Дискретная математика

том 19 выпуск 1 * 2007

УДК 519.2

Один класс докритических ветвящихся процессов с иммиграцией и с бесконечным числом типов частиц

© 2007 г. Б. А. Севастьянов

Рассматривается докритический ветвящийся процесс с иммиграцией, со счетным числом типов $T_1, T_2, \ldots$ частиц и с дискретным временем. Состояние процесса в момент t определяется совокупностью векторов

$$\vec{\xi}(r,t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_r(t)), \qquad r \geqslant 1,$$

где $\xi_i(t)$ — число частиц типа T_i в момент времени t, $i = 1, 2, \ldots$ Предполагается, что иммигрируют в каждый момент времени только частицы типа T_1; каждая частица типа T_i превращается в совокупность частиц типов T_i и T_{i+1}. Доказывается, что распределения вероятностей векторов $\vec{\xi}(r,t)$ при $t \to \infty$ сходятся к предельным дискретным распределениям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05.01.00035, и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 4129.2006.1.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующий ветвящийся случайный процесс с иммиграцией, со счетным числом типов частиц $T_1, T_2, \ldots$ и с дискретным временем. Будем предполагать, что в каждый момент времени $t = 1, 2, \ldots$ независимо друг от друга появляются $\eta_0(t)$ частиц типа T_1. Обозначим $G(s_1) = \mathsf{M}s_1^{\eta_0(t)}$ производящую функцию распределения $\eta_0(t)$, которое не зависит от момента времени t. Далее размножение частиц идет по следующей схеме. Каждая частица типа $T_k, k = 1, 2, \ldots$, существующая в момент времени $t \geqslant 1$, независимо от всех других частиц производит $\eta_k(t+1)$ частиц типа T_k и $\eta_{k+1}(t+1)$ частиц типа T_{k+1}. Закон распределения этой пары случайных величин определяется производящей функцией

$$\mathsf{M}s_k^{\eta_k(t+1)} s_{k+1}^{\eta_{k+1}(t+1)} = F(s_k, s_{k+1}),$$

где функция $F(u, v)$ одна и та же при любых k и t. Первоначальный ветвящийся процесс с иммиграцией и с бесконечным числом типов частиц $T_1, T_2, \ldots$ обозначим $\mathcal{B}$, а число частиц типа T_i в этом процессе обозначим $\xi_i(t), i = 1, 2, \ldots, t = 0, 1, 2, \ldots$ Эволюцию закона распределения этих случайных величин в процессе $\mathcal{B}$ сведем к эволюции последовательности ветвящихся процессов $\mathcal{B}_r$, $r \geqslant 1$, с конечным числом типов частиц $T_1, T_2, \ldots, T_r$ таких,что в $\mathcal{B}_r$ размножение частиц типов $T_1, T_2, \ldots, T_{r-1}$ происходит так же, как в процессе $\mathcal{B}$, а частицы типа T_{r+1}, рождающиеся из частиц типа T_r, считаются погибшими.

Введем следующие векторные обозначения. Положим

$$\begin{gathered}\vec{s}(r) = (s_1, s_2, \dots, s_r),\\ \vec{F}(r, \vec{s}(r)) = (F_1(\vec{s}(r)), F_2(\vec{s}(r)), \dots, F_r(\vec{s}(r))),\end{gathered} \tag{1}$$

где при $1 \leqslant i < r$

$$F_i(\vec{s}(r)) = F(s_i, s_{i+1})$$

и $F_r(\vec{s}(r)) = F(s_r, 1)$.

Далее для векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ будем использовать обозначение

$$\vec{a}^{\vec{b}} = \prod_{i=1}^{r} a_i^{b_i}.$$

Состояние ветвящегося процесса $\mathcal{B}_r$ в момент времени $t \geqslant 1$ определяется вектором

$$\vec{\xi}(r, t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)). \tag{2}$$

Введем многомерную производящую функцию вектора (2) при условии $\vec{\xi}(r, 0) = \vec{0}$

$$\Phi(r; t, \vec{s}(r)) = \mathsf{M}\{\vec{s}(r)^{\vec{\xi}(r,t)} \mid \vec{\xi}(r, 0) = \vec{0}\}.$$

2. Уравнения для производящих функций

Теорема 1. *В ветвящемся процессе $\mathcal{B}_r, r \geqslant 1$, производящая функция $\Phi(r, t, \vec{s}(r))$ удовлетворяет при любом целом $t = 0, 1, 2, \dots$ рекуррентному соотношению*

$$\Phi(r; t+1, \vec{s}(r)) = G(s_1)\Phi(r; t, \vec{F}(r, \vec{s}(r))) \tag{3}$$

и начальному условию

$$\Phi(r; 0, \vec{s}(r)) = 1. \tag{4}$$

Доказательство. Начальное условие (4) следует из того, что в начальный момент $t = 0$ частиц нет. Равенство (3) вытекает из условия независимости размножения частиц и иммиграции частиц. Нетрудно видеть, что последовательность $\vec{\xi}(r, t))$ образует цепь Маркова, поэтому в каждый момент времени t

$$\mathsf{M}\{\vec{s}(r)^{\xi(r,t+1)} \mid \vec{\xi}(r, t)\} = s_1^{\eta_0(t)}(\vec{F}(r; \vec{s}(r)))^{\vec{\xi}(r,t)}. \tag{5}$$

Осредняя равенство (5) по распределению $\eta_0(t)$ и $\vec{\xi}(r, t)$ получаем (3). Теорема доказана.

Далее будем предполагать, что существуют и конечны производные

$$\begin{aligned} G_1 &= G'(1), & G_2 &= G''(1),\\ a &= \left.\frac{\partial F(u, v)}{\partial u}\right|_{u=v=1}, & c &= \left.\frac{\partial F(u, v)}{\partial v}\right|_{u=v=1}. \end{aligned}$$

Вторые частные производные функции $F(u,v)$ по u и v в точке $u=v=1$ будем обозначать b и d соответственно. Вторую смешанную производную функции $F(u,v)$ в точке $u=v=1$ обозначим e. В этих обозначениях $\mathbf{M}\eta_0(t)=G_1$ и $\mathbf{M}\eta_0(t)(\eta_0(t)-1)=G_2$. Если случайные величины ξ_1, ξ_2 имеют совместное распределение с производящей функцией $F(u,v)$, то справедливы равенства

$$a=\mathbf{M}\xi_1,\quad c=\mathbf{M}\xi_2,\quad b=\mathbf{M}\xi_1(\xi_1-1),\quad d=\mathbf{M}\xi_2(\xi_2-1),\quad e=\mathbf{M}\xi_1\xi_2.$$

Теорема 2. *Если моменты G_1, G_2, a, c, b, d, e конечны и $0<a<1$, $c>0$, то распределение вероятностей $\vec{\xi}(r,t)$ в ветвящемся процессе $\mathcal{B}_r$ при $t\to\infty$ сходится к предельному распределению, производящая функция которого $\Phi(r,\vec{s}(r))$ удовлетворяет уравнению*

$$\Phi(r;\vec{s}(r))=G(s_1)\Phi(r,\vec{F}(r,\vec{s}(r))). \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{B}_r^*$ докритический ветвящийся процесс с r типами частиц $T_1,T_2,\dots,T_r$ без иммиграции, в котором в векторном обозначении (1) производящие функции $\vec{F}(r;\vec{s}(r))$ определяют размножение частиц (см. [1]). Итерации векторной функции $\vec{F}(r,\vec{s}(r))$ будем далее обозначать

$$\vec{F}(r;t+1,\vec{s}(r))=\vec{F}(r;t,\vec{F}(r,\vec{s}(r))), \tag{7}$$

$$\vec{F}(r;1,\vec{s}(r))=\vec{F}(r,\vec{s}(r)). \tag{8}$$

Далее в координатной форме t-ю итерацию вектора (8) будем обозначать

$$\vec{F}(r;t,\vec{s}(r))=(\vec{F}_1(r;t,\vec{s}(r)),\dots,\vec{F}_r(r;t,\vec{s}(r))).$$

Применяя последовательно формулу (3) при $t=0,1,2,\dots,t-1$, получаем, что

$$\Phi(r;t,\vec{s}(r))=\prod_{n=0}^{t-1}G(\vec{F}_1(r;n,\vec{s}(r))). \tag{9}$$

В (9) полагаем $\vec{F}(r;0,\vec{s}(r))=s_1$. Число частиц в процессе $\mathcal{B}_r^*$ типа T_i в момент t обозначим $\mu_i(t)$. Этот процесс докритический, так как по условию теоремы для всех i, $1\leqslant i\leqslant r$,

$$\mathbf{M}\{\mu_i(1)\mid\mu_i(0)=1,\mu_j(0)=0,\forall j\neq i\}=a<1.$$

Переходя в обеих сторонах равенства (9) к пределу по $t\to\infty$, получаем, что

$$\Phi(r;\vec{s}(r))=\prod_{n=0}^{\infty}G(\vec{F}_1(r;n,\vec{s}(r))). \tag{10}$$

Бесконечное произведение в (10) равномерно по $\vec{s}(r)$, $|s_i|\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant r$, сходится, так как в этой области $\vec{F}_1(r;n,\vec{s}(r))=1+O(a^n)$ и $|1-G(s_1)|\leqslant G_1|1-s_1|$ (см. [2]). Переходя в равенстве (7) к пределу по $t\to\infty$, получаем уравнение (6). Теорема доказана.

3. Первые и вторые моменты предельного распределения

Обозначим

$$\vec{\xi}(r) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \tag{11}$$

пределы по распределению при $t \to \infty$ случайных величин (2). По теореме 2 их распределение определяется многомерной производящей функцией $\Phi(r; \vec{s}(r))$, которая удовлетворяет уравнению (6). Далее будем обозначать первые и вторые моменты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ следующим образом:

$$\mathbf{M}\xi_k = A_k, \quad \mathbf{M}\xi_k(\xi_k - 1) = B_{kk}, \quad \mathbf{M}\xi_k\xi_l = B_{kl}, \quad k \neq l. \tag{12}$$

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *при любых* $r \geqslant k$, $l \geqslant 1$ *все моменты* (12) *конечны. Первые моменты определяются формулой* $A_k = G_1\lambda^k/c$, *где* $\lambda = c/(1-a)$. *Вторые моменты* B_{kk}, B_{kl} *линейно выражаются через* $B_{k'l'}$ *с* $k' \leqslant k$, $l' \leqslant l$, *и начальные значения* B_{11}, B_{12}, *которые вычисляются непосредственно.*

Доказательство. Моменты (12) выражаются через производные в точке $\vec{s}(r) = \vec{1}$ производящей функции $\Phi(r; \vec{s}(r))$ следующим образом:

$$A_k = \frac{\partial\Phi(r; \vec{s}(r))}{\partial s_k}, \qquad B_{kl} = \frac{\partial^2\Phi(r; \vec{s}(r)}{\partial s_k \partial s_l}.$$

Дифференцируя обе части уравнения (6) по s_k, получаем, что

$$\frac{\partial\Phi(r; \vec{s}(r))}{\partial s_1} = G'(s_1)\Phi(r; \vec{F}(r; \vec{s}(r))) + G(s_1)\frac{\partial\Phi}{\partial F_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial s_1},$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial s_k} = G(s_1)\frac{\partial\Phi}{\partial F_k}\,\frac{\partial F_k}{\partial s_k} + G(s_1)\frac{\partial\Phi}{\partial F_{k-1}}\,\frac{\partial F_{k-1}}{\partial s_k},$$

поэтому

$$A_1 = G_1 + A_1 a,$$
$$A_k = A_k a + A_{k-1} c, \qquad k \geqslant 2,$$

откуда следует, что

$$A_k = \frac{G_1}{c}\lambda^k, \quad k \geqslant 1,$$

где $\lambda = c/(1-a)$.

Вычисление вторых производных в равенстве (6) приводит к более громоздким выражениям, связывающим вторые моменты B_{kl}. Например,

$$B_{11} = G_2 + 2G_1A_1 + B_{11}a^2 + A_1 b,$$
$$B_{kk} = B_{k-1,k-1}c^2 + B_{kk}a^2 + 2B_{k-1,k}ac + A_{k-1}d + A_k b,$$
$$B_{12} = G_1A_1c + B_{12}a^2 + A_1 e + A_2 a G_1.$$

В общем случае при $k \neq l$ вторые моменты B_{kl} линейно выражаются через $B_{k'l'}$, $k' \leqslant k$, $l' \leqslant l$. Отсюда следует, что все вторые моменты B_{kl} конечны. Дисперсии $D_{kk} = \mathbf{D}(\xi_k - A_k)^2$ и ковариации $D_{kl} = \mathbf{M}(\xi_k - A_k)(\xi_l - A_l)$, $k \neq l$, выражаются через B_{kl} следующим образом:

$$D_{kk} = B_{kk} + A_k - A_k^2, \quad D_{kl} = B_{kl} - A_kA_l, \quad k \neq l.$$

Теорема доказана.

Предельное распределение случайного вектора $\vec{\xi}(r)$ можно рассматривать как стационарное распределение ветвящегося процесса $\mathcal{B}(r)$. Рассмотрим последовательность независимых стационарных ветвящихся процессов $\mathcal{B}_r(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Суммарное число частиц типа T_k в этих процессах обозначим $\mu_k(N)$. Из центральной предельной теоремы следует, что распределение случайных величин

$$\frac{\mu_k(N) - NA_k}{\sqrt{N}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, r,$$

сходится к многомерному нормальному распределению с ковариационной матрицей $\|D_{kl}\|$ и нулевыми средними.

4. Заключение

Ветвящийся случайный процесс $\mathcal{B}$ может служить математической моделью начальной стадии зарождения жизни в среде, которую можно назвать “биологическим бульоном”. Пусть в этой среде случайно образуются некоторые агрегаты (молекулы), которые мы назовем частицами типа T_1. Эти частицы типа T_1, взаимодействуя со средой, могут производить в следующем поколении либо другие частицы того же типа, либо более сложные частицы типа T_2. Аналогично любые частицы типа T_k либо воспроизводят частицы того же типа T_k, либо превращаются в более сложные частицы типа T_{k+1}, и так далее.

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы.* Наука, Москва, 1971.

2. Kesten H., Stigum B. P., A limit theorem for multidimensional Galton–Watson processes. *Ann. Math. Statist.* (1966) **37**, №5, 1211–1223.

Статья поступила 9.12.2006.