第3回MPC勉強会

鶴原康太

November 9, 2023

今回の目標

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x, t), t\right)$$

現在位置

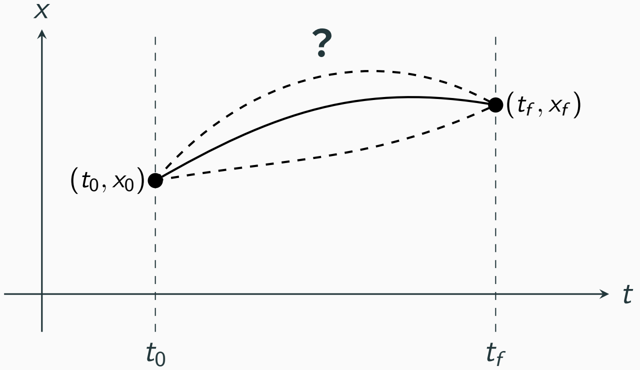
- 復習
- 動的計画法
- HJB 方程式
- 最小原理
- MPC 導入

今までの内容覚えてますか？
復習しましょう!!

最適制御とは

状態方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

評価関数 $J = \underbrace{\varphi(x(t_f))}_{\text{終端コスト}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt}_{\text{ステージコスト}}$



変分法

微分法

関数の勾配を考える
停留するとある関数の最大 or 最小
点の変動を考える

⟹

変分法

汎関数 (関数の関数) の勾配を考える
停留するとある関数の全体を最大 or 最小
関数の変動を考える

微分法ではある曲線を最小化 (最大化) することを考えていたけど、変分法ではある評価関数に基づいて関数全体を最小化 (最大化) する関数を求める
偏微分と似た考え方をする
二点境界値問題の解
Euler-Lagrange 方程式を満たす
制約を含んだ場合

第 1 回、第 2 回まとめ

第 1 回

最適制御問題を予め、時間的に離散化することによって最適化問題に落とし込んだ

第 2 回

変分法を利用して 2 点境界値問題の最適性条件を導いた

最適性条件まとめ

時間を考慮しない

線形 MPC

予め時間を考慮して出した式から出た最適化問題を
解いたから最適化問題自体は時間を考慮不要

Lagrange の未定乗数法

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

KKT 条件

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0 \quad \text{for all } i \\ \lambda_i^* &\geq 0 \quad \text{for all } i \\ \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0 \quad \text{for all } i \\ h_j(x^*) &= 0 \quad \text{for all } j \end{aligned}$$

時間を考慮

非線形 MPC

時間で離散化せずに直接最適化問題を解きたい

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

動的計画法

$$\text{Bellman 方程式} \;\downarrow\; \text{HJB 方程式}$$

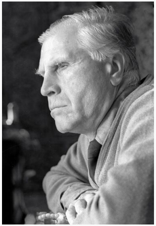
最小原理

最適化の多様な定式

Q. なぜ似たようなものがいくつもあるのか ??
A. 同時期 (冷戦期) に 2 人の天才によって最適制御が定式化されたから

Bellman

Bellman 方程式
HJB 方程式



Pontryagin

最小原理

現在位置

- **復習**
- **動的計画法**
- HJB **方程式**
- **最小原理**
- MPC **導入**

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

方針:

問題を分割して最適制御を考える

動的計画法 1

最適制御

状態方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

評価関数 $J = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$

終端コスト **ステージコスト**

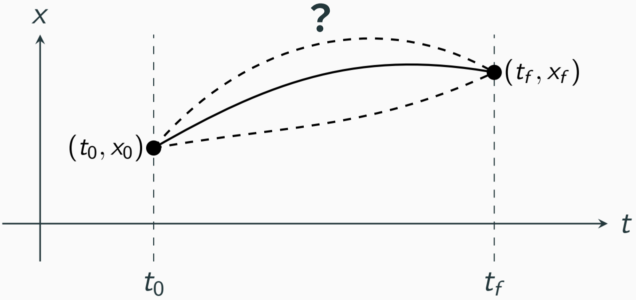
価値関数 $V(x, t)$: **評価関数 J を最小にする値**

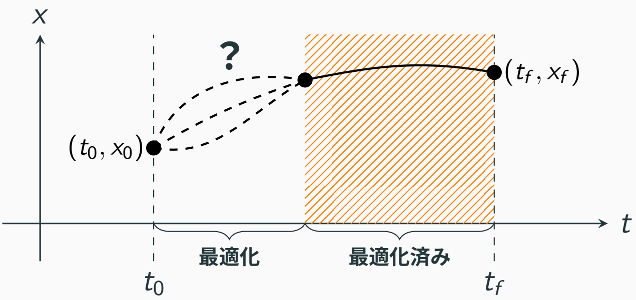
$$V(x, t) = \min_{u[t, t_f]} \left(\varphi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right)$$

$$V(x, t_f) = \varphi(x(t_f))$$

最適化を価値関数を探すことだと考える

動的計画法 2





動的計画法 3

Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)$$

$$V(x,t_f) = \varphi(x(t_f))$$

$$\begin{aligned}
V(x,t) &= \min_{u[t,t_f]} \left(\varphi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \right) \\
&= \min_{u[t,t_f]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \varphi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \right) \\
&= \min_{u[t,t+dt]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \min_{u[t+dt,t_f]} \left(\varphi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \right) \right) \\
&= \min_{u[t,t+dt]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + V\left(x + \int_t^{t+dt} f(x,u,\tau)d\tau, t+dt \right) \right)
\end{aligned}$$

動的計画法 4

Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)$$

次元の呪い

次元の呪いは、状態空間や行動空間の次元数が増加するにつれて、必要な計算量やメモリが指数的に増加する現象
2 **次元の格子が** 10 **の場合、合計** 100 **のセルが存在します。しかし、** 10 **次元の格子が各次元に** 10 **のセルを持つ場合、合計で** $10^10 = 10,000,000,000$ **のセルが存在します。このように、次元が増加するにつれて格子の数が指数的に増加し、それに伴い計算量も指数的に増加します。**

次元の呪いのグラフを貼る

動的計画法まとめ

動的計画法は大きな問題を小さな部分問題に分解し、それぞれ解くことで全体の解を得る手法

Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)$$

- **最適的な性質を持つ**
- **計算結果を保存して再利用 (メモ化)**

現在位置

- **復習**
- **動的計画法**
- HJB **方程式**
- **最小原理**
- MPC **導入**

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x,t), t\right)$$

方針:

微分の形にしたい $\rightarrow$ Taylor **展開**

Hamiltonian **でまとめられそう**

HJB 方程式

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

- (x,t) で Taylor 展開する
- $V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right) \simeq V(x,t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x,t) f(x,u,t)\, dt + \frac{\partial V}{\partial t}(x,t)\, dt$

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V(x,t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x,t) f(x,u,t)\, dt + \frac{\partial V}{\partial t}(x,t)\, dt\right)$$

$$0 = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x,t) f(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial t}(x,t)\right) dt$$

Hamiltonian でまとめる

- $$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$$
  $$H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x,t), t\right) = L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x,t) f(x,u,t)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x,t), t\right)$$

HJB 方程式

$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$

- (x,t) で Taylor **展開する**
- $V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right) \simeq V\left(x,t\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) dt + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) dt$

$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x,t\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) dt + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) dt\right)$

$0 = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right)\right) dt$

ハミルトニアンでまとめる

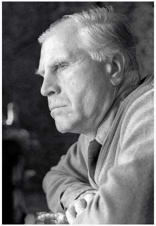
- $$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$$
$$H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(x,t\right), t\right) = L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right)$$

$-\frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(x,t\right), t\right)$

現在位置

- 復習
- 動的計画法
- HJB 方程式
- 最小原理
- MPC 導入

別の観点から最適制御を考える



Pontryagin

最小原理 1

最小原理 2

もちろん最小原理から HJB 方程式を導ける

最適性条件まとめ

ラグランジュの未定乗数法
KKT **条件**
オイラーラグランジュ方程式
動的計画法 (new)
HJB **方程式** (new)
最小原理 (new)
動的計画法から HJB **方程式を導いたが、最小原理からも導ける**
ここに各関係の図を貼る

現在位置

- **復習**
- **動的計画法**
- HJB **方程式**
- **最小原理**
- MPC **導入**

MPC

Euler-Lagrange 方程式では入力に状態を含んでいないので、状態が変化 (外的要因によって) する現実システムだと扱いにくい

HJB 方程式は入力に状態を含んでいるが、偏微分方程式なので扱いにくい

現実問題に落とし込んだのが MPC

評価区間が無限の MPC の解は HJB 方程式と一致するはず (たぶん…)

参考資料

書籍

- 非線形最適制御入門 (名著です)
- しっかり学ぶ数理最適化 (最適化全般について)
- はじめての最適化 (変分法の説明が分かりやすいです)