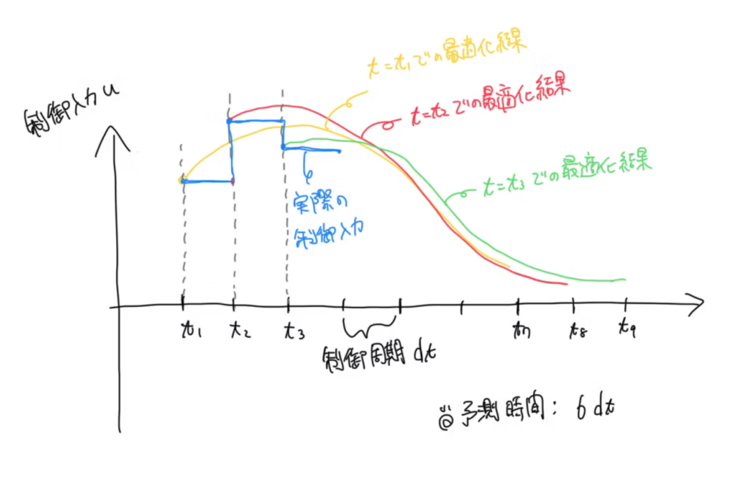
第1回MPC勉強会

鶴原康太

November 1, 2023

MPC のイメージ



モデル予測制御 (MPC) による軌道追従制御より

有限時間の LQR をシフトさせるイメージ

MPC 概略

MPC で解く問題

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$J = \underbrace{\frac{1}{2}\left[x_N^T P x_N\right]}_{\text{終端コスト}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i\right]}_{\text{ステージコスト}}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{N-1} \end{bmatrix}^\top$$

1. J が最小になるような $u_0^* \sim u_{N-1}^*$ を求める
   1.1 **既知変数 x_0 から未知変数 $x_1 \sim x_N$ を推定**
   1.2 U についての最適化問題に変形
   1.3 最適化問題を解く
2. u_0^* をシステムへの入力とする

未知変数 $x_1 \sim x_N$ を推定 (x_0 は現在の状態)

行列形式:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}
$$

- 1 **ステップ先の予測**:

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0$$

- 2 **ステップ先の予測**:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= A(Ax_0 + Bu_0) + Bu_1 \\
&= A^2 x_0 + ABu_0 + Bu_1
\end{aligned}
$$

- **一般的に** N **ステップ先の予測**:

$$x_N = A^N x_0 + A^{N-1}Bu_0 + A^{N-2}Bu_1 + \ldots + Bu_{N-1}$$

MPC 概略

$$J = \frac{1}{2}\left[x_N^T P x_N\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}}_{U}$$

1. **J が最小になるような $u_0^* \sim u_{N-1}^*$ を求める**
   1.1 **既知変数 x_0 から未知変数 $x_1 \sim x_N$ を推定**
   1.2 **U についての最適化問題に変形**
   1.3 **最適化問題を解く**
2. **u_0^* をシステムへの入力とする**

Uについての最適化問題に変形1

二次計画問題への変形

$$J = \frac{1}{2}\left[x_N^T P x_N\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i\right]$$

$$= \boxed{\tfrac{1}{2}U^T H U + g(x_0)^T U} + c(x_0)$$

$c(x_0)$ は U が含まれていないので無視できる

評価関数が二次になっていることを利用する
二次の最適化関数を持つ問題は、一般に二次計画問題 (QP) として知られる

$$\min_x \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \qquad s.t Ax \leq b$$

$$Gx = h$$

U についての最適化問題に変形 2

$$U = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix}$$

$$H = \left(\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R}\right), \qquad g(x_0) = \mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{A} x_0, \qquad c(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T \left(\mathcal{A}^T \mathcal{Q} \mathcal{A} + Q\right) x_0$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & & & \\ & \ddots & & \\ & & Q & \\ & & & P \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & & \\ & \ddots & \\ & & R \end{bmatrix}$$

MPC 概略

$$J = \frac{1}{2} U^T H U + g(x_0)^T U + c(x_0)$$
$$U^* = \min_U J$$

1. J が最小になるような $u_0^* \sim u_{N-1}^*$ を求める
   1.1 既知変数 x_0 から未知変数 $x_1 \sim x_N$ を推定
   1.2 U についての最適化問題に変形
   1.3 最適化問題を解く
2. u_0^* をシステムへの入力とする

二次計画問題 (QP)

$$\min_{x} \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \qquad s.t \quad Ax \leq b$$
$$Gx = h$$

KKT 条件

$$\begin{aligned} Qx + c - A^T\lambda - G^T\mu &= 0 \\ Ax - b &= 0 \\ Gx - h &= 0 \\ \mu &\geq 0 \\ \mu_i(Gx - h)_i &= 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

- λ: **等式制約の** Lagrange **乗数ベクトル**
- μ: **不等式制約の** Lagrange **乗数ベクトル**

KKT **条件を満たす解を見つければいい**!!!

MPC(線形) で重要なのは二次計画法

数値計算を用いて KKT 条件を満たす解を求める

- Newton 法　**制約条件が無い or 等式制約のみ** の凸最適化
- 有効制約法　**比較的小規模〜中規模** の凸最適化
- 内点法　**大規模** な凸最適化

凸関数で制約が凸集合 → **最適化問題の解が大域的最適解**

どの手法で二次計画問題を解くのかで MPC の性能が決まる!!!

Newton 法 1

$$\min_{x} f(x) \qquad \text{s.t.} \quad g(x) = 0$$

Lagrange 関数を $L(x) = f(x) + \lambda^T g(x)$ と定義すると,
最適解の必要条件は次式となる

$$\nabla L(x) = 0$$

最適解の十分条件はヘッセ行列 $\nabla^2 f(x)$ が正定値

Newton 法の Point

$\nabla L(x) = 0$ の連立方程式を解くのは困難

$\downarrow$

更新式 $x_{k+1} = x_k + d$ を用いて $\nabla L(x) = 0$ を解く

Newton 法 2

$$\nabla L(x) = 0 \qquad \text{更新式}: x_{k+1} = x_k + \boxed{d}$$

- $\nabla L(x_k + d)$ を Taylor 展開をする

$$\nabla L(x_k + d) \simeq \nabla L(x_k) + \nabla^2 L(x_k)\, d$$

- $\nabla L(x) = 0$ では $\nabla L(x_k + d)$ が 0 になる

$$\nabla L(x_k) + \nabla^2 L(x_k)\, d = 0 \iff d = -\nabla^2 L(x_k)^{-1} \nabla L(x_k)$$

Newton 法

1. **初期点 x_0 を定め、$k = 0$ とする**
2. $\|\nabla L(x_k)\|$ **が十分に小さければ終了**
3. $x_{k+1} = x_k - \nabla^2 L(x_k)^{-1} \nabla L(x_k)$

内点法

- 不等式制約を持つ凸最適化問題を解ける
- 主双対内点法は主内点法よりも高速
- ベースはニュートン法

内点法

主内点法

主双対内点法

主内点法 1

主内点法の Point

不等式制約があると最適化が難しくなる

$$\min_{x} f(x) \qquad s.t \quad g(x) = 0$$
$$x \geq 0$$

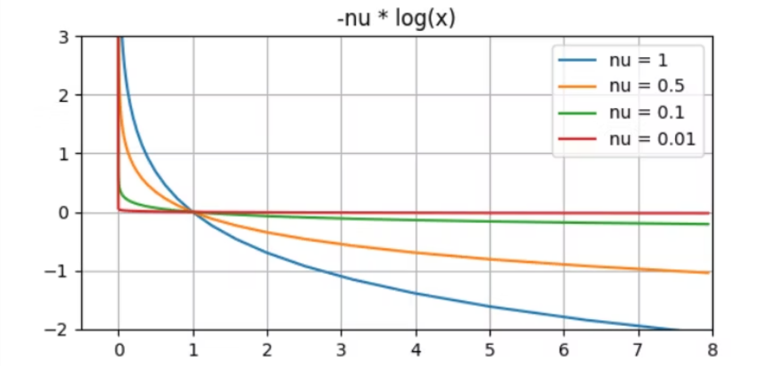
$$\downarrow$$

バリア関数によって不等式制約を最小化する関数に含める

$$\min_{x} f(x) - \nu \sum_{i=1}^{l} \log(x_i) \qquad s.t \quad g(x) = 0$$

等式制約のみになったので Newton 法で解ける!!!

主内点法 2



モデル予測制御 (MPC) による軌道追従制御より

- 初期点として実行可能な点を与える必要がある
- 制約の境界付近では Newton 法の数値計算が解けない場合もある

主双対内点法 1

$$\min_{x} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \qquad \text{s.t. } Ax = b,\ x \geq 0$$

$$\begin{aligned} &Ax = b, && x \geq 0 \\ &A^T \lambda + \mu = Qx + c, && \mu \geq 0 \\ &x^T \mu = 0 && \end{aligned}$$

x, λ, μ 全てに対してニュートン法を行う

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + dx \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + d\lambda \\ \mu_{k+1} &= \mu_k + d\mu \end{aligned}$$

主双対内点法 2

$$
\begin{aligned}
&Ax = b \\
&A^T\lambda + \mu = Qx + c \\
&x^T\mu = 0
\end{aligned}
$$

- Newton **法と同様に扱う変数** (x,λ,μ) **を一次近似する** $(dXd\mu = 0)$

$$
\begin{aligned}
&A(x_k + dx) = b \\
&A^T(\lambda + d\lambda) + (\mu_k + d\mu) = Q(x_k + dx) + c \\
&X_k\mu_k + X_k d\mu + \mu_k dX = \boxed{0}
\end{aligned}
$$

- **通常の** Newton **法はここで** $dx, d\lambda,\ d\mu$ **についてまとめる**
- **主双対内点法はここで中心パスを導入し、これに沿った解を得ることで最適解に近づく**

$$
X_k\mu_k + X_k d\mu + \mu_k dX = \boxed{\sigma\nu_k} = \boxed{\sigma\frac{1}{N}\sum_i (x_i\mu_i)^k}
$$

主双対内点法 3

主双対内点法

$$
\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -Q & A^T & I \\ M_k & 0 & X_k \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \\ d\mu \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b - Ax_k \\ Qx_k + c - A^T\lambda_k - \mu_k \\ \sigma\nu_k e - X_k\mu_k \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
X_k &= \mathrm{diag}(x_{k1}, \ldots, x_{kn}), \\
M_k &= \mathrm{diag}(\mu_{k1}, \ldots, \mu_{kl}), \\
e &= [1, \ldots, 1]^T.
\end{aligned}
$$

- Newton 法と同様、更新式として解く
- 初期値として実行可能な点 (内点) を与える必要がある

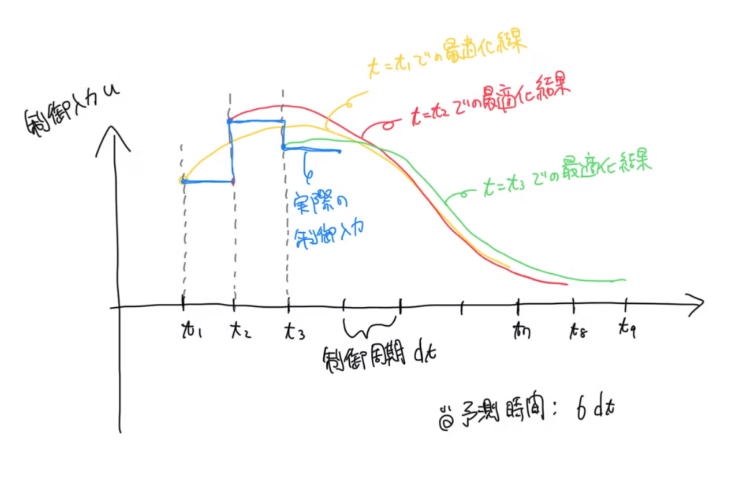
MPC 概略

$$J = \frac{1}{2} U^T H U + g(x_0)^T U + c(x_0)$$

$$U^* = \begin{bmatrix} u^*(0) \\ u^*(1) \\ \vdots \\ u^*(N-1) \end{bmatrix} = \min_U J$$

1. J が最小になるような $u_0^* \sim u_{N-1}^*$ を求める
   1.1 既知変数 x_0 から未知変数 $x_1 \sim x_N$ を推定
   1.2 U についての最適化問題に変形
   1.3 最適化問題を解く
2. u_0^* をシステムへの入力とする

MPC のイメージ



モデル予測制御 (MPC) による軌道追従制御より

参考資料

書籍

- **しっかり学ぶ数理最適化**

サイト (URL)

- MyEnigma の MPC **導入**: https://myenigma.hatenablog.com/entry/2016/07/25/214014
- MyEnigma の MPC **数式**: https://myenigma.hatenablog.com/entry/2017/02/07/084922
- MPC **の具体例**: https://ramune6110.hatenablog.com/entry/2022/02/13/154405
- MPC **を用いた倒立振子**: https://qiita.com/slowsingle/items/f3074ea6670da42696e0
- MPC **の説明と実機を用いた実験**: http://www.kostasalexis.com/linear-model-predictive-control.html