ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
******** 2000. Том 55, № 10. С. 3–8

УДК 519.8

О ЗАДАЧЕ НЕСКОЛЬКИХ КОММИВОЯЖЁРОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНЫЕ СПОСОБНОСТИ РЁБЕР ГРАФА *)

Э. Х. Гимади[1,2], *А. М. Истомин*[1], *И. А. Рыков*[1]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия,
[2] Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, Россия

E-mail: gimadi@math.nsc.ru, alexeyistomin@gmail.com, rykovweb@gmail.com

Аннотация. Рассматривается частный случай задачи отыскания m гамильтоновых циклов с ограничениями на число повторений рёбер (m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem, m-CPSP) — задачи 2-CPSP на минимум и максимум с весами рёбер из целочисленного сегмента $\{1, q\}$. Пропускные способности рёбер заданы независимыми случайными величинами, принимающими значение 2 (1) с вероятностью p $(1 - p)$. Построены алгоритмы решения задач 2-CPSP$_{\min}$ и 2-CPSP$_{\max}$ с гарантированными оценками точности в среднем по всем возможным входам. В частности, для задач на графах с весами рёбер 1 и 2 алгоритмы имеют оценки точности $(19 - 5p)/12$ и $(25 + 7p)/36$ в среднем по всем возможным входам для задачи на минимум и на максимум соответственно. Ил. 17, библиогр. 20.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, задача нескольких коммивояжёров, рёберно непересекающийся гамильтонов цикл, приближённый алгоритм, гарантированная оценка точности.

Введение

В классической постановке задачи коммивояжёра в качестве входной информации берётся рёберно-взвешенный граф $G = (V, E)$ с неот-

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12–01–00093а, 10–07–00195а, 12–01–33028мол_а_вед), целевой программы Президиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (проект № 7Б).

рицательной весовой функцией рёбер $w : E \to \mathbb{R}^+$, а целью является отыскание в нём экстремального по весу гамильтонова цикла [1, 3–5].

...

Замечание 1. В ряде случаев результаты, полученные для задачи 2-PSP, могут быть использованы для 2-CPSP. Любое допустимое решение 2-PSP является допустимым решением 2-CPSP, а величина $2W(T^*)$ является нижней (верхней) оценкой для решения 2-CPSP$_{\min}$ (2-CPSP$_{\max}$). Любой алгоритм A решения задачи 2-PSP$_{\min}$ (2-PSP$_{\max}$), для которого доказана оценка вида $W(P^A) \leqslant \alpha \cdot 2W(T^*)$ ($W(P^A) \geqslant \alpha \cdot 2W(T^*)$), является α-приближённым алгоритмом для задачи 2-CPSP$_{\min}$ (2-CPSP$_{\max}$); в качестве решения 2-CPSP возьмём решение 2-PSP, полученное алгоритмом A. Действительно, для задачи на минимум из неравенства $W(H^*) \geqslant 2W(T^*)$ следует, что

$$W(H^A) = W(P^A) \leqslant \alpha \cdot 2W(T^*) \leqslant \alpha \cdot W(H^*).$$

Аналогично, для задачи на максимум имеем $W(H^A) \geqslant \alpha \cdot W(H^*)$.

1. Новые алгоритмы решения задач 2-CPSP$_{\min}$ и 2-CPSP$_{\max}$

Ссылка на разд. 1 и т. д.

....

Сформулируем эту задачу для произвольного числа индексов m: минимизировать функцию

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\sigma_{21}(i),\sigma_{31}(i),\, \dots,\, \sigma_{m1}(i)} \tag{6}$$

на множестве подстановок $\{\pi_k \mid 1 \leqslant k < m\}$ таких, что

$$\sigma_{jj'} = \pi_{j-1}\pi_{j-2}\dots\pi_{j'+1}\pi_{j'} \in P_n \quad \text{при } 1 \leqslant j' < j \leqslant m. \tag{7}$$

....

Определение 1. Вершины графа G, не инцидентные рёбрам данного частичного тура $\widetilde{H}$, назовём *свободными вершинами относительно частичного тура* $\widetilde{H}$.

....

На рис. 1 представлены n-последовательносвязные цепи для различных n.

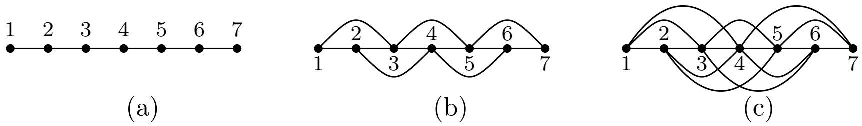

Рис. 1. Неориентированные n-последовательносвязные цепи:
(a) 1-, (b) 2- и (c) 3-последовательносвязная цепь

....

Для удобства сгруппируем информацию для этих десяти кодов в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

(r, k)	Номера кодов
(13, 4)	64
(13, 5)	24
(14, 2)	424, 1983
(14, 3)	488, 1968, 2134, 2148, 2157
(14, 4)	1907

....

Лемма 1. *Пусть H_1 — гамильтонов цикл первого этапа алгоритма $A_{\min}\{\overline{1,q}\}$ или $A_{\max}\{\overline{1,q}\}$. Математическое ожидание суммарного веса рёбер H_1 с пропускной способностью два составляет $pW(H_1)$.*

Доказательство. Текст доказательства. Лемма 1 доказана.

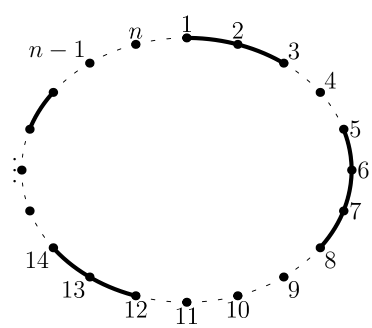

Рис. 2. Гамильтонов цикл $\widetilde{H}_1$

Теорема 1. *Предположим, что в алгоритме $A_{\min}\{\overline{1,q}\}$ используется полиномиальный приближённый алгоритм решения $\mathrm{TSP}_{\min}\{\overline{1,q}\}$ с гарантированной оценкой точности Δ. Тогда в полном n-вершинном графе с весами рёбер из целочисленного сегмента $\{\overline{1,q}\}$ алгоритм $A_{\min}\{\overline{1,q}\}$ находит приближённое решение задачи 2-$\mathrm{CPSP}_{\min}\{\overline{1,q}\}$ с гарантированной* *оценкой точности ρ в среднем*

$$\rho \leqslant \begin{cases} \frac{(1+p)\Delta+(1-p)q}{2} & \text{при } n \geqslant n_0, \\ \frac{(1+p)\Delta+(1-p)q}{2} + \varepsilon & \text{при } n < n_0, \end{cases}$$

где $\varepsilon \leqslant \frac{q}{2n}$, $\quad n_0 = \begin{cases} \min\left\{\frac{q+5}{1-p}, \frac{7}{1+(\Delta-q)p}\right\}, & \text{если } 1+(\Delta-q)p > 0, \\ \frac{q+5}{1-p} & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Доказательство. Текст доказательства. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Используя 7/6-приближённый алгоритм решения задачи* $\mathrm{TSP}_{\min}\{1,2\}$, *алгоритм* $A_{\min}\{\overline{1,q}\}$ $(q=2)$ *строит решение задачи* 2-$\mathrm{CPSP}_{\min}\{1,2\}$ *с гарантированной оценкой точности в среднем не хуже, чем* $(19-5p)/12$, *при* $n \geqslant \frac{7}{1-\frac{5}{6}p}$.

....

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Пяткин А. В.** Приближённый алгоритм решения метрической задачи о двух коммивояжёрах с оценкой точности 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 4. С. 3–20.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
3. **Baburin A. E., Della Croce F., Gimadi E. K., Glazkov Yu. V., Paschos V. Th.** Approximation algorithms for the 2-PSP with edge weights 1 and 2 // Discrete Appl. Math. 2009. Vol. 157, No. 9. P. 1988–1992.
4. **Gutin G., Punnen A. P.** The traveling salesman problem and its variations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 830 p.
5. **De Kort J. B. J. M.** Lower bounds for symmetric k-peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. Vol. 22, No. 1. P. 113–122.
6. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** Раскраска инциденторов мультиграфа // Topics in graph theory. 2013. С. 197—209. http://www.math.uiuc.edu/kostochk/
7. **Малюгин С. А.** Об аффинно несистематических кодах // Сб. докл. междунар. конф., посвящённой 90-летию со дня рождения А. А. Ляпунова (Новосибирск, 8—12 октября 2001 г.). 2001. С. 393—394. http://www.sbras.nsc.ru/ws/ Lyap2001/2288
8. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 924—931.
9. **Харари Ф.** Теория графов. М: Мир, 1973. 299 с.
10. **Чугунова В. В.** Синтез асимптотически оптимальных по надёжности схем при инверсных неисправностях на входах элементов // Дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. Пенза, 2007. 110 с.

11. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. Vol. 268, No. 1—3. P. 31—49.
12. **Gabow H. N.** An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory of Comput. (Boston, April 25—27, 1983). New York: ACM, 1983. P. 448—456.
13. **Solov'eva F. I.** Switchings and perfect codes // Numbers, information and complexity. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 311—324.

Гимади Эдуард Хайрутдинович
Истомин Алексей Михайлович
Рыков Иван Александрович

Статья поступила
** ** 20** г.

Исправленный вариант —
** ** 20** г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
******** 2000. Volume 55, No. 10. P. 3–8

UDC 519.8

OPTIMIZATION OF USING AN UNSTRING DEVICES WITH THE FACES OF CLERGY TITLE

E. Kh. Гимади[1,2], *A. M. Istomin*[1], *I. A. Rykov*[1]

[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2] Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: gimadi@math.nsc.ru, alexeyistomin@gmail.com, rykovweb@gmail.com

Abstract. We consider a particular case of the problem of finding m Hamiltonian cycles with capacity restrictions on edges usage (m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem, m-CPSP): the 2-CPSP on minimum and maximum with edge weights from an integer segment $\{1, q\}$. The edges capacities are independent identically distributed random variables which assume 2 with probability p and 1 with probability $1-p$. Polynomial algorithms for 2-CPSP$_{\min}$ and 2-CPSP$_{\max}$ with guarantee approximation ratio in average for all possible inputs are presented. In the case when edge weights are 1 and 2, the presented algorithms have approximation ratio $(19-5p)/12$ and $(25+7p)/36$ for the 2-CPSP$_{\min}$ and the 2-CPSP$_{\max}$ correspondingly. Ill. 17, bibliogr. 20.

Keywords: traveling salesman problem, m-peripatetic salesman problem, approximation algorithm, edge-disjoint Hamiltonian cycle, guarantee approximation ratio.

Edward Kh. Gimadi
Alexey M. Istomin
Ivan A. Rykov

Received
** ** 20**

Revised
** ** 20**