1 Основные определения

Стохастической КС-грамматикой [3] называется система $G =< V_T, V_N, R, s >$, где V_T и V_N — конечные множества терминальных и нетерминальных символов (терминалов и нетерминалов) соответственно, $s \in V_N$ — аксиома, R — множество правил. Множество R можно представить в виде $R = \cup_{i=1}^{n} R_i$, где n — мощность алфавита V_N и $R_i = \{r_{i1}, \ldots, r_{in_i}\}$. Каждое правило r_{ij} из R_i имеет вид

$$r_{ij} : A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n_i, \tag{1}$$

где $A_i \in V_N$, $\beta_{ij} \in (V_N \cup V_T)^*$ и p_{ij} — вероятность применения правила r_{ij}, причём

$$0 < p_{ij} \leqslant 1, \qquad \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1. \tag{2}$$

Для $\alpha, \gamma \in (V_N \cup V_T)^*$ будем обозначать $\alpha \Rightarrow \gamma$, если существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_T)^*$, для которых $\alpha = \alpha_1 A_i \alpha_2$, $\gamma = \alpha_1 \beta_{ij} \alpha_2$ и в грамматике имеется правило $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij}$. Через $\Rightarrow_*$ обозначим рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow$. Грамматика G задаёт контекстно-свободный язык $L_G = \{\alpha \in V_T^* : s \Rightarrow_* \alpha\}$.

Выводом слова α назовём последовательность правил $\omega(\alpha) = (r_{i_1 j_1}, r_{i_2 j_2}, \ldots, r_{i_q j_q})$, с помощью последовательного применения которых слово α выводится из аксиомы s. Если при этом каждое правило применяется к самому левому нетерминалу в слове, такой вывод называется левым. Для вывода $\omega(\alpha) = (r_{i_1 j_1}, \ldots, r_{i_q j_q})$ определим величину $p(\omega(\alpha)) = p_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_q j_q}$.

Важное значение имеет понятие *дерева вывода* [4]. Дерево вывода для слова α строится следующим образом. Корень дерева помечается аксиомой s. Далее последовательно рассматриваются правила левого вывода слова α. Пусть на очередном шаге рассматривается правило $A_i \xrightarrow{p_{ij}} b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_m}$, где $b_{i_l} \in (V_N \cup V_T)$ $(l = 1, \ldots, m)$. Тогда из самой левой вершины-листа дерева, помеченной символом A_i, проводится m дуг в вершины следующего яруса, которые помечаются слева направо символами $b_{i1}, \ldots, b_{i,m}$ соответственно. После построения дуг и вершин для всех правил в выводе листья дерева помечены терминальными символами (либо пустым словом λ, если применяется правило вида $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \lambda$) и само слово получается при обходе листьев дерева слева направо. *Высотой* дерева вывода будем называть максимальную длину пути от корня к листу.

Обозначим $p(\alpha) = \sum \omega(\alpha)$, где сумма берётся по всем левым выводам слова α. Грамматика G называется *согласованной*, если

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{\alpha \in L_G \\ |\alpha| \leqslant n}} p(\alpha) = 1. \tag{3}$$

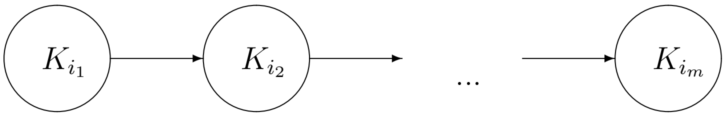
Согласованная грамматика G задаёт распределение вероятностей P на множестве L_G, при этом $p(\alpha)$ — вероятность слова α. Пара $\mathcal{L} = (L_G, P)$ называется *стохастическим КС-языком.* В дальнейшем будем всюду предполагать, что рассматривается согласованная грамматика.

Для нетерминалов A_i, A_j будем обозначать $A_i \to A_j$, если в грамматике имеется правило $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \alpha_1 A_j \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_T)^*$. Рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\to$ обозначим $\to_*$. Если одновременно $A_i \to_* A_j$ и $A_j \to_* A_i$, будем обозначать $A_i \leftrightarrow_* A_j$. Отношение $\leftrightarrow_*$ разбивает множество нетерминалов грамматики на классы

$$K_1, K_2, \dots, K_m. \tag{4}$$

Множества номеров нетерминалов, входящих в класс K_j обозначим через I_j. При $m \geqslant 2$ грамматика называется *разложимой*.

Обозначим $K_i \prec K_j$, если $i \neq j$ и существуют такие $A_1 \in K_i$ и $A_2 \in K_j$, что $A_1 \to A_2$. Будем говорить, что грамматика имеет вид «цепочки», если она разложима, и для множества классов выполняется соотношение $K_1 \prec K_2 \prec \dots \prec K_m$. При этом граф, построенный на множестве классов по отношению $\prec$, имеет вид:



Назовём класс K *особым*, если он содержит ровно один нетерминал A_i, и в грамматике отсутствует правило вида $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \alpha_1 A_i \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_T)^*$. Не уменьшая общности, будем считать, что грамматика не имеет особых классов.

2 Производящие функции. Моменты

Определим многомерные производящие функции [3]:

$$F_i(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} s_1^{l_1} s_2^{l_2} \dots s_k^{l_k} \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

где n_i — число правил вывода в R_i, и $l_m = l_m(i,j)$ — число вхождений нетермина A_m в правую часть правила $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij}$.

Для краткости будем обозначать

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots s_n)^T \\
&F_i(\mathbf{s}) = F_i(s_1, s_2, \dots, s_n) \\
&\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (F_1(\mathbf{s}), F_2(\mathbf{s}), \dots, F_n(\mathbf{s}))^T
\end{aligned}$$

Производящую функцию $F_i(\mathbf{s})$ можно интерпретировать следующим образом. Выберем нетерминал A_i в качестве аксиомы грамматики. Затем применим к нему случайным образом какое-нибудь правило из множетсва R_i согласно распределению вероятностей на этом множестве. В полученной строке подсчитаем количество нетерминалов каждого вида и запишем в виде характеристического вектора $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, где l_j — количество нетерминалов A_j в полученной строке. Каждому характеристическому вектору, который мы можем таким образом получить, функция $F_i(\mathbf{s})$ ставит в соответствие его вероятность p_{ij}.

Степень производящей функции $(F_i(\mathbf{s}))^k$ соответствует ситуации, когда мы строим одновременно k деревьев вывода из нетерминала A_i, в каждом дереве применяя случайным образом одно из правил вывода, и затем подсчитываем количество нетерминалов разных типов в листьях всех деревьев. В самом деле,

$$(F_i(\mathbf{s}))^k = \left(\sum_j p_{ij} s_1^{l_1^{ij}} \dots s_n^{l_n^{ij}}\right)^k = \sum p_{ij_1} p_{ij_2} \dots p_{ij_k} s_1^{l_1^{ij_1}+\dots+l_1^{ij_k}} \dots s_n^{l_n^{ij_1}+\dots l_n^{ij_k}} \tag{5}$$

Каждое слагаемое с коэффициентом $p_{ij_1} \dots p_{ij_k}$ соответствует случаю, когда к дереву вывода с индексом l было применено правило r_{ij_l} $(1 \leqslant l \leqslant k)$. При этом в каждой компоненте характеристического вектора суммируется количество нетерминалов соответствующего типа в каждом из деревьев.

Аналогично, выражение $F_1^{k_1}(\mathbf{s}) \cdot \ldots \cdot F_n^{k_n}(\mathbf{s})$ соответствует случаю, когда одновременно строятся деревья вывода из нетерминалов разных типов, причём деревьев с корнем A_l имеется ровно k_l штук.

Величина

$$\left.\frac{\partial^n F_i(\mathbf{s})}{\partial s_{k_1} \partial s_{k_2} \cdots \partial s_{k_n}}\right|_{\mathbf{s}=\mathbf{1}}$$

где $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$, называется n-м моментом. Поскольку $F_i(\mathbf{s})$ является полиномом, порядок дифференцирования не имеет значения.

Первые и вторые моменты будем обозначать следующим образом.

$$\begin{aligned} a_j^i &= \left.\frac{\partial F_i(s_1, s_2, \dots, s_k)}{\partial s_j}\right|_{s_1=\dots=s_k=1} \\ b_{jl}^i &= \left.\frac{\partial^2 F_i(s_1, s_2, \dots, s_k)}{\partial s_l \partial s_j}\right|_{s_1=\dots=s_k=1} \end{aligned} \tag{6}$$

Определим многомерные производящие функции $F(t, \mathbf{s})$, где $t \geqslant 1$, следующим образом.

$$F_i(t, \mathbf{s}) = \begin{cases} F_i(\mathbf{s}), & t = 1 \\ F_i(t-1, \mathbf{F}(\mathbf{s})), & t > 1 \end{cases}$$

Функцию $F_i(t, \mathbf{s})$ можно интерпретировать следующим образом. Выберем в качестве аксиомы грамматики нетерминал A_i и будем строить дерево вывода. На каждом шаге в уже построенном дереве выберем какой-нибудь нетерминал A_k, находящийся на ярусе выше t, применим к нему какое-нибудь правило r_{kj} из R_k в соответствии с распределением вероятностей и добавим символы β_{kj} в качестве потомков A_k. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока в дереве вывода не останется нетерминалов на ярусах выше t. Количество нетерминалов различного типа в полученном слове вновь обозначим характеристическим вектором $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$. Тогда функция $F(t, \mathbf{s})$ ставит в соответствие каждому из возможных векторов L его вероятность.

Это можно показать индукцией по t. При $t = 1$ это верно в силу определения $F_i(\mathbf{s})$. Пусть это верно для $F_i(t-1, \mathbf{s}) = \sum_k p_k s_1^{l_1} s_2^{l_2} \dots s_n^{l_n}$, где сумма берётся по всем возможным характеристическим векторам $(l_1, \dots l_n)$, и p_k — вероятность соответствующего вектора. При переходе от $F_i(t-1,\mathbf{s})$ к $F_i(t,\mathbf{s})$ каждое произведение вида $p_k s_1^{l_1}\dots s_n^{l_n}$ приобретает вид $p_k \cdot F_1^{l_1}(\mathbf{s})\dots F_n^{l_n}(\mathbf{s})$. Принимая во внимание представление (5), получаем сумму, каждый компонент которой соответствует возможному характеристическому вектору.

Матрица A, составленная из первых моментов a_j^i, называется *матрицей первых моментов*. Для разложимой грамматики она имеет следующий блочно-ленточный вид.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m,m} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Блок A_{ii} соответствует классу K_i и является неразложимой неотрицательной матрицей. По определению (6), матрицы $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{m,m}$ неотрицательны. Они также неразложимы, так как любой нетерминал может быть с ненулевой вероятностью выведен из любого нетерминала того же класса. Обозначим перронов корень [6] матрицы A_{ii} через r_i. Тогда $r = \max\{r_1, \dots, r_m\}$ — перронов корень всей матрицы A. В данной работе рассматривается случай $r = 1$. По аналогии с теорией ветвящихся процессов [5] будем называть этот случай *критическим*.

Обозначим через J множество индексов i, таких что классы K_i имеют перронов корень $r_i = 1$. Будем также обозначать через $\overline{J}$ дополнение к J.

Обозначим s_{lh} (при $l \leqslant h$) — число критических классов среди подцепочки $K_l, K_{l+1}, \dots, K_h$. Разобьём последовательность классов $K_1, K_2, \dots, K_m$ на группы $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_w$, где $w = s_{1m}$. Класс K_l отнесём к группе $\mathcal{M}_w$ при $s_{lw} <= 1$ и к группе M_{w-j+1} при $s_{lw} = j$ $(j = 2, \dots, w)$.

Тогда матрицу A можно представить в виде:

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{w-1,w-1} & B_{w-1,w} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{w,w} \end{pmatrix},$$

где матрица B_{lh} находится на пересечении строк для классов из группы $\mathcal{M}_l$ и столбцов для классов из группы $\mathcal{M}_h$. Матрицы B_{lh}, в свою очередь, имеют вид

$$B_{lh} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix},$$

где C_{22} — блок, стоящий на пересечении строк для l-го критического класса и столбцов для h-го критического класса. При $l = h$ этот блок является неразложимой матрицей. Блоки C_{11} и C_{33} стоят на пересечении строк и столбцов, соответствующих докритическим классам. При $l, h < w$ блок B_{lh} имеет вид

$$B_{lh} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Блок, находящийся на позиции блока B_{lh} в матрице A^t, обозначим $B_{lh}^{(t)}$.

В [7] доказана следующая теорема.

Теорема 1 *При* $t \to \infty$

$$B_{lh}^{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & b \cdot U_I^{(l)} V_{II}^{(h)} & b \cdot U_I^{(l)} V_{III}^{(h)} \\ 0 & b \cdot U_{II}^{(l)} V_{II}^{(h)} & b \cdot U_{II}^{(l)} V_{III}^{(h)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b \cdot U^{(l)} V^{(h)} t^{s_{lh}-1} r^t \cdot (1 + o(1)),$$

где $U^{(q)}$ *и* $V^{(q)}$ *— правый и левый собственные векторы матрицы* B_{qq}, *и* $b = V^{(l)} B_{lh} U^{(h)}$.

3 Вероятности продолжения

Вероятностью продолжения $Q_i(t)$ будем называть функцию

$$Q_i(t) = 1 - F_i(t, \mathbf{0})$$

По смыслу функции $F_i(t, \mathbf{s})$ вероятность продолжения $Q_i(t)$ есть вероятность того, что при построении дерева вывода из нетерминала A_i случайным образом это дерево будет иметь высоту более t. Будем обозначать $\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), \dots Q_n(t))^T$.

В силу согласованности грамматики $Q_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В самом деле, по смыслу $F_i(t, \mathbf{s})$

$$F_i(t, \mathbf{0}) = \sum_{d \in D^{\leqslant t}} p(d) \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$$

Раскладывая $F_i(\mathbf{s})$ в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{s} = (1, \dots, 1)$, и учитывая равенство $F_i(1, 1, \dots, 1) = 1$, получаем:

$$1 - F_i(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{n_i} a_j^i (1 - s_j) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant j, l \leqslant n_i} b_{jl}^i (1 - s_j)(1 - s_l) + O\left(\|\mathbf{s} - \mathbf{1}\|^3\right) \quad (8)$$

Подставляя в качестве $\mathbf{s}$ вектор $\mathbf{F}(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s), \dots, F_k(t, s))$, получаем:

$$1 - F_i(t+1, s) = \sum_{i=1}^{k} a_j^i (1 - F_j(t, s)) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant j, l \leqslant k} b_{jl}^i (1 - F_j(t, s))(1 - F_l(t, s)) + \\ + O\left(\|\mathbf{1} - \mathbf{F}(t, \mathbf{s})\|^3\right) \quad (9)$$

Переходя от $1 - F_i(t, \mathbf{s})$ к $Q_i(t)$, получаем

$$Q_i(t+1) = \sum_{i=1}^{k} a_j^i Q_i(t) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant j, l \leqslant k} b_{jl}^i Q_j(t) Q_l(t) + O\left(\|\mathbf{Q}_j(t)\|^3\right) \quad (10)$$

Для каждого из классов K_n будем рассматривать вектор $Q^{(n)}(t)$ — вектор-столбец, содержащий вероятности продолжения для нетерминалов из класса K_n в порядке их нумерации. Тогда

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q^{(1)}(t) \\ Q^{(2)}(t) \\ \vdots \\ Q^{(m)}(t) \end{pmatrix}, \quad Q^{(j)}(t) \in \mathbb{R}^{k_j}, \tag{11}$$

где $k_j = |K_j|$. Обозначим через I_n иножество индексов нетерминалов, входящих в класс K_n. Используя это обозначение, уравнение (10) можно записать в виде

$$Q_i(t+1) = \sum_{j \in I_n} a^i_j Q_j(t) + \sum_{i \in I_{n+1}} a^i_j Q_j(t) \cdot (1 + o(1)) \qquad (i \in I_n, n < m) \tag{12}$$

$$Q_i(t+1) = \sum_{j \in I_m} a^i_j Q_j(t) \cdot (1 + o(1)) \qquad (i \in I_m) \tag{13}$$

или, используя вид (7) матрицы первых моментов,

$$Q^{(n)}(t+1) = A_{n,n} Q^{(n)}(t) + A_{n,n+1} Q^{(n+1)}(t)(1 + o(1)) \tag{14}$$

Для всего вектора $Q(t)$ верно равенство

$$Q(t+1) = (A - A(t))Q(t), \tag{15}$$

где $A(t)$ — матрица, составленная из элементов $a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} b^i_{jl} Q_l(t)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant k)$. В силу согласованности грамматики $Q(t) \to 0$ и, следовательно, $A(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Докажем, что компоненты вектора $Q^{(n)}(t)$ пропорциональны некоторому вектору $U^{(n)}$. Доказательство аналогичного факта для случая двух классов принадлежит А. Борисову. Здесь мы проведём похожие рассуждения.

Зафиксируем некоторое $\tau \geqslant 0$. Тогда из (15) получаем

$$Q(t+1) = (A - A(t)) \cdot \ldots \cdot (A - A(\tau))Q(\tau) \tag{16}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A^*(t) &= (A - A(t)) \cdot (A - A(t-1)) \cdot \ldots \cdot (A - A(\tau+1)) \\ \tilde{A}^*_{ij} &= \frac{A^*_{ij}(t)}{t^{s_{ij}}} \\ \tilde{A}_{ij} &= \frac{A^{(t)}_{ij}}{t^{s_{ij}}}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $A^{(t)}_{ij}$ — блоки, расположенные на месте блоков A_{ij} в матрице A^t и s_{ij} — число критических классов в подцепочке $K_i, K_{i+1}, \ldots, K_j$.

Из исследования асимптотики матрицы A^t известно [7], что $\tilde{A}_{ij}(t) \to \tilde{a}_{ij} U^{(i)} V^{(j)}$, где $\tilde{a}_{ij}$ — некоторые константы, $U^{(i)}$ — вектор-строка длины k_i, а $V^{(j)}$ — вектор-столбец длины k_j.

Выберем произвольные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, такие что $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$. Тогда существуют функции $l(\varepsilon_1)$ и $n(\varepsilon_2)$, такие что

$$\begin{array}{l} \left|\tilde{A}_{ij}(l(\varepsilon_1)) - \tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(j)}\right| < \varepsilon_1 E \\ \forall t \geqslant n(\varepsilon_2) \quad A(t) < \varepsilon_2 A \end{array}. \tag{18}$$

Рассмотрим произвольный вектор-столбец $x > \mathbf{0}$ длины k. Тогда выполняется оценка

$$(1-\varepsilon_2)^l A^l x^{(\tau)} \leqslant A^*(t)x^{(\tau)} \leqslant A^l x^{(\tau)}, \tag{19}$$

где $x^{(\tau)} = (A - A(\tau))x$. Записывая это неравенство отдельно для блоков A_{ij}, получаем

$$(1-\varepsilon_2)^l A^l_{ij} x^{(\tau)}_j \leqslant A^*_{ij}(l)x^{(\tau)}_j \leqslant A^{(l)}_{ij} x^{(\tau)}_j, \tag{20}$$

откуда

$$(1-\varepsilon_2)^l \tilde{A}_{ij}(l)x^{(\tau)} \leqslant \tilde{A}^*_{ij}(l)x^{(\tau)}_j \leqslant \tilde{A}_{ij}(l)x^{(\tau)} \tag{21}$$

Вычитая из всех частей неравенства $\tilde{A}_{ij}(l)x^{(\tau)}_j$, получаем оценку

$$\left|\left(\tilde{A}^*_{ij}(l) - \tilde{A}_{ij}(l)\right) x^{(\tau)}_j\right| \leqslant (1-(1-\varepsilon_2)^l)\tilde{A}_{ij}(l)x^{(\tau)} \tag{22}$$

Используя эту оценку, можем записать

$$\begin{aligned} \left|\tilde{A}^*_{ij}(t) - \tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(j)}x^{(\tau)}_j\right| &\leqslant \left|\left(\tilde{A}^*_{ij}(t) - \tilde{A}_{ij}(t)\right) x^{(\tau)}\right| + \\ &+ \left|\left(\tilde{A}_{ij}(l) - \tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(j)}\right) x^{(\tau)}_j\right| \leqslant (1-(1-\varepsilon_2)^l)\tilde{A}_{ij}(l)x^{(\tau)}_j + \varepsilon_1 x^{(\tau)}_j \leqslant \\ &\leqslant (1-(1-\varepsilon_2)^l)hk_j x^{(\tau)}_j + \varepsilon_1 x^{(\tau)}_j \leqslant \left((1-1-\varepsilon_2)^l)hk_j + \varepsilon_1\right) x^*_j(\tau), \end{aligned} \tag{23}$$

где $h = \max_{i,j,l}\left\{\tilde{A}_{ij}(l)\right\}$ и $x^*_j(\tau) = \max_i(x^{(\tau)}_j)_i$.

Устремляем ε_2 к нулю, затем ε_1 к нулю таким образом, чтобы выполнялось условие

$$l(\varepsilon_1)\log(1-\varepsilon_2) \to -\infty \tag{24}$$

Тогда

$$\left|\tilde{A}^*_{ij}(t) - \tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(j)}x^{(\tau)}_j\right| \leqslant \varepsilon x^*_j(\tau) \quad (\varepsilon \to 0). \tag{25}$$

Домножая слева на $V^{(i)}$, имеем

$$\left|V^{(i)}\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j - \tilde{a}_{ij}V^{(j)}x^{(\tau)}_j\right| \leqslant \varepsilon k_i \max\left\{(V^{(i)}\right\} x^*_j(\tau) \leqslant \varepsilon^* V^{(j)}x^{(\tau)}_j. \tag{26}$$

Отсюда,

$$\left|\frac{\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j}{V^{(i)}\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j} - \frac{\tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(i)}x^{(\tau)}_j}{\tilde{a}_{ij}V^{(j)}x^{(\tau)}_j}\right| = \left|\frac{\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j}{V^{(i)}\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j} - U^{(i)}\right| \to 0 \tag{27}$$

или же

$$\left|\frac{A^*_{ij}(t)x_j^{(\tau)}}{V^{(i)}A^*_{ij}(t)x_j^{(\tau)}} - U^{(i)}\right| \to 0, \tag{28}$$

откуда

$$(A - A(t)) \cdot \ldots \cdot (A - A(\tau)) \cdot x_j = U^{(i)}V^{(i)}(A - A(t)) \cdot \ldots \cdot (A - A(\tau)) \cdot x_j \cdot (1 + o(1)) \tag{29}$$

Ввиду полученного выражения и (16) компоненты каждого из векторов $Q^{(n)}(t)$ пропорциональны компонентам вектора $U^{(n)}$.

Оценим теперь асимптотику элементов вектора $Q^{(n)}(t)$ при $t \to \infty$.

Положим $V^{(n)}Q^{(n)}(t) = Q^{(n)}_*(t)$, и домножим уравнение (10) скалярно на $V^{(n)}$. Заметим, что

$$Q^{(n)}(t) = U^{(n)}Q^{(n)}_*(t)(1 + o(1)). \tag{30}$$

$$\begin{aligned} Q^{(n)}_*(t+1) = Q(n)_*(t) + V^{(n)}B_{n,n+1}U^{(n+1)}Q^{(n+1)}_*(t) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j,l\leqslant k_n} V_i^{(n)}b^i_{jl}(n)U_j^{(n)}U_l^{(n)}\left(Q^{(n)}_*(t)\right)^2(1 + o(1)). \end{aligned} \tag{31}$$

Обозначим $\delta Q^{(n)}_*(t) = Q^{(n)}_*(t+1) - Q^{(n)}_*(t)$, а также

$$\begin{aligned} b_n &= V^{(n)}B_{n,n+1}U^{(n+1)} \\ B_n &= \sum_{1\leqslant i,j,l\leqslant k_n} V_i^{(n)}b^i_{jl}(n)U_j^{(n)}U_l^{(n)} \end{aligned}$$

Тогда уравнение (31) перепишется как

$$\delta Q^{(n)}_*(t) = b_nQ^{(n+1)}_*(t) - \frac{1}{2}B_n(Q^{(n)}_*(t))^2(1 + o(1)) \tag{32}$$

Выражение для $\delta Q^{(n)}_*(t)$ также можно получить из (10), вычитая это уравнение из себя с заменой $t \to t+1$:

$$\begin{aligned} \delta Q^{(n)}_*(t+1) = \sum_{j=1}^{k_n} a^i_j(n)\delta Q^{(n)}_j(t) + \sum_{j=1}^{k_{n+1}} a^i_j(n)\delta Q^{(n+1)}_j(t) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant j,l\leqslant k_n} b^i_{jl}(n)\left(Q^{(n)}_j(t+1)Q^{(n)}_l(t+1) - Q^{(n)}_j(t)Q^{(n)}_l(t)\right)(1 + o(1)) \end{aligned}$$

Скалярно домножая на $V^{(n)}$, получим

$$\begin{aligned} \delta Q^{(n)}_*(t+1) = \delta Q^{(n)}_*(t) + b_n\delta Q^{(n+1)}_*(t) - \\ - \frac{1}{2}B_n\delta Q^{(n)}_*(t)\left(Q^{(n)}_*(t+1) + Q^{(n)}_*(t)\right)(1 + o(1)) \end{aligned} \tag{33}$$

Для последнего класса

$$Q^{(w)}_*(t) = c_wt^{-1}(1 + o(1)), \tag{34}$$

что следует из неразложимого случая. Проведём рассуждение по индукции. Пусть для группы с номером $n+1$ верно

$$Q_*^{(n+1)}(t) = c_{n+1} t^{-\alpha}(1+o(1)),$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$. Положим

$$z(t) = t^{\alpha} \delta Q_*^{(n)}(t)$$

Произведя замену в уравнении (33), и имея в виду, что $Q_*^{(n)}(t+1) = O(Q_*^{(n)}(t))$, получаем

$$\frac{z(t+1)}{(t+1)^{\alpha}} - \frac{z(t)}{t^{\alpha}} = b_n \delta Q_*^{(n+1)}(t)(1+o(1)) - \frac{1}{2} B_n \frac{z(t)}{t^{\alpha}} \cdot 2 Q_*^{(n)}(t)(1+o(1))$$

Преобразуем выражение в левой части уравнения:

$$\frac{z(t+1)}{(t+1)^{\alpha}} - \frac{z(t)}{t^{\alpha}} = \frac{t^{\alpha} z(t+1) - (t+1)^{\alpha} z(t)}{t^{\alpha}(t+1)^{\alpha}} =$$
$$= \frac{t^{\alpha} z(t+1) - t^{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) z(t)}{t^{\alpha}(t+1)^{\alpha}} = \frac{\delta z(t)}{(t+1)^{\alpha}} - \frac{\alpha z(t)(1+o(1))}{t(t+1)^{\alpha}}$$

Тогда

$$\frac{\delta z(t)}{(t+1)^{\alpha}} - \frac{\alpha z(t)(1+o(1))}{t(t+1)^{\alpha}} = b_n \delta Q_*^{(n)}(t) - \frac{B_n}{t^{\alpha}} Q_*^{(n)}(t) z(t)(1+o(1))$$

По предположению индукции, $\delta Q_*^{(n+1)}(t) = -\frac{c_{n+1}\alpha}{t(t+1)^{\alpha}}(1+o(1))$, и тогда

$$\frac{\delta z(t)}{(t+1)^{\alpha}} - \frac{\alpha z(t)(1+o(1))}{t(t+1)^{\alpha}} = -\frac{b_n \alpha c_{n+1}}{t(t+1)^{\alpha}} - \frac{B_n}{t^{\alpha}} Q_*^{(n)}(t) z(t)(1+o(1))$$

Домножая на $(t+1)^{\alpha}$, получаем

$$\delta z(t) - \frac{\alpha z(t)}{t} = -\frac{b_n \alpha c_{n+1}}{t} - B_n Q_*^{(n)}(t) z(t)(1+o(1))$$

Заметим, что, в силу предположения индукции, $\frac{1}{t} \leqslant Q_*^{(n+1)}(t) = o(Q_*^{(n)}(t))$, поэтому можно записать

$$\delta z(t) = -\frac{b_n \alpha c_{n+1}}{t} - B_n Q_*^{(n)}(t)(1+o(1)) \tag{35}$$

Известна следующая лемма (доказательство леммы принадлежит А. Борисову).

Лемма 1 *Пусть последовательность z(t) (t = 1,2,...) удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\delta z(t) = f(t) - g(t) z(t),$$

где при $t \to \infty$ выполняются условия

$$g(t) \to 0, \frac{f(t)}{g(t)} \to 0, \sum_{k=1}^{t} g(k) \to \infty.$$

Пусть также $g(t) > 0$ при любом $t > t_0$. Тогда $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Полагая в уравнении (35) $f(t) = -\frac{b_n \alpha c_{n+1}}{t}(1+o(1))$, $g(t) = B_n Q_*^{(n)}(t)(1+o(1))$, замечаем, что для $z(t)$ выполняются все условия леммы (1), и соответственно, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из определения $z(t)$ получаем:

$$\delta Q_*^{(n)}(t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Подставляя эту оценку в (32), получаем

$$o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) = \frac{b_n c_{n+1}}{t^\alpha}(1+o(1)) - \frac{B_n}{2}\left(Q_*^{(n)}(t)\right)^2(1+o(1))$$

Отсюда

$$\frac{b_n c_{n+1}}{t^\alpha}(1+o(1)) = \frac{B_n}{2}\left(Q_*^{(n)}(t)\right)^2(1+o(1))$$

Тогда для $Q_*^{(n)}(t)$ получаем оценку

$$Q_*^{(n)}(t) = \sqrt{\frac{2b_n}{B_n} c_{n+1} \frac{1}{t^\alpha}}(1+o(1)) = \sqrt{\frac{2b_n}{B_n} k_{n+1}} \cdot t^{-\frac{\alpha}{2}}(1+o(1))$$

При этом, полагая $c_n = \sqrt{\frac{2b_n}{B_n} c_{n+1}}$, мы остаёмся в рамках предположения индукции. Учитывая (34), можем записать асимптотику $Q_*^{(n)}(t)$ для произвольной группы n:

$$Q_*^{(n)}(t) = \sqrt{\frac{2b_n}{B_n}\sqrt{\frac{2b_{n+1}}{B_{n+1}} \cdots \sqrt{\frac{2b_{w-1}}{B_{w-1}B_w} \cdot t^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{w-n}}}}} =$$

$$= \prod_{k=n}^{w-1}\left(\frac{2b_n}{B_n}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{w-n+1}} \cdot \left(\frac{1}{B_w}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{w-n}} \cdot t^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{w-n}}$$

Учитывая (30), получаем

$$Q_i(t) = c_n U_j^{(n)} t^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{w-n}} \cdot (1+o(1))$$
$$P_i(t) = \tilde{c}_n U_j^{(n)} t^{-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{w-n}} \cdot (1+o(1))$$

где нетерминал A_i находится в последнем критическом классе цепочки или в одном из предшествующих классов, n — номер группы, в которую входит класс, содержащий A_i, w — число групп, и

$$c_n = \prod_{k=n}^{w-1}\left(\frac{2b_n}{B_n}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{w-n+1}} \cdot \left(\frac{1}{B_w}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{w-n}}$$

Список литературы

[1] **Шеннон К.** Математическая теория связи. М.: ИЛ, 1963

[2] **Марков А. А.** Введение в теорию кодирования. М.: Наука, 1982

[3] **Фу К.** Структурные методы в распознавании образов. М.: Мир, 1977

[4] **Ахо А., Ульман Дж.** Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Том 1. М.: Мир, 1978

[5] **Севастьянов Б. А.** Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971 — 436 с.

[6] **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. — 5-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010

[7] **Жильцова Л. П.** О матрице первых моментов разложимой стохастической КС-грамматики. УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, Том 151, кн. 2, 2009

[8] **Жильцова Л. П.** Закономерности применения правил грамматики в выводах слов стохастического контекстно-свободного языка // Математические вопросы кибернетики. Выр. 9. М.: Наука, 2000. С. 100-126.

[9] **Жильцова Л. П.** О нижней оценке стоимости кодирования и асимптотически оптимальном кодировании стохастического контекстно-свободного языка // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1, т. 8, №3. Новосибирск: Издательство Института математики СО РАН, 2001. С. 26-45.

[10] **Борисов А. Е.** Закономерности в словах стохастических контекстно-свободных языков, порождённых грамматиками с двумя классами нетерминальных символов. Вопросы экономного кодирования.