Исследование разложимых КС-языков, имеющих вид «цепочки»

Игорь Мартынов

11 марта 2011 г.

1 Основные определения

Стохастической КС-грамматикой называется система $G =< V_T, V_N, R, s >$, где V_T и V_N — алфавиты терминальных и нетерминальных символов соответственно, s — аксиома грамматики, R — множество правил вывода, представимое в виде $R = \cup_{i=1}^{k} R_i$, где $k = |V_N|$, и R_i — множество правил вида

$$r_{ij} : A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij} \quad (A_i \in V_N, \beta_{ij} \in (V_N \cup V_T)^*)\,, \tag{1}$$

и p_{ij} — вероятность применения правила r_{ij}, причём при фиксированном i вероятности r_{ij} задают вероятностное распределение на множестве R_i:

$$0 < p_{ij} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

где $n_i = |R_i|$.

Слово β называется *непосредственно выводимым* из α (обозначается $\alpha \Rightarrow \beta$), если существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_N)^*$, для которых $\alpha = \alpha_1 A_i \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \beta_{ij} \alpha_2$ и в R имеется правило $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij}$.

Через $\Rightarrow_*$ обозначим рефлексивное транзитивное замыкание $\Rightarrow$. Если $\alpha \Rightarrow_* \beta$, говорят, что β *выводимо* из α. Язык, *порождаемый* грамматикой G определяется как $L_G = \{\alpha : s \Rightarrow_* \alpha, \alpha \in V_T^*\}$.

Последовательность правил грамматики $\omega(\alpha) = (r_1, r_2, \ldots, r_\gamma)$, последовательное применение которых к s даёт слово α, называется *выводом* этого слова. Если на каждом шаге правило применяется к самому левому нетерминалу в слове, вывод назвается *левым*.

Вероятность вывода определяется как $p(\omega(\alpha)) = p(r_1) \cdot p(r_2) \cdot \ldots \cdot p(r_\gamma)$, где $p(r_i)$ — вероятность соответствующего правила. Вероятность слова определяется как сумма вероятностей всех его левых выводов.

Грамматика G называется *согласованной*, если

$$\sum_{\alpha \in L_G} p(\alpha) = 1. \tag{3}$$

Согласованная грамматика G задаёт распределение вероятностей P на L_G, и определяет *стохастический КС-язык* $\mathfrak{L} = (L, P)$. В дальнейшем всюду предполагается, что грамматика согласованна.

По выводу слова может быть построено *дерево вывода*. В корень дерева помещается аксиома s, далее на каждом ярусе дерева ко всем нетерминалам этого яруса применяется правило, соответствующее выводу. Символы этого слова записываются слева направо в дереве, присоединяясь к исходному нетерминалу как к родителю.

Обозначим D_l^t — множество деревьев вывода высоты $t-1$, порождаемых грамматикой G при замене её аксиомы на A_l. Аналогично, $D_l^{\leqslant t}$ — множество деревьев вывода, высота которых не превосходит $t-1$.

Для исследования вероятностных характеристик стохастической грамматики применяются производящие функции

$$F_i(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij} \in R}}^{n_i} p_{ij} s_1^{l_1} s_2^{l_2} \ldots s_k^{l_k}, \tag{4}$$

где $l_m = l_m(i,j)$ — число вхождений нетерминала A_m в β_{ij}.

Величины

$$a_j^i = \left. \frac{\partial F_i(s_1, s_2, \ldots, s_k)}{\partial s_j} \right|_{s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 1} \tag{5}$$

называются *первыми моментами* грамматики G. Матрица $A = (a_j^i)$, составленная из них, называется *матрицей первых моментов* грамматики G.

Матрица A, по построению, неотрицательна. По теореме Фробениуса, доказанной в [1], существует максимальный по модулю вещественный неотрицательный собственный корень r. Известно, что критерием согласованности стохастической КС-грамматики при отсутствии бесполезных нетерминалов является условие $r \leqslant 1$.

Говорят, что нетерминал A_j *непосредственно следует* за нетерминалом A_i (обозначается $A_i \to A_j$), если в R имеется правило $A_i \overset{(}{\to} p_{ij})\alpha_1 A_j \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_T)^*$. Транзитивное замыкание отношения $\to$ обозначается $\to_*$. Если $A_i \to_* A_j$, говорят, что A_j *выводится* из A_i.

Введём также отношение $\leftrightarrow_*$. Будем считать, что $A_i \leftrightarrow_* A_j$, если одновременно $A_i \to_* A_j$ и $A_j \to_* A_i$, либо если $A_i = A_j$. Очевидно, отношение $\leftrightarrow_*$ есть отношение эквивалентности, и потому разбивает множество нетерминалов на классы $V_N = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m : K_i \cap K_j = \varnothing (i \neq j)$. Класс, содержащий ровно один нетерминал, будем называть *особым*. Множество классов $\{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ обозначим $\mathfrak{K}$.

Если все нетерминалы грамматики образуют один класс, она называется *неразложимой*. В противном случае она называется *разложимой*. Очевидно, разложимой грамматике соответствует разложимая матрица первых моментов.

Говорят, что класс K_j *непосредственно следует* за классом K_i (обозначается $K_i \prec K_j$), если существуют $A_1 \in K_i$ и $A_2 \in K_j$ такие, что $A_1 \to A_2$. Рефлексивное транзитивное замыкание $\prec$ обозначим $\prec_*$, и назовём отношением *следования*.

Будем говорить, что грамматика имеет вид *«цепочки»*, если она разложима, и граф, построенный на множестве $\mathfrak{K}$ по отношению $\prec$, имеет вид P_m. Пронумеруем классы грамматики таким образом, что $K_i \prec K_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, m-1$. Пронумеруем нетерминалы так, что для любых $A_i \in K_p$ и $A_j \in K_q$ $i < j \Leftrightarrow p < q$. После этого матрица первых моментов грамматики приобретает вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m,m} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Блоки $A_{i,i}(i = 1, 2, \ldots, m)$ являются неразложимыми неотрицательными матрицами. Не уменьшая общности, будем считать их положительными и непериодичными. Этого можно добиться с помощью метода укрупнения правил грамматики. Пусть r_i — перронов корень матрицы $A_{i,i}$. По построению матрицы A, $r = \max_i\{r_i\}$ и $r > 0$.

2 Свойства матрицы первых моментов

Обозначим $J = \{i : r_i = r\} = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_q\}$ Разобьём множество классов $\mathfrak{K}$ на группы классов $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_\mathfrak{w}$. При этом $\mathfrak{M}_1 = \{K_1, K_2, \ldots, K_{i_1}\}$, и $\mathfrak{M}_\mathfrak{l} = \{K_{i_{l-1}+1}, \ldots, K_{i_l}\}$, где $l > 1$. При таком разбиении в каждой группе $\mathfrak{M}_\mathfrak{j}$ содержится ровно один класс с номером из J.

Тогда матрицу первых моментов можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{w-1,w-1} & B_{w-1,w} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{w,w} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где B_{ij} — блок, находящийся на пересечении строк, соответствующих нетерминалам классов группы $\mathfrak{M}_\mathfrak{i}$, и столбцов, соответствующим нетерминалам классов группы $\mathfrak{M}_\mathfrak{j}$. Очевидно, каждой из матриц $B_{i,i}$ соответствует перронов корень равный r.

Рассмотрим матрицу

$$A^t = \begin{pmatrix} B^t_{11} & B^{(t)}_{12} & \cdots & B^{(t)}_{1,w-1} & B^{(t)}_{1,w} \\ 0 & B^t_{22} & \cdots & B^{(t)}_{2,w-1} & B^{(t)}_{2,w} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B^t_{w-1,w-1} & B^{(t)}_{w-1,w} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B^t_{w,w} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Для установления её вида требуется определить вид блоков $B^{(t)}_{i,j}$ при $j > i$.

Рассмотрим блок B_{11}. Разобьём группу $\mathfrak{M}_1$ на подгруппы $(\mathfrak{M}_{11}, \mathfrak{M}_{12}, \mathfrak{M}_{13})$. К группе $\mathfrak{M}_{12}$ отнесём класс с номером из J, к группе $\mathfrak{M}_{11}$ — предшествующие ему классы, к группе $\mathfrak{M}_{13}$ — последующие классы. В соответствии с таким разбиением B_{11} принимает вид

$$B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

А матрица B^t представляется в виде

$$B^t = \begin{pmatrix} C_{11}^t & C_{12}^{(t)} & C_{13}^{(t)} \\ 0 & C_{22}^t & C_{23}^{(t)} \\ 0 & 0 & C_{33}^t \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Известно, что для неразложимой положительной матрицы A

$$A^t = uvr^t(1 + o(1)), \tag{11}$$

где r — перронов корень A, u и v — соответственно правый и левый собственные векторы, соответствующие r, причём $u > 0$, $v > 0$, $vu = 1$.

Таким образом, асимптотика матриц C_{11}^t, C_{22}^t, C_{33}^t известна.

Исследуем собственные векторы матрицы B_{11}, соответствующие числу r. Пусть $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ и $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ — соответственно правый и левый такие собственные векторы. Тогда

$$\begin{aligned} &C_{11}u^{(1)} + C_{12}u^{(2)} + C_{13}u^{(3)} = ru^{(1)} \\ &C_{22}u^{(2)} + C_{23}u^{(3)} = ru^{(2)} \\ &C_{33}u^{(3)} = ru^{(3)} \end{aligned} . \tag{12}$$

Поскольку все собственные числа C_{33} строго меньше r, $u^{(3)} = 0$ и $u^{(2)}$ — правый собственный вектор C_{22}, относящийся к r, а $u^{(1)} = (rE - C_{11})^{-1}C_{12}u^{(2)}$.

Аналогично, рассматривая левый собственный вектор $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$, имеем систему

$$\begin{aligned} &v^{(1)}C_{11} = rv^{(1)} \\ &v^{(1)}C_{12} + v^{(2)}C_{22} = rv^{(2)} \\ &v^{(1)}C_{13} + v^{(2)}C_{23} + v^{(3)}C_{33} = rv^{(3)} \end{aligned} , \tag{13}$$

откуда $v^{(1)} = 0$, $v^{(2)}$ — левый собственный вектор C_{12}, и $v^{(3)} = v^{(2)}C_{23}(rE - C_{33})^{-1}$.

Выберем именно такие u и v, что $vu = 1$.

Рассмотрим асимптотику матрицы B_{11}^t. Нетрудно видеть, что

$$C_{12}^{(t)} = \sum_{i+j=t-1} C_{11}^i C_{12} C_{22}^j. \tag{14}$$

Разобьём эту сумму так, что $C_{12}^{(t)} = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &: \begin{cases} i = \overline{t - \lfloor \log\log t \rfloor, t-1} \\ j = \overline{0, \lfloor \log\log t \rfloor - 1} \end{cases} \\ \Sigma_2 &: \begin{cases} i = \overline{0, t - \lfloor \log\log t \rfloor - 2} \\ j = \overline{\lfloor \log\log t \rfloor + 1, t-1} \end{cases} \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим вначале Σ_1. $C_{22}^t = u_2v_2r^t(1 + o(1)) \leqslant c_2$ при любых t. $C_{11}^t = u_1v_1(r')^t(1 + o(1)) \leqslant c_1(r')^{t - \lfloor \log\log t \rfloor - 1}$. Отсюда,

$$\Sigma_1 \leqslant (r')^{t - \lfloor \log\log t \rfloor} \lfloor \log\log t \rfloor = O(\log\log t (\log t)^{c_3} (r')^t) = o(r^t). \tag{16}$$

Для Σ_2 $C_{22}^j = u_2 v_2 r^j (1+o(1))$, поэтому $\Sigma_2 = \sum_{i+j=t-1} C_{11}^i C_{12} H r^j (1+o(1)) = r^{t-1} \sum_{i=0}^{t-\lfloor \log\log t \rfloor -1} \left(\frac{C_{11}}{r}\right)^i C_{12} H$ $o(1))$. Нетрудно видеть, что $\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{C_{11}}{r}\right)^i = (rE - C_{11})^{-1}$. Матрица $(rE - C_{11})^{-1}$ существует, так как все собственные числа C_{11} строго меньше r. Отсюда

$$\Sigma_2 = r^t (rE - C_{11})^{-1} C_{12} u^{(2)} v^{(2)} (1 + o(1)) = C_{12}^{(t)}. \tag{17}$$

Аналогично

$$C_{23}^{(t)} = \sum_{i+j=t-1} C_{22}^i C_{23} C_{33}^j, \tag{18}$$

откуда, проводя аналогичные вычисления, имеем

$$C_{23}^{(t)} = r^t u^{(2)} v^{(2)} C_{23} (rE - C_{33})^{-1} (1 + o(1)) \tag{19}$$

Подстановкой проверяется, что

$$C_{13}^{(t)} = \sum_{i+j=t-1} C_{12}^{(i)} C_{23} C_{33}^j \tag{20}$$

Подставляя в это выражение асимптотику для $C_{12}^{(t)}$, получаем:

$$C_{13}^{(t)} = r^t u^{(1)} v^{(2)} C_{23} (rE - C_{33})^{-1} (1 + o(1)) = r^t u^{(1)} v^{(3)} (1 + o(1)) \tag{21}$$

В результате, имеем:

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & u^{(1)} v^{(2)} & u^{(1)} v^{(3)} \\ 0 & u^{(2)} v^{(2)} & u^{(2)} v^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r^t + o(r^t) \tag{22}$$

Получим теперь асимптотику всей матрицы A^t. Вначале пусть $w = 2$. Тогда

$$A^t = \begin{pmatrix} B_{11}^t & B_{12}^{(t)} \\ 0 & B_{22}^t \end{pmatrix} \tag{23}$$

Матрица B_{22}^t исследуется аналогично B_{11}^t, в результате имеем

$$B_{22}^t = \begin{pmatrix} u^{(22)} v^{(22)} & u^{(22)} v^{(32)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r^t + o(r^t) \tag{24}$$

Для $B_{12}^{(t)}$ имеем

$$B_{12}^{(t)} = \sum_{i+j=t-1} B_{11}^i B_{12} B_{22}^j \tag{25}$$

Подставляя выражения для B_{11}^i и B_{22}^j, получаем:

$$B_{12}^{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & u^{(1)} v^{(2)} & u^{(1)} v^{(3)} \\ 0 & u^{(2)} v^{(2)} & u^{(2)} v^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B_{12} \cdot \begin{pmatrix} u^{(22)} v^{(22)} & u^{(22)} v^{(32)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot t r^t + o(t r^t) \tag{26}$$

Представляя B_{12} в блочном виде

$$B_{12} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

и производя перемножение, получаем

$$B_{12}^{(t)} = \begin{pmatrix} u'^{(11)}v^{(22)} & u'^{(11)}v^{(32)} \\ u'^{(21)}v^{(22)} & u'^{(21)}v^{(32)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Сформулируем теорему, определяющую вид блока $B_{lh}^{(t)}$ в общем случае.

Теорема 1

$$B_{lh}^{(t)} = u^{(l)}v^{(h)}t^{s_{lh}-1}r^t(1+o(1)), \tag{29}$$

при $t \to \infty$, где $u^{(l)}$ и $v^{(h)}$ не зависят от t, и s_{lh} — число классов с номерами из J среди $K_l, K_{l+1}, \ldots, K_h$.

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по w. При $w = 2$ теорема выполняется.

Пусть утверждение теоремы верно для $w-1$ групп. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & E_1 \\ 0 & B_{w,w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & E_2 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

где

$$E_1 = \begin{pmatrix} B_{1,w} \\ \vdots \\ B_{w-1,w} \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} B_{12} & \cdots & B_{1,w} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Тогда

$$A^t = \begin{pmatrix} D_1^t & E_1^{(t)} \\ 0 & B_{w,w}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}^t & E_2^{(t)} \\ 0 & D_2^t \end{pmatrix} \tag{32}$$

Для матриц D_1, D_2 утверждение теоремы по индукции справедливо. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть

$$B_{1,w}^{(t)} = \sum_{l=1}^{w-1} \sum_{i+j=t-1} B_{1,l}^{(i)} B_{l,w} B_{w,w}^j \tag{33}$$

По предположению индукции слагаемое, содержащее $B_{1,w-1}^i = O(i^{s_{1,w-1}-1}r^i)$, преобладает над остальными. Поэтому

$$B_{1,w}^{(t)} = \sum_{i+j=t-1} B_{1,w-1}^{(i)} B_{w-1,w} B_{w,w}^j (1+o(1)) \tag{34}$$

Подставляя по индукции выражение для $B_{1,w-1}$, получаем:

$$B_{1,w}^{(t)} = \begin{pmatrix} u'^{(11)}v^{(2w)} & u'^{(11)}v^{(3w)} \\ u'^{(21)}v^{(2w)} & u'^{(21)}v^{(3w)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t^{s_{1,w}-1}r^t + o(t^{s_{1,w}-1}r^t) \tag{35}$$

3 Вероятности продолжения

...Здесь про вероятности продолжения...

Результат:

$$
\begin{aligned}
&Q_n(t) = c_\mu u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} t^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}}\\
&P_n(t) = d_\mu u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} t^{-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}},
\end{aligned}
\tag{36}
$$

где $n \in I_\mu$, c_μ и d_μ заданы.

4 Математические ожидания числа применений правила в деревьях вывода

Обозначим через $q^l_{ij}(t,\tau)$ и $\bar{q}^l_{ij}(t,\tau)$ случайные величины, равные числу применений правила r_{ij} в дереве вывода, соответственно, из D^t_l и $D^{\leqslant t}_l$. Пусть также

$$
\begin{aligned}
S^l_{ij}(t) &= \sum_{\tau=1}^{t-1} q^l_{ij}(t,\tau)\\
\bar{S}^l_{ij}(t) &= \sum_{\tau=1}^{t-1} \bar{q}^l_{ij}(t,\tau)
\end{aligned},
\tag{37}
$$

и $S^l_{ij}(t)$, $\bar{S}^l_{ij}$ — соответственно число применений правила r_{ij} в дереве из D^t_l, $D^{\leqslant t}_l$. Для удобства записи положим

$$
\begin{gathered}
S_{ij}(t) = S^1_{ij}(t), \quad \bar{S}_{ij}(t) = \bar{S}^1_{ij}(t)\\
q_{ij}(t,\tau) = q^1_{ij}(t,\tau), \quad \bar{q}_{ij}(t,\tau) = \bar{q}^1_{ij}(t,\tau)
\end{gathered}.
\tag{38}
$$

Рассмотрим математические ожидания некоторых из введённых величин. Обозначим

$$
M^l_{ij}(t) = M[S^l_{ij}(t)], \quad \bar{M}^l_{ij}(t) = M[\bar{S}^l_{ij}(t)].
\tag{39}
$$

Задача данного раздела заключается в вычислении $\bar{M}^l_{ij}(t)$, $M^l_{ij}(t)$ для грамматик в виде «цепочки». Для их нахождения будет удобно использовать три леммы, доказанные в [2].

Лемма 1 *Пусть s, d — натуральные, $m = (m_1, \ldots, m_s)$ — вектор целых неотрицательных чисел, $y = (y_1, \ldots, y_s)$ — вектор, и $\bar{m} = \sum_{j=1}^s m_j$. Тогда*

$$
(1-y_1)^{n_1} \ldots (1-y_s)^{n_s} = \sum_{\substack{\bar{m}<d\\ m\geqslant 0}} \binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2} \ldots \binom{n_s}{m_s} (-1)^{\bar{m}} y^m + R_d(n_1, \ldots, n_s, y),
\tag{40}
$$

где $y^m = y_1^{m_1} \ldots y_s^{m_s}$, и остаточный член представим в виде

$$
R_d(n_1, \ldots, n_s, y) = \sum_{\substack{\bar{m}=d\\ m\geqslant 0}} (-1)^d \varepsilon_m(n_1, \ldots, n_s, y) y^m,
\tag{41}
$$

причём

$$0 \leqslant \varepsilon_m(n_1, \ldots, n_s, y') \leqslant \varepsilon_m(n_1, \ldots, n_s, y) \leqslant \binom{n_1}{m_1} \ldots \binom{n_s}{m_s} \tag{42}$$

при $0 \leqslant y_i \leqslant y_i' \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, s)$.

Лемма 2 *Пусть* $A(t)$ *— последовательность матриц размером* $k \times k$, *и* $A(t) \to A$ *при* $t \to \infty$, *причём* $A > 0$, *и её перронов корень* $r = 1$. *Пусть* $b(t) = bt^\alpha(1 + o(1))$ *— последовательность векторов длины* k, *где* $b \geqslant 0$, $b \neq 0$, *и* α *— действительное число. Тогда для последовательности векторов* $x(t)$ *при* $t = 1, 2, \ldots$, *определяемой рекуррентным соотношением* $x(t) = b(t) + A(t)x(t-1)$ *при* $t \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\frac{x_i(t)}{vx(t)} \to u_i, \tag{43}$$

при условии что $x(t_0) > 0$ *для некоторого номера* t_0, *где* $u, v > 0$ *— соответственно правый и левый собственные векторы матрицы* A *при нормировке* $vu = 1$.

Лемма 3 *Пусть последовательность* x_t, $x_t > 0$ *при любом* $t \geqslant 0$, *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$x_{t+1} = at^\alpha(1 + \varepsilon_1(t)) + (1 - bt^\beta(1 + \varepsilon_2(t)))x_t, \tag{44}$$

где $\beta < 0$, $b > 0$, *и* $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) = o(1)$ *при* $t \to \infty$. *Тогда верны следующие асимптотические равенства:*

$$\begin{aligned}
&(1)\ x_t = \frac{at^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad \beta < -1,\ \alpha \geqslant 0 \\
&(2)\ x_t = \frac{at^{\alpha+1}}{\alpha+b+1}(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad \beta = -1,\ \alpha > -1 \\
&(3)\ x_t = \frac{at^{\alpha-\beta}}{b}(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad -1 < \beta < 0
\end{aligned} \tag{45}$$

Вначале рассмотрим $\bar{M}_{ij}^q(t)$. Пусть $p(\cdot)$ — условная вероятность дерева d в грамматике G, при условии что $d \in D_q^{\leqslant t}$. Рассмотрим множество $D_{ql}^{\leqslant t}$ деревьев из $D_q^{\leqslant t}$, первый ярус которых получен применением правила r_{ql} к корню дерева. Пусть

$$\bar{P}_{ql}^{ij}(t) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} p(d) q_{ij}(d), \tag{46}$$

где $q_{ij}(d)$ — число применений правила r_{ij} в дереве d, и $\bar{P}_{ql}^{ij}(t)$ — вклад деревьев из $D_{ql}^{\leqslant t}$ в матожидание $\bar{M}_{ij}^q(t)$. Для краткости, обозначим $\bar{P}_{ql} = \bar{P}_{ql}^{ij}$. Тогда, очевидно,

$$\bar{M}_{ij}^q(t) = \sum_{l=1}^{n_q} \bar{P}_{ql}(t). \tag{47}$$

Рассмотрим величину $\bar{P}_{ql}(t)$. Пусть

$$q_{ij}(d) = q_{ij}^{(1)}(d) + q_{ij}^{(2)}(d), \tag{48}$$

где $q_{ij}^{(1)}(d)$ — число применений правила r_{ql} в дереве d на первом его ярусе, а $q_{ij}^{(2)}(d)$ — на остальных ярусах. Тогда

$$\bar{P}_{ql}(t) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} p(d) q_{ij}(d) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} p(d) q_{ij}^{(1)}(d) + \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} p(d) q_{ij}^{(2)}(d) = \bar{P}_{ql}^{(1)}(t) + \bar{P}_{ql}^{(2)}(t) \tag{49}$$

Очевидно, $q_{ij}^{(1)}(d) = \delta_i^q \delta_j^l$ (где $delta$ — символ Кронекера), и следовательно, учитывая что $p(\cdot)$ — условные вероятности, получаем

$$\bar{P}_{ql}^{(1)}(t) = \delta_i^q \delta_j^l \frac{p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1)}{1 - Q_q(t)}, \tag{50}$$

где $Q_X(t)$ — вероятность наборов деревьев вывода высоты не превосходящей $t-1$, набор корней которых задан характеристическим вектором $X \in \mathbb{N}^k$.

Обозначим также $\delta^i(n) = (\delta_k^i)\big|_{i=\overline{1,n}} \in \{0,1\}^n$.

Условную вероятность дерева $p(d)$ при $d \in D_{ql}^{\leqslant t}$ можно выразить как

$$p(d) = \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} p_1(d) p_2(d) \ldots p_{\bar{s}_{ql}}(d), \tag{51}$$

где $p_j(d)$ — вероятность поддерева d с корнем в j-м узле первого яруса. Тогда

$$\bar{P}_{ql}^{(2)}(t) = \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} \prod_{n=1}^{\bar{s}_{ql}} p_n(d) \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} q_{ij}'^m(d), \tag{52}$$

где $q_{ij}'^m(d)$ — число применений правила r_{ij} в поддереве дерева d с корнем в m-том нетерминале первого яруса.

Выделим в d поддеревья $d_1, d_2, \ldots, d_{\bar{s}_{ql}}$, где d_j — поддерево с корнем в j-м узле первого яруса d. Преобразуя (52), получаем

$$\bar{P}_{ql}^{(2)}(t) = \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} \sum_{d \in D_{ql}^{\leqslant t}} \left(\prod_{n=1}^{\bar{s}_{ql}} p_n(d) \right) q_{ij}'^m(d) =$$

$$= \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} \sum_{d_1, \ldots, d_{m-1}, d_{m+1}, \ldots, d_{\bar{s}_{ql}}} p_1(d_1) \ldots p_{m-1}(d_{m-1}) p_{m+1}(d_{m+1}) \ldots p_{\bar{s}_{ql}}(d_{\bar{s}_{ql}}) q_{ij}'^m(d) =$$

$$\frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} Q_{s_{ql} - \delta^m} q_{ij}(d_m) = \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{m=1}^{k} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^m(t-1) Q_{s_{ql} - \delta^m}(t-1) \tag{53}$$

Зная $\bar{P}_{ql}(t) = \bar{P}_{ql}^{(1)}(t) + \bar{P}_{ql}^{(2)}(t)$, получаем

$$\bar{M}_{ij}^q(t) = \frac{1}{1 - Q_q(t)} \left[\delta_i^q p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^{k} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^m(t-1) Q_{s_{ql} - \delta^m}(t-1) \right] \tag{54}$$

Обозначая

$$\bar{M}_{ij}'^q(t) = \bar{M}_{ij}^q(t)(1 - Q_q(t)), \tag{55}$$

имеем

$$\bar{M}'^{q}_{ij}(t) = \delta^q_i p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^{k} s^m_{ql} \bar{M}'^{m}_{ij}(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \tag{56}$$

Рекуррентное соотношение (56) является опорной точкой для вычисления $\bar{M}^q_{ij}(t)$. Получим аналогичное уравнение для $M^q_{ij}(t)$.

$M^q_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{n_q} P_{ql}(t)$, где $P_{ql}(t)$ — вклад деревьев из D^t_{ql} в $M^q_{ij}(t)$. Аналогично тому, как это сделано в (49), полагаем $P_{ql}(t) = P^{(1)}_{ql}(t) + P^{(2)}_{ql}(t)$. При этом

$$P^{(1)}_{ql}(t) = \delta^q_i \delta^l_j \frac{p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1)}{P_q(t)}, \tag{57}$$

где $R_X(t)$ — вероятность наборов деревьев из $D^{\leqslant t}$, набор корней которых задан характеристическим вектором X, и высота хотя бы одного из которых достигает $t-1$. $P^{(2)}_{ql}(t)$ можно представить в виде

$$P^{(2)}_{ql}(t) = \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} P^{(2)m}_{ql}(t), \tag{58}$$

где $P^{(2)m}_{ql}(t)$ — вклад деревьев с m-м корнем на первом ярусе в $M^q_{ij}(t)$.

Обозначим через S_1 вклад в $P^{(2)m}_{ql}(t)$ наборов деревьев, в которых ярус t достигается деревом с корнем в m-м нетерминале первого яруса. Очевидно,

$$S_1 = \frac{(1-Q_{z_m}(t-1)) Q_{s_{ql}-\delta^{z_m}}(t-1) M^{z_m}_{ij}(t-1)}{P_q(t)}, \tag{59}$$

где z_m — m-й нетерминал первого яруса.

Пусть S_2 — вклад наборов, где ярус t достигается через другие деревья. Тогда

$$S_2 = \frac{(1-Q_{z_m}(t-1)) R_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \bar{M}^{z_m}_{ij}(t-1)}{P_q(t)}. \tag{60}$$

В результате, для M^q_{ij} получаем

$$\begin{aligned} M^q_{ij} &= \sum_{l=1}^{n_q} \left(P^{(1)}_{ql}(t) + \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} P^{(2)m}_{ql}(t) \right) = \\ &= \frac{1}{P_q(t)} [\delta^q_i p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^{k} (P_m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) M^m_{ij}(t-1) + \\ &\qquad + (1-Q_m(t-1)) R_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \bar{M}^m_{ij}(t-1))] \end{aligned} \tag{61}$$

Таким образом, получено рекуррентное соотношение для $M^q_{ij}(t)$, аналогичное (56).

Из леммы 1 следуют равенства для $Q_X(t$ и $R_X(t)$:

$$\begin{aligned} Q_X(t) &= \prod_{i=1}^{k} (1-Q_i(t))^{x_i} = 1 - \sum_{i=1}^{k} x_i Q_i(t) + \Theta\left(\sum_{i,j=1}^{k} x_i x_j Q_i(t) Q_j(t) \right) \\ R_X(t) &= Q_X(t) - Q_X(t-1) = \sum_{i=1}^{k} x_i P_i(t) + \Theta\left(\sum_{i,j=1}^{k} x_i x_j Q_i(t) Q_j(t) \right) \end{aligned} \tag{62}$$

Теперь можно приступить к вычислению $\bar{M}'^{q}_{ij}(t)$ и $M'^{q}_{ij}(t)$.

4.1 Случай критического класса

Рассмотрим вначале случай, когда $I(q) \in J$.

Пусть $q, i \in I_\mu$. Тогда при $m \in I_\nu : \nu > \mu$ $\bar{M}'^{m}_{ij}(t) = 0$, и для $\bar{M}'^{q}_{in}(t$ получаем:

$$\bar{M}'^{q}_{ij}(t) = \delta^i_q p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m \in I_\mu} s^m_{ql} \bar{M}'^{m}_{ij}(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \tag{63}$$

Подставляя выражения (62) где это необходимо, и учитывая, что $I(q) \in J$, имеем

$$\bar{M}'^{q}_{ij}(t) = \delta^i_q + \sum_{m \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} \bar{M}'^{m}_{ij}(t-1) - \sum_{m \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} \bar{M}'^{m}_{ij}(t-1) \cdot \sum_{n \in I_\mu} (s^n_{ql} - \delta^m_n) Q_n(t-1)(1+o(1)). \tag{64}$$

Непосредственным взятием производных от производящих функций проверяются выражения для первых и вторых моментов:

$$\begin{aligned} a^q_m &= \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} \\ b^q_{mn} &= \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} (s^n_{ql} - \delta^m_n) \end{aligned} \tag{65}$$

Подставляя их в (64), получаем

$$\bar{M}'^{q}_{ij}(t) = \delta^i_q p_{ij} + \sum_{m \in I_\mu} a^q_m \bar{M}'^{m}_{ij}(t-1) - c_\mu t^{\xi(\mu)-1} \sum_{\substack{m \in I_\mu \\ n \in I}} b^q_{mn} u^{I(n)}_{n-k_{I(n)-1}} \bar{M}'^{m}_{ij}(t-1)(1+o(1)) \tag{66}$$

где $\xi(\mu)$ — число классов с перроновым корнем, равным 1 в цепочке $K_\mu, K_{\mu+1}, \ldots, K_m$, и $K_{I(n)} \ni A_n$.

Применяя лемму 2, получаем:

$$\bar{M}'^{q}_{ij}(t) = u^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} \cdot \sum_{l \in I_\mu} v^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} \bar{M}'^{l}_{ij}(t) = u^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} M^{(\mu)}_*(t), \tag{67}$$

где $M^{(\mu)}_*(t) = \sum_{l \in I_\mu} v^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} \bar{M}'^{l}_{ij}(t)$, и $v^{(\mu)}$ — левый собственный вектор матрицы $A_{\mu,\mu}$.

Домножая (66) на $v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}}$ и суммируя по q, получаем:

$$\delta \bar{M}^{(\mu)}_*(t) = v^{(\mu)}_{i-k_{\mu-1}} p_{ij} - c_\mu t^\alpha \sum_{q,m,n \in I_\mu} v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{m-k_{\mu-1}} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} = v^{(\mu)}_{i-k_{\mu-1}} p_{ij} - c_\mu t^\alpha B_\mu, \tag{68}$$

где $\alpha = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi(\mu)-1}$.

Нетрудно видеть, что величина $\bar{M}^{(\mu)}_*(t)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Применяя её, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{M}^{(\mu)}_*(t) &= \frac{v^{(\mu)}_{i-k_{\mu-1}} p_{ij}}{c_\mu B_\mu + 1} t(1+o(1)), \quad \text{если } \alpha = -1 \\ \bar{M}^{(\mu)}_*(t) &= \frac{v^{(\mu)}_{i-k_{\mu-1}} p_{ij}}{c_\mu B_\mu} t^{-\alpha}(1+o(1)), \quad \text{если } \alpha > -1 \end{aligned} , \tag{69}$$

где $\alpha = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi(\mu)-1}$.

Пусть теперь $I(q) < I(i)$ (q и i в различных классах). Тогда $\bar{M}'^q_{ij}(t)$ выражается следующим образом:

$$\bar{M}'^q_{ij}(t) = \delta^i_q p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{m\in I_\mu\cup I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} \bar{M}'^m_{ij}(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \tag{70}$$

Учитывая малость $Q_n(t)$ при $I(n) > I(q)$, получаем

$$\bar{M}'^q_{ij}(t) = O(p_{ij}) + \sum_{m\in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} \bar{M}'^m_{ij}(t-1)\cdot\left(1 - \sum_{n\in I_\mu}(s^n_{ql} - \delta^m_n)Q_n(t-1)\right)(1+o(1)) + \\ + \sum_{m\in I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} \bar{M}'^m_{ij}(t-1)(1+o(1)) \tag{71}$$

Положим, $\bar{M}'^m_{ij}(t-1) = \overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)}(1+o(1))$. Это выполняется для $\mu+1 = m$, что видно из полученных соотношений (69). Исходя из этого, получим выражение для $\bar{M}'^q_{ij}(t)$. Подставляя дополнительно выражения для первых и вторых моментов, а также для вероятностей продолжения $Q_n(t-1)$, получаем:

$$\bar{M}'^q_{ij}(t) = \sum_{m\in I_\mu} a^q_m \bar{M}'^m_{ij}(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m,n\in I_\mu} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} \bar{M}'^m_{ij}(t-1)(1+o(1)) + \\ + \overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)} \sum_{m\in I_{\mu+1}} a^q_m u^{(\mu+1)}_{m-k_\mu}(1+o(1)) \tag{72}$$

Домножая на $v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}}$ и суммируя по q, получаем

$$\delta\bar{M}^{(\mu)}_*(t) = \overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1}\left(\sum_{\substack{q\in I_\mu\\ m\in I_{\mu+1}}} v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} a^q_m u^{(\mu+1)}_{m-k_\mu}\right)\cdot t^{\gamma(\mu+1)} - \\ - c_\mu t^{\alpha(\mu)}\cdot\left(\sum_{q,m,n\in I_\mu} v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{m-k_{\mu-1}} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}}\right)\cdot\bar{M}^{(\mu)}_*(t-1)(1+o(1)) = \\ = \overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} b_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)}(1+o(1)) - c_\mu B_\mu t^{\alpha(\mu)} \bar{M}^{(\mu)}_*(t-1)(1+o(1)) \tag{73}$$

Случай $\alpha(\mu) = -1$ рассматривать не имеет смысла, так как это означает, что не существует критических классов с номерами, превышающими μ. Полагая $\alpha(\mu) > -1$ и применяя лемму 2, получаем

$$\bar{M}^{(\mu)}_*(t) = \frac{\overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} b_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)-\alpha(\mu)}}{c_\mu B_\mu} \tag{74}$$

Из полученных формул (69) и (74) нетрудно получить общее выражение для величины $\bar{M}^{(\mu)}_*(t)$, при условии что грамматика имеет вид «цепочки» и состоит только из критических классов ($J = \{1, 2, \ldots, m\}$).

$$\bar{M}^{(\mu)}_*(t) = \prod_{j=\mu}^{\nu-1}\left(\frac{b_{j+1}}{c_j B_j}\right)\cdot\left(\frac{v^{(\nu)}_{i-k_{\nu-1}} p_{ij}}{c_\nu B_\nu + \delta^m_\nu}\right)\cdot t^{\frac{1}{2}^{m-\nu}\left(2-\frac{1}{2}^{\nu-\mu}\right)}, \tag{75}$$

где $\mu = I(q)$, $\nu = I(i)$. Подставляя (67), и затем (55), непосредственно получаем

$$\bar{M}^q_{ij}(t) = \frac{u^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}}}{1 - Q_q(t)} \prod_{j=\mu}^{\nu-1} \left(\frac{b_{j+1}}{c_j B_j} \right) \cdot \left(\frac{v^{(\nu)}_{i-k_{\nu-1}} p_{ij}}{c_\nu B_\nu + \delta^m_\nu} \right) \cdot t^{\frac{1}{2}^{m-\nu}\left(2-\frac{1}{2}^{\nu-\mu}\right)} \tag{76}$$

Перейдём к вычислению $M^q_{ij}(t)$. Пусть $I(q) = I(i)$. Полагая $M'^q_{ij}(t) = M^q_{ij}(t) P_q(t)$, из (61) получаем

$$\begin{aligned} M'^q_{ij}(t) = O(p_{ij}) t^{\beta(\mu)} + \sum_{m \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} M'^m_{ij}(t-1) - \\ - \sum_{m,n \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} (s^n_{ql} - \delta^m_n) Q_n(t-1) M'^m_{ij}(t-1) + \\ + \sum_{m,n \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s^m_{ql} (s^n_{ql} - \delta^m_n) P_n(t-1) \bar{M}'^m_{ij}(t-1) \end{aligned} \tag{77}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Q^{(\mu)}(t) = c_\mu u^{(\mu)} t^{\alpha(\mu)} \\ P^{(\mu)}(t) = d_\mu u^{(\mu)} t^{\beta(\mu)} \end{aligned} \tag{78}$$

Подставляя выражения (65) для первых и вторых моментов в (77), имеем

$$\begin{aligned} M'^q_{ij}(t) = \sum_{m \in I_\mu} a^q_m M'^m_{ij}(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m,n \in I_\mu} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} M'^m_{ij}(t-1)(1+o(1)) + \\ + d_\mu t^{\beta(\mu)} \sum_{m,n \in I_\mu} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} \bar{M}^m_{ij}(t-1)(1+o(1)) \end{aligned} \tag{79}$$

Обозначая дополнительно $M^q_{ij}(t) = \mathcal{M}_q t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}}$, а также учитывая $\beta(\mu) = -1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}$ и выражения для первых моментов, получаем

$$\begin{aligned} M'^q_{ij}(t) = \sum_{m \in I_\mu} a^q_m M'^m_{ij}(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m,n \in I_\mu} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} M'^m_{ij}(t-1)(1+o(1)) + \\ + d_\mu \mathcal{M}_\mu t^{-1} \sum_{m,n \in I_\mu} b^q_{mn} u^{(\mu)}_{m-k_{\mu-1}} u^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} (1+o(1)) \end{aligned} \tag{80}$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} M'^q_{ij}(t) = u^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}} M^{(\mu)}_*(t)(1+o(1)) \\ M^{(\mu)}_*(t) = \sum_{m \in I_\mu} v^{(\mu)}_{n-k_{\mu-1}} M'^m_{ij}(t) \end{aligned} \tag{81}$$

Домножая (80) на $v^{(\mu)}_{q-k_{\mu-1}}$ и суммируя по q, имеем

$$\delta M^{(\mu)}_*(t) = d_\mu \mathcal{M}_\mu B_\mu t^{-1} - c_\mu t^{\alpha(\mu)} B_\mu M^{(\mu)}_*(t-1)(1+o(1)) \tag{82}$$

Применяя лемму 3, получаем в результате

$$M_*^{(\mu)}(t) = \begin{cases} d_\mu \overline{\mathcal{M}}'_\mu B_\mu (1+o(1)), & \text{при } \mu = m, \\ \dfrac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}'_\mu}{c_\mu} t^{-1-\alpha(\mu)}(1+o(1)), & \text{при } \mu < m \end{cases} \tag{83}$$

Пусть теперь $I(q)=\mu$, $I(i)=\nu$, $\mu<\nu$, тогда из (61) получаем

$$M_{ij}'^{q}(t) = \delta_i^q p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{m\in I_\mu \cup I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \cdot [Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) M_{ij}'^{m}(t-1) + \\ + (1-Q_m(t-1)) R_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \bar{M}_{ij}^m (t-1)], \tag{84}$$

откуда

$$M_{ij}'^{q}(t) = O\left(t^{\beta(\mu)}\right) + \sum_m a_m^q M_{ij}'^{m}(t-1) - \sum_{\substack{m\in I_\mu\cup I_{\mu+1}\\ n\in I_\mu}} b_{mn}^q Q_n(t-1) M_{ij}'^{m}(t-1)(1+o(1)) + \\ + \left(\sum_{\substack{m\in I_\mu\cup I_{\mu+1}\\ n\in I_\mu}} b_{mn}^q P_n(t-1) \bar{M}_{ij}^m(t-1)\right)(1+o(1)) \tag{85}$$

(...здесь подробнее...)

Можем записать

$$M_{ij}'^{q}(t) = \sum_{m\in I_\mu} a_m^q M_{ij}'^{m}(t-1) - \sum_{m,n\in I_\mu} b_{mn}^q Q_n(t-1) M_{ij}'^{m}(t-1)(1+o(1)) + \\ + \sum_{m,n\in I_\mu} b_{mn}^q P_n(t-1) \bar{M}_{ij}^m (t-1)(1+o(1)) \tag{86}$$

Домножая на $v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}$ и суммируя по q, имеем

$$\delta M_*^{(\mu)}(t) = d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu B_\mu t^{\beta(\mu)+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)}(1+o(1)) - c_\mu B_\mu t^{\alpha(\mu)} \cdot M_*^{(\mu)}(t-1)(1+o(1)) \tag{87}$$

Так как $\mu<m$, $\alpha(\mu)>-1$, поэтому по лемме 3 получаем

$$M_*^{(\mu)}(t) = \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu}{c_\mu} t^{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)} \tag{88}$$

Объединяя результаты (83) и (88), получаем

$$M_*^{(\mu)}(t) = \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu B_\mu}{\delta_\mu^m (c_\mu B_\mu - 1) + 1} \cdot t^{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)}(1+o(1)), \tag{89}$$

после чего из (80)

$$M_{ij}^q(t) = \frac{u_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}}{P_q(t)} \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}_\mu B_\mu}{\delta_\mu^m (c_\mu B_\mu - 1) + 1} \cdot t^{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\nu}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\mu}\right)}(1+o(1)) \tag{90}$$

Список литературы

[1] Гантмахер Ф.Р. **Теория матриц.** — 5-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010 — 560 с. — ISBN 978-5-9221-0524-8

[2] Борисов А.Е. Закономерности в словах стохастических контекстно-свободных языков, порождённых грамматиками с двумя классами нетерминальных символов. Вопросы экономного кодирования.