Для каждого из классов K_n будем вектор $Q^{(n)}(t)$ — вектор-столбец, содержащий вероятности продолжения для нетерминалов K_n в порядке их нумерации. Тогда

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q^{(1)}(t) \\ Q^{(2)}(t) \\ \vdots \\ Q^{(m)}(t) \end{pmatrix}, \quad Q^{(j)}(t) \in \mathbb{R}^{k_j}, \tag{1}$$

где $k_j = |K_j|$. Тогда уравнение (**??**) можно записать в виде

$$Q_i^{(n)}(t+1) = \sum_{i=1}^{k_n} a_j^i Q_j^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{k_{n+1}} a_j^i Q_j^{(n+1)}(t)(1+o(1)) \tag{2}$$

или, в матричном виде,

$$Q^{(n)}(t+1) = A_{n,n} Q^{(n)}(t) + A_{n,n+1} Q^{(n+1)}(t)(1+o(1)) \tag{3}$$

Для всего вектора $Q(t)$ верно равенство

$$Q(t+1) = (A - A(t))Q(t), \tag{4}$$

где $A(t)$ — матрица, составленная из элементов $a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} b_{jl}^i Q_l(t)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant k)$. В силу согласованности грамматики $Q(t) \to 0$ и, следовательно, $A(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Докажем, что компоненты вектора $Q^{(n)}(t)$ пропорциональны некоторому вектору $U^{(n)}$. Доказательство аналогичного факта для случая двух классов принадлежит А. Борисову. Здесь мы проведём похожие рассуждения.

Зафиксируем некоторое $\tau \geqslant 0$. Тогда из (4) получаем

$$Q(t+1) = (A - A(t)) \cdot \ldots \cdot (A - A(\tau))Q(\tau) \tag{5}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A^*(t) &= (A - A(t)) \cdot (A - A(t-1)) \cdot \ldots \cdot (A - A(\tau+1)) \\ \tilde{A}_{ij}^* &= \frac{A_{ij}^*(t)}{t^{s_{ij}}} \\ \tilde{A}_{ij} &= \frac{A_{ij}^{(t)}}{t^{s_{ij}}}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $A_{ij}^{(t)}$ — блоки, расположенные на месте блоков A_{ij} в матрице A^t и s_{ij} — число критических классов в подцепочке $K_i, K_{i+1}, \ldots, K_j$.

Из исследования асимптотики матрицы A^t известно [4], что $\tilde{A}_{ij}(t) \to \tilde{a}_{ij} U^{(i)} V^{(j)}$, где $\tilde{a}_{ij}$ — некоторые константы, $U^{(i)}$ — вектор-строка длины k_i, а $V^{(j)}$ — вектор-столбец длины k_j.

Выберем произвольные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, такие что $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$. Тогда существуют функции $l(\varepsilon_1)$ и $n(\varepsilon_2)$, такие что

$$\begin{array}{l} \left|\tilde{A}_{ij}(l(\varepsilon_1)) - \tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(j)}\right| < \varepsilon_1 E \\ \forall t \geqslant n(\varepsilon_2) \quad A(t) < \varepsilon_2 A \end{array}. \tag{7}$$

Рассмотрим произвольный вектор-столбец $x > \mathbf{0}$ длины k. Тогда выполняется оценка

$$(1-\varepsilon_2)^l A^l x^{(\tau)} \leqslant A^*(t)x^{(\tau)} \leqslant A^l x^{(\tau)}, \tag{8}$$

где $x^{(\tau)} = (A - A(\tau))x$. Записывая это неравенство отдельно для блоков A_{ij}, получаем

$$(1-\varepsilon_2)^l A^l_{ij} x^{(\tau)}_j \leqslant A^*_{ij}(l) x^{(\tau)}_j \leqslant A^{(l)}_{ij} x^{(\tau)}_j, \tag{9}$$

откуда

$$(1-\varepsilon_2)^l \tilde{A}_{ij}(l) x^{(\tau)} \leqslant \tilde{A}^*_{ij}(l) x^{(\tau)}_j \leqslant \tilde{A}_{ij}(l) x^{(\tau)} \tag{10}$$

Вычитая из всех частей неравенства $\tilde{A}_{ij}(l)x^{(\tau)}_j$, получаем оценку

$$\left|\left(\tilde{A}^*_{ij}(l) - \tilde{A}_{ij}(l)\right) x^{(\tau)}_j\right| \leqslant (1-(1-\varepsilon_2)^l)\tilde{A}_{ij}(l)x^{(\tau)} \tag{11}$$

Используя эту оценку, можем записать

$$\begin{aligned} \left|\tilde{A}^*_{ij}(t) - \tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(j)}x^{(\tau)}_j\right| &\leqslant \left|\left(\tilde{A}^*_{ij}(t) - \tilde{A}_{ij}(t)\right) x^{(\tau)}\right| + \\ &+ \left|\left(\tilde{A}_{ij}(l) - \tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(j)}\right) x^{(\tau)}_j\right| \leqslant (1-(1-\varepsilon_2)^l)\tilde{A}_{ij}(l)x^{(\tau)}_j + \varepsilon_1 x^{(\tau)}_j \leqslant \\ &\leqslant (1-(1-\varepsilon_2)^l)hk_j x^{(\tau)}_j + \varepsilon_1 x^{(\tau)}_j \leqslant \left((1-1-\varepsilon_2)^l)hk_j + \varepsilon_1\right) x^*_j(\tau), \end{aligned} \tag{12}$$

где $h = \max_{i,j,l}\left\{\tilde{A}_{ij}(l)\right\}$ и $x^*_j(\tau) = \max_i(x^{(\tau)}_j)_i$.

Устремляем ε_2 к нулю, затем ε_1 к нулю таким образом, чтобы выполнялось условие

$$l(\varepsilon_1)\log(1-\varepsilon_2) \to -\infty \tag{13}$$

Тогда

$$\left|\tilde{A}^*_{ij}(t) - \tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(j)}x^{(\tau)}_j\right| \leqslant \varepsilon x^*_j(\tau) \quad (\varepsilon \to 0). \tag{14}$$

Домножая слева на $V^{(i)}$, имеем

$$\left|V^{(i)}\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j - \tilde{a}_{ij}V^{(j)}x^{(\tau)}_j\right| \leqslant \varepsilon k_i \max\left\{(V^{(i)}\right\} x^*_j(\tau) \leqslant \varepsilon^* V^{(j)}x^{(\tau)}_j. \tag{15}$$

Отсюда,

$$\left|\frac{\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j}{V^{(i)}\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j} - \frac{\tilde{a}_{ij}U^{(i)}V^{(i)}x^{(\tau)}_j}{\tilde{a}_{ij}V^{(j)}x^{(\tau)}_j}\right| = \left|\frac{\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j}{V^{(i)}\tilde{A}^*_{ij}(t)x^{(\tau)}_j} - U^{(i)}\right| \to 0 \tag{16}$$

или же

$$\left|\frac{A^*_{ij}(t)x_j^{(\tau)}}{V^{(i)}A^*_{ij}(t)x_j^{(\tau)}} - U^{(i)}\right| \to 0, \tag{17}$$

откуда

$$(A - A(t)) \cdot \ldots \cdot (A - A(\tau)) \cdot x_j = U^{(i)}V^{(i)}(A - A(t)) \cdot \ldots \cdot (A - A(\tau)) \cdot x_j \cdot (1 + o(1)) \tag{18}$$

Ввиду полученного выражения и (5) компоненты каждого из векторов $Q^{(n)}(t)$ пропорциональны компонентам вектора $U^{(n)}$.

Список литературы

[1] **К. Фу.** Структурные методы в распознавании образов. М.: Мир, 1977

[2] **А. Ахо, Дж. Ульман** Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Том 1. М.: Мир, 1978

[3] **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. — 5-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010

[4] **Жильцова Л. П.** О матрице первых моментов разложимой стохастической КС-грамматики. УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, Том 151, кн. 2, 2009