第3回MPC勉強会

鶴原康太

November 13, 2023

今回の目標

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x, t), t\right)$$

現在位置

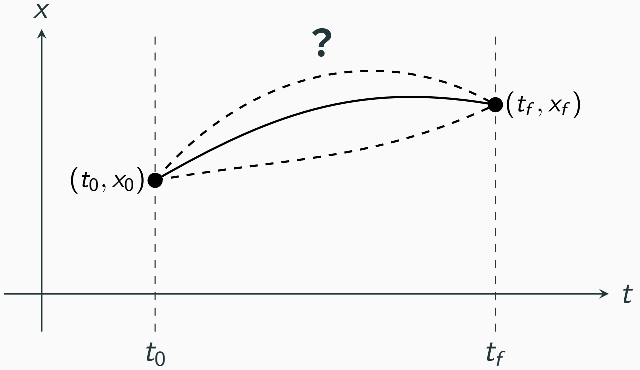
1. **復習**
2. **動的計画法**
3. HJB **方程式**
4. **最小原理**
5. NMPC **導入**

今までの内容覚えてますか？
復習しましょう!!

最適制御とは

状態方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

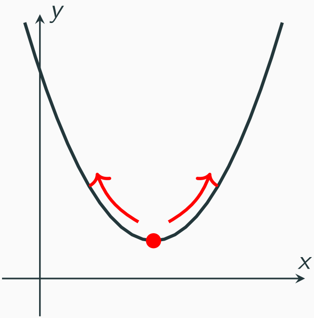
評価関数 $J = \underbrace{\varphi(x(t_f))}_{\text{終端コスト}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt}_{\text{ステージコスト}}$



変分法 1

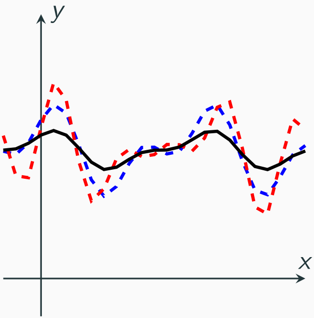
評価関数　$J = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$

微分法



- **関数の勾配**

変分法



- **汎関数 (関数の関数) の勾配**

評価関数 J は関数 $x(t), u(t)$ の関数なので汎関数とみなせる

変分法 2

評価関数 J のみの停留条件

曲線の形状など入力を必要としない最適化に用いる

$$J = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

この等式が成立するのは始点と終点を初期値として与えられた場合である
(2 **点境界値問題**)

評価関数 J と状態方程式を考慮した停留条件

最適制御では入力を求めるのでこちらを用いる

$$J = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \\ \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

このとき $H = L + \lambda^\top f + \rho^\top C$ と拡張すれば入力制約も考慮できる

変分法 3

Q. **なぜ異なる形の** Euler-Lagrange **方程式があるの**?
A. **変分問題の停留条件の式の総称が** Euler-Lagrange **方程式**
決まった式の形ではない.

Q. **最適制御の** Euler-Lagrange **方程式は入力制約がある場合は使えないの**?
A. **使える**.

第 1 回、第 2 回まとめ

第 1 回

評価関数を予め, 時間的に離散化することによって最適化問題に落とし込んだ

第 2 回

評価関数を汎関数と考え, 変分法を利用して最適制御が満たす Euler-Lagrange 方程式を導いた

最適性条件まとめ

時間を考慮しない

線形 MPC

予め時間を考慮して出した式から出た最適化問題を解いたから最適化問題自体は時間を考慮不要

Lagrange の未定乗数法

$$
\begin{aligned}
L(x, \lambda) &= f(x) + \lambda^T g(x) \\
\nabla L(x, \lambda) &= 0
\end{aligned}
$$

KKT 条件

$$
\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0
$$

$$
\begin{aligned}
g_i(x^*) &\leq 0 \quad \text{for all } i \\
\lambda_i^* &\geq 0 \quad \text{for all } i \\
\lambda_i^* g_i(x^*) &= 0 \quad \text{for all } i \\
h_j(x^*) &= 0 \quad \text{for all } j
\end{aligned}
$$

時間を考慮

非線形 MPC

時間で離散化せずに直接最適化問題を解きたい

Euler-Lagrange 方程式

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_0 \\
\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top \\
\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \\
\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top \\
\frac{\partial H}{\partial u} = 0
\end{cases}
$$

動的計画法

Bellman 方程式

$\downarrow$

HJB 方程式

最小原理

最適化の多様な定式

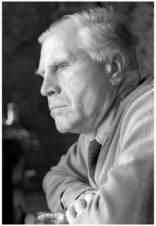
Q. **なぜ似たようなものがいくつもあるのか??**
A.

- **最適制御を異なる視点で考えている**
- **解法精度が良ければ同じ結果に収束するが, 問題によって各手法の計算時間が異なる**
- **同時期 (冷戦期) に 2 人の天才によって最適制御が定式化された**

Bellman

アメリカ

Bellman **方程式**
HJB **方程式**



Pontryagin

ソ連

最小原理

現在位置

1. 復習
2. **動的計画法**
3. HJB 方程式
4. 最小原理
5. NMPC 導入

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right) \right)$$

方針:

問題を分割して最適制御を考える

動的計画法 1

最適制御

状態方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

評価関数 $J = \underbrace{\varphi(x(t_f))}_{\text{終端コスト}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt}_{\text{ステージコスト}}$

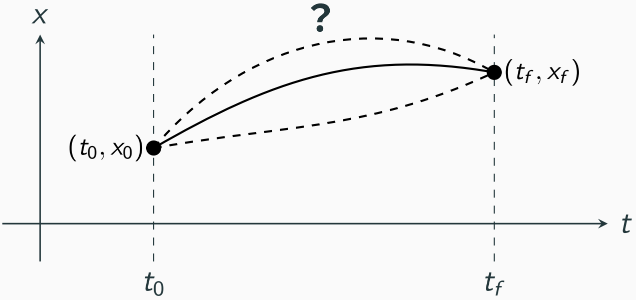
価値関数 $V(x, t)$: **評価関数 J を最小にする値**

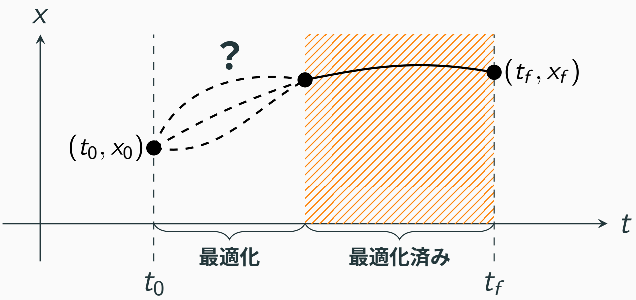
$$V(x, t) = \min_{u[t, t_f]} \left(\varphi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right)$$

$$V(x, t_f) = \varphi(x(t_f))$$

最適化を価値関数を探すことだと考える

動的計画法 2





動的計画法 3

Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_{u[t]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)$$

$$V(x,t_f) = \varphi(x(t_f))$$

$$\begin{aligned}
V(x,t) &= \min_{u[t,t_f]} \left(\varphi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \right) \\
&= \min_{u[t,t_f]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \varphi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \right) \\
&= \min_{u[t,t+dt]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \min_{u[t+dt,t_f]} \left(\varphi(x(t_f)) + \int_{t+dt}^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \right) \right) \\
&= \min_{u[t,t+dt]} \left(\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right) \right) \\
&= \min_{u(t)} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)
\end{aligned}$$

動的計画法まとめ

Bellman 方程式

$$V(x,t) = \min_{u(t)} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

動的計画法とは $\cdots$ 大きな問題を小さな部分問題に分解し、解を得る手法

- **最適な性質を持つ**
- **計算結果を保存して再利用 (メモ化)**
- **次元の呪いで現実的には解けない場合がある**

現在位置

1. **復習**
2. **動的計画法**
3. HJB **方程式**
4. **最小原理**
5. NMPC **導入**

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right)\right)$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x,t), t\right)$$

方針:

微分の形にしたい $\rightarrow$ Taylor **展開**

Hamiltonian **でまとめられそう**

HJB 方程式

$$V(x,t) = \min_u \left(L(x,u,t)dt + V\left(x + f(x,u,t)dt, t + dt\right)\right)$$

- (x,t) で Taylor 展開する
- $V\left(x + f(x,u,t)dt, t+dt\right) \simeq V\left(x,t\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) dt + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) dt$

$$V(x,t) = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t)dt + V\left(x,t\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) dt + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) dt\right)$$

$$0 = \min_{u[t,t+dt]} \left(L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right) + \frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right)\right) dt$$

Hamiltonian でまとめる

- $$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$$
$$H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(x,t\right), t\right) = L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,t\right) f\left(x,u,t\right)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}\left(x,t\right) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(x,t\right), t\right)$$

現在位置

1. **復習**
2. **動的計画法**
3. HJB **方程式**
4. **最小原理**
5. NMPC **導入**

最適制御の Euler-Lagrange **方程式**

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_0 \\
\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top \\
\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \\
\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top \\
\frac{\partial H}{\partial u} = 0
\end{cases}
$$

$$
H = L + \lambda^\top f + \rho^\top C
$$

方針:

変数を増やさず制約を考慮したい

最小原理 1

最適制御

状態方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

評価関数 $J = \underbrace{\varphi(x(t_f))}_{\text{終端コスト}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt}_{\text{ステージコスト}}$

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_0 \\
\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top \\
\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \\
\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top \\
\frac{\partial H}{\partial u} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x^*(t_0) = x_0 \\
\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\
\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\
\frac{dx}{dt} = f(x^*, u^*, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\
H(x^*, u^*, \lambda, t) = min_{u \in \Omega} H(x^*, u, \lambda, t)
\end{cases}
$$

ここで Ω は実行可能な入力 u の集合

最小原理まとめ

Pontryagin の最小原理

$$
\begin{cases}
x^*(t_0) = x_0 \\
\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\
\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\
\frac{dx}{dt} = f(x^*, u^*, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\
H(x^*, u^*, \lambda, t) = min_{u \in \Omega} H(x^*, u, \lambda, t)
\end{cases}
$$

- **最適な制約を持つ**
- **動的計画法** (HJB **方程式**) **と変換が可能**
- **次元の呪いで現実的には解けない場合がある**
- Euler-Lagrange **方程式を用いた解法も最小原理と呼ぶ**

連続時間最適化のポイント

動的計画法

動的計画法によって問題を部分問題に分割した

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (x,t), t\right)$$

Pontryagin の最小原理

評価関数を汎関数と考え, 変分法を用いたときの停留条件

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \\ \frac{dx}{dt} = f(x,u,t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^*(t_0) = x_0 \\ \lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\ \frac{dx}{dt} = f(x^*, u^*, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top (x^*, u^*, \lambda, t) \\ H(x^*, u^*, \lambda, t) = min_{u\in\Omega} H(x^*, u, \lambda, t) \end{cases}$$

最適性条件まとめ

時間を考慮しない

線形 MPC

予め時間を考慮して出した式から出た最適化問題を
解いたから最適化問題自体は時間を考慮不要

Lagrange の未定乗数法

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

KKT 条件

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0 \quad \text{for all } i \\ \lambda_i^* &\geq 0 \quad \text{for all } i \\ \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0 \quad \text{for all } i \\ h_j(x^*) &= 0 \quad \text{for all } j \end{aligned}$$

時間を考慮

非線形 MPC

時間で離散化せずに直接最適化問題を解きたい

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

動的計画法

$$\text{Bellman 方程式} \longrightarrow \text{HJB 方程式}$$

最小原理

現在位置

1. **復習**
2. **動的計画法**
3. HJB **方程式**
4. **最小原理**
5. NMPC **導入**

NMPC 導入

- **動的計画法や最小原理は次元の呪いの影響を受け，現実的には解けない場合がある．**
- **現実的に解ける連続最適化問題が** NMPC

$\longrightarrow$ **来週からは** NMPC **の解法**

参考資料

書籍

- 非線形最適制御入門 (名著です)
- 制御系設計論 (色々な制御理論をコンパクトに紹介してます)
- しっかり学ぶ数理最適化 (最適化全般について)
- はじめての最適化 (変分法の説明が分かりやすいです)