\}$ и $r > 0$.

2 Свойства матрицы первых моментов

Обозначим $J = \{i : r_i = r\}$ — множество индексов i, таких что перронов корень матрицы A_i равен r. Обозначим $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$ причём $i_1 < i_2 < \ldots < i_q$ Разобьём множество классов $\mathcal{K}$ на группы классов $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_w$. При этом $\mathcal{M}_1 = \{K_1, K_2, \ldots, K_{i_1}\}$, и $\mathcal{M}_l = \{K_{i_{l-1}+1}, \ldots, K_{i_l}\}$, где $l > 1$. Нетрудно видеть, что в каждой группе $\mathcal{M}_j$ содержится ровно один класс с номером из J.

Тогда матрицу первых моментов можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{w-1,w-1} & B_{w-1,w} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{w,w} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где B_{ij} — блок, находящийся на пересечении строк, соответствующих нетерминалам классов группы $\mathcal{M}_i$, и столбцов, соответствующим нетерминалам классов группы $\mathcal{M}_j$. Очевидно, каждой из матриц $B_{i,i}$ соответствует перронов корень равный r.

Рассмотрим матрицу

$$A^t = \begin{pmatrix} B_{11}^t & B_{12}^{(t)} & \cdots & B_{1,w-1}^{(t)} & B_{1,w}^{(t)} \\ 0 & B_{22}^t & \cdots & B_{2,w-1}^{(t)} & B_{2,w}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{w-1,w-1}^t & B_{w-1,w}^{(t)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{w,w}^t \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Её вид был установлен в [3], где приведено доказательство для случая $r < 1$, однако при $r = 1$ доказательство остаётся справедливым.

Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 1 *В принятых обозначениях при* $t \to \infty$

$$B_{lh}^{(t)} = H_{lh} \cdot t^{s_{lh}-1} r^t (1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad l \neq h, \tag{9}$$

где H_{lh} *не зависит от* t, *и* s_{lh} — *число классов с номерами из* J *среди* $K_l, K_{l+1}, \ldots, K_h$.

3 Вероятности продолжения

Для получения вероятностей продолжения [2] рассматриваемой стохастической КС-грамматики, определим *производящие функции* следующим образом:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}) &= \sum p_{ij} s_1^{l_i^1} s_2^{l_i^2} \ldots s_{n_i}^{l_i^{n_i}} \\ F(t, \mathbf{s}) &= F(F(t-1, \mathbf{s})) \end{aligned} \tag{10}$$

Раскладывая $F_i(s)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$, получаем:

$$F_i(\mathbf{s}) = F_i(\mathbf{1}) + (\nabla F_i(\mathbf{1}), \mathbf{s} - \mathbf{1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{1})^{\mathrm{T}} \nabla^2 F_i(\mathbf{1})(\mathbf{s} - \mathbf{1}) =$$
$$= 1 + \sum_j a^i_j (s_j - 1) + \frac{1}{2} \sum_{j,l} b^i_{jl}(s_j - 1)(s_l - 1) + \underset{(k \in 1, 2, \ldots, n)}{O} (|s_k - 1|^3) \quad (11)$$

Учитывая

$$F(t + 1, \mathbf{s}) = F(F(t, \mathbf{s})), \quad (12)$$

можно записать рекуррентное соотношение для вероятностей продолжения:

$$Q_i(t + 1) = \sum_j a^i_j Q_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,l} b^i_{j,l} Q_j(t) Q_l(t) + O(|Q^3_k(t)|), \quad (13)$$

где $Q_i(t)$ — вероятность продолжения для деревьев высоты t.

Рассматривая лишь нетерминалы класса с номером m, получим:

$$\underset{i \in I_m}{Q_i}(t + 1) = \sum_{j \in I_m} a^i_j Q_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,l \in I_m} b^i_{jl} Q_j(t) Q_l(t) +$$
$$+ \sum_{j \in I_{m+1}} a^i_j Q_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,l \in I_{m+1}} b^i_{jl} Q_j(t) Q_l(t) -$$
$$- \frac{1}{2} b^i_{jl} Q_j(t) Q_l(t) + \underset{(k \in I_m \cup I_{m+1})}{O} (Q^3_k(t)) \quad (14)$$

Перемножая левый собственный вектор матрицы $A_{m,m}$ ($v^{(m)}$) и вектор $Q^{(m)}(t)$, составленный из вероятностей продолжения $Q_i(t) : i \in I_m$, и полагая $Q^{(m)}_*(t) = (v^{(m)}, Q^{(m)}(t))$, получаем, после преобразований:

$$Q^{(m)}_*(t+1) = r_m Q^{(m)}_*(t) + b_m Q^{(m+1)}_*(t)(1+o(1)) - \frac{1}{2} B_m (Q^{(m)}_*(t))^2 (1+o(1)) \quad (15)$$

Для цепочки, состоящей полностью из классов с перроновым корнем 1, результат известен. Рассмотрим теперь подцепочку классов $K_i, K_{i+1}, \ldots, K_M$, где K_M — последний из классов грамматики. Будем предполагать, что среди $A_i, \ldots, A_M$ есть матрица с перроновым корнем равным 1. Пусть $A_j (j \in i, i + 1, \ldots, M)$ — первая из таких матриц, то есть $r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{j-1}$ меньше 1.

Пусть асимптотика вероятностей продолжения для нетерминалов класса K_j известна: $Q^{(j)} = U_j V_j \cdot t^s(1+o(1))$.

Известно, что асимптотика вероятностей продолжения определяется видом степени матрицы первых моментов, то есть, $Q(t) = A^{t-k}Q(k)(1+o(1))$ для некоторого фиксированного k. Тогда для всех $l \in \{i, i+1, \ldots, j-1\}$

$$Q^{(l)}(t+k) = A^t_{l,l}Q^{(l)}(k) + A^{(t)}_{l,l+1}Q^{(l+1)}(k) + \ldots + A^{(t)}_{l,M}Q^{(M)}(k) \qquad (16)$$

Поскольку в подцепочке $K_i, \ldots, K_{j-1}$ все перроновы корни меньше 1, выполняется неравенство

$$A^t_{l,l}Q^{(l)}(k) + A^{(t)}_{l,l+1}Q^{(l+1)}(k) + \ldots + A^{(t)}_{l,j-1}Q^{(j-1)}(k) \leq O(r^t) \quad \text{при} \quad r < 1 \qquad (17)$$

Это следует сразу из вида матрицы A^t. Кроме того $A^{(t)}_{l,h} = H_{l,h}t^{s_{lh}-1}(1+o(1))$ и $A^{(t)}_{j,h} = H_{j,h}t^{s_{jh}-1}(1+o(1))$, где $j \leq h \leq M$ и s_{ab} — число классов с максимальным перроновым корнем в подцепочке $K_a, \ldots, K_b$. Поскольку классы с максимальным перроновым корнем содержатся только в подцепочке $K_j, \ldots, K_M$, матрицы $A^{(t)}_{l,h}$ и $A^{(t)}_{j,h}$ имеют одинаковую асимптотику. Отсюда, $Q^{(l)} = O(t^s)$.

В ходе доказательства в [3] показано, что $\forall h \in \{j, j+1, \ldots, M\} \quad A^{(t)}_{l,h} = UV_{lh} \cdot t^{s_{lh}-1}(1+o(1))$, где $U = (r_l E - A_{l,l})^{-1}A_{l,l+1} \ldots A_{j-2,j-1}(r_{j-1}E - A_{j-1,j-1})^{-1}A_{j-1,j}u^{(j)}$, и соответственно, компонетны вектора $Q^{(l)}$ пропорциональны компонетнам U.

Объединяя результаты докритического случая, случая цепочки, полностью состоящей из критических классов, и полученные здесь, можно записать общий вид вероятностей продолжения для грамматики в виде цепочки.

Теорема 2 *Пусть грамматика имеет вид цепочки. Пусть также $Q_i(t)$ — вероятности продолжения для деревьев высоты не менее t, и $P_i(t) = Q_i(t) - Q_i(t-1)$. Тогда*

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= c_\mu U^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} t^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}} \\ P_n(t) &= d_\mu U^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} t^{-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}}, \end{aligned} \qquad (18)$$

где $n \in I_\mu$, c_μ и d_μ заданы.

4 Математические ожидания числа применений правила в деревьях вывода

Обозначим через $q_{ij}^l(t,\tau)$ и $\bar{q}_{ij}^l(t,\tau)$ случайные величины, равные числу применений правила r_{ij} в дереве вывода, соответственно, из D_l^t и $D_l^{\leqslant t}$. Пусть также

$$\begin{array}{c} S_{ij}^l(t) = \sum\limits_{\tau=1}^{t-1} q_{ij}^l(t,\tau) \\ \bar{S}_{ij}^l(t) = \sum\limits_{\tau=1}^{t-1} \bar{q}_{ij}^l(t,\tau) \end{array}, \tag{19}$$

и $S_{ij}^l(t)$, $\bar{S}_{ij}^l$ — соответственно число применений правила r_{ij} в дереве из D_l^t, $D_l^{\leqslant t}$. Для удобства записи положим

$$\begin{array}{c} S_{ij}(t) = S_{ij}^1(t), \quad \bar{S}_{ij}(t) = \bar{S}_{ij}^1(t) \\ q_{ij}(t,\tau) = q_{ij}^1(t,\tau), \quad \bar{q}_{ij}(t,\tau) = \bar{q}_{ij}^1(t,\tau) \end{array}. \tag{20}$$

Рассмотрим математические ожидания некоторых из введённых величин. Обозначим

$$M_{ij}^l(t) = M[S_{ij}^l(t)], \quad \bar{M}_{ij}^l(t) = M[\bar{S}_{ij}^l(t)]. \tag{21}$$

Задача данного раздела заключается в вычислении $\bar{M}_{ij}^l(t)$, $M_{ij}^l(t)$ для грамматик в виде «цепочки». Для их нахождения будет удобно использовать три леммы, доказанные в [4].

Лемма 1 *Пусть s,d — натуральные, $m = (m_1,\ldots,m_s)$ — вектор целых неотрицательных чисел, $y = (y_1,\ldots,y_s)$ — вектор, и $\bar{m} = \sum_{j=1}^s m_j$. Тогда*

$$(1-y_1)^{n_1}\ldots(1-y_s)^{n_s} = \sum_{\substack{\bar{m}<d \\ m\geqslant 0}} \binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\cdots\binom{n_s}{m_s}(-1)^{\bar{m}}y^m + R_d(n_1,\ldots,n_s,y), \tag{22}$$

где $y^m = y_1^{m_1}\ldots y_s^{m_s}$, и остаточный член представим в виде

$$R_d(n_1,\ldots,n_s,y) = \sum_{\substack{\bar{m}=d \\ m\geqslant 0}} (-1)^d \varepsilon_m(n_1,\ldots,n_s,y)y^m, \tag{23}$$

причём

$$0 \leqslant \varepsilon_m(n_1,\ldots,n_s,y') \leqslant \varepsilon_m(n_1,\ldots,n_s,y) \leqslant \binom{n_1}{m_1}\cdots\binom{n_s}{m_s} \tag{24}$$

при $0 \leqslant y_i \leqslant y_i' \leqslant 1 \quad (i=1,\ldots,s)$.

Лемма 2 *Пусть* $A(t)$ *— последовательность матриц размером* $k \times k$, *и* $A(t) \to A$ *при* $t \to \infty$, *причём* $A > 0$, *и её перронов корень* $r = 1$. *Пусть* $b(t) = bt^{\alpha}(1+o(1))$ *— последовательность векторов длины* k, *где* $b \geqslant 0$, $b \neq 0$, *и* α *— действительное число. Тогда для последовательности векторов* $x(t)$ *при* $t = 1,2,\ldots$, *определяемой рекуррентным соотношением* $x(t) = b(t) + A(t)x(t-1)$ *при* $t \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\frac{x_i(t)}{vx(t)} \to u_i, \tag{25}$$

при условии что $x(t_0) > 0$ *для некоторого номера* t_0, *где* $u, v > 0$ *— соответственно правый и левый собственные векторы матрицы* A *при нормировке* $vu = 1$.

Лемма 3 *Пусть последовательность* x_t, $x_t > 0$ *при любом* $t \geqslant 0$, *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$x_{t+1} = at^{\alpha}(1+\varepsilon_1(t)) + (1 - bt^{\beta}(1+\varepsilon_2(t)))x_t, \tag{26}$$

где $\beta < 0$, $b > 0$, *и* $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) = o(1)$ *при* $t \to \infty$. *Тогда верны следующие асимптотические равенства:*

$$\begin{aligned} &(1)\ x_t = \frac{at^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad \beta < -1,\ \alpha \geqslant 0 \\ &(2)\ x_t = \frac{at^{\alpha+1}}{\alpha+b+1}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad \beta = -1,\ \alpha > -1 \\ &(3)\ x_t = \frac{at^{\alpha-\beta}}{b}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad -1 < \beta < 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Вначале рассмотрим $\bar{M}_{ij}^{q}(t)$. Пусть $p(\cdot)$ — условная вероятность дерева d в грамматике G, при условии что $d \in D_q^{\leqslant t}$. Рассмотрим множество $D_{ql}^{\leqslant t}$

деревьев из $D_q^{\leqslant t}$, первый ярус которых получен применением правила r_{ql} к корню дерева. Пусть

$$\bar{P}_{ql}^{ij}(t) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} p(d) q_{ij}(d), \tag{28}$$

где $q_{ij}(d)$ — число применений правила r_{ij} в дереве d, и $\bar{P}_{ql}^{ij}(t)$ — вклад деревьев из $D_{ql}^{\leqslant t}$ в матожидание $\bar{M}_{ij}^{q}(t)$. Для краткости, обозначим $\bar{P}_{ql} = \bar{P}_{ql}^{ij}$. Тогда, очевидно,

$$\bar{M}_{ij}^{q}(t) = \sum_{l=1}^{n_q} \bar{P}_{ql}(t). \tag{29}$$

Рассмотрим величину $\bar{P}_{ql}(t)$. Пусть

$$q_{ij}(d) = q_{ij}^{(1)}(d) + q_{ij}^{(2)}(d), \tag{30}$$

где $q_{ij}^{(1)}(d)$ — число применений правила r_{ql} в дереве d на первом его ярусе, а $q_{ij}^{(2)}(d)$ — на остальных ярусах. Тогда

$$\bar{P}_{ql}(t) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} p(d) q_{ij}(d) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} p(d) q_{ij}^{(1)}(d) + \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} p(d) q_{ij}^{(2)}(d) = \bar{P}_{ql}^{(1)}(t) + \bar{P}_{ql}^{(2)}(t) \tag{31}$$

Очевидно, $q_{ij}^{(1)}(d) = \delta_i^q \delta_j^l$ (где $delta$ — символ Кронекера), и следовательно, учитывая что $p(\cdot)$ — условные вероятности, получаем

$$\bar{P}_{ql}^{(1)}(t) = \delta_i^q \delta_j^l \frac{p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1)}{1 - Q_q(t)}, \tag{32}$$

где $Q_X(t)$ — вероятность наборов деревьев вывода высоты не превосходящей $t-1$, набор корней которых задан характеристическим вектором $X \in \mathbb{N}^k$.

Обозначим также $\delta^i(n) = (\delta_k^i)|_{i=\overline{1,n}} \in \{0,1\}^n$.

Условную вероятность дерева $p(d)$ при $d \in D_{ql}^{\leqslant t}$ можно выразить как

$$p(d) = \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} p_1(d) p_2(d) \ldots p_{\bar{s}_{ql}}(d), \tag{33}$$

где $p_j(d)$ — вероятность поддерева d с корнем в j-м узле первого яруса. Тогда

$$\bar{P}_{ql}^{(2)}(t) = \frac{p_{ql}}{1-Q_q(t)} \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} \prod_{n=1}^{\bar{s}_{ql}} p_n(d) \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} q_{ij}'^{m}(d), \tag{34}$$

где $q_{ij}'^{m}(d)$ — число применений правила r_{ij} в поддереве дерева d с корнем в m-том нетерминале первого яруса.

Выделим в d поддеревья $d_1, d_2, \ldots, d_{\bar{s}_{ql}}$, где d_j — поддерево с корнем в j-м узле первого яруса d. Преобразуя (34), получаем

$$\bar{P}_{ql}^{(2)}(t) = \frac{p_{ql}}{1-Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} \left(\prod_{n=1}^{\bar{s}_{ql}} p_n(d) \right) q_{ij}'^{m}(d) =$$

$$= \frac{p_{ql}}{1-Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} \sum_{d_1,\ldots,d_{m-1},d_{m+1},\ldots,d_{\bar{s}_{ql}}} p_1(d_1)\ldots p_{m-1}(d_{m-1}) p_{m+1}(d_{m+1}) \ldots p_{\bar{s}_{ql}}(d_{\bar{s}_{ql}}) q_{ij}'^{m}(d) =$$

$$\frac{p_{ql}}{1-Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} Q_{s_{ql}-\delta^m} q_{ij}(d_m) = \frac{p_{ql}}{1-Q_q(t)} \sum_{m=1}^{k} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \tag{35}$$

Зная $\bar{P}_{ql}(t) = \bar{P}_{ql}^{(1)}(t) + \bar{P}_{ql}^{(2)}(t)$, получаем

$$\bar{M}_{ij}^q(t) = \frac{1}{1-Q_q(t)} \left[\delta_i^q p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^{k} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \right] \tag{36}$$

Обозначая

$$\bar{M}_{ij}'^q(t) = \bar{M}_{ij}^q(t)(1-Q_q(t)), \tag{37}$$

имеем

$$\bar{M}_{ij}'^q(t) = \delta_i^q p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^{k} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}'^m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \tag{38}$$

Рекуррентное соотношение (38) является опорной точкой для вычисления $\bar{M}_{ij}^q(t)$. Получим аналогичное уравнение для $M_{ij}^q(t)$.

$M_{ij}^q(t) = \sum_{l=1}^{n_q} P_{ql}(t)$, где $P_{ql}(t)$ — вклад деревьев из D_{ql}^t в $M_{ij}^q(t)$. Аналогично тому, как это сделано в (31), полагаем $P_{ql}(t) = P_{ql}^{(1)}(t) + P_{ql}^{(2)}(t)$. При этом

$$P_{ql}^{(1)}(t) = \delta_i^q \delta_j^l \frac{p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1)}{P_q(t)}, \tag{39}$$

где $R_X(t)$ — вероятность наборов деревьев из $D^{\leqslant t}$, набор корней которых задан характеристическим вектором X, и высота хотя бы одного из которых достигает $t-1$. $P_{ql}^{(2)}(t)$ можно представить в виде

$$P_{ql}^{(2)}(t) = \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} P_{ql}^{(2)m}(t), \tag{40}$$

где $P_{ql}^{(2)m}(t)$ — вклад деревьев с m-м корнем на первом ярусе в $M_{ij}^q(t)$.

Обозначим через S_1 вклад в $P_{ql}^{(2)m}(t)$ наборов деревьев, в которых ярус t достигается деревом с корнем в m-м нетерминале первого яруса. Очевидно,

$$S_1 = \frac{(1 - Q_{z_m}(t-1)) Q_{s_{ql} - \delta^{z_m}}(t-1) M_{ij}^{z_m}(t-1)}{P_q(t)}, \tag{41}$$

где z_m — m-й нетерминал первого яруса.

Пусть S_2 — вклад наборов, где ярус t достигается через другие деревья. Тогда

$$S_2 = \frac{(1 - Q_{z_m}(t-1)) R_{s_{ql} - \delta^m}(t-1) \bar{M}_{ij}^{z_m}(t-1)}{P_q(t)}. \tag{42}$$

В результате, для M_{ij}^q получаем

$$\begin{aligned} M_{ij}^q &= \sum_{l=1}^{n_q} \left(P_{ql}^{(1)}(t) + \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} P_{ql}^{(2)m}(t) \right) = \\ &= \frac{1}{P_q(t)} [\delta_i^q p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^{k} (P_m(t-1) Q_{s_{ql} - \delta^m}(t-1) M_{ij}^m(t-1) + \\ &\qquad + (1 - Q_m(t-1)) R_{s_{ql} - \delta^m}(t-1) \bar{M}_{ij}^m(t-1))] \end{aligned} \tag{43}$$

Таким образом, получено рекуррентное соотношение для $M_{ij}^q(t)$, аналогичное (38).

Из леммы 1 следуют равенства для $Q_X(t$ и $R_X(t)$:

$$\begin{aligned}
Q_X(t) &= \prod_{i=1}^{k}(1-Q_i(t))^{x_i} = 1-\sum_{i=1}^{k}x_iQ_i(t)+\Theta\left(\sum_{i,j=1}^{k}x_ix_jQ_i(t)Q_j(t)\right)\\
R_X(t) &= Q_X(t)-Q_X(t-1) = \sum_{i=1}^{k}x_iP_i(t)+\Theta\left(\sum_{i,j=1}^{k}x_ix_jQ_i(t)Q_j(t)\right)
\end{aligned} \tag{44}$$

Теперь можно приступить к вычислению $\bar{M}'^q_{ij}(t)$ и $M'^q_{ij}(t)$.

4.1 Случай критического класса

Рассмотрим вначале случай, когда $I(q)\in J$.

Пусть $q,i\in I_\mu$. Тогда при $m\in I_\nu:\nu>\mu$ $\bar{M}'^m_{ij}(t)=0$, и для $\bar{M}'^q_{in}(t$ получаем:

$$\bar{M}'^q_{ij}(t)=\delta^i_q p_{ij}Q_{s_{ij}}(t-1)+\sum_{l=1}^{n_q}p_{ql}\sum_{m\in I_\mu}s^m_{ql}\bar{M}'^m_{ij}(t-1)Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \tag{45}$$

Подставляя выражения (44) где это необходимо, и учитывая, что $I(q)\in J$, имеем

$$\bar{M}'^q_{ij}(t)=\delta^i_q+\sum_{m\in I_\mu}\sum_{l=1}^{n_q}p_{ql}s^m_{ql}\bar{M}'^m_{ij}(t-1)-\sum_{m\in I_\mu}\sum_{l=1}^{n_q}p_{ql}s^m_{ql}\bar{M}'^m_{ij}(t-1)\cdot\sum_{n\in I_\mu}(s^n_{ql}-\delta^m_n)Q_n(t-1)(1+o(1)). \tag{46}$$

Непосредственным взятием производных от производящих функций проверяются выражения для первых и вторых моментов:

$$\begin{aligned}
a^q_m &= \sum_{l=1}^{n_q}p_{ql}s^m_{ql}\\
b^q_{mn} &= \sum_{l=1}^{n_q}p_{ql}s^m_{ql}(s^n_{ql}-\delta^m_n)
\end{aligned} \tag{47}$$

Подставляя их в (46), получаем

$$\bar{M}'^q_{ij}(t) = \delta^i_q p_{ij} + \sum_{m \in I_\mu} a^q_m \bar{M}'^m_{ij}(t-1) - \\ - c_\mu t^{\xi(\mu)-1} \sum_{\substack{m \in I_\mu \\ n \in I}} b^q_{mn} u^{I(n)}_{n-k_{I(n)-1}} \bar{M}'^m_{ij}(t-1)(1+o(1)) \quad (48)$$

где $\xi(\mu)$ — число классов с перроновым корнем, равным 1 в цепочке K_μ, $K_{\mu+1}, \ldots, K_m$, и $K_{I(n)} \ni A_n$.

Применяя лемму 2, получаем:

$$\bar{M}'^q_{ij}(t) = u^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} \cdot \sum_{l \in I_\mu} v^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} \bar{M}'^l_{ij}(t) = u^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} M^{(\mu)}_*(t), \quad (49)$$

где $M^{(\mu)}_*(t) = \sum_{l \in I_\mu} v^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} \bar{M}'^l_{ij}(t)$, и $v^{(\mu)}$ — левый собственный вектор матрицы $A_{\mu,\mu}$.

Домножая (48) на $v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}}$ и суммируя по q, получаем:

$$\delta \bar{M}^{(\mu)}_*(t) = v^{(\mu)}_{i-k_{\mu-1}} p_{ij} - c_\mu t^\alpha \sum_{q,m,n \in I_\mu} v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{m-k_{\mu-1}} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} = v^{(\mu)}_{i-k_{\mu-1}} p_{ij} - c_\mu t^\alpha B_\mu, \quad (50)$$

где $\alpha = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi(\mu)-1}$.

Нетрудно видеть, что величина $\bar{M}^{(\mu)}_*(t)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Применяя её, получаем:

$$\begin{array}{l} \bar{M}^{(\mu)}_*(t) = \dfrac{v^{(\mu)}_{i-k_{\mu-1}} p_{ij}}{c_\mu B_\mu + 1} t(1+o(1)), \quad \text{если } \alpha = -1 \\ \bar{M}^{(\mu)}_*(t) = \dfrac{v^{(\mu)}_{i-k_{\mu-1}} p_{ij}}{c_\mu B_\mu} t^{-\alpha}(1+o(1)), \quad \text{если } \alpha > -1 \end{array}, \quad (51)$$

где $\alpha = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi(\mu)-1}$.

Пусть теперь $I(q) < I(i)$ (q и i в различных классах). Тогда $\bar{M}'^q_{ij}(t)$ выражается следующим образом:

$$\bar{M}'^q_{ij}(t) = \delta^i_q p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{m \in I_\mu \cup I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} \bar{M}'^m_{ij}(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \quad (52)$$

Учитывая малость $Q_n(t)$ при $I(n) > I(q)$, получаем

$$\bar{M}_{ij}^{\prime q}(t) = O(p_{ij}) + \sum_{m\in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^{\prime m}(t-1) \cdot \left(1 - \sum_{n\in I_\mu} (s_{ql}^n - \delta_n^m) Q_n(t-1) \right) (1+o(1)) + \\ + \sum_{m\in I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^{\prime m}(t-1)(1+o(1)) \quad (53)$$

Положим, $\bar{M}_{ij}^{\prime m}(t-1) = \overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)}(1+o(1))$. Это выполняется для $\mu+1 = m$, что видно из полученных соотношений (51). Исходя из этого, получим выражение для $\bar{M}_{ij}^{\prime q}(t)$. Подставляя дополнительно выражения для первых и вторых моментов, а также для вероятностей продолжения $Q_n(t-1)$, получаем:

$$\bar{M}_{ij}^{\prime q}(t) = \sum_{m\in I_\mu} a_m^q \bar{M}_{ij}^{\prime m}(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m,n\in I_\mu} b_{mn}^q u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \bar{M}_{ij}^{\prime m}(t-1)(1+o(1)) + \\ + \overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)} \sum_{m\in I_{\mu+1}} a_m^q u_{m-k_\mu}^{(\mu+1)} (1+o(1)) \quad (54)$$

Домножая на $v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}$ и суммируя по q, получаем

$$\delta \bar{M}_*^{(\mu)}(t) = \overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} \left(\sum_{\substack{q\in I_\mu \\ m\in I_{\mu+1}}} v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} a_m^q u_{m-k_\mu}^{(\mu+1)} \right) \cdot t^{\gamma(\mu+1)} - \\ - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \cdot \left(\sum_{q,m,n\in I_\mu} v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} b_{mn}^q u_{m-k_{\mu-1}}^{(\mu)} u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \right) \cdot \bar{M}_*^{(\mu)}(t-1)(1+o(1)) = \\ = \overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} b_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)}(1+o(1)) - c_\mu B_\mu t^{\alpha(\mu)} \bar{M}_*^{(\mu)}(t-1)(1+o(1)) \quad (55)$$

Случай $\alpha(\mu) = -1$ рассматривать не имеет смысла, так как это означает, что не существует критических классов с номерами, превышающими μ. Полагая $\alpha(\mu) > -1$ и применяя лемму 2, получаем

$$\bar{M}_*^{(\mu)}(t) = \frac{\overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} b_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)-\alpha(\mu)}}{c_\mu B_\mu} \quad (56)$$

Из полученных формул (51) и (56) нетрудно получить общее выражение для величины $\bar{M}_*^{(\mu)}(t)$, при условии что грамматика имеет вид «цепочки» и состоит только из критических классов ($J = \{1, 2, \ldots, m\}$).

$$\bar{M}_*^{(\mu)}(t) = \prod_{j=\mu}^{\nu-1} \left(\frac{b_{j+1}}{c_j B_j} \right) \cdot \left(\frac{v_{i-k_{\nu-1}}^{(\nu)} p_{ij}}{c_\nu B_\nu + \delta_\nu^m} \right) \cdot t^{\frac{1}{2}^{m-\nu}\left(2 - \frac{1}{2}^{\nu-\mu}\right)}, \tag{57}$$

где $\mu = I(q)$, $\nu = I(i)$. Подставляя (49), и затем (37), непосредственно получаем

$$\bar{M}_{ij}^q(t) = \frac{u_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}}{1 - Q_q(t)} \prod_{j=\mu}^{\nu-1} \left(\frac{b_{j+1}}{c_j B_j} \right) \cdot \left(\frac{v_{i-k_{\nu-1}}^{(\nu)} p_{ij}}{c_\nu B_\nu + \delta_\nu^m} \right) \cdot t^{\frac{1}{2}^{m-\nu}\left(2 - \frac{1}{2}^{\nu-\mu}\right)} \tag{58}$$

Перейдём к вычислению $M_{ij}^q(t)$. Пусть $I(q) = I(i)$. Полагая $M_{ij}'^q(t) = M_{ij}^q(t) P_q(t)$, из (43) получаем

$$\begin{multline} M_{ij}'^q(t) = O(p_{ij}) t^{\beta(\mu)} + \sum_{m \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m M_{ij}'^m(t-1) - \\ - \sum_{m,n \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m (s_{ql}^n - \delta_n^m) Q_n(t-1) M_{ij}'^m(t-1) + \\ + \sum_{m,n \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m (s_{ql}^n - \delta_n^m) P_n(t-1) \bar{M}_{ij}'^m(t-1) \end{multline} \tag{59}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Q^{(\mu)}(t) &= c_\mu u^{(\mu)} t^{\alpha(\mu)} \\ P^{(\mu)}(t) &= d_\mu u^{(\mu)} t^{\beta(\mu)} \end{aligned} \tag{60}$$

Подставляя выражения (47) для первых и вторых моментов в (59), имеем

$$\begin{multline} M_{ij}'^q(t) = \sum_{m \in I_\mu} a_m^q M_{ij}'^m(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m,n \in I_\mu} b_{mn}^q u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M_{ij}'^m(t-1)(1 + o(1)) + \\ + d_\mu t^{\beta(\mu)} \sum_{m,n \in I_\mu} b_{mn}^q u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \bar{M}_{ij}^m(t-1)(1 + o(1)) \end{multline} \tag{61}$$

Обозначая дополнительно $M_{ij}^q(t) = \mathcal{M}_q t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}}$, а также учитывая $\beta(\mu) = -1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}$ и выражения для первых моментов, получаем

$$M_{ij}'^q(t) = \sum_{m\in I_\mu} a_m^q M_{ij}'^m(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m,n\in I_\mu} b_{mn}^q u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M_{ij}'^m(t-1)(1+o(1)) + \\ + d_\mu \mathcal{M}_\mu t^{-1} \sum_{m,n\in I_\mu} b_{mn}^q u_{m-k_{\mu-1}}^{(\mu)} u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)}(1+o(1)) \quad (62)$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} M_{ij}'^q(t) &= u_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M_*^{(\mu)}(t)(1+o(1)) \\ M_*^{(\mu)}(t) &= \sum_{m\in I_\mu} v_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M_{ij}'^n(t) \end{aligned} \quad (63)$$

Домножая (62) на $v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}$ и суммируя по q, имеем

$$\delta M_*^{(\mu)}(t) = d_\mu \mathcal{M}_\mu B_\mu t^{-1} - c_\mu t^{\alpha(\mu)} B_\mu M_*^{(\mu)}(t-1)(1+o(1)) \quad (64)$$

Применяя лемму 3, получаем в результате

$$M_*^{(\mu)}(t) = \begin{cases} d_\mu \overline{\mathcal{M}}'_\mu B_\mu (1+o(1)), & \text{при } \mu = m, \\ \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}'_\mu}{c_\mu} t^{-1-\alpha(\mu)}(1+o(1)), & \text{при } \mu < m \end{cases} \quad (65)$$

Пусть теперь $I(q) = \mu$, $I(i) = \nu$, $\mu < \nu$, тогда из (43) получаем

$$M_{ij}'^q(t) = \delta_i^q p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{m\in I_\mu \cup I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \cdot [Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) M_{ij}'^m(t-1) + \\ + (1 - Q_m(t-1)) R_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \bar{M}_{ij}^m(t-1)], \quad (66)$$

откуда

$$M_{ij}'^q(t) = O\left(t^{\beta(\mu)}\right) + \sum_m a_m^q M_{ij}'^m(t-1) - \sum_{\substack{m\in I_\mu\cup I_{\mu+1} \\ n\in I_\mu}} b_{mn}^q Q_n(t-1) M_{ij}'^m(t-1)(1+o(1)) + \\ + \left(\sum_{\substack{m\in I_\mu\cup I_{\mu+1} \\ n\in I_\mu}} b_{mn}^q P_n(t-1) \bar{M}_{ij}^m(t-1) \right)(1+o(1)) \quad (67)$$

Можем записать

$$M'^{q}_{ij}(t) = \sum_{m\in I_\mu} a^q_m M'^m_{ij}(t-1) - \sum_{m,n\in I_\mu} b^q_{mn} Q_n(t-1) M'^m_{ij}(t-1)(1+o(1)) + \\ + \sum_{m,n\in I_\mu} b^q_{mn} P_n(t-1) \bar{M}^m_{ij}(t-1)(1+o(1)) \quad (68)$$

Домножая на $v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}}$ и суммируя по q, имеем

$$\delta M^{(\mu)}_*(t) = d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu B_\mu t^{\beta(\mu)+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)}(1+o(1)) - c_\mu B_\mu t^{\alpha(\mu)} \cdot M^{(\mu)}_*(t-1)(1+o(1)) \quad (69)$$

Так как $\mu < m$, $\alpha(\mu) > -1$, поэтому по лемме 3 получаем

$$M^{(\mu)}_*(t) = \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu}{c_\mu} t^{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)} \quad (70)$$

Объединяя результаты (65) и (70), получаем

$$M^{(\mu)}_*(t) = \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu B_\mu}{\delta^m_\mu (c_\mu B_\mu - 1) + 1} \cdot t^{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)}(1+o(1)), \quad (71)$$

после чего из (62)

$$M^q_{ij}(t) = \frac{u^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}}}{P_q(t)} \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu B_\mu}{\delta^m_\mu (c_\mu B_\mu - 1) + 1} \cdot t^{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)}(1+o(1)) \quad (72)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3 *Пусть стохастическая КС-грамматика имеет вид цепочки, и для неё известны вторые моменты b^q_{mn}. Пусть также для перронов корень подматрицы каждого класса равен* 1.

$$M^q_{ij}(t) = \frac{u^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}}}{P_q(t)} \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu B_\mu}{\delta^m_\mu (c_\mu B_\mu - 1) + 1} \cdot t^{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)}(1+o(1)), \quad (73)$$

где

$$B_\mu = \sum_{m,n\in I_\mu} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{m-k_{\mu-1}} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}}, \quad (74)$$

$P_q(t)$ *— вероятности деревьев высоты* t *в данной грамматике, и* c_μ, d_μ *— некоторые константы.*

Список литературы

[1] Гантмахер Ф.Р. **Теория матриц.** — 5-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010 — 560 с.

[2] Севастьянов Б.А. **Ветвящиеся процессы** — М.: Наука, 1971 — 436 с.

[3] Жильцова Л.П. О матрице первых моментов разложимой стохастической КС-грамматики // Учёные записки Казанского государственного университета, 2009

[4] Борисов А.Е. Закономерности в словах стохастических контекстно-свободных языков, порождённых грамматиками с двумя классами нетерминальных символов. Вопросы экономного кодирования.