

1 Основные определения

Стохастической КС-грамматикой [5] называется система $G = \langle V_T, V_N, R, s \rangle$, где V_T и V_N — соответственно алфавиты терминальных и нетерминальных символов (*терминалов* и *нетерминалов*), s — *аксиома* грамматики, R — множество *правил вывода*, представимое в виде $R = \cup_{i=1}^k R_i$, где $k = |V_N|$, и R_i — множество правил вида

$$r_{ij} : A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij} \quad (A_i \in V_N, \beta_{ij} \in (V_N \cup V_T)^*), \quad (1)$$

и p_{ij} — вероятность применения правила r_{ij} , причём при фиксированном i вероятности r_{ij} задают вероятностное распределение на множестве R_i :

$$0 < p_{ij} \leq 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2)$$

где $n_i = |R_i|$.

Слово β называется *непосредственно выводимым* из α (обозначается $\alpha \Rightarrow \beta$), если существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_T)^*$, для которых $\alpha = \alpha_1 A_i \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \beta_{ij} \alpha_2$ и в R имеется правило $A_i \xrightarrow{p_{ij}} \beta_{ij}$.

Через \Rightarrow_* обозначим рефлексивное транзитивное замыкание \Rightarrow . Если $\alpha \Rightarrow_* \beta$, говорят, что β *выводимо* из α . Язык L_G , *порождаемый* грамматикой G определяется как множество слов $\alpha \in V_T^*$, выводимых из аксиомы s грамматики G .

Последовательность правил грамматики (r_1, r_2, \dots, r_k) называется *выводом* слова α (обозначается $\omega(\alpha)$), если существует последовательность слов $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ таких, что для любого l слово α_l получается из α_{l-1} при замене одного из нетерминалов α_{l-1} согласно правилу r_l , и при этом $\alpha_0 = s$ и $\alpha_k = \alpha$. В случае, если каждое α_l получено из α_{l-1} заменой самого левого нетерминала в α_{l-1} согласно правилу r_l , такой вывод $\omega(\alpha)$ называют *левым*.

Вероятность вывода $\omega(\alpha)$ определяется как $p(\omega(\alpha)) = p(r_1) \cdot p(r_2) \cdot \dots \cdot p(r_k)$, где $p(r_i)$ — вероятность применения правила r_i .

Каждому выводу слова α соответствует корневое дерево, называемое *деревом вывода*. Узлам дерева соответствуют терминалы и нетерминалы. Дерево вывода $\omega(\alpha) = (r_1, \dots, r_k)$ может быть построено следующим образом. В корень дерева помещается аксиома s грамматики. Далее для правил r_1, r_2, \dots, r_k последовательно к листу дерева, соответствующему левой

части правила r_i приписываются буквы правой части r_i , образующие листья на следующем ярусе дерева. После выполнения этого действия для всех правил полученное дерево будет являться деревом вывода слова α в грамматике G , соответствующее выводу α .

Одному дереву вывода, построенному для слову α могут соответствовать различные выводы этого слова. Известно, однако, что существует взаимно-однозначное соответствие между деревьями вывода слов и левыми выводами. Вероятность слова α в грамматике определяется как сумма вероятностей всех его левых выводов.

Грамматика G называется *согласованной*, если

$$\sum_{\alpha \in L_G} p(\alpha) = 1. \quad (3)$$

Согласованная грамматика G задаёт распределение вероятностей P на L_G , и определяет *стохастический КС-язык* $\mathcal{L} = (L, P)$. В дальнейшем всюду предполагается, что грамматика согласованна.

Обозначим D_l^t — множество деревьев вывода высоты t , порождаемых грамматикой G при замене её аксиомы на A_l . Аналогично, $D_l^{\leq t}$ — множество деревьев вывода, высота которых не превосходит $t - 1$.

Для исследования вероятностных характеристик стохастической КС-грамматики применяются производящие функции

$$F_i(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij} \in R}}^{n_i} p_{ij} s_1^{l_1} s_2^{l_2} \dots s_k^{l_k}, \quad (4)$$

где $l_m = l_m(i, j)$ — число вхождений нетерминала A_m в β_{ij} .

Величины

$$a_j^i = \left. \frac{\partial F_i(s_1, s_2, \dots, s_k)}{\partial s_j} \right|_{s_1=s_2=\dots=s_k=1} \quad (5)$$

называются *первыми моментами* грамматики G . Матрица $A = (a_j^i)$ называется *матрицей первых моментов* грамматики G .

Матрица A , по построению, неотрицательна. По теореме Фробениуса, доказанной в [1], существует максимальный по модулю вещественный неотрицательный собственный корень r . Известно, что критерием согласованности стохастической КС-грамматики при отсутствии бесполезных нетерминалов является условие $r \leq 1$.

Говорят, что нетерминал A_j *непосредственно следует* за нетерминалом A_i (обозначается $A_i \rightarrow A_j$), если в R имеется правило $A_i \xrightarrow{(p_{ij})} \alpha_1 A_j \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_N \cup V_T)^*$. Транзитивное замыкание отношения \rightarrow обозначается \rightarrow_* . Если $A_i \rightarrow_* A_j$, говорят, что A_j *выводится* из A_i .

Введём также отношение \leftrightarrow_* . Будем считать, что $A_i \leftrightarrow_* A_j$, если одновременно $A_i \rightarrow_* A_j$ и $A_j \rightarrow_* A_i$. Очевидно, отношение \leftrightarrow_* есть отношение эквивалентности, и потому разбивает множество нетерминалов на классы $V_N = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m : K_i \cap K_j = \emptyset (i \neq j)$. Класс, содержащий ровно один нетерминал, будем называть *особым*. Множество классов $\{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ обозначим \mathcal{K} .

Если все нетерминалы грамматики образуют один класс, она называется *неразложимой*. В противном случае она называется *разложимой*. Очевидно, разложимой грамматике соответствует разложимая [1] матрица первых моментов.

Говорят, что класс K_j *непосредственно следует* за классом K_i (обозначается $K_i \prec K_j$), если существуют $A_1 \in K_i$ и $A_2 \in K_j$ такие, что $A_1 \rightarrow A_2$. Рефлексивное транзитивное замыкание \prec обозначим \prec_* , и назовём отношением *следования*.

Будем говорить, что грамматика имеет вид «цепочки», если она разложима, и граф, построенный на множестве \mathcal{K} по отношению \prec , имеет вид P_m . Пронумеруем классы грамматики таким образом, что $K_i \prec K_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m-1$. Пронумеруем нетерминалы так, что для любых $A_i \in K_p$ и $A_j \in K_q$ условия $i < j$ и $p < q$ равносильны. После этого матрица первых моментов грамматики приобретает вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{m,m} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Блоки $A_{i,i} (i = 1, 2, \dots, m)$ являются неразложимыми неотрицательными матрицами. Не уменьшая общности, будем считать их положительными и непериодичными [1]. Этого можно добиться с помощью метода укрупнения правил грамматики. Пусть r_i — перронов корень матрицы $A_{i,i}$. По построению матрицы A , $r = \max_i \{r_i\}$ и $r > 0$.

2 Свойства матрицы первых моментов

Обозначим $J = \{i : r_i = r\}$ — множество индексов i , таких что перонов корень матрицы A_i равен r . Обозначим $J = \{i_1, i_2, \dots, i_q\}$ причём $i_1 < i_2 < \dots < i_q$. Разобьём множество классов \mathcal{K} на группы классов $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_w$. При этом $\mathcal{M}_1 = \{K_1, K_2, \dots, K_{i_1}\}$, и $\mathcal{M}_l = \{K_{i_{l-1}+1}, \dots, K_{i_l}\}$, где $l > 1$. Нетрудно видеть, что в каждой группе \mathcal{M}_j содержится ровно один класс с номером из J .

Тогда матрицу первых моментов можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{w-1,w-1} & B_{w-1,w} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{w,w} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где B_{ij} — блок, находящийся на пересечении строк, соответствующих нетерминалам классов группы \mathcal{M}_i , и столбцов, соответствующим нетерминалам классов группы \mathcal{M}_j . Очевидно, каждой из матриц $B_{i,i}$ соответствует перонов корень равный r .

Рассмотрим матрицу

$$A^t = \begin{pmatrix} B_{11}^t & B_{12}^{(t)} & \cdots & B_{1,w-1}^{(t)} & B_{1,w}^{(t)} \\ 0 & B_{22}^t & \cdots & B_{2,w-1}^{(t)} & B_{2,w}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{w-1,w-1}^t & B_{w-1,w}^{(t)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{w,w}^t \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Её вид был установлен в [3], где приведено доказательство для случая $r < 1$, однако при $r = 1$ доказательство остаётся справедливым.

Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 1 В принятых обозначениях при $t \rightarrow \infty$

$$B_{lh}^{(t)} = H_{lh} \cdot t^{s_{lh}-1} r^t (1 + o(1)) \quad \text{при } l \neq h, \quad (9)$$

где H_{lh} не зависит от t , и s_{lh} — число классов с номерами из J среди K_l, K_{l+1}, \dots, K_h .

3 Вероятности продолжения

Для получения вероятностей продолжения [2] рассматриваемой стохастической КС-грамматики, определим *производящие функции* следующим образом:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}) &= \sum p_{ij} s_1^{l_1^i} s_2^{l_2^i} \dots s_{n_i}^{l_{n_i}^i} \\ F(t, \mathbf{s}) &= F(F(t-1, \mathbf{s})) \end{aligned} \quad (10)$$

Раскладывая $F_i(s)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$, получаем:

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{s}) &= F_i(\mathbf{1}) + (\nabla F_i(\mathbf{1}), \mathbf{s} - \mathbf{1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{1})^T \nabla^2 F_i(\mathbf{1})(\mathbf{s} - \mathbf{1}) = \\ &= 1 + \sum_j a_j^i (s_j - 1) + \frac{1}{2} \sum_{j,l} b_{jl}^i (s_j - 1)(s_l - 1) + O(|s_k - 1|^3) \quad (11) \end{aligned}$$

Учитывая

$$F(t+1, \mathbf{s}) = F(F(t, \mathbf{s})), \quad (12)$$

можно записать рекуррентное соотношение для вероятностей продолжения:

$$Q_i(t+1) = \sum_j a_j^i Q_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,l} b_{jl}^i Q_j(t) Q_l(t) + O(|Q_k^3(t)|), \quad (13)$$

где $Q_i(t)$ — вероятность продолжения для деревьев высоты t .

Рассматривая лишь нетерминалы класса с номером m , получим:

$$\begin{aligned} Q_i(t+1) &= \sum_{j \in I_m} a_j^i Q_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,l \in I_m} b_{jl}^i Q_j(t) Q_l(t) + \\ &+ \sum_{j \in I_{m+1}} a_j^i Q_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,l \in I_{m+1}} b_{jl}^i Q_j(t) Q_l(t) - \\ &- \frac{1}{2} b_{jl}^i Q_j(t) Q_l(t) + O(Q_k^3(t)) \quad (14) \end{aligned}$$

Перемножая левый собственный вектор матрицы $A_{m,m}$ ($v^{(m)}$) и вектор $Q^{(m)}(t)$, составленный из вероятностей продолжения $Q_i(t) : i \in I_m$, и полагая $Q_*^{(m)}(t) = (v^{(m)}, Q^{(m)}(t))$, получаем, после преобразований:

$$Q_*^{(m)}(t+1) = r_m Q_*^{(m)}(t) + b_m Q_*^{(m+1)}(t)(1+o(1)) - \frac{1}{2} B_m (Q_*^{(m)}(t))^2 (1+o(1)) \quad (15)$$

Для цепочки, состоящей полностью из классов с перроновым корнем 1, результат известен. Рассмотрим теперь подцепочку классов K_i, K_{i+1}, \dots, K_M , где K_M — последний из классов грамматики. Будем предполагать, что среди A_i, \dots, A_M есть матрица с перроновым корнем равным 1. Пусть $A_j (j \in i, i+1, \dots, M)$ — первая из таких матриц, то есть $r_i, r_{i+1}, \dots, r_{j-1}$ меньше 1.

Пусть асимптотика вероятностей продолжения для нетерминалов класса K_j известна: $Q^{(j)} = U_j V_j \cdot t^s (1 + o(1))$.

Известно, что асимптотика вероятностей продолжения определяется видом степени матрицы первых моментов, то есть, $Q(t) = A^{t-k} Q(k) (1 + o(1))$ для некоторого фиксированного k . Тогда для всех $l \in \{i, i+1, \dots, j-1\}$

$$Q^{(l)}(t+k) = A_{l,l}^t Q^{(l)}(k) + A_{l,l+1}^{(t)} Q^{(l+1)}(k) + \dots + A_{l,M}^{(t)} Q^{(M)}(k) \quad (16)$$

Поскольку в подцепочке K_i, \dots, K_{j-1} все перроновы корни меньше 1, выполняется неравенство

$$A_{l,l}^t Q^{(l)}(k) + A_{l,l+1}^{(t)} Q^{(l+1)}(k) + \dots + A_{l,j-1}^{(t)} Q^{(j-1)}(k) \leq O(r^t) \quad \text{при } r < 1 \quad (17)$$

Это следует сразу из вида матрицы A^t . Кроме того $A_{l,h}^{(t)} = H_{l,h} t^{s_{lh}-1} (1 + o(1))$ и $A_{j,h}^{(t)} = H_{j,h} t^{s_{jh}-1} (1 + o(1))$, где $j \leq h \leq M$ и s_{ab} — число классов с максимальным перроновым корнем в подцепочке K_a, \dots, K_b . Поскольку классы с максимальным перроновым корнем содержатся только в подцепочке K_j, \dots, K_M , матрицы $A_{l,h}^{(t)}$ и $A_{j,h}^{(t)}$ имеют одинаковую асимптотику. Отсюда, $Q^{(l)} = O(t^s)$.

В ходе доказательства в [3] показано, что $\forall h \in \{j, j+1, \dots, M\} \quad A_{l,h}^{(t)} = UV_{lh} \cdot t^{s_{lh}-1} (1 + o(1))$, где $U = (r_l E - A_{l,l})^{-1} A_{l,l+1} \dots A_{j-2,j-1} (r_{j-1} E - A_{j-1,j-1})^{-1} A_{j-1,j} u^{(j)}$, и соответственно, компонентны вектора $Q^{(l)}$ пропорциональны компонентнам U .

Объединяя результаты докритического случая, случая цепочки, полностью состоящей из критических классов, и полученные здесь, можно записать общий вид вероятностей продолжения для грамматики в виде цепочки.

Теорема 2 Пусть грамматика имеет вид цепочки. Пусть также $Q_i(t)$ — вероятности продолжения для деревьев высоты не менее t , и $P_i(t) =$

$Q_i(t) - Q_i(t-1)$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= c_\mu U_{n-k_\mu-1}^{(\mu)} t^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}} \\ P_n(t) &= d_\mu U_{n-k_\mu-1}^{(\mu)} t^{-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-\mu}}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $n \in I_\mu$, c_μ и d_μ заданы.

4 Математические ожидания числа применений правила в деревьях вывода

Обозначим через $q_{ij}^l(t, \tau)$ и $\bar{q}_{ij}^l(t, \tau)$ случайные величины, равные числу применений правила r_{ij} в дереве вывода, соответственно, из D_l^t и $D_l^{\leq t}$. Пусть также

$$\begin{aligned} S_{ij}^l(t) &= \sum_{\tau=1}^{t-1} q_{ij}^l(t, \tau) \\ \bar{S}_{ij}^l(t) &= \sum_{\tau=1}^{t-1} \bar{q}_{ij}^l(t, \tau) \end{aligned}, \quad (19)$$

и $S_{ij}^l(t)$, \bar{S}_{ij}^l — соответственно число применений правила r_{ij} в дереве из D_l^t , $D_l^{\leq t}$. Для удобства записи положим

$$\begin{aligned} S_{ij}(t) &= S_{ij}^1(t), \quad \bar{S}_{ij}(t) = \bar{S}_{ij}^1(t) \\ q_{ij}(t, \tau) &= q_{ij}^1(t, \tau), \quad \bar{q}_{ij}(t, \tau) = \bar{q}_{ij}^1(t, \tau). \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим математические ожидания некоторых из введённых величин. Обозначим

$$M_{ij}^l(t) = M[S_{ij}^l(t)], \quad \bar{M}_{ij}^l(t) = M[\bar{S}_{ij}^l(t)]. \quad (21)$$

Задача данного раздела заключается в вычислении $\bar{M}_{ij}^l(t)$, $M_{ij}^l(t)$ для грамматик в виде «цепочки». Для их нахождения будет удобно использовать три леммы, доказанные в [4].

Лемма 1 Пусть s, d — натуральные, $m = (m_1, \dots, m_s)$ — вектор целых неотрицательных чисел, $y = (y_1, \dots, y_s)$ — вектор, и $\bar{m} = \sum_{j=1}^s m_j$. Тогда

$$(1-y_1)^{n_1} \dots (1-y_s)^{n_s} = \sum_{\substack{\bar{m} \leq d \\ m \geq 0}} \binom{n_1}{m_1} \binom{n_2}{m_2} \dots \binom{n_s}{m_s} (-1)^{\bar{m}} y^m + R_d(n_1, \dots, n_s, y), \quad (22)$$

где $y^m = y_1^{m_1} \dots y_s^{m_s}$, и остаточный член представим в виде

$$R_d(n_1, \dots, n_s, y) = \sum_{\substack{\bar{m}=d \\ m \geq 0}} (-1)^d \varepsilon_m(n_1, \dots, n_s, y) y^m, \quad (23)$$

причём

$$0 \leq \varepsilon_m(n_1, \dots, n_s, y') \leq \varepsilon_m(n_1, \dots, n_s, y) \leq \binom{n_1}{m_1} \dots \binom{n_s}{m_s} \quad (24)$$

при $0 \leq y_i \leq y'_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, s$).

Лемма 2 Пусть $A(t)$ — последовательность матриц размером $k \times k$, и $A(t) \rightarrow A$ при $t \rightarrow \infty$, причём $A > 0$, и её перронов корень $r = 1$. Пусть $b(t) = bt^\alpha(1 + o(1))$ — последовательность векторов длины k , где $b \geq 0$, $b \neq 0$, и α — действительное число. Тогда для последовательности векторов $x(t)$ при $t = 1, 2, \dots$, определяемой рекуррентным соотношением $x(t) = b(t) + A(t)x(t-1)$ при $t \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\frac{x_i(t)}{v x(t)} \rightarrow u_i, \quad (25)$$

при условии что $x(t_0) > 0$ для некоторого номера t_0 , где $u, v > 0$ — соответственно правый и левый собственные векторы матрицы A при нормировке $vu = 1$.

Лемма 3 Пусть последовательность x_t , $x_t > 0$ при любом $t \geq 0$, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_{t+1} = at^\alpha(1 + \varepsilon_1(t)) + (1 - bt^\beta(1 + \varepsilon_2(t)))x_t, \quad (26)$$

где $\beta < 0$, $b > 0$, и $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) = o(1)$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда верны следующие асимптотические равенства:

$$\begin{aligned} (1) \quad x_t &= \frac{at^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad \beta < -1, \alpha \geq 0 \\ (2) \quad x_t &= \frac{at^{\alpha+1}}{\alpha+b+1}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad \beta = -1, \alpha > -1 \\ (3) \quad x_t &= \frac{at^{\alpha-\beta}}{b}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad -1 < \beta < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Вначале рассмотрим $\bar{M}_{ij}^q(t)$. Пусть $p(\cdot)$ — условная вероятность дерева d в грамматике G , при условии что $d \in D_q^{\leq t}$. Рассмотрим множество $D_{ql}^{\leq t}$ деревьев из $D_q^{\leq t}$, первый ярус которых получен применением правила r_{ql} к корню дерева. Пусть

$$\bar{P}_{ql}^{ij}(t) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leq t}} p(d)q_{ij}(d), \quad (28)$$

где $q_{ij}(d)$ — число применений правила r_{ij} в дереве d , и $\bar{P}_{ql}^{ij}(t)$ — вклад деревьев из $D_{ql}^{\leq t}$ в матожидание $\bar{M}_{ij}^q(t)$. Для краткости, обозначим $\bar{P}_{ql} = \bar{P}_{ql}^{ij}$. Тогда, очевидно,

$$\bar{M}_{ij}^q(t) = \sum_{l=1}^{n_q} \bar{P}_{ql}(t). \quad (29)$$

Рассмотрим величину $\bar{P}_{ql}(t)$. Пусть

$$q_{ij}(d) = q_{ij}^{(1)}(d) + q_{ij}^{(2)}(d), \quad (30)$$

где $q_{ij}^{(1)}(d)$ — число применений правила r_{ql} в дереве d на первом его ярусе, а $q_{ij}^{(2)}(d)$ — на остальных ярусах. Тогда

$$\bar{P}_{ql}(t) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leq t}} p(d)q_{ij}(d) = \sum_{d \in D_{ql}^{\leq t}} p(d)q_{ij}^{(1)}(d) + \sum_{d \in D_{ql}^{\leq t}} p(d)q_{ij}^{(2)}(d) = \bar{P}_{ql}^{(1)}(t) + \bar{P}_{ql}^{(2)}(t) \quad (31)$$

Очевидно, $q_{ij}^{(1)}(d) = \delta_i^q \delta_j^l$ (где δ — символ Кронекера), и следовательно, учитывая что $p(\cdot)$ — условные вероятности, получаем

$$\bar{P}_{ql}^{(1)}(t) = \delta_i^q \delta_j^l \frac{p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1)}{1 - Q_q(t)}, \quad (32)$$

где $Q_X(t)$ — вероятность наборов деревьев вывода высоты не превосходящей $t - 1$, набор корней которых задан характеристическим вектором $X \in \mathbb{N}^k$.

Обозначим также $\delta^i(n) = (\delta_k^i)|_{i=\overline{1,n}} \in \{0, 1\}^n$.

Условную вероятность дерева $p(d)$ при $d \in D_{ql}^{\leq t}$ можно выразить как

$$p(d) = \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} p_1(d) p_2(d) \dots p_{\bar{s}_{ql}}(d), \quad (33)$$

где $p_j(d)$ — вероятность поддерева d с корнем в j -м узле первого яруса. Тогда

$$\bar{P}_{ql}^{(2)}(t) = \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{d \in D_{ql}^{\leq t}} \prod_{n=1}^{\bar{s}_{ql}} p_n(d) \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} q_{ij}^m(d), \quad (34)$$

где $q_{ij}^m(d)$ — число применений правила r_{ij} в поддереве дерева d с корнем в m -том нетерминале первого яруса.

Выделим в d поддеревья $d_1, d_2, \dots, d_{\bar{s}_{ql}}$, где d_j — поддерево с корнем в j -м узле первого яруса d . Преобразуя (34), получаем

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ql}^{(2)}(t) &= \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} \sum_{d \in D_{ql}^{\leq t}} \left(\prod_{n=1}^{\bar{s}_{ql}} p_n(d) \right) q_{ij}^m(d) = \\ &= \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}, d_{m+1}, \dots, d_{\bar{s}_{ql}}} p_1(d_1) \dots p_{m-1}(d_{m-1}) p_{m+1}(d_{m+1}) \dots p_{\bar{s}_{ql}}(d_{\bar{s}_{ql}}) q_{ij}^m(d) = \\ &= \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} Q_{s_{ql}-\delta^m} q_{ij}(d_m) = \frac{p_{ql}}{1 - Q_q(t)} \sum_{m=1}^k s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \end{aligned} \quad (35)$$

Зная $\bar{P}_{ql}(t) = \bar{P}_{ql}^{(1)}(t) + \bar{P}_{ql}^{(2)}(t)$, получаем

$$\bar{M}_{ij}^q(t) = \frac{1}{1 - Q_q(t)} \left[\delta_i^q p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^k s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \right] \quad (36)$$

Обозначая

$$\bar{M}_{ij}'^q(t) = \bar{M}_{ij}^q(t)(1 - Q_q(t)), \quad (37)$$

имеем

$$\bar{M}_{ij}^q(t) = \delta_i^q p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^k s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \quad (38)$$

Рекуррентное соотношение (38) является опорной точкой для вычисления $\bar{M}_{ij}^q(t)$. Получим аналогичное уравнение для $M_{ij}^q(t)$.

$M_{ij}^q(t) = \sum_{l=1}^{n_q} P_{ql}(t)$, где $P_{ql}(t)$ — вклад деревьев из D_{ql}^t в $M_{ij}^q(t)$. Аналогично тому, как это сделано в (31), полагаем $P_{ql}(t) = P_{ql}^{(1)}(t) + P_{ql}^{(2)}(t)$. При этом

$$P_{ql}^{(1)}(t) = \delta_i^q \delta_j^l \frac{p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1)}{P_q(t)}, \quad (39)$$

где $R_X(t)$ — вероятность наборов деревьев из $D^{\leq t}$, набор корней которых задан характеристическим вектором X , и высота хотя бы одного из которых достигает $t-1$. $P_{ql}^{(2)}(t)$ можно представить в виде

$$P_{ql}^{(2)}(t) = \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} P_{ql}^{(2)m}(t), \quad (40)$$

где $P_{ql}^{(2)m}(t)$ — вклад деревьев с m -м корнем на первом ярусе в $M_{ij}^q(t)$.

Обозначим через S_1 вклад в $P_{ql}^{(2)m}(t)$ наборов деревьев, в которых ярус t достигается деревом с корнем в m -м нетерминале первого яруса. Очевидно,

$$S_1 = \frac{(1 - Q_{z_m}(t-1)) Q_{s_{ql}-\delta^{z_m}}(t-1) M_{ij}^{z_m}(t-1)}{P_q(t)}, \quad (41)$$

где z_m — m -й нетерминал первого яруса.

Пусть S_2 — вклад наборов, где ярус t достигается через другие деревья. Тогда

$$S_2 = \frac{(1 - Q_{z_m}(t-1)) R_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \bar{M}_{ij}^{z_m}(t-1)}{P_q(t)}. \quad (42)$$

В результате, для M_{ij}^q получаем

$$\begin{aligned}
M_{ij}^q &= \sum_{l=1}^{n_q} \left(P_{ql}^{(1)}(t) + \sum_{m=1}^{\bar{s}_{ql}} P_{ql}^{(2)m}(t) \right) = \\
&= \frac{1}{P_q(t)} [\delta_i^q p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m=1}^k (P_m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) M_{ij}^m(t-1) + \\
&\quad + (1 - Q_m(t-1)) R_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \bar{M}_{ij}^m(t-1))] \quad (43)
\end{aligned}$$

Таким образом, получено рекуррентное соотношение для $M_{ij}^q(t)$, аналогичное (38).

Из леммы 1 следуют равенства для $Q_X(t)$ и $R_X(t)$:

$$\begin{aligned}
Q_X(t) &= \prod_{i=1}^k (1 - Q_i(t))^{x_i} = 1 - \sum_{i=1}^k x_i Q_i(t) + \Theta \left(\sum_{i,j=1}^k x_i x_j Q_i(t) Q_j(t) \right) \\
R_X(t) &= Q_X(t) - Q_X(t-1) = \sum_{i=1}^k x_i P_i(t) + \Theta \left(\sum_{i,j=1}^k x_i x_j Q_i(t) Q_j(t) \right) \quad (44)
\end{aligned}$$

Теперь можно приступить к вычислению $\bar{M}_{ij}^{'q}(t)$ и $M_{ij}^{'q}(t)$.

4.1 Случай критического класса

Рассмотрим вначале случай, когда $I(q) \in J$.

Пусть $q, i \in I_\mu$. Тогда при $m \in I_\nu : \nu > \mu$ $\bar{M}_{ij}^{'m}(t) = 0$, и для $\bar{M}_{in}^{'q}(t)$ получаем:

$$\bar{M}_{ij}^{'q}(t) = \delta_q^i p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} \sum_{m \in I_\mu} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^{'m}(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \quad (45)$$

Подставляя выражения (44) где это необходимо, и учитывая, что $I(q) \in J$, имеем

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{ij}^{'q}(t) &= \delta_q^i + \sum_{m \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^{'m}(t-1) - \sum_{m \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}^{'m}(t-1) \cdot \sum_{n \in I_\mu} (s_{ql}^n - \delta_n^m) Q_n(t-1) (1+o(1)). \quad (46)
\end{aligned}$$

Непосредственным взятием производных от производящих функций проверяются выражения для первых и вторых моментов:

$$\begin{aligned} a_m^q &= \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \\ b_{mn}^q &= \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m (s_{ql}^n - \delta_n^m) \end{aligned} \quad (47)$$

Подставляя их в (46), получаем

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij}'^q(t) &= \delta_q^i p_{ij} + \sum_{m \in I_\mu} a_m^q \bar{M}_{ij}'^m(t-1) - \\ &\quad - c_\mu t^{\xi(\mu)-1} \sum_{\substack{m \in I_\mu \\ n \in I}} b_{mn}^q u_{n-k_{I(n)-1}}^{I(n)} \bar{M}_{ij}'^m(t-1)(1+o(1)) \end{aligned} \quad (48)$$

где $\xi(\mu)$ — число классов с перроновым корнем, равным 1 в цепочке K_μ , $K_{\mu+1}, \dots, K_m$, и $K_{I(n)} \ni A_n$.

Применяя лемму 2, получаем:

$$\bar{M}_{ij}'^q(t) = u_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \cdot \sum_{l \in I_\mu} v_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \bar{M}_{ij}''^l(t) = u_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M_*^{(\mu)}(t), \quad (49)$$

где $M_*^{(\mu)}(t) = \sum_{l \in I_\mu} v_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \bar{M}_{ij}''^l(t)$, и $v^{(\mu)}$ — левый собственный вектор матрицы $A_{\mu,\mu}$.

Домножая (48) на $v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}$ и суммируя по q , получаем:

$$\delta \bar{M}_*^{(\mu)}(t) = v_{i-k_{\mu-1}}^{(\mu)} p_{ij} - c_\mu t^\alpha \sum_{q,m,n \in I_\mu} v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} b_{mn}^q u_{m-k_{\mu-1}}^{(\mu)} u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} = v_{i-k_{\mu-1}}^{(\mu)} p_{ij} - c_\mu t^\alpha B_\mu, \quad (50)$$

где $\alpha = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi(\mu)-1}$.

Нетрудно видеть, что величина $\bar{M}_*^{(\mu)}(t)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Применяя её, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{M}_*^{(\mu)}(t) &= \frac{v_{i-k_{\mu-1}}^{(\mu)} p_{ij}}{c_\mu B_\mu + 1} t(1+o(1)), \quad \text{если } \alpha = -1 \\ \bar{M}_*^{(\mu)}(t) &= \frac{v_{i-k_{\mu-1}}^{(\mu)} p_{ij}}{c_\mu B_\mu} t^{-\alpha}(1+o(1)), \quad \text{если } \alpha > -1 \end{aligned} \quad (51)$$

где $\alpha = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi(\mu)-1}$.

Пусть теперь $I(q) < I(i)$ (q и i в различных классах). Тогда $\bar{M}_{ij}'^q(t)$ выражается следующим образом:

$$\bar{M}_{ij}'^q(t) = \delta_q^i p_{ij} Q_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{m \in I_\mu \cup I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}'^m(t-1) Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \quad (52)$$

Учитывая малость $Q_n(t)$ при $I(n) > I(q)$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij}'^q(t) = O(p_{ij}) + \sum_{m \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}'^m(t-1) \cdot \left(1 - \sum_{n \in I_\mu} (s_{ql}^n - \delta_n^m) Q_n(t-1)\right) (1+o(1)) + \\ + \sum_{m \in I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \bar{M}_{ij}'^m(t-1) (1+o(1)) \quad (53) \end{aligned}$$

Положим, $\bar{M}_{ij}'^m(t-1) = \bar{\mathcal{M}}_{\mu+1}' t^{\gamma(\mu+1)} (1+o(1))$. Это выполняется для $\mu+1 = m$, что видно из полученных соотношений (51). Исходя из этого, получим выражение для $\bar{M}_{ij}'^q(t)$. Подставляя дополнительно выражения для первых и вторых моментов, а также для вероятностей продолжения $Q_n(t-1)$, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij}'^q(t) = \sum_{m \in I_\mu} a_m^q \bar{M}_{ij}'^m(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m, n \in I_\mu} b_{mn}^q u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \bar{M}_{ij}'^m(t-1) (1+o(1)) + \\ + \bar{\mathcal{M}}_{\mu+1}' t^{\gamma(\mu+1)} \sum_{m \in I_{\mu+1}} a_m^q u_{m-k_\mu}^{(\mu+1)} (1+o(1)) \quad (54) \end{aligned}$$

Домножая на $v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}$ и суммируя по q , получаем

$$\begin{aligned} \delta \bar{M}_*^{(\mu)}(t) = \bar{\mathcal{M}}_{\mu+1}' \left(\sum_{\substack{q \in I_\mu \\ m \in I_{\mu+1}}} v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} a_m^q u_{m-k_\mu}^{(\mu+1)} \right) \cdot t^{\gamma(\mu+1)} - \\ - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \cdot \left(\sum_{q, m, n \in I_\mu} v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} b_{mn}^q u_{m-k_{\mu-1}}^{(\mu)} u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \right) \cdot \bar{M}_*^{(\mu)}(t-1) (1+o(1)) = \\ = \bar{\mathcal{M}}_{\mu+1}' b_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)} (1+o(1)) - c_\mu B_\mu t^{\alpha(\mu)} \bar{M}_*^{(\mu)}(t-1) (1+o(1)) \quad (55) \end{aligned}$$

Случай $\alpha(\mu) = -1$ рассматривать не имеет смысла, так как это означает, что не существует критических классов с номерами, превышающими μ . Полагая $\alpha(\mu) > -1$ и применяя лемму 2, получаем

$$\bar{M}_*^{(\mu)}(t) = \frac{\overline{\mathcal{M}}'_{\mu+1} b_{\mu+1} t^{\gamma(\mu+1)-\alpha(\mu)}}{c_\mu B_\mu} \quad (56)$$

Из полученных формул (51) и (56) нетрудно получить общее выражение для величины $\bar{M}_*^{(\mu)}(t)$, при условии что грамматика имеет вид «цепочки» и состоит только из критических классов ($J = \{1, 2, \dots, m\}$).

$$\bar{M}_*^{(\mu)}(t) = \prod_{j=\mu}^{\nu-1} \left(\frac{b_{j+1}}{c_j B_j} \right) \cdot \left(\frac{v_{i-k_{\nu-1}}^{(\nu)} p_{ij}}{c_\nu B_\nu + \delta_\nu^m} \right) \cdot t^{\frac{1}{2}m-\nu(2-\frac{1}{2}\nu-\mu)}, \quad (57)$$

где $\mu = I(q)$, $\nu = I(i)$. Подставляя (49), и затем (37), непосредственно получаем

$$\bar{M}_{ij}^q(t) = \frac{u_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}}{1 - Q_q(t)} \prod_{j=\mu}^{\nu-1} \left(\frac{b_{j+1}}{c_j B_j} \right) \cdot \left(\frac{v_{i-k_{\nu-1}}^{(\nu)} p_{ij}}{c_\nu B_\nu + \delta_\nu^m} \right) \cdot t^{\frac{1}{2}m-\nu(2-\frac{1}{2}\nu-\mu)} \quad (58)$$

Перейдём к вычислению $M_{ij}^q(t)$. Пусть $I(q) = I(i)$. Полагая $M_{ij}'^q(t) = M_{ij}^q(t)P_q(t)$, из (43) получаем

$$\begin{aligned} M_{ij}'^q(t) &= O(p_{ij})t^{\beta(\mu)} + \sum_{m \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m M_{ij}'^m(t-1) - \\ &- \sum_{m, n \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m (s_{ql}^n - \delta_n^m) Q_n(t-1) M_{ij}'^m(t-1) + \\ &+ \sum_{m, n \in I_\mu} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m (s_{ql}^n - \delta_n^m) P_n(t-1) \bar{M}_{ij}'^m(t-1) \end{aligned} \quad (59)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Q^{(\mu)}(t) &= c_\mu u^{(\mu)} t^{\alpha(\mu)} \\ P^{(\mu)}(t) &= d_\mu u^{(\mu)} t^{\beta(\mu)} \end{aligned} \quad (60)$$

Подставляя выражения (47) для первых и вторых моментов в (59), имеем

$$M'_{ij}{}^q(t) = \sum_{m \in I_\mu} a_m^q M'_{ij}{}^m(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m, n \in I_\mu} b_{mn}^q u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M'_{ij}{}^m(t-1)(1+o(1)) + \\ + d_\mu t^{\beta(\mu)} \sum_{m, n \in I_\mu} b_{mn}^q u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} \bar{M}_{ij}{}^m(t-1)(1+o(1)) \quad (61)$$

Обозначая дополнительно $M_{ij}^q(t) = \mathcal{M}_q t^{(\frac{1}{2})^{m-\mu}}$, а также учитывая $\beta(\mu) = -1 - (\frac{1}{2})^{m-\mu}$ и выражения для первых моментов, получаем

$$M'_{ij}{}^q(t) = \sum_{m \in I_\mu} a_m^q M'_{ij}{}^m(t-1) - c_\mu t^{\alpha(\mu)} \sum_{m, n \in I_\mu} b_{mn}^q u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M'_{ij}{}^m(t-1)(1+o(1)) + \\ + d_\mu \mathcal{M}_\mu t^{-1} \sum_{m, n \in I_\mu} b_{mn}^q u_{m-k_{\mu-1}}^{(\mu)} u_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} (1+o(1)) \quad (62)$$

Применяя лемму 2, получаем

$$M'_{ij}{}^q(t) = u_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M_*^{(\mu)}(t)(1+o(1)) \\ M_*^{(\mu)}(t) = \sum_{m \in I_\mu} v_{n-k_{\mu-1}}^{(\mu)} M_{ij}^m(t) \quad (63)$$

Домножая (62) на $v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}$ и суммируя по q , имеем

$$\delta M_*^{(\mu)}(t) = d_\mu \mathcal{M}_\mu B_\mu t^{-1} - c_\mu t^{\alpha(\mu)} B_\mu M_*^{(\mu)}(t-1)(1+o(1)) \quad (64)$$

Применяя лемму 3, получаем в результате

$$M_*^{(\mu)}(t) = \begin{cases} d_\mu \overline{\mathcal{M}}'_\mu B_\mu (1+o(1)), & \text{при } \mu = m, \\ \frac{d_\mu \overline{\mathcal{M}}'_\mu}{c_\mu} t^{-1-\alpha(\mu)} (1+o(1)), & \text{при } \mu < m \end{cases} \quad (65)$$

Пусть теперь $I(q) = \mu$, $I(i) = \nu$, $\mu < \nu$, тогда из (43) получаем

$$M'_{ij}{}^q(t) = \delta_i^q p_{ij} R_{s_{ij}}(t-1) + \sum_{m \in I_\mu \cup I_{\mu+1}} \sum_{l=1}^{n_q} p_{ql} s_{ql}^m \cdot [Q_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) M'_{ij}{}^m(t-1) + \\ + (1 - Q_m(t-1)) R_{s_{ql}-\delta^m}(t-1) \bar{M}_{ij}{}^m(t-1)], \quad (66)$$

откуда

$$M_{ij}'^q(t) = O(t^{\beta(\mu)}) + \sum_m a_m^q M_{ij}'^m(t-1) - \sum_{\substack{m \in I_\mu \cup I_{\mu+1} \\ n \in I_\mu}} b_{mn}^q Q_n(t-1) M_{ij}'^m(t-1)(1+o(1)) + \\ + \left(\sum_{\substack{m \in I_\mu \cup I_{\mu+1} \\ n \in I_\mu}} b_{mn}^q P_n(t-1) \bar{M}_{ij}'^m(t-1) \right) (1+o(1)) \quad (67)$$

Можем записать

$$M_{ij}'^q(t) = \sum_{m \in I_\mu} a_m^q M_{ij}'^m(t-1) - \sum_{m, n \in I_\mu} b_{mn}^q Q_n(t-1) M_{ij}'^m(t-1)(1+o(1)) + \\ + \sum_{m, n \in I_\mu} b_{mn}^q P_n(t-1) \bar{M}_{ij}'^m(t-1)(1+o(1)) \quad (68)$$

Домножая на $v_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}$ и суммируя по q , имеем

$$\delta M_*^{(\mu)}(t) = d_\mu \bar{\mathcal{M}}_\mu B_\mu t^{\beta(\mu) + (\frac{1}{2})^{m-\nu} (2 - (\frac{1}{2})^{\nu-\mu})} (1+o(1)) - c_\mu B_\mu t^{\alpha(\mu)} \cdot M_*^{(\mu)}(t-1)(1+o(1)) \quad (69)$$

Так как $\mu < m$, $\alpha(\mu) > -1$, поэтому по лемме 3 получаем

$$M_*^{(\mu)}(t) = \frac{d_\mu \bar{\mathcal{M}}_\mu}{c_\mu} t^{-1 + (\frac{1}{2})^{m-\nu} (2 - (\frac{1}{2})^{\nu-\mu})} \quad (70)$$

Объединяя результаты (65) и (70), получаем

$$M_*^{(\mu)}(t) = \frac{d_\mu \bar{\mathcal{M}}_\mu B_\mu}{\delta_\mu^m (c_\mu B_\mu - 1) + 1} \cdot t^{-1 + (\frac{1}{2})^{m-\nu} (2 - (\frac{1}{2})^{\nu-\mu})} (1+o(1)), \quad (71)$$

после чего из (62)

$$M_{ij}^q(t) = \frac{u_{q-k_{\mu-1}}^{(\mu)}}{P_q(t)} \frac{d_\mu \bar{\mathcal{M}}_\mu B_\mu}{\delta_\mu^m (c_\mu B_\mu - 1) + 1} \cdot t^{-1 + (\frac{1}{2})^{m-\nu} (2 - (\frac{1}{2})^{\nu-\mu})} (1+o(1)) \quad (72)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3 Пусть стохастическая КС-грамматика имеет вид цепочки, и для неё известны вторые моменты b_{mn}^q . Пусть также для перронов корень подматрицы каждого класса равен 1.

$$M_{ij}^q(t) = \frac{u_{q-k_{\mu}-1}^{(\mu)}}{P_q(t)} \frac{d_{\mu} \overline{\mathcal{M}}_{\mu} B_{\mu}}{\delta_{\mu}^m (c_{\mu} B_{\mu} - 1) + 1} \cdot t^{-1 + (\frac{1}{2})^{m-\nu}} \left(2 - (\frac{1}{2})^{\nu-\mu} \right) (1 + o(1)), \quad (73)$$

где

$$B_{\mu} = \sum_{m,n \in I_{\mu}} b_{mn}^q u_{m-k_{\mu}-1}^{(\mu)} u_{n-k_{\mu}-1}^{(\mu)}, \quad (74)$$

$P_q(t)$ — вероятности деревьев высоты t в данной грамматике, и c_{μ}, d_{μ} — некоторые константы.

Список литературы

- [1] Гантмахер Ф.Р. **Теория матриц**. — 5-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010 — 560 с.
- [2] Севастьянов Б.А. **Ветвящиеся процессы** — М.: Наука, 1971 — 436 с.
- [3] Жильцова Л.П. О матрице первых моментов разложимой стохастической КС-грамматики // Учёные записки Казанского государственного университета, 2009
- [4] Борисов А.Е. Закономерности в словах стохастических контекстно-свободных языков, порождённых грамматиками с двумя классами нетерминальных символов. Вопросы экономного кодирования.
- [5] Фу К. Структурные методы в распознавании образов.