第3回MPC勉強会

鶴原康太

November 3, 2023

今回の目標

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x, t), t\right)$$

- **前回のおさらい**
- **動的計画法**
- HJB **方程式**
- **最小原理**
- MPC **導入**

前回のおさらい

微分法

関数 の勾配を考える
停留するとある関数の最大 or 最小
点 の変動を考える

→

変分法

汎関数 (関数の関数) の勾配を考える
停留するとある関数の全体を最大 or 最小
関数 の変動を考える

微分法ではある曲線を最小化 (最大化) することを考えていたけど、変分法ではある評価関数に基づいて関数全体を最小化 (最大化) する関数を求める
偏微分と似た考え方をする
二点境界値問題の解
Euler-Lagrange 方程式を満たす
制約を含んだ場合

最適性条件まとめ

Lagrange の未定乗数法
KKT 条件
Euler-Lagrange 方程式

最適化の多様な定式

Q. **なぜ似たようなものがいくつもあるのか ??**
A. **同時期 (冷戦期) に 2 人の天才によって最適制御が定式化されたから**

Bellman

Pontryagin

Bellman **によって動的計画法** (Bellman **方程式**)
Pontryagin **によって最小原理** (**最大原理**)

動的計画法1

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

$$J = \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$$

別の表現を見てみる

$$V(x, t) = \min_{u[t, t_f]} \left(\psi(x(t_f)) + \int_{t}^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right)$$

次元の呪い

動的計画法 2

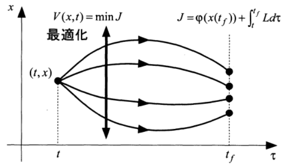
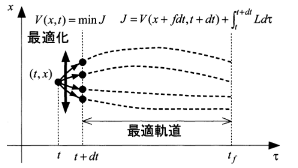


図 2　評価区間 $[t, t_f]$ の最適制御問題



大塚: 非線形最適制御入門

動的計画法 3

$$V(x,t) = \min_{u[t,t_f]} \left(\psi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right)$$

$$V(x,t) = \min_{u[t,t_f]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \psi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right)$$

$$\begin{aligned}
V(x,t) &= \min_{u[t,t_f]} \left(\psi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right) \\
&= \min_{u[t,t_f]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \psi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right) \\
&= \min_{u[t,t+dt]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \min_{u[t+dt,t_f]} \left(\psi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right) \right) \\
&= \min_{u[t,t+dt]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + V\left(x + \int_t^{t+dt} f(x,u,\tau) d\tau, t + dt \right) \right)
\end{aligned}$$

Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt \right) \right)$$

HJB 方程式

Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

次元の呪い

次元の呪いは、状態空間や行動空間の次元数が増加するにつれて、必要な計算量やメモリが指数的に増加する現象
2 **次元の格子が** 10 **の場合、合計** 100 **のセルが存在します。しかし、**10 **次元の格子が各次元に** 10 **のセルを持つ場合、合計で** $10^{1}0 = 10,000,000,000$ **のセルが存在します。このように、次元が増加するにつれて格子の数が指数的に増加し、それに伴い計算量も指数的に増加します。**

次元の呪いのグラフを貼る

現在位置

- 前回のおさらい
- 動的計画法
- HJB 方程式
- 最小原理
- MPC 導入

Bellman 方程式から HJB 方程式へ変形し最適制御が偏微分方程式で表せることを理解する

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x,t), t\right)$$

HJB 方程式

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

$$= \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + d\right.\right.$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x,t), t\right)$$

HJB 方程式の解法

直接法
間接法
シューティング法とかの図をここに貼る

現在位置

- **前回のおさらい**
- **動的計画法**
- HJB **方程式**
- **最小原理**
- MPC **導入**

別の観点から最適制御を考える

Pontryagin

最小原理 1

最小原理 2

もちろん最小原理から HJB **方程式を導ける**

最適性条件まとめ

ラグランジュの未定乗数法
KKT **条件**
オイラーラグランジュ方程式
動的計画法 (new)
HJB **方程式** (new)
最小原理 (new)
動的計画法から HJB **方程式を導いたが、最小原理からも導ける**
ここに各関係の図を貼る

現在位置

- **前回のおさらい**
- **動的計画法**
- HJB **方程式**
- **最小原理**
- MPC **導入**

MPC

Euler-Lagrange 方程式では入力に状態を含んでいないので、状態が変化 (外的要因によって) する現実システムだと扱いにくい
HJB 方程式は入力に状態を含んでいるが、偏微分方程式なので扱いにくい
現実問題に落とし込んだのが MPC
評価区間が無限の MPC の解は HJB 方程式と一致するはず (たぶん…)

参考資料

書籍

- 非線形最適制御入門 (名著です)
- しっかり学ぶ数理最適化 (最適化全般について)
- はじめての最適化 (変分法の説明が分かりやすいです)