# 第3回MPC勉強会

鶴原康太

November 9, 2023

# 今回の目標

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x, t), t\right)$$

# 現在位置

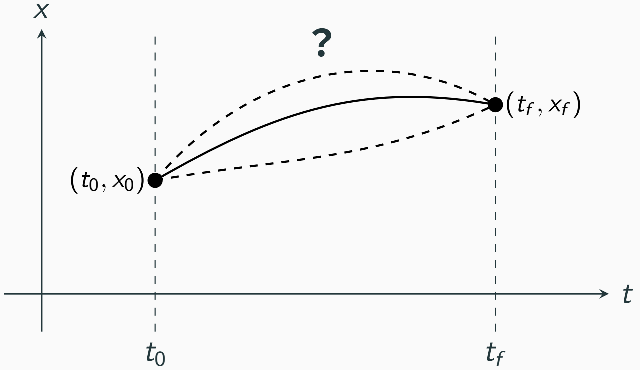
1. **復習**
2. **動的計画法**
3. HJB **方程式**
4. **最小原理**
5. MPC **導入**

**今までの内容覚えてますか？**
**復習しましょう**!!

# 最適制御とは

状態方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

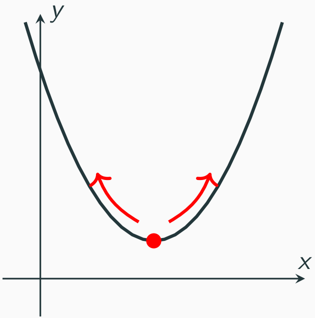
評価関数 $J = \underbrace{\varphi(x(t_f))}_{\text{終端コスト}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt}_{\text{ステージコスト}}$



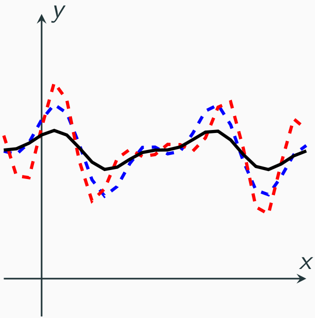
# 変分法 1

$$J = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$$

**微分法**




**変分法**




- **関数の勾配**
- **汎関数 (関数の関数) の勾配**

**評価関数 $J$ は関数 $x(t), u(t)$ の関数なので汎関数とみなせる**

# 変分法 2

**評価関数 $J$ のみの停留条件**

$$J = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

**この等式が成立するのは始点と終点を初期値として与えられた場合である** (2 **点境界値問題**).

**評価関数 J と状態方程式を考慮した停留条件**

$$J = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \\ \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

**このとき** $H = L + \lambda^\top f + \rho^\top C$ **と拡張すれば入力制約も考慮できる**

# 第 1 回、第 2 回まとめ

**第 1 回**

最適制御問題を予め、時間的に離散化することによって最適化問題に落とし込んだ

**第 2 回**

変分法を利用して 2 点境界値問題の最適性条件を導いた

# 最適性条件まとめ

## 時間を考慮しない

### 線形 MPC

予め時間を考慮して出した式から出た最適化問題を解いたから最適化問題自体は時間を考慮不要

**Lagrange の未定乗数法**

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

**KKT 条件**

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0 \quad \text{for all } i \\ \lambda_i^* &\geq 0 \quad \text{for all } i \\ \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0 \quad \text{for all } i \\ h_j(x^*) &= 0 \quad \text{for all } j \end{aligned}$$

## 時間を考慮

### 非線形 MPC

時間で離散化せずに直接最適化問題を解きたい

**Euler-Lagrange 方程式**

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

### 動的計画法

Bellman 方程式

↓

HJB 方程式

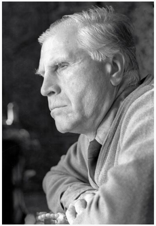
最小原理

# 最適化の多様な定式

Q. **なぜ似たようなものがいくつもあるのか??**
A. **同時期 (冷戦期) に 2 人の天才によって最適制御が定式化されたから**

Bellman

Bellman **方程式**
HJB **方程式**



Pontryagin

**最小原理**

# 現在位置

1. 復習
2. 動的計画法
3. HJB 方程式
4. 最小原理
5. MPC 導入

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left( L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

**方針**:

**問題を分割して最適制御を考える**

# 動的計画法 1

**最適制御**

**状態方程式** $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

**評価関数** $J = \underbrace{\varphi(x(t_f))}_{\text{終端コスト}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt}_{\text{ステージコスト}}$

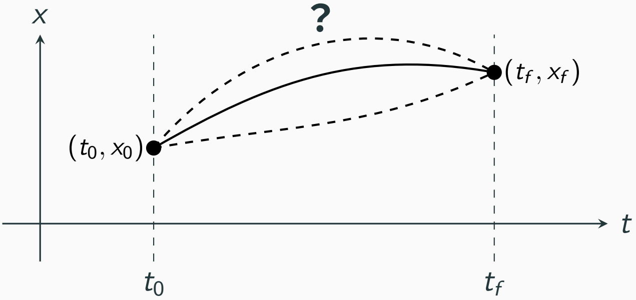
**価値関数** $V(x, t)$: **評価関数 $J$ を最小にする値**

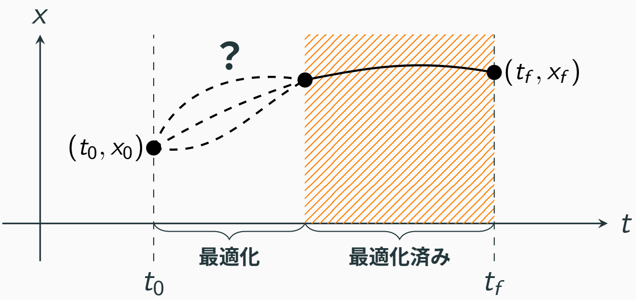
$$V(x, t) = \min_{u[t, t_f]} \left( \varphi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right)$$

$$V(x, t_f) = \varphi(x(t_f))$$

**最適化を価値関数を探すことだと考える**

# 動的計画法 2



# 動的計画法 3

## Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)$$

$$V(x,t_f) = \varphi(x(t_f))$$

$$\begin{aligned}
V(x,t) &= \min_{u[t,t_f]} \left(\varphi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau\right) \\
&= \min_{u[t,t_f]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \boxed{\varphi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau}\right) \\
&= \min_{u[t,t+dt]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \boxed{\min_{u[t+dt,t_f]} \left(\varphi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau\right)}\right) \\
&= \min_{u[t,t+dt]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \boxed{V\left(x + \int_t^{t+dt} f(x,u,\tau)d\tau, t+dt\right)}\right)
\end{aligned}$$

# 動的計画法 4

### Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)$$

### 次元の呪い

**次元の呪いは、状態空間や行動空間の次元数が増加するにつれて、必要な計算量やメモリが指数的に増加する現象**

2 **次元の格子が** 10 **の場合、合計** 100 **のセルが存在します。しかし、** 10 **次元の格子が各次元に** 10 **のセルを持つ場合、合計で** $10^10 = 10,000,000,000$ **のセルが存在します。このように、次元が増加するにつれて格子の数が指数的に増加し、それに伴い計算量も指数的に増加します。**

**次元の呪いのグラフを貼る**

# 動的計画法まとめ

## Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left( L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right) \right)$$

動的計画法とは $\cdots$ 大きな問題を小さな部分問題に分解し、解を得る手法

- 最適な性質を持つ
- 計算結果を保存して再利用 (メモ化)
- 次元の呪いで現実的には解けない場合がある

# 現在位置

1. **復習**
2. **動的計画法**
3. HJB **方程式**
4. **最小原理**
5. MPC **導入**

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x,t), t\right)$$

**方針**:

**微分の形にしたい** $\to$ Taylor **展開**

Hamiltonian **でまとめられそう**

# HJB 方程式

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

- $(x,t)$ で Taylor 展開する
- $V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right) \simeq V\left(x,t\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) dt + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) dt$

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x,t\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) dt + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) dt\right)$$

$$0 = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right)\right) dt$$

Hamiltonian でまとめる

- $$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$$
$$H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(x,t\right), t\right) = L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(x,t\right), t\right)$$

# 現在位置

1. **復習**
2. **動的計画法**
3. HJB **方程式**
4. **最小原理**
5. MPC **導入**

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_0 \\
\lambda(t_f) = \nabla_x \varphi(t_f, x(t_f)) \\
\frac{d\lambda}{dt} = -\nabla_x H(x, \lambda, u, t) \\
\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \nabla_\lambda H(x, \lambda, u, t) \\
\nabla_u H(x, \lambda, u, t) = 0
\end{cases}
$$

# 最小原理 1

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_0 \\
\lambda(t_f) = \nabla_x \varphi(t_f, x(t_f)) \\
\frac{d\lambda}{dt} = -\nabla_x H(x, \lambda, u, t) \\
\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \nabla_\lambda H(x, \lambda, u, t) \\
\nabla_u H(x, \lambda, u, t) = 0
\end{cases}
$$

# 最小原理 2

もちろん最小原理から HJB 方程式を導ける

# 連続時間最適化のポイント

**Euler-Lagrange 方程式**

評価関数を汎関数と考え，ステージコスト $L$ に状態方程式を満たす制約を含め評価関数を拡張し，変分法を用いたときの停留条件

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \\ \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

**HJB 方程式**

動的計画法によって問題を部分問題に分割した

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x, t), t\right)$$

**Pontryagin の最小原理**

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \lambda(t_f) = \nabla_x \varphi(t_f, x(t_f)) \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\nabla_x H(x, \lambda, u, t) \\ \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \nabla_\lambda H(x, \lambda, u, t) \\ \nabla_u H(x, \lambda, u, t) = 0 \end{cases}$$

# 最適性条件まとめ

## 時間を考慮しない

### 線形 MPC

予め時間を考慮して出した式から出た最適化問題を解いたから最適化問題自体は時間を考慮不要

**Lagrange の未定乗数法**

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

**KKT 条件**

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0 \quad \text{for all } i \\ \lambda_i^* &\geq 0 \quad \text{for all } i \\ \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0 \quad \text{for all } i \\ h_j(x^*) &= 0 \quad \text{for all } j \end{aligned}$$

## 時間を考慮

### 非線形 MPC

時間で離散化せずに直接最適化問題を解きたい

**Euler-Lagrange 方程式**

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

### 動的計画法

Bellman 方程式

$$\downarrow$$

HJB 方程式

**最小原理**

# 現在位置

1. **復習**
2. **動的計画法**
3. HJB **方程式**
4. **最小原理**
5. MPC **導入**

# MPC

Euler-Lagrange 方程式では入力に状態を含んでいないので、状態が変化 (外的要因によって) する現実システムだと扱いにくい

HJB 方程式は入力に状態を含んでいるが、偏微分方程式なので扱いにくい

現実問題に落とし込んだのが MPC

評価区間が無限の MPC の解は HJB 方程式と一致するはず (たぶん…)

# 参考資料

**書籍**

- 非線形最適制御入門 (名著です)
- しっかり学ぶ数理最適化 (最適化全般について)
- はじめての最適化 (変分法の説明が分かりやすいです)