Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Тема:

«Дискретное и непрерывное в математике»

Мартынов Игорь Михайлович,

аспирант кафедры МЛиВА факультета ВМК

murbidodrus@gmail.com

2015

Оглавление

[Введение 3](#_Toc418522926)

[Разделение дискретного и непрерывного в математике 4](#_Toc418522927)

[Атомистическая концепция континуума 7](#_Toc418522928)

[Континуум как множество становящихся последовательностей 10](#_Toc418522929)

[Заключение 21](#_Toc418522930)

[Использованная литература 22](#_Toc418522931)

# Введение

В работе рассматриваются понятия дискретности (прерывности) и непрерывности в математике. Основная цель работы – проследить, как изменялись эти понятия с развитием математической теории. Концепция непрерывности, понимаемая вначале интуитивно, привела к проблемам в фундаментальных основах математики, что потребовало существенного переосмысления этой концепции, и переопределения её другим, более строгим образом. Возникшие проблемы обнаруживают философское содержание концепций дискретности и непрерывности.

В первой части работы делается попытка сравнить понятия непрерывного и дискретного с точки зрения современной математики, отделить одно от другого. Приводятся примеры дискретного и непрерывного в прикладных научно-технических областях знания (физика, вычисления на ЭВМ).

Далее рассматривается концепция континуума вещественных чисел, как модели непрерывной числовой прямой, в математике. Вначале (во второй части работы) исследуется атомистическая концепция континуума, по схеме, изложенной Дедекиндом [2]. Приводится критика такого подхода к определению континуума, взятая у Вейля [3] и построенная на порочном круге при использовании понятия «свойства рациональных чисел» («необъёмноопределённости» этого понятия).

В третьей части работы рассматривается концепция континуума как множества становящихся последовательностей, а также её фундаментальное отличие (с точки зрения философии математики) от атомистической концепции. В рамках этой концепции вещественное число представляется некой свободно формирующейся последовательностью рациональных чисел, и не является наперёд заданным, полностью известным.

# Разделение дискретного и непрерывного в математике

Прервыность и непрерывность – категории, характеризующие строение материи, а также процессы развития. Прерывность (дискретность) выражает пространственно-временную локализованность составляющих, элементов, состояний некоторого объекта, процесса и основывается на делимости объекта, процесса и на относительно самостоятесльном существовании его составляющих, элементов в рамках целого. Непрерывность выражает органическое единство, взаимосвязь и взаимообусловленность тех же составляющих, элементов, состояний и основывается на неделимости объекта как целого; благодаря такому единству только и возможно существование и развитие объекта, процесса как целого. Строение какого-либо объекта, процесса раскрывается как единство прерывного и непрерывного. Прерывность обусловливает саму возможность сложного и неоднородного строения объекта; "отделенность", локализованность того или иного элемента является необходимым условием выполнения этим элементом специфической для него функции в рамках целого. В сложном объекте только благодаря прерывности возможна взаимозаменяемость (и вообще заменимость) отдельных элементов. В процессах развития прерывность выступает как относительная отграниченность отдельных состояний, стадий развития и служит объективным основанием для вычленения и сопоставления этих состояний в познании. Непрерывность всегда реализуется в определённой системе связей (причем сами связи, в свою очередь, могут характеризоваться через понятия прерывного и непрерывного); она составляет объективный базис, благодаря которому из частей образуется целое; конкретное воплощение непрерывности через систему связей объясняет факт неаддитивности целого сумме его частей. В процессах развития непрерывность обусловливает возможность перехода развивающегося объекта из одного состояния в другое без разрушения самого объекта, с бóльшим или меньшим сохранением его субстрата и основных характеристик. Способом и вместе с тем воплощением единства прерывного и непрерывного в процессах развития является скачок, для которого характерны одновременно как разрывность, так и преемственность, как изменение, так и сохранение.

В математике прерывное и непрерывное рассматриваются в первую очередь как характеристики различных пространств и пространственных (точечных) множеств, а также множеств, состоящих из элементов непространственной (например числовой) природы, но изоморфных пространственным. Исследование понятий прерывного и непрерывного тесно связано с проблемой математической бесконечности, в частности с вопросом о мощностях множеств. Дискретным является всякое конечное множество и всякое счётно-бесконечное множество (элементы которого можно поставить во взаимно-однозначное соответствие числам натурального ряда). Непрерывное множество непременно несчётно. Например, множество действительных чисел имеет мощность континуума. Но несчетность недостаточна для характеристики непрерывности: линейное несчетное множество может быть не только не непрерывным, но и "всюду разрывным" (то есть, таким, что его точки не заполняют целиком никакого отрезка) и даже "нигде не плотным" (таким, что внутри каждого отрезка, содержащего точки данного множества, найдется меньший отрезок, целиком свободный от его точек). Таким образом, из непрерывности следует несчетность, а из конечности или счетности – дискретность.

Вопрос о прерывном и непрерывном поднимался еще в античной философии и математике (концепция атомизма, проблематика апорий Зенона Элейского, "аксиома непрерывности" Евдокса Книдского – Архимеда). В математике нового времени в связи с развитием математического анализа центральную роль стала играть идея непрерывности. При этом обнаружились сложные, парадоксальные с точки зрения обычной математической интуиции взаимоотношения понятий прерывного и непрерывного. Так, в классификации функций, построенной французским математиком Рене-Луи Бэром, "нулевой" класс образуют непрерывные функции, а последующие классы – натуральных, а затем и трансфинитных порядков – функции различных "степеней разрывности". Об относительности противопоставления прерывного и непрерывного свидетельствовала и работа по арифметизации математического анализа, проведенная в XIX веке.

Однако фундаментальное обоснование этой относительности было дано лишь в XX веке. В математике идея непрерывности проникла в области, являвшиеся ранее сферой чисто дискретных рассмотрений (теория непрерывных групп, непрерывных колец в алгебре и др.). В известном смысле как "науку о непрерывном" можно рассматривать топологию, так как в ней изучаются свойства множеств ("топологических пространств"), сохраняющиеся при любых их "непрерывных деформациях". С другой стороны, нарастала тенденция, противостоявшая универсализации идеи непрерывности. Развитие интуиционизма, а затем конструктивного направления привело к разработке интуиционистских и конструктивных аналогов ряда понятий классической математики, связанных с идеей непрерывности (например, интуиционистский "континуум" Э. Л. Брауэра и Г. Вейля, а затем аналог континуума в современной конструктивном математическом анализе, описываемый средствами теории рекурсивных функций или теории нормальных алгорифмов с точки зрения классической математики не могут считаться континуумами хотя бы в силу своей счетности; однако в "атомистическом" и "счетном" континууме конструктивистов каждая конструктивная функция оказывается непрерывной). Эта неабсолютность понятий прерывного и непрерывного связана с различиями в абстракциях, используемых, с одной стороны, классическим, а с другой – интуиционистским и конструктивным направлениями. Поэтому дискретное с классической точки зрения непрерывно с интуиционистской или конструктивной точки зрения, а классическая непрерывность вообще лишена смысла для последних двух направлений.

Относительность (и взаимозависимость) прерывного и непрерывного проявляется и в современной физике: эти понятия, противопоставляемые на уровне одной физической теории, оказываются "сосуществующими" и даже дополняющими одно другое в иных теориях или при иных подходах. В этой связи можно сказать, что нынешние попытки физиков установить наличие пространственного или временного квантования мира, в случае их удачи, вряд ли приведут к поражению идеи непрерывности в физике, т.к. по самой своей природе они связаны с применением определённого научного аппарата и соответствующих постулатов, а никакой научный аппарат не может претендовать на универсальность. Развитие кибернетики и связанных с ней наук стимулирует разработку многочисленных отраслей "дискретной" ("конечной") математики (например, теории конечных автоматов). Это связано с выдвижением все большего количества научных, технических, экономических задач, решать которые целесообразнее по "дискретной" схеме. Так обстоит дело, например, при моделировании любых, в том числе "непрерывных", процессов на электронных цифровых машинах. Представление о дискретности процессов управления и строения систем управления является одним из ведущих принципов кибернетики. Однако такой подход связан с известной идеализацией, огрублением функционирования реальных устройств и систем (таковы, например, абстракции квантованных сигналов, дискретных шагов изменения времени, и другие). Поэтому при применении некоторого конкретного аппарата, содержащего абстракции, типичные для дискретного подхода, учитывается способность этого аппарата дать результаты, соответствующие фактическому положению вещей. Связанное с этим огрубление в принципе может быть снято дальнейшим развитием дискретного аппарата. Говоря словами А. Н. Колмогорова, "Не существует состоятельных аргументов в пользу принципиальной ограниченности возможностей дискретных механизмов по сравнению с непрерывными" [1]. Однако наука и практика вынуждены учитывать реальные трудности создания чисто дискретных моделей высокосложных систем управления, связанные, в частности, с необходимостью оперировать с функциями от весьма большого числа переменных. Это породило идеи об отказе или ослаблении в том или ином направлении требования дискретности и введения в рассмотрение управляющих систем, трактуемых в виде сплошных непрерывных сред.

# Атомистическая концепция континуума

Для построения вещественных чисел будем исходить из множества рациональных чисел. Воспользуемся подходом Дедекинда [2, §4] и будем определять отдельное вещественное число множеством тех рациональных чисел, которые меньше . Мы будем определять вещественное число как множество рациональных чисел, обладающее «свойством сечения», то есть свойством содержать вместе с любым рациональным числом в качестве элементов и все рациональные числа, меньшие . Эти множества суть бесконечные множества, а бесконечное множество может быть полностью определено только указанием свойства, характерного для его элементов. Но свойства рациональных чисел строятся чисто логическим путём, исходя из первоначальных свойств и отношений, лежащих в основе действий с рациональными числами. За основные свойства и отношения можно принять:

свойство: положительно,

отношение: ,

отношение: .

Если от рациональных чисел обратиться к натуральным, то единственным основным отношением, с помощью которого можно определить все остальные чисто логически, будет отношение, в котором и заключается собственно сущность натуральных чисел – а именно, отношение, существующее между двумя натуральными числами и тогда и только тогда, когда есть ближайшее последующее за число. Аналогичным образом эвклидова геометрия исходит из трёх основных категорий предметов: точки, прямой и плоскости, и некоторых немногих интуитивных отношений между этими предметами (точка может «лежать» на прямой), о которых говорится в аксиомах. Все остальные понятия, в частности все свойства точек, прямых и плоскостей и все отношения между ними определяются чисто логически с помощью этих первичных отношений.

Множества соответствуют свойствам рациональных чисел таким образом, что два свойства и при некоторых обстоятельствах определяют одно и то же множество даже тогда, когда сами они получены из первоначальных свойств и отношений путём различных построений. Это происходит тогда именно, когда оба свойства равнообъёмны, т.е. когда всякое рациональное число, обладающее одним свойством, обладает и другим, и обратно. Таким образом моментом, определяющим тождество двух определённых каким-нибудь свойством множеств, является не содержение свойств, а их предметное совпадение (по «объёму»), -- совпадение, которого нельзя вывести чисто логически из определения свойств, и которое можно установить только на основе специального ознакомления с предметами, входящими в состав рассматриваемых множеств.

Само собой разумеется, не имеет значения, пользоваться ли словом «множество» или словом «свойство». Однако нужно избегать того ложного представления, будто, если бесконечное множество элементов определено, то нам не только известно характерное для его элементов свойство, но и сами эти элементы наперёд нам известны, и мы можем по очереди перебрать их один за другим, чтобы обнаружить, имеется ли в нашем множестве элемент того или иного вида. Даже по отношению к счётным множествам такое представление не вполне верно, по отношению же к континууму оно лишено всякого смысла.

В анализе рассматриваются не только отдельные вещественные числа, но также и множества вещественных чисел и сопряжения между такими множествами. По выбранному нами определению вещественное число задаётся свойством рациональных чисел, множество же вещественных чисел в таком случае задаётся свойством свойств рациональных чисел. Нетрудно образовать подобные «свойства свойств», однако такое определение вещественных чисел и множеств вещественных чисел содержит в себе внутреннее противоречие, порочный круг. Чтобы обнаружить его, воспользуемся рассуждениями Вейля [3].

Рассмотрим в качестве примера следующее определение: свойство «сечения» рациональных чисел будет рода , если оно неприсуще числу 1 ( соответствует «множеству всех вещественных чисел, которые больше »). Рассмотрим теперь построение нижней границы любого подобного множества вещественных чисел. Граница, вещественное число, задаётся некоторым свойством рациональных чисел , причём определяется следующим образом: оно присуще рациональному числу тогда и только тогда, когда существует свойство рода , присущее числу (когда существует множество , ниже которого лежит ). Но чтобы это определение имело какой-нибудь смысл, необходимо не только, чтобы понятие свойства рациональных чисел было ясно и однозначно, но также чтобы совокупность всех возможных свойств была в себе определена, ограничена и принципиально обозрима, ибо определение это исходит из того, что вопрос «существует ли свойство такого-то характера» (именно такое, которое одновременно рода и присуще числу ) имеет смысл, относится к некоторому объективно данному обстоянию, позволяющему отвечать на вопрос либо утвердительно, либо отрицательно. Но это далеко не очевидно. Действительно, допустим, что удалось каким-либо образом наметить подобный определённый в себе и ограниченный круг свойств рациональных чисел (-свойств в терминологии Вейля), и пусть будет, как и выше, некоторое свойство свойств. В таком случае вопрос «существует ли -свойство рода , присущее рациональному числу », имеет ясный смысл. В случае утвердительного ответа на него мы припишем числу свойство , в противном случае скажем, что оно ему не принадлежит. Но с другой стороны, совершенно очевидно, что это свойство (определённое на основе совокупности всех -свойств) согласно своему значению лежит вне -круга. Здесь обнаруживается, что понятие «совйство рациональных чисел», не объёмноопределено, и наше определение верхней границы содержит в себе порочный круг. Конечно, не исключена возможность того, что свойство равнообъёмно с каким-нибудь -свойством. Таким образом, чтобы придать положению о существовании верхней границы всякого множества вещественных чисел ясный смысл и чтобы установить истинность его, требуется следующее: должна быть построена определённая в себе и ограниченная совокупность свойств, «-свойств», для которой можно было бы доказать, что некоторое свойство , построенное по вышеуказанной схеме из совокупности -свойств, постоянно равнообъёмно с определённым -свойством. «Попытка подобного построения никогда ещё не была предпринята, не существует ни малейшего намёка на то, что подобное построение возможно, оно a priori столь чудовищно невероятно, что ни от кого нельзя разумным образом требовать заняться этой задачей». [3]

Резюмируя полученные результаты, скажем следующее. Хотя на основании содержания какого-либо ясно и однозначно установленного понятия о предмете и может быть указана сфера существования предметов, попадающих под это понятие, но из этого никаким образом не следует, что данное понятие объёмноопределено. Следовательно, не имеет смысла говорить о существовании попадающих под это понятие предметов как о некоторой в ограниченной идеальной замкнутой совокупности. Не имеет смысла говорить так уже потому, что здесь выступает совершенно новая идея существования, ту-бытия, в то время как в понятии трактуется лишь о сущности, о тако-бытии. Принять эту гипотезу побудил, по-видимому, только пример реальных вещей, в смысле реального внешнего мира, который считается в себе сущим и определённым по своим свойствам. Если есть по своему содержанию ясное и однозначное свойство предметов, охватываемых понятием , то положение « имеет свойство » устанавливает для любого подобного предмета совершенно определённое обстояние, которое либо существует, либо не существует. Это суждение само по себе здесь истинно или ложно, без возможности какой-либо третьей, лежащей между двумя этими противоположностями, точки зрения. Если же в частности понятие объёмноопределено, то не только вопрос «обладает ли свойством » имеет ясный и однозначный смысл для охватываемого понятием предмета , но имеет его и экзистенциальный вопрос: «существует ли между охватываемыми понятием предметами предмет, обладающий свойством ?». Опираясь на заданный нам в интуиции процесс образования натуральных чисел, мы придерживаемся твёрдо взгляда, что понятие натурального числа объёмноопределённо, точно так же обстоит дело в таком случае и с понятием рационального числа. Но, конечно, не объёмноопределены понятия «предмет», «свойство натуральных чисел» и подобные им понятия.

# Континуум как множество становящихся последовательностей

Если некоторое вещественное число известно до -го десятичного знака с ошибкой, меньшей чем -го знака, то тем самым число оказывается расположенным внутри интервала, простирающегося от числа до числа , где есть определённое целое число. Если мы заменим для простоты десятичные дроби двоичными, то в основу определения вещественных чисел мы положим «двоичные интервалы» вида

в которых и суть любые целые числа. В частности, написанные здесь интервал «-й ступени». Двоичные интервалы -й ступени пересекаются друг с другом; мы должны использовать именно эти взаимно перекрывающиеся интервалы, а не те, на которые разбивается числовая прямая точками вида , с той целью, чтобы, когда вещественное число задано нам с определённой (зависящей от ) точностью, был задан определённо и один из интервалов -й ступени, в котором заключается с необходимостью наше число. Поэтому понятие вещественного числа, как некоторого заданного, хотя только и приближённо, числа, для которого, однако, степень приближения может быть сделана сколь угодно большой, можно формулировать следующим образом: вещественное число есть бесконечная последовательность двоичных интервалов такого рода, что каждый интервал этой последовательности содержит ближайший последующий интервал целиком внутри себя. Так как каждый из двоичных интервалов может быть характеризован двумя целочисленными знаками ( и в приведённом выше обозначении) и так как факт содержания одного интервала в другом выражается простым отношением между этими их знаками, то рассмотрение вместо последовательностей содержащихся одни в других двоичных интервалов, не подчинённых никаким ограничениям последовательностей натуральных чисел, явится весьма несущественным упрощением наших рассуждений.

Трудность заключается в понятии последовательности. Положения и доказательства современного анализа становятся сколь-нибудь понятными только в том случае, если считать, что в основании его лежит следующая точка зрения: последовательность получается таким образом, что отдельные числа выбираются произвольно по очереди, результат этих бесконечно многих актов выбора предлежит готовым, и относительно такой готовой бесконечной последовательности можно, например, задать вопрос: встречается ли между её числами число 1? Но такая точка зрения не вполне несостоятельна. В самой сущности бесконечного заключается его неисчерпаемость, какая-либо определённая (до бесконечности) последовательность может быть выражена только некоторым законом. Если же, напротив, последовательность возникает постепенно, посредством «свободных актов выбора», то её следует рассматривать как становящуюся, а становящейся свободной последовательности можно разумным образом приписываь только такие свойства, для которых дизъюнкция «да или нет» (присуще ли данное свойство последовательности или нет) разрешается на каком-нибудь определённом, достигнутом нами, месте последовательности, разрешается при этом так, что, как бы ни происходило дальнейшее развёртывание последовательности, за пределами этого пункта её становления оно не меняет уже результата дизъюнкции. Так, например, мы можем с полным правом спрашивать относительно какой-нибудь свободной последовательности, встречается ли в ней на четвёртом месте число 1 или нет, но нельзя спрашивать, встречается ли в ней вообще число 1. Первой основопологающей идеей Броуера является мысль, что становящаяся посредством свободных актов выбора числовая последовательность есть возможный объект математчисского образования понятий. Подобно тому, как закон , определяющий до бесконечности некоторую последовательность, представляет отдельное вещественное число, так не ограничиваемая никаким законом в свободе своего развёртывания свободная последовательность представляет континуум. Что над свободными последовательностями можно проделывать математические операции, доказывается вполне уже одним тем, что между такими последовательностями можно устанавливать сопряжения. Например, формула

заключает в себе закон, согласно которому некоторая становящаяся посредством свободных актов выбора последовательность порождает становящуюся числовую последовательность Более общим примером может служить любой закон, согласно которому всякий акт выбора, присоединяющий к становящейся последовательности натуральных чисел новый член, порождает тем определённое число. Порождённое -м актом выбора число будет при этом, вообще говоря, зависеть не только от самого -го акта выбора, но также и от всего уже имеющегося налицо от -го до -го члена отрезка свободной последовательности. При этом развёртывание последовательности, выступающей в качестве функции, совершается параллельно развёртыванию последовательности, играющей роль аргумента: если последняя подвигается вперёд на одно место, то так же подвигается и первая. Естественным образом, мыслимы и более сложные отношения между последовательностями, к которым мы должны будем вернуться позже. Броуеровская идея проста, но вместе с тем глубока: здесь перед нами появляется «континуум», в котором хотя и содержатся отдельные вещественные числа, но который никоим образом не разрешается сам в в совокупность предлежащих готовыми вещественных чисел, а скорее представляет собой среду свободного становления.

Мы находимся в области издревней проблемы мышления, проблемы непрерывности, изменения и становления. Решение этой проблемы представляет собой тот решающий момент, который отделяет аристотелевски-схоластическую, ориентирующуюся на понятие субстанции физику от современной галилеевской физики. Издавна противостоят друг другу атомистическая концепция, согласно которой континуум состоит из отдельных точек, и противоположная точка зрения, считающая невозможным понять таким образом непрерывное течение. Первая концепция даёт нам построенную логически систему неподвижно сущих элементов, но она не в состоянии объяснить движение и действие; всякое изменение сводится для неё к иллюзии. Второй же концепции не удалось ни во времена античного мира, ни позже, вплоть до Галилея, вырваться из сферы туманной интуиции, чтобы проникнуть в область абстрактных понятий, необходимых для рационального анализа действительности. Достигнутое в конце концов решение – это то, математически-систематическим образцом которого служим дифференциальное и интегральное исчисление. Но современная критика анализа снова разрушает изнутри это решение, хотя, правда, она и не даёт себе ясного отчёта во всём значении старой философской проблемы и приходит в итоге к хаосу и бессмыслице.

Теперь изложим взгляды Броуера на проблему непрерывности. Так как его теория проводит абсолютное, исключающее возможность какого бы то ни было сравнения, различие между континуумом и множеством дискретных элементов, то для неё вообще не может серьёзно существовать вопроса об исчислении континуума. Закон, производящий из некоторой становящейся последовательности некоторое число , зависящее от результата выбора, по необходимости такого рода, что число оказывается определённым, как только имеется налицо известный конечный отрезок нашей свободной последовательности; число это остаётся неизменным, как бы дальше ни развёртывалась эта свободная последовательность, так что не может быть речи об одно-однозначном соответствии. Пусть будет некоторое, имеющее смысл в области числовых последовательностей свойство, а его отрицание. Вопрос, существует ли числовая последовательность со свойством или нет, не имеет определённого смысла, так как понятие закона, определяющего до бесконечности некоторую последовательность, не объёмноопределено. Раньше мы вышли из затруднения, ограничив понятие закона только законами объёмноопределёнными, потребовав для этого, чтобы они получались посредством известных логических конструктивных принципов и были благорадя этому свободны от порочного круга. Ответ «да» или «нет» на наш вопрос оказывался в таком случае определённым, и обе возможности представляли собой полную дизъюнкцию. Теперь, однако, мы подойдём к делу иначе. Так как, разумеется, отдельная определённая последовательность может быть определена только некоторым законом , то моложительный вопрос гласит итеперь: существует ли закон, обладающий свойством ? Но мы более не растягиваем этого понятия на прокрустовом ложе конструктивных принципов; если нам удаётся каким-либо, свободным от порочного круга путём построить закон желательного нам вида, то мы вправе утверждать, что подобный закон существует. Здесь, таким образом, речь идёт вовсе не о возможности построения – подобные экзистенциальные утверждения мы можем высказывать лишь об уже удавшихся построениях, уже проведённых доказательствах. Отрицательное суждение, что такого закона не существует, при этом, разумеется, теряет всяких смысл. Но мы можем придать ему положительную форму: всякая последовательность обладает свойством ; наше отрицательное суждение приобретает теперь смысл, поскольку мы под последовательностью понимаем здесь не закон, а в смысле континуума, среду свободного становления, последовательность, образующуюся посредством свободных актов выбора. Приходится таким образом допустить, что имеет смыл приписывать свойства и становящейся последовательности; в этом слуае может оказаться, что в сущности становящейся последовательности, последовательности, в которой всякий отдельный акт выбора совершенно свободен, заключено то, что она обладает свойством . Здесь не место излагать, каким путём достигается подобного рода узрение сущности последовательности. Но только оно даёт нам право, когда имеется налицо некоторый закон , утверждать сразу, без всякой проверки, что определяемая до бесконечности этим законом последовательность не обладает свойством . Выражение «существует» прикрепляет нас к бытию и закону, выражение «каждый» помещает нас в потом становления и свободы. Так как совокупность случаев, в которых имеет силу то или другое из этих утверждений (т.е. утверждений, что существует последовательность, обладающая свойством или что каждая последовательность обладает свойством ), неопределённа в себе, так как далее приходится вообще совсем иначе толковать понятие последовательности в обоих случаях, то было бы нелепо думать здесь о полной дизъюнкции. Именно таким образом нужно понимать мысль Броуера, что нет никаких оснований верить в логический закон исключённого третьего. Точнее говоря, ни одно из обоих утверждений, о которых идёт речь, не может быть рассматриваемо как отрицание другого. Взаимоотношение атомистической концепции континуума (I) и броуеровской теории (II) соотносится следующим образом. «Нет по I» глубоко вдаётся в область вполне законного «да по II», то с точки зрения концепции II «нет» концепции I не имеет никакого значения. Это «нет» приобретает значение только в том случае, если мы в концепции I примем за предмет исследования не броуеровский континуум, а вполне определённую в себе систему последовательностей.

В своём отрицании логической аксиомы исключённого третьего Броуер идёт ещё значительно дальше. Он оспаривает её применимость не только к экзистенциальным суждениям о числовых последовательностях, но также и к экзистенциальным суждениям о натуральных числах. Пусть есть некоторое свойство, имеющее смысл в области натуральных чисел, так что ясно определено, присуще или нет свойство некоторому натуральному числу . По Броуеру мы должны относиться к вопросу, существует ли число, обладающее свойством , точно так же, как к аналогичному вопросу в случае числовых последовательностей, -- должны относиться так, несмотря на то, что понятие натурального числа, в противоположность понятию последовательности (если только мы не ошиблись), объёмноопределено, и что, значит, оно при употреблении его в экзистенциальных суждениях, с одной стороны, и в общих суждениях, с другой стороны, не подвергается тому расщеплению, которому подвергается потяние последовательности (закон – свободный выбор). Броуер обосновывает свой взгляд указанием на то, что нет никаких оснований думать, будто всякий подобный вопрос о существовании может быть решён. Согласно Броуеру, доказательство применимости закона исключённого третьего должно было бы состоять в указании метода, который давал бы относительно любого свойства то или иное разрешение вопроса о существовании. Как известно, впервые эта точка зрения была выдвинута Кронекером. В сознательном противоположении этой точке зрения я в своём опыте обоснования анализа защищил тот взгляд, что дело идёт не о том, в состоянии ли мы путём известных вспомогательных средств, например, с помощью методов формальной логики, дать определённый ответ на известный вопрос, а о том, каково положение вещей само по себе; натуральный ряд чисел и относящееся к нему понятие существования является основанием математики и притом так, что для всякого свойства , имеющего смысл в области чисел, всегда определено, существуют ли числа вида или не существуют. Мы теперь должны подойти вплотную к этому коренному вопросу.

Пусть для каждого числа можно решить, присуще ли ему свойство или нет. Пусть утверждение, что « обладает свойством », обозначает, например, что есть простое число, а наличие свойства пусть обозначает обратное (т.е. что есть число составное). Теперь разберёмся в следующем. Мнение, будто твёрдо определено, обладает ли какое-нибудь число свойством или нет, опирается только на следующее представление. Числа могут быть по очереди, одно за другим испытаны в отношении свойства . Если мы встретим при этом число, обладающее свойством , то дальнейший просмотр ряда можно прекратить. Ответ в этом случае гласит: да. Если же подобного перерыва не наступает, т.е. если после законченного пересмотра бесконечного числового ряда не было найдено ни одного числа рода , то ответ гласит: нет. Но мысль о таком законченном пересмотре членов бесконечного ряда бессмысленна. Не исследование отдельных чисел, а только исследование сущности числа может доставить мне общие суждения о числах. Только действительно имевшее место нахождение определённого числа, обладающего свойством , может дать мне право на ответ: да, и – так как я не могу перебрать все числа – только усмотрение того, что обладание свойством лежит в существе числа, даёт мне право на ответ: нет. Сам бог не имеет иных оснований для решения этого вопроса. Но обе эти возможности уже не противостоят друг другу как утверждение и отрицание – ни отрицание одной, ни отрицание другой не имеет реального смысла.

Если это говорит в пользу Броуера, то следующее соображение снова возвращает нас к прежней точке зрения: если я пробегаю ряд и прекращаю его просмотр, как только нахожу число, обладающее свойством , то это прекращение либо наступит, либо не наступит, это так, либо же это не так, без всякого колебания и сомнения и без какой-либо третьей возможности. К этим вещам нужно подходить не извне, но путём внутренних усилий с целью «узрения» их внутренней очевидности. Экзистенциальное суждение – вроде: «существует чётное число» -- не есть вообще суждение в собственном смысле слова, устанавливающее некоторое обстояние; экзистенциальные обстояния суть пустая выдумка логиков. «2 – число чётное» -- вот это действительное, выражающее определённое обстояние суждение, фраза же «существует чётное число» есть лишь полученная из этого суждения абстракция суждения. «Если я представлю себе познание как драгоценное сокровище, то абстракция суждения будет представлять собой лишь лист бумаги, указывающий на наличие этого сокровища, но не дающий сведений, в каком месте оно обретается. Единственная ценность этого листа бумаги может состоять только в том, что он побуждает меня искать сокровище. Бумага эта лишена всякой цены, пока я не реализую какое-нибудь прикрытое ею действительное суждение, как, например: «2 есть число чётное». Действительно, мы говорили выше, когда речь шла о числовых последовательностях и об определяющих их до бесконечности законах: если нам удалось построить закон со свойством , то мы вправе утверждать, что существуют законы вида ; право же утверждать это нам может дать только уже удавшееся построение; о возможности построения нет и речи. Но что же это за суждение, которое, взятое само по себе, лишено всякого смысле, и получает смысл лишь на основании проведённого доказательства, только и гарантирующего истинность суждения? Это вовсе не суждение, это абстракция суждения. Эти замечания, кажется мне, ясно определяют характер его, уясняя вместе с тем собственное значение понятия существования. Теперь мы уже не может противопоставлять броуеровскому отрицанию закона исключённого третьего тех идей, за которые я цеплялся ещё раньше, именно, что дело обстоит либо так, либо не так (хотя бы я и не был в состоянии решить, как именно обстоит дело)!» [3].

Точно так же общее высказывание «каждое число обладает свойством » (например «для каждого числа мы имеем ») не является вовсе действительным суждением, а только общим указанием на суждение. «Если я имею дело с каким-либо отдельным числом, например, с числом 17, то из этого указания на суждение я могу вывести действительное суждение, именно, . Или же, пользуясь другим образом: если сравнить познание с плодом, а акт познания со вкушением плода, то общее суждение должно уподобить твёрдой оболочке, полной плодов. Конечно, эта оболочка имеет цену, но не сама по себе, а только ради содержащихся в ней плодов; она бесполезна для меня до тех пор, пока я не разломаю её, не выну самого плода и не вкушу его. Изложенная концепция обрисовывает то значение, которым обладают для нас в действительности общие и экзистенциальные суждения. С её точки зрения математика представляется колоссальным богатством в бумажной валюте. Действительную ценность, подобную ценности жизненных припасов в народном хозяйстве, имеет для нас непосредственное,сингулярное, всеобщее, и все экзистенциальные суждения ценны для нас только посредственным образом. И, однако, мы, математики, думаем совсем редко о реализации этого «бумажного богатства»! Ценна не экзистенциальная теорема, а проводимое в доказательстве построение. Математика, как говорит мимоходом Броуер, есть более деяние, чем учение» [3].

Пока мы не примем изложенной в последнем абзаце точки зрения, обе попытки обоснования анализа равновозможны, хотя броуеровская теория и обладает с самого начала тем преимуществом, что она не сковывает образования понятий и более адекватна интуитивной сущности континуума. Но как только мы станем на эту точку зрения – которая придаёт совершенно ясный смысл выражениям «существует» и «каждый» -- тотчас становится решительно невозможной первая концепция; ограничение понятия закона одним кругом х-законов нам теперь уже не помогает, теперь на вопрос о «возможности» нельзя уже дать утвердительного или отрицательного ответа как в том случае, когда вопрос этот ставится относительно сколь угодно часто повторяющегося применения конструктивных принципов, так и тогда, когда он относится к бесконечному числовому ряду, т.е. к сколь угодно часто повторяющемуся процессу перехода от одного числа к ближайшему, следующему за ним.

Вейль пишет [3, с. 107]: «Я теперь отказываюсь от своей прежней попытки и присоединяюсь к Броуеру. При угрожающем развале анализа, который, хотя и признаётся пока немногими, всё же подготовляется, я пытался найти твёрдую почву под ногами, не покидая идей, на которых покоится анализ, и честно и последовательно проводя его основной принцип, и я думаю, что мне это удалось, поскольку это вообще могло удасться. Ибо почва эта, как я теперь в этом убедился, шаткая, а Броуер – это революция! Я вё же ещё раз изложил здесь основные идеи своей теории, потому что в своём контрасте броуеровским взглядам они придают самую чёткую форму древней антитезе между атомистической и непрерывностной концепциями и потому ещё, что на примере этой противоположности становится особенно ясным, в чём собственно «заковыка» и что нужно сделать. Было бы в высшей степени странно, если бы старый спор разрешился тем, что оказалось бы возможным проводить как атомистическую, так и непрерывностную концепцию; в действительности вместо этого окончательно восторжествовала последняя. Броуеру мы обязаны новым решением проблемы континуума, проблемы, провизорное решение которой, данное Галилеем и основателями дифференциального и интегрального исчисления, было изнутри взорвано ходом исторического развития. Конечно, я не уверен, имею ли я право назвать вторую из развиваемых теорий броуеровской, но основные моменты – становящаяся свободная последовательность и отрицание аксиомы исключённого третьего – во всяком случае принадлежит Броуеру.»

Учение об общих и экзистенциальных суждениях не носит вовсе расплывчато-неопределённого характера, это ясно хотя бы потому, что из него тотчас же вытекают важные, строго логические выводы. И в первую очередь тот вывод, что совершенно бессмысленно отрицать подобные суждения, вывод, с которым отпадает возможность применения к этим суждениям аксиомы исключённого третьего. Общие суждения, (указания на суждения), разделяют с собственными суждениями то свойство, что они самодовлеющи, они даже содержат в себе бесконечную полноту действительных суждений. В этом отношении мы должны поставить общие суждения в один ряд с суждениями действительными. Конечно, в отличие от последних мы не будем говорить об общих суждениях, что они истинны, мы будем охотнее выражаться так: они правомерны, они содержат правовое основание для всех «реализующихся» из них сингулярных суждений. Наоборот, какое-нибудь экзистенциальное суждение, взятое само по себе, есть ничто; если суждение, из которого извлечена подобная абстракция суждения, забыто нами или утеряно, то действительно ничего не остаётся (если не иметь в виду, как мы говорили выше, стимула разыскать суждение). Абстракцию можно извлекать не только из суждения, но из указания на суждение. Пусть, например, будет отношением между двумя натуральными числами, притом отношением такого рода, что оно либо существует между двумя любыми числами, либо не существует. В таком случае для двух определённых чисел и утверждение или отрицание того, что они стоят друг к другу в отношении , является действительным суждением. Указание на суждение («каждое число стоит в отношении к числу 5» или «в сущности числа заключается обладание свойством ») будет правомерно. Мы можем в этом случае образовать следующую абстракцию: существует некоторое число (мимоходом сказать, именно число 5), такое, что каждое число находится к нему в отношении . Напротив, указание на абстракции суждений есть голое ничто, если за этим указанием не скрывается указание на действительные суждения, из которых получилась наша абстракция. Например: «для каждого числа существует такое число , что между ними имеет место отношение ». Здесь действительно идёт речь об абстракции из некоторого указания на суждение. Какого указания? Очевидно, следующего: пусть будет определённый закон, порождающий из каждого числа число , пусть общее указание на суждение будет правомерно. Тогда мы в состоянии извлечь из него следующую абстракцию: существует некоторый закон такого рода, что для каждого числа имеет силу отношение между и . Вышеприведённое суждение получает таким образом определённый смысл. Если теперь нам встретится какое-нибудь число, например число 7, то закон порождает из 7 определённое число, скажем, ; в этом случае мы можем сказать: между 7 и 19 имеет место отношение ; имея это в виду мы вправе установить абстракцию суждения, гласящую, что существует число , чтоящее в отношении к 7. Таким образом выражение «существует» должно включать в себе выражение «каждый», но не наоборот, если мы формулируем суждения так, что они извлекаются в качестве абстракций из самодовлеющих суждений.

Исходным пунктом математики является ряд натуральных чисел, т.е. закон алеф, порождающий из ничего первое число 1 и из всякого уже существующего числа ближайшее, следующее за ним; этот процесс никогда не приводит к числу, порождённому уже ранее. Если мы желаем каким-либо образом закрепить числа для интуиции, то мы должны их отличить друг от друга символически, с помощью качественных меток. Поскольку мы имеем дело с арифметикой, мы совершенно отвлекаемся от подобных качественных меток; для арифметики 1 есть просто «порождённое из ничего», 2 – «порождённое из 1» и т.д. Можно сказать, что в математическом толковании действительности делается попытка мир, заданный сознанию в его самой общей форме, форме взаимопроникновения бытия и сущности, представить в абсолютности чистого бытия. Здесь корень глубокой истинности пифагореизма, согласно которому всякое бытие, как таковое, покоится на числе.

Общие самодовлеющие суждения математики трактуют частью о всём целом натуральных чисел, частью же о всём целом становящихся посредством свободных актов выбора последовательностей натуральных чисел. Они, значит, относятся частью к простирающейся в бесконечность возможности безграничного, определяемого законом алеф, продолжения процесса развёртывания натуральных чисел, а частью к заключённой в становящейся числовой последовательности бесконечной свободе вечно новых ничем не связанных актов выбора, которые на каждом шагу обрывают на произвольном месте всё вновь и вновь начинающийся процесс развития натурального числового ряда. По самому существу дела интуиция сущности, из которой проистекают все общие суждения, опирается всегда на так называемую полную индукцию. Она не нуждается в дальнейшем обосновании, да и не способна к нему, ибо она есть не что иное, как математическая первоинтуиция «ещё одного раза». Получающиеся из этих общих суждений собственные суждения образуются таким путём, что вместо произвольного числа, о котором идёт речь в общих суждениях, подставляется некоторое определённое число, а вместо вольно развёртывающейся свободной последовательности – закон , определяющий до бесконечности некоторую отдельную числовую последовательность. Из самодовлеющих суждений и указаний на суждения извлекаются абстракции, в которых выражение «существует» может относиться или к некоторому натуральному числу, или же к некоторому закону, притом либо к закону, порождающему из каждого числа некоторое число (functio discreta), либо к закону, порождающему из каждой становящейся последовательности посредством свободных актов выбора некоторое число (functio mixta), либо же, наконец, к закону, порождающему из каждой становящейся последовательности посредством свободных актов выбора последовательности опять-таки становящуюся последовательность (functio continua). Но сами эти законы мы не делаем объектами общих высказываний. Там, где говорится «каждая последовательность», понятие закона заменяется понятием становящейся свободной последовательности; напротив, для functiones mixtae и continuae у нас не имеется в распоряжении такого континуума, в который они укладывались бы подобно тому, как укладываются отдельные functiones discretae в континуум вольно становящихся свободных последовательностей. Всё это предопределено a priori сущностью процесса порождения алеф математической первоинтуиции.

Всякое применение математики должно исходить из известных, подлежащих математической обработке объектов, отличающихся друг от друга посредством некоторого количества знаков; этими знаками служат натуральные числа. Символическим методом, заменяющим эти объекты из знаками, достигается связь их с чистой математикой и её конструкциями. Так, в основании геометрии точки на прямой лежит система выше упомянутых двоичных интервалов, которые мы смогли охарактеризовать двумя целочисленными знаками.

# Заключение

Эволюция рассмотренных в работе концепций континуума вещественных чисел обнаруживает философское содержание проблемы непрерывности в математике. Попытка интуитивно определить непрерывное множество вещественных чисел приводит к противоречиям в основаниях анализа и математической теории.

Рассмотренная модель континуума как множества становящихся последовательностей представляет интересный взгляд на соотношение дискретного (рациональных чисел) и непрерывного.

# Использованная литература­

1. *Колмогоров А.Н.* Автоматы и жизнь. <http://www.keldysh.ru/pages/mrbur-web/misc/kolmogorov.html>
2. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. 4-е испр. изд., Одесса: Mathesis, 1923
3. *Г. Вейль.* О философии математики. М.-Л., 1934