Курсовая работа

по теме:

«Энтропия множества деревьев вывода в разложимой стохастической КС-грамматике, имеющей вид "цепочки"»

Студент:
Матрынов Игорь Михайлович

Научный руководитель:
Жильцова Лариса Павловна

Стохастическая КС-грамматика

$$G = < V_N, V_T, s, R >$$

V_N и V_T — конечные алфавиты терминальных и нетерминальных символов

$s \in V_N$ — аксиома

$R = \cup_{i=1}^{k} R_i$, где R_i — множество правил вида:

$$r_{ij} : A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij} \quad (j = 1, 2, \ldots, n_i)$$

$\beta_{ij} \in (V_N \cup V_T)^*$, p_{ij} — вероятность применения правила

$$0 < p_{ij} \leqslant 1 \quad \sum_{j=1}^{n_j} p_{ij} = 1$$

Пример вывода слова

Язык арифметических выражений (+, -, *, /, a, b)

$$V_N = \{E, S, M\},\ V_T = \{a, b\},\ s = E$$

Множество правил вывода

$r_{11} : E \to E + S$

$r_{12} : E \to E - S$

$r_{13} : E \to S$

$r_{21} : S \to S \cdot M$

$r_{22} : S \to S/M$

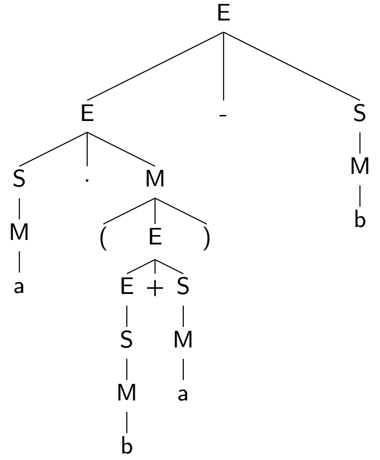
$r_{23} : S \to M$

$r_{31} : M \to (E)$

$r_{32} : M \to a$

$r_{33} : M \to b$

$$a \cdot (b + a) - b$$



Отношение следования на множестве нетерминалов

$A_i \to A_j$, если существует правило $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \alpha A_j \beta$, где $\alpha, \beta \in (V_N \cup V_T)^*$.

$(\to_*)$ — рефлексивное транзитивное замыкание $(\to)$.

$A_i \leftrightarrow_* A_j$, если $A_i \to_* A_j$ и $A_j \to_* A_i$.

Разобьём нетерминалы на классы по отношению $(\leftrightarrow_*)$. Тогда:

$$\forall A_i, A_j \in K \quad A_i \to_* A_j$$

Не рассматриваем особые классы: $K = \{A\}$, $A \not\to A$.

$K_1 \prec K_2$, если $\exists A_1 \in K_1, A_2 \in K_2 : A_1 \to A_2$.

$(\prec_*)$ — рефлексивное транзитивное замыкание $(\prec)$.

Производящие функции

$$F_i(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} s_1^{l_1} s_2^{l_2} \ldots s_k^{l_k},$$

где l_s — число нетерминалов A_s в правой части правила $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta ij$.

Производящие функции с параметром t:

$$F_i(t, \bar{s}) = \begin{cases} F_i(\bar{s}), & \text{при} \quad t = 1 \\ F_i(\bar{F}(t-1, \bar{s})), & \text{при} \quad t = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Первые моменты

$$\left.\frac{\partial F_i(s_1, s_2, \ldots, s_k)}{\partial s_j}\right|_{s_1=s_2=\ldots=s_k=1} = a_j^i$$

a_j^i — математическое ожидание числа нетерминалов A_j при однократном применении случайного правила к A_i.

Матрица $A = (a_j^i)$ — матрица первых моментов.

r — максимальное по модулю собственное число матрица A (перронов корень). Будем рассматривать критический случай $r = 1$.

Пример: язык арифметических выражений (без скобок)

$$V_N = \{E, S, M, X\} \quad V_T = \{a, b, c\} \quad s = E$$

R содержит правила:

$$r_{11} : E \xrightarrow{1/2} E + E$$

$$r_{12} : E \xrightarrow{1/2} S$$

$$r_{21} : S \xrightarrow{1/4} S \cdot S$$

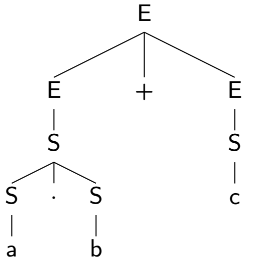
$$r_{22} : S \xrightarrow{1/4} a$$

$$r_{23} : S \xrightarrow{1/4} b$$

$$r_{24} : S \xrightarrow{1/4} c$$

Матрица первых моментов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



$$p(a \cdot b + c) = p_{11} \cdot p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{22} \cdot p_{23} \cdot p_{12} \cdot p_{24} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2048}$$

Грамматика вида «цепочки»

$$K_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_m$$

$$K_1 \prec K_2 \prec \ldots \prec K_m$$

Матрица первых моментов такой грамматики имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{mm} \end{pmatrix}$$

Блоки $A_{ii}(i = 1, 2, \ldots, m)$ неразложимы, имеют перроновы корни r_i.

Перронов корень всей матрицы $r = \max\{r_i\}$.

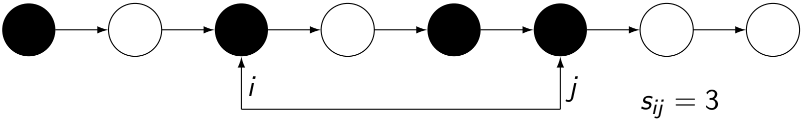
Асимптотика матрицы первых моментов

Пусть $A_{ij}^{(t)}$ — блок матрицы A^t на позиции блока A_{ij} матрицы A. При $t \to \infty$

$$A_{ij}^{(t)} = U^{(i)} V^{(j)} \cdot t^{s_{ij}-1} \cdot (1 + o(1))$$

Если класс K_i (K_j) критический, то $U^{(i)}$ ($V^{(i)}$) — правый (левый) собственный вектор блока A_{ii} (A_{jj}).

Л. П. Жильцова

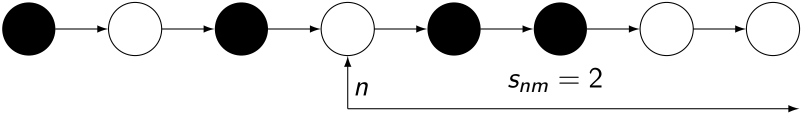


Вероятности продолжения

$Q_i(t)$ — вероятность деревьев вывода высоты $\geqslant t$ с корнем A_i (вероятности продолжения).
$P_i(t)$ — вероятность деревьев высоты t.
При $t \to \infty$

$$Q_i(t) = c_n \cdot U_i \cdot t^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{s_{nm}-1}} \cdot (1 + o(1))$$
$$P_i(t) = \tilde{c}_n \cdot U_i \cdot t^{-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{s_{nm}-1}} \cdot (1 + o(1)),$$

где $A_i \in K_n$, $U_i, c_n, \tilde{c}_n > 0$.



Математические ожидания числа применений правил

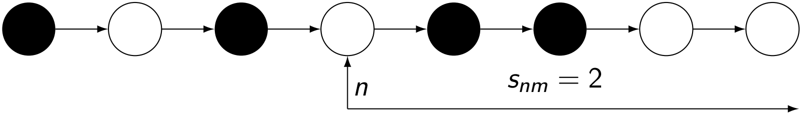
$M_{ij}(t)$ — математическое ожидание числа применений правила r_{ij} в деревьях высоты t

При $t \to \infty$

$$M_{ij}(t) = d_i \cdot p_{ij} \cdot t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{s_{nm}-1-\xi}} \cdot (1 + o(1)),$$

где $A_i \in K_n$, $d_i > 0$ и

$$\xi = \begin{cases} 1, & K_n \text{ — критический} \\ 0, & K_n \text{ — докритический} \end{cases}$$



Энтропия деревьев вывода фиксированной высоты

При $t \to \infty$

$$H(D^t) = t^2 \cdot \sum_{i > \sigma_{n-1}} d_i \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} \log p_{ij} \cdot (1 + o(1)),$$

где σ_{n-1} — число нетерминалов в классах, предшествующих последнему критическому

В докритическом случае:

$$H(D^t) = t \cdot \left(\log r - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \log p_{ij} \right) \cdot (1 + o(1))$$

Использованная литература

- **Севастьянов Б. А.** Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971 — 436 с.
- **Фу К.** Структурные методы в распознавании образов. М.: Мир, 1977
- **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. — 5-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010
- **Ахо А., Ульман Дж.** Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Том 1. М.: Мир, 1978
- **Жильцова Л. П.** О матрице первых моментов разложимой стохастической КС-грамматики. УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, Том 151, кн. 2, 2009
- **Жильцова Л. П.** Закономерности применения правил грамматики в выводах слов стохастического контекстно-свободного языка // Математические вопросы кибернетики. Выр. 9. М.: Наука, 2000. С. 100-126.
- **Борисов А. Е.** Закономерности в словах стохастических контекстно-свободных языков, порождённых грамматиками с двумя классами нетерминальных символов. Вопросы экономного кодирования.

Спасибо за внимание!