

**Sonderdruck
aus der Zeitschrift**

**Elektronische
Informationsverarbeitung
und Kybernetik**

Band 1, Heft 3, 1965



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

Eine Algebraisierung des Syntheseproblems von Schaltkreisen I¹⁾

Von GÜNTER HOTZ²⁾

Inhaltsübersicht³⁾

0.	Einleitung	185
1.	Kategorie ebener Netze	188
1.1.	Die Kategorie \mathfrak{N} ebener Netze	188
1.2.	Das freie Erzeugendensystem von \mathfrak{N}	190
1.3.	Die Relationen von \mathfrak{N}	191
1.4.	Die Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen $N \circ X = N'$	194
2.	Definition von Kategorien mit einem direkten Produkt durch Erzeugende und definierende Relationen	197
2.1.	Die freie durch \mathfrak{A} erzeugte X -Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$	197
2.2.	Die Eindeutigkeit der Lösung $F \circ X = G$	199
2.3.	Bildung der Faktorkategorie von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ nach einem Relationensystem	200
2.4.	Darstellung von Funktionen mittels Basisfunktionen	201
3.	Definition der freien Kategorie mit direktem Produkt als Faktorkategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$	209
3.1.	Einführung der Projektion und Diagonalisierung	209
3.2.	Normalformen in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$	212
3.3.	Ein in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ für Projektion und Diagonalisierung vollständiges Relationensystem	215
3.4.	Das vollständige Relationensystem für die freie Kategorie mit direktem Produkt	220
4.	Bemerkungen	227

0. Einleitung

Der Anlaß zu dieser Arbeit ist ein Problem der Automatentheorie: Aus einem gegebenen Bausteinsystem ist ein Automat zusammenzuschalten, dessen Funktion vorgegeben ist. Unter den verschiedenen der eventuell existierenden Lösungen ist die billigste auszusuchen.

Ein Baustein $A \in \mathfrak{A}$ ist ein physikalisches, meist elektrisches Gerät mit $Q(A)$ Eingängen und $Z(A)$ Ausgängen. Für jeden Eingang ist eine bestimmte Menge S von Eingangssignalen zugelassen, auf die der Baustein mit Ausgangssignalen

-
- ¹⁾ Habilitationsschrift, Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1965. Referenten: Prof. Dr. J. DÖRR, Prof. Dr. D. PUPPE (beide Saarbrücken), Prof. Dr. F. L. BAUER (München).
 - ²⁾ Institut für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes, Saarbrücken (Direktor: Prof. Dr. J. DÖRR).
 - ³⁾ Das vorliegende Heft enthält die Abschnitte 1 und 2. Der restliche Teil der Arbeit erscheint im folgenden Heft dieser Zeitschrift.

reagiert. Wir nehmen gegenüber dem technischen Sachverhalt vereinfachend an, daß folgendes gilt:

- (1) Für jeden Eingang der Elemente von \mathfrak{A} ist die gleiche Signalmenge S vorgeschrieben, und jedes Element von S^n ist als Eingangssignal für A mit $n = Q(A)$ zugelassen.
- (2) Die Menge der Ausgangssignale von $A \in \mathfrak{A}$ liegt in S^m mit $m = Z(A)$.
- (3) Liegt zur Zeit t das Eingangssignal $s \in S^n$ in A an, dann ist das Ausgangssignal zur Zeit t durch s eindeutig bestimmt. (Wir vernachlässigen also die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen.)

Der endliche Automat ist für uns also vollständig beschrieben durch seine Funktion $\varphi(A) : S^n \rightarrow S^m$. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Eingänge und Ausgänge von A in einer festen Numerierung mit den Zahlen 1 bis $Q(A)$ bzw. 1 bis

$Z(A)$ versehen sind, und der i -te Eingang bzw. i -te Ausgang der i -ten Komponente von S^n bzw. S^m zugeordnet ist.

Ein Element von \mathfrak{A} ist ein Schaltkreis. Sind A und B Schaltkreise mit $Q(A)$ bzw. $Q(B)$ Eingängen und $Z(A)$ bzw. $Z(B)$ Ausgängen, dann bilden wir aus A und B neue Schaltkreise, indem wir A und B zu einem Element $A \times B$ mit $Q(A) + Q(B)$ Eingängen und $Z(A) + Z(B)$ Ausgängen zusammenfassen, und den i -ten Eingang von A zum i -ten Eingang von $A \times B$ und den i -ten Eingang von B zum $(Q(A) + i)$ -ten Eingang von $A \times B$ erklären (Abb. 1).

Ist $Z(A) = Q(B)$, dann erhalten wir aus A und B einen Schaltkreis $B \circ A$, indem wir den i -ten Ausgang von A auf den i -ten Eingang von B schalten.

Ein Schaltkreis aus Elementen von \mathfrak{A} ist ein Gerät, das durch die vorigen Erklärungen induktiv beschrieben wird.

Ist $\varphi(A)$ bzw. $\varphi(B)$ die Funktion des Schaltkreises A bzw. B , dann ist $\varphi(A) \times \varphi(B)$ bzw. $\varphi(B) \circ \varphi(A)$ für $Q(B) = Z(A)$ die Funktion von $A \times B$ bzw. $B \circ A$.

Die Kosten der Bausteine von \mathfrak{A} seien durch die Funktion $L : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ gegeben; wir definieren:

$$\begin{aligned} L(A \times B) &= L(A) + L(B), \\ L(B \circ A) &= L(A) + L(B). \end{aligned}$$

Hierdurch wird jedem Schaltkreis ein „Preis“ zugeordnet.

Die Aufgabe lautet nun: Man finde zu vorgegebenem $f : S^n \rightarrow S^m$ einen Schaltkreis A mit $\varphi(A) = f$ und

$$L(A) = \min_{B \in \varphi^{-1}(f)} \{L(B)\}.$$

Ist f nicht auf ganz S^n vorgeschrieben, sondern nur auf $R \subset S^n$, dann ist das Optimum auf $\bigcup_{g|R=f} \varphi^{-1}(g)$ zu suchen.

Ist $Q(f) = Z(f) = S^n$ und f , wie es bei endlichen Automaten oft der Fall ist, nur bis auf eine Transformation von S^n vorgeschrieben, verallgemeinert sich die Aufgabe nochmals in naheliegender Weise.

Zur Lösung dieser Aufgabe erscheint es vorteilhaft, Relationen zu kennen, die es erlauben, aus einem Element $A \in \varphi^{-1}(f)$ jedes Element der Klasse $\varphi^{-1}(f)$ zu erzeugen.

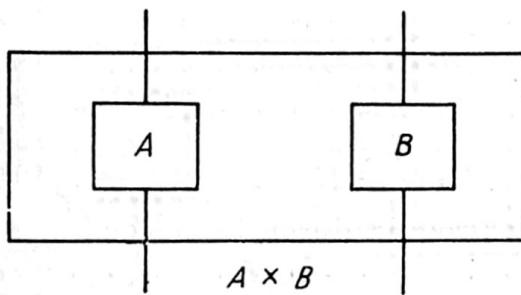


Abb. 1

In den ersten beiden Abschnitten der Arbeit wird eine Theorie des Zusammenschaltens von Automaten entwickelt, wie sie in dieser Beschreibung der Aufgabenstellung schon skizzenhaft vorhanden ist:

Es wird zunächst der topologische Begriff des *ebenen Netzes* eingeführt. Für die Netze werden die binären Operationen „ \circ “ und „ \times “ erklärt. Man erhält so ein algebraisches Gebilde \mathfrak{N} , das bezüglich „ \circ “ eine Kategorie ist und bezüglich „ \times “ eine Halbgruppe. \mathfrak{N} erweist sich als eine Verallgemeinerung der *D-Kategorie* (Kategorie mit direktem Produkt), die wir als *X-Kategorie* bezeichnen wollen.

In \mathfrak{N} spiegelt sich das Zusammenschalten der Automaten wider, nicht aber die Möglichkeit verschiedener Bausteine mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen. Dieser wird Rechnung getragen, indem Belegungen der inneren Punkte des Netzes mit dem Zeichen eines Alphabets \mathfrak{A} durchgeführt werden unter Berücksichtigung von Funktionen $Q : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ und $Z : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$. Man gelangt so zu einer *X-Kategorie* $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, die \mathfrak{A} als freies Erzeugendensystem besitzt. Die Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ entsprechen der Menge der Schaltkreise, die man aus \mathfrak{A} erhalten kann. Die Abbildung φ , die jedem Automaten seine Funktion zuordnet, wird zu einem Funktor $\varphi : \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{C}$, wo \mathfrak{C} die Kategorie der Abbildungen vom Typ $S^n \rightarrow S^m$ ist.

Die Einführung der Faktorkategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ nach einem Relationensystem \mathfrak{R} bildet die Basis für die Untersuchung der Klassen $\varphi^{-1}(f)$. In Abschnitt 3 wird $\varphi^{-1}(f)$ für bestimmte Kategorien $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und ausgezeichnete Funktoren φ untersucht: Wir betrachten nur Erzeugendensysteme \mathfrak{A} mit $\{U, V, D\} \subset \mathfrak{A}$ und $Z(A) = 1$ für $A \in \mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ und Funktoren φ , für die $\varphi(U)$ die Abbildung von S auf S° , $\varphi(V)$ die Vertauschung der Komponenten von S^2 ist und $\varphi(D)$ die Diagonalisierung $S \rightarrow S^2$. Solche Funktoren heißen *normal*. Es wird ein Relationensystem \mathfrak{R} angegeben mit der Eigenschaft: Für jedes normale φ gilt $\varphi(F) = \varphi(G)$ für $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ genau dann, wenn $F \equiv G(\mathfrak{R})$ ist. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ ist eine *D-Kategorie* und $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ ein freies Erzeugendensystem der *D-Kategorie*.

Das Relationensystem gestattet also gerade die Vereinfachungen in den Darstellungen F einer Funktion $\varphi(F)$ vorzunehmen, die ohne Kenntnis der Funktionen der Elementen aus $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ möglich sind. Abb. 2 veranschaulicht, daß es in diesem System echte Vereinfachungen gibt.

Es wird in der Arbeit für S eine beliebige abzählbare Menge zugelassen, so daß die Ergebnisse auch für Fragen der Programmierung von Rechenautomaten von Interesse sind. Will man Programme, die aus Unterprogrammen aufgebaut sind, formal vereinfachen, so kann dies bei der Vielzahl der möglichen Unterprogramme nicht unter besonderer Berücksichtigung der durch das Programm berechneten Funktion geschehen, sondern die Regeln zur Veränderung der Programme müssen gleichmäßig für alle Unterprogramme anwendbar sein. Das heißt aber gerade, daß es sich bei den zugelassenen Relationen um das System \mathfrak{R} oder ein dazu äquivalentes handeln muß.

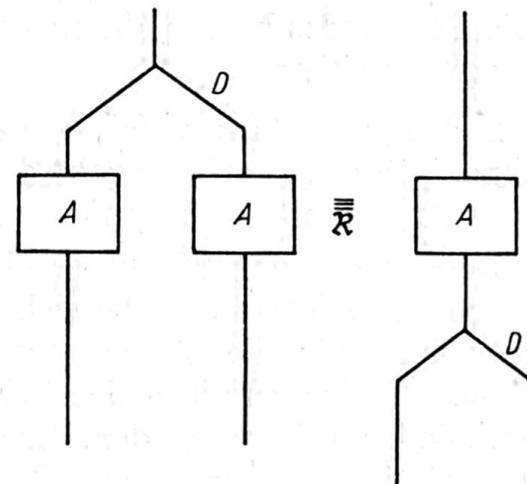


Abb. 2.

Zur Orientierung über den Stand der Theorie der Schaltkreissynthese sei auf [2] hingewiesen, im Zusammenhang mit Streckenkomplexen auf [5] und Kategorien auf [4] oder [6].

Für anregende Diskussionen und kritische Bemerkungen danke ich J. DÖRR und D. PUPPE. Mein Dank gilt auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die diese Untersuchung durch ein Stipendium der FRITZ-THYSSEN-Stiftung unterstützt hat.

1. Die Kategorie ebener Netze

1.1. Die Kategorie \mathfrak{N} ebener Netze

Unter einem *Netz* mit n Eingängen und m Ausgängen ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) verstehen wir folgendes topologisches Gebilde:

In der euklidischen Ebene sei ein Rechteck mit den Seiten g_1, g_2 und h_1, h_2 gegeben, worin sich sowohl die g_i als auch die h_i jeweils gegenüber liegen.

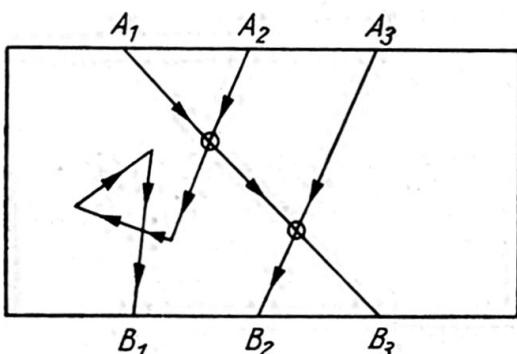


Abb. 3

A_1, \dots, A_n bzw. B_1, \dots, B_m seien paarweise verschiedene Punkte auf g_1 bzw. g_2 , wobei die Numerierungen der Punkte von h_1 nach h_2 laufen; die A_i bzw. B_i teilen g_1 bzw. g_2 in äquidistante Stücke.

Die A_i seien Anfangspunkte, die B_i Endpunkte von je genau einer Strecke eines orientierten, endlichen, ebenen Streckenkomplexes, der in der euklidischen Ebene in überkreuzungsfreier Lage in dem Rechteck liege³⁾. Wir fordern von dem Streckenkomplex weiter, daß jede seiner Strecken schlicht über h_1 ist und daß die Orientierung der Strecken in Richtung von g_1 nach g_2 zeigt. Es ist also der durch Abb. 3 beschriebene Fall ausgeschlossen.

Wir nennen g_1, g_2, h_1, h_2 den *Rahmen* des Netzes, A_1, \dots, A_n bzw. B_1, \dots, B_m die *Anfangspunkte* oder *Eingänge* bzw. die *Endpunkte* oder *Ausgänge* des Netzes. Die Punkte des Netzes, die weder Eingänge noch Ausgänge sind, heißen *innere Punkte* des Netzes.

Zwei Netze heißen *gleich*, wenn sie sich nach Aufeinanderlegen ihrer Rahmen ohne Selbstdurchdringung in der Ebene ineinander deformieren lassen, und zwar so, daß alle Zwischenlagen Netze sind.

Dabei verstehen wir unter einer *Deformation* eine *elementare Deformation* oder eine Deformation, die sich durch eine Kette elementarer Deformationen erzeugen läßt; die elementaren Deformationen sind Dreiecksdeformationen (Abb. 4a) oder verallgemeinerte Dreiecksdeformationen, wie sie durch Abb. 4b bzw. 4c beschrieben werden. Zugelassen sind weiter die (trivialen) Deformationen, die in Streckungen oder Dehnungen des Rahmens oder euklidischen Bewegungen des Netzes bestehen.

Man erkennt, daß die gegebene Gleichheitsdefinition reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, d. h. eine Einteilung der Netze in Äquivalenzklassen liefert.

Wir bezeichnen von nun an diese Klassen als Netze und nennen ein Netz im alten Sinne, wenn eine Unterscheidung wichtig ist, *Repräsentant* eines Netzes.

³⁾ Im euklidischen Sinne handelt es sich um stückweise lineare Kurvenzüge.

Verschiedene Repräsentanten eines Netzes haben die gleiche Anzahl von Eingängen und Ausgängen, die wir mit $Q(N)$ bzw. $Z(N)$ bezeichnen.

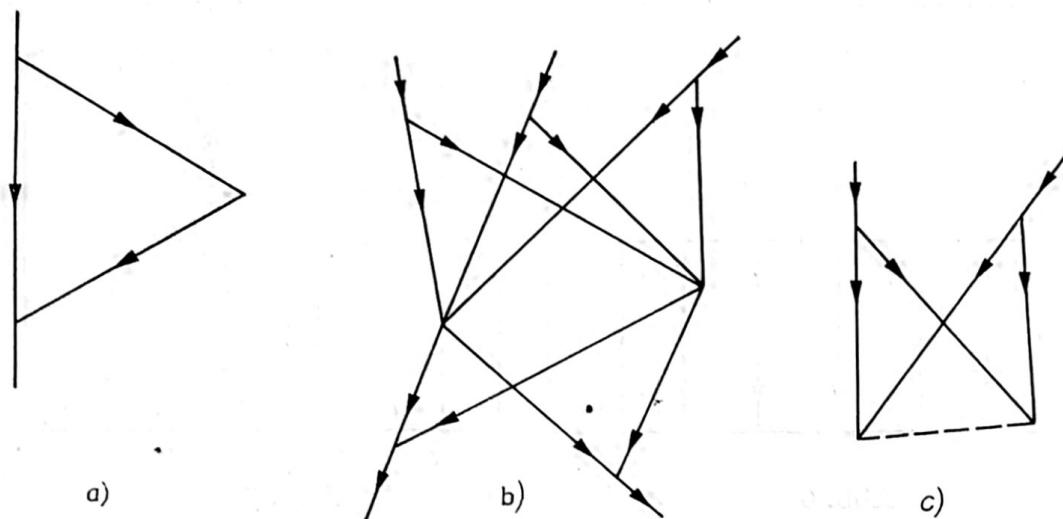


Abb. 4

Seien nun N_1 und N_2 Netze mit $Q(N_2) = Z(N_1)$, dann erklären wir zwischen N_1 und N_2 eine Komposition über die Repräsentanten N'_1 bzw. N'_2 von N_1 und N_2 :

Wir deformieren den Rahmen von N'_2 (in trivialer Weise), so daß wir N'_2 an N'_1 ansetzen können; d. h., wir bringen g_2 und g'_1 auf gleiche Größe und setzen die beiden Rahmen längs g_2 und g'_1 aneinander (Abb. 5). Wir entfernen $g_2 = g'_1$ und die Punkte $A'_i = B_i$ und erhalten wieder einen Repräsentanten eines Netzes, das wir mit $N_2 \circ N_1$ bezeichnen. Man erkennt, daß die Definition von der Auswahl des Repräsentanten unabhängig ist.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} Q(N_2 \circ N_1) &= Q(N_1), \\ Z(N_2 \circ N_1) &= Q(N_2). \end{aligned}$$

Wie man leicht zeigt, ist das Produkt assoziativ; d. h., es gilt für Netze N_1 , N_2 , N_3 mit $Q(N_2) = Z(N_1)$ und $Q(N_3) = Z(N_2)$

$$(N_3 \circ N_2) \circ N_1 = N_3 \circ (N_2 \circ N_1).$$

Zu jedem Netz mit $Q(N) = n$ und $Z(N) = m$ gibt es genau ein Netz E_n und E_m mit der Eigenschaft

$$N \circ E_n = E_m \circ N = N;$$

E_n ist ein Netz mit n Eingängen, n Ausgängen und n Strecken (Abb. 6). Die Menge der Netze bildet also bezüglich des Produktes „ \circ “ eine Kategorie.

Wir erklären eine weitere Zusammensetzung der Netze, nämlich das *X-Produkt*. Seien N'_1 und N'_2 Repräsentanten von Netzen N_1 bzw. N_2 , dann deformieren wir die Rahmen auf gleiche Länge und setzen sie längs h_{12} und h_{21} aneinander (Abb. 7). Anschließend löschen wir $h_{21} = h_{12}$ und numerieren die Eingänge

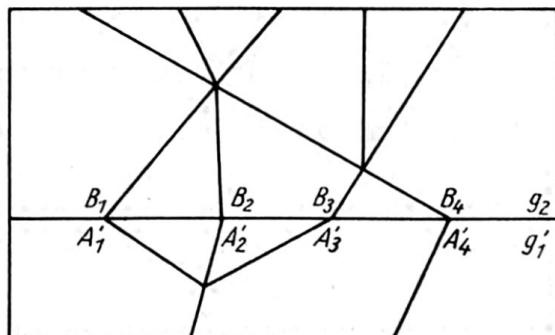


Abb. 5

von links nach rechts durch. Sorgen wir dafür, daß die Eingangs- und Ausgangspunkte des neuen Gebildes wieder äquidistant liegen, dann erhalten wir auf diese Weise wieder einen Repräsentanten eines Netzes N_3 . Wir nennen N_3

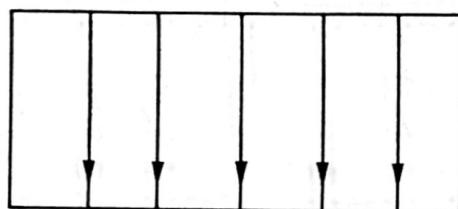


Abb. 6

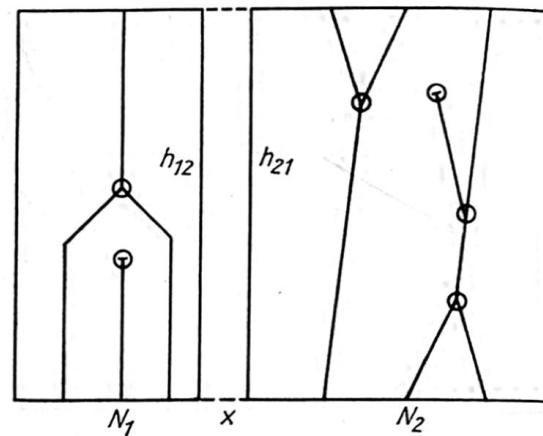


Abb. 7

das direkte Produkt von N_1 und N_2 und schreiben $N_3 = N_1 \times N_2$. Man erkennt, daß das direkte Produkt unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten und assoziativ ist und daß $E_k = E_1 \times \dots \times E_1$ (k -mal) ist und $E_0 \times N = N \times E_0 = N$ für jedes Netz N ist.

Wir bezeichnen die Menge der Netze mit diesen beiden Verknüpfungen mit \mathfrak{N} . Die Ergebnisse fassen wir zusammen zu

Satz 1. \mathfrak{N} bildet bezüglich „ \circ “ eine Kategorie und bezüglich „ \times “ eine Halbgruppe.

1.2. Das freie Erzeugendensystem von \mathfrak{N}

Wir wollen nun ein Erzeugendensystem von \mathfrak{N} angeben, d. h. eine Menge \mathfrak{E} von Netzen, aus denen sich durch Anwendung der Operationen von \mathfrak{N} alle Netze von \mathfrak{N} gewinnen lassen.

Durch Deformationen kann man jeden Repräsentanten eines Netzes N in eine Lage bringen, in der auf einer Parallelen zu g_1 höchstens ein innerer Punkt liegt. Also kann man N als Produkt von Netzen erhalten, die je einen inneren Punkt besitzen, außer in dem Fall, daß N keinen inneren Punkt besitzt, also eine Einheit ist (Abb. 8).

Jedes Netz N mit genau einem inneren Punkt läßt sich in ein direktes Produkt

$$N = E_k \times F \times E_m$$

aufspalten, worin F den inneren Punkt enthält und jede Strecke von F diesen Punkt als Anfangs- oder Endpunkt besitzt (Abb. 9). Eventuell ist $k = 0$ oder $m = 0$. F ist durch die Anzahl seiner Eingänge und Ausgänge vollständig charakterisiert. Hat F n Eingänge und m Ausgänge, dann schreiben wir γ_m^n für F .

Damit haben wir

Satz 2. Die Menge $\mathfrak{E} = \{\gamma_m^n \mid n, m = 0, 1, \dots\}$ ist ein vollständiges Erzeugendensystem von \mathfrak{N} .

Man erkennt weiter, daß das Erzeugendensystem minimal ist, da sich keine Erzeugende durch andere Erzeugende ausdrücken läßt. \mathfrak{E} ist auch das einzige minimale Erzeugendensystem von \mathfrak{N} , da keine Erzeugende durch andere Elemente von \mathfrak{N} ausgedrückt werden kann als durch sich selbst; letzteres folgt

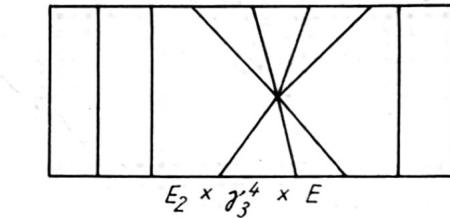
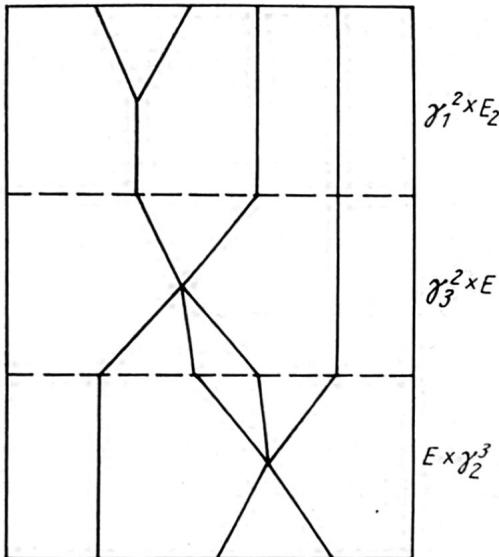


Abb. 9

Abb. 8

daraus, daß die Anzahl der inneren Punkte eines Produktes gleich der Summe der inneren Punkte der Faktoren ist. Später (in 2.4.) werden wir zeigen, daß \mathfrak{E} ein freies Erzeugendensystem ist.

Wir haben oben mehr gezeigt, als in Satz 2 enthalten ist, nämlich:

Satz 3. Jedes Netz $N \in \mathfrak{N}$ mit mindestens einem inneren Punkt läßt sich in ein „ \circ -“-Produkt von direkten Produkten der Form $E_k \times \gamma_m^n \times E_j$ zerlegen.

Die Darstellung eines Netzes N in dieser Form heißt eine *sequentielle Darstellung* von N . Gleiche sequentielle Darstellungen definieren natürlich das gleiche Netz, aber das gleiche Netz läßt verschiedene sequentielle Darstellungen zu. Über die verschiedenen Darstellungen eines Netzes gibt der nächste Abschnitt Auskunft.

1.3. Die Relationen von \mathfrak{N}

Wie aus der Definition der Deformationen unmittelbar folgt, gelten die Relationen

$$(E_{n+k} \times \gamma_j^l) \circ (\gamma_n^m \times E_{k+l}) = (\gamma_n^m \times E_{k+j}) \circ (E_{m+k} \times \gamma_j^l) \quad (R1)$$

für $k, m, n = 0, 1, 2, \dots$ (siehe Abb. 10).

Weiter gelten für $F, G, H \in \mathfrak{N}$ mit $m = Q(F)$, $n = Z(F)$ und $Q(H) = Z(G)$ die Relationen

$$\begin{aligned} (H \circ G) \times F &= (H \times F) \circ (G \times E_m) = (H \times E_n) \circ (G \times F), \\ F \times (H \circ G) &= (F \times H) \circ (E_m \times G) = (E_n \times H) \circ (F \times G) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (R2)$$

(siehe Abb. 11). *

Man erkennt, daß die Relationen (R1) in (R2) enthalten sind.

Die speziellen Fälle der Relationen

$$(H_1 \circ G_1) \times (H_2 \circ G_2) = (H_1 \times H_2) \circ (G_1 \times G_2) \quad (R)$$

sind.

Satz 4. Zwei Darstellungen H_1 und H_2 des gleichen Netzes in dem Erzeugendensystem \mathfrak{E} unter Benutzung beider Verknüpfungen von \mathfrak{N} sind mittels (R2) ineinander überführbar.

Beweis. Man erkennt ohne weiteres, daß man jede Darstellung mittels (R2) in eine sequentielle Darstellung verwandeln kann. Jeder sequentiellen Darstellung eines Netzes läßt sich ein Repräsentant des Netzes zuordnen, so daß aus ihm durch Zerschneidung durch Parallelen zu g gerade diese sequentielle Darstellung wieder gewonnen wird.

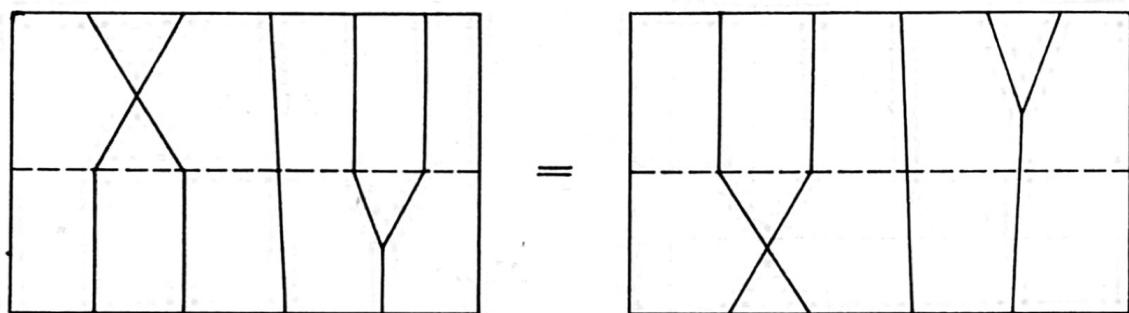


Abb. 10. $(E_3 \times \gamma_1^2) \circ (\gamma_2^2 \times E_3) = (\gamma_2^2 \times E_2) \circ (E_3 \times \gamma_1^2)$

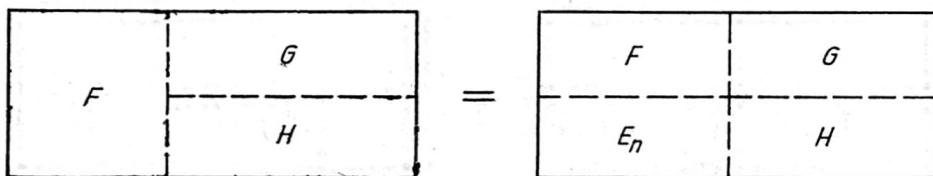


Abb. 11

Nach dem vorigen können wir annehmen, daß H_1 und H_2 sequentielle Darstellungen des gleichen Netzes sind. N'_1 und N'_2 seien H_1 und H_2 in der eben beschriebenen Weise zugeordnet. Nach Definition der Gleichheit läßt sich N'_1 in N'_2 deformieren. Jeder Deformationsschritt kann aber so in Teildeformationen zerlegt werden, daß dabei die Reihenfolge von höchstens zwei Punkten des Netzes geändert wird, da in N'_1 nach Konstruktion keine zwei Punkte auf einer Parallelen zu g liegen. Im Falle, daß die Reihenfolge von Punkten nicht geändert wird, bleibt die sequentielle Darstellung des Netzes die gleiche. Wird sie geändert, dann betrachten wir die beiden entsprechenden Faktoren des sequentiellen Produktes. Diese mögen die Form

$$(E_t \times \gamma_n^m \times E_s) \circ (E_r \times \gamma_j^l \times E_q)$$

haben. Mittels (R2) können wir die gemeinsamen E -Faktoren auf beiden Seiten abspalten; auf Grund der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Punkte läßt sich der Ausdruck auf die Form

$$E_u \times ((\gamma_n^m \times E_{k+j}) \circ (E_{m+k} \times \gamma_j^l)) \times E_v$$

bringen, oder auf die Form, die der anderen Reihenfolge der beiden betreffenden Punkte des Netzes entspricht. Nun wenden wir (R1) an und erhalten damit eine Darstellung, die der Änderung der Reihenfolge der Punkte nach der Deformation entspricht. Mittels (R2) bringen wir die Darstellung wieder in die sequentielle Form. Indem man nun N'_1 Schritt um Schritt in N'_2 deforme

stets die eben beschriebenen, dieser Deformation entsprechenden Umformungen der sequentiellen Darstellungen vornimmt, verwandelt man H_1 mittels (R1) und (R2) in H_2 , was zu beweisen war.

Wir verwenden im weiteren häufig noch die folgenden sich aus (R2) ergebenden Relationen:

$$\left. \begin{aligned} F \times G &= (F \circ E_m) \times G = (F \times E_j) \circ (E_m \times G), \\ (F \times G) &= (E_n \circ F) \times G = (E_n \times G) \circ (F \times E_k) \end{aligned} \right\} \quad (\text{R2}')$$

mit $k = Q(G)$, $j = Z(G)$, $m = Q(F)$, $n = Z(F)$.

Im folgenden bezeichnen wir eine Kategorie \mathfrak{F} , die bezüglich einer weiteren Verknüpfung „ \times “ eine Halbgruppe bildet, und deren Elemente den Relationen (R2) genügen, als eine *X-Kategorie*. (Häufig findet man auch die Bezeichnung *monoidale Kategorie*)

Wir wollen uns nochmals der Überführung einer sequentiellen Darstellung in eine andere mittels (R1) und (R2) zuwenden.

Wir gehen jetzt davon aus, daß wir zwei Repräsentanten eines Netzes haben, die ja nach Definition ineinander deformierbar sind. Wir können zunächst beide Netze deformieren, so daß keine zwei Punkte der Netze auf einer Parallelen zur Grundseite g der Rahmen liegen. Nun zerlegten wir jede elementare Deformation in Teildeformationen, so daß sich bei einem Schritt die Reihenfolge von höchstens zwei inneren Punkten änderte. Blieb die Reihenfolge der Punkte die gleiche, dann blieb die sequentielle Darstellung unverändert, im anderen Fall konnten wir durch Anwendung von Relationen aus (R1) und (R2) in der sequentiellen Darstellung eine Vertauschung der entsprechenden Faktoren vornehmen. Zur Vereinfachung eines späteren Beweises wollen wir diese Abänderungen von sequentiellen Darstellungen etwas formaler beschreiben. Diese Abänderungen der sequentiellen Darstellungen werden eindeutig beschrieben durch die Angabe der beiden Faktoren, die die Änderung der Reihenfolge betrifft, wenn der Punkt des oberen Faktors Anfangspunkt oder der Punkt des unteren Faktors Endpunkt mindestens einer Strecke ist. Wird der i -te Faktor der Darstellung H in der oben im einzelnen beschriebenen Weise mit dem $(i+1)$ -ten vertauscht und ist das Ergebnis die sequentielle Darstellung H' , dann schreiben wir $H' = v_i H$.

Um die Bedingung für die Eindeutigkeit von $v_i H$ zu gewährleisten, machen wir *für diesen Abschnitt* die *Voraussetzung*, daß in den betrachteten Netzen entweder jeder Punkt Anfangspunkt oder jeder Punkt Endpunkt mindestens einer Strecke ist. Dies ist die Voraussetzung des angestrebten Satzes 5.

Eine Folge

$$H_1, H_2 = v_{i_1} H_1, \dots, H_j = v_{i_{j-1}} H_{j-1}$$

von sequentiellen Darstellungen nennen wir eine Deformationskette. Wir schreiben auch $H_j = v H$ mit $v = [v_{i_1}, \dots, v_{i_{j-1}}]$.

Aus dem Beweis zu Satz 4 ergibt sich:

Hilfssatz 1. Sind H und H' sequentielle Darstellungen des gleichen Netzes, dann gibt es eine Deformationskette v mit $H' = v H$; dabei lassen wir für v auch das leere Wort e zu und definieren $e H = H$.

Man erkennt: Ist $H' = v_i H$, dann ist auch $v_i H'$ erklärt, und es ist $H = v_i H' = [v_i, v_i] H$.

Definition. Eine Deformationskette v heißt *reduziert*, wenn in v kein Paar $[v_i, v_i]$ auftritt. Wir sagen, daß v' aus v durch Reduktion hervorgeht, wenn sich v' durch Streichungen von Paaren $[v_i, v_i]$ aus v erhalten läßt.

Es folgt unmittelbar

Hilfssatz 2. v beschreibe eine Deformationskette von H und v' gehe aus v durch Reduktion hervor. Ist $H' = vH$, dann ist auch $H' = v'H$.

Wir verfolgen nun, welchen „Weg“ der erste Faktor einer sequentiellen Darstellung (der am weitesten rechts stehende Faktor bzw. der oberste Punkt des zugehörigen Repräsentanten) bei einer Deformation durchläuft.

Wir setzen

$h(0) = 1$ = Platz des ersten Faktors vor der ersten Deformation;

$h(l)$ ($0 \leq l < j$) = Platz des ersten Faktors nach der l -ten Deformation.

Wir finden:

$$h(l+1) = \begin{cases} h(l), & \text{falls } i_{l+1} \neq h(l), h(l) - 1; \\ h(l) + 1, & \text{falls } i_{l+1} = h(l); \\ h(l) - 1, & \text{falls } i_{l+1} = h(l) - 1; \end{cases}$$

wobei $v = [v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ die betrachtete Deformationskette beschreibt.

Hilfssatz 3. Ist $h(l) \neq h(l+1)$ für $l = 0, \dots, k-1$ (≥ 0) und ist $h(0) = h(k)$ bei der Deformationskette v von H , dann ist v nicht reduziert.

Beweis. Sei $v = [v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$. Wegen $k \geq 1$ und $h(l) \neq h(l+1)$ existiert ein j mit $h(j) \geq 1$ und $h(j)$ maximal. Dann ist $h(j) = h(j+1) + 1$ und $v_{i_j} = v_{i_{j+1}}$ und also v nicht reduziert.

Hilfssatz 4. (1) Ist $v = [v_i, v_k]$ mit $i \neq k \pm 1$ eine Deformationskette für H , dann ist auch $v' = [v_k, v_i]$ eine Deformationskette für H , und es gilt $vH = v'H$.

(2) Ist $v = [v_i, v_{i+1}, v_i]$ und $v' = [v_{i+1}, v_i, v_{i+1}]$, dann ist v genau dann für H erklärt, wenn v' für H erklärt ist, und es gilt dann $vH = v'H$.

(3) Sei v' eine Teilfolge von v , und sei v'' genau dann für eine sequentielle Darstellung H_1 erklärt, wenn dies für v' gilt, und es sei $v'H_1 = v''H_1$. Erhält man v^+ aus v durch Ersetzen von v' durch v'' , dann sind v und v^+ für genau die gleichen sequentiellen Darstellungen erklärt, und es gilt, wenn v für H definiert ist, $vH = v^+H$.

Beweis. (1) und (2) sind geometrisch evident. (3) ergibt sich aus Abb. 12, worin $[v_1, v', v_2] = v$ ist und v_1, v', v_2 Teilfolgen von v sind.

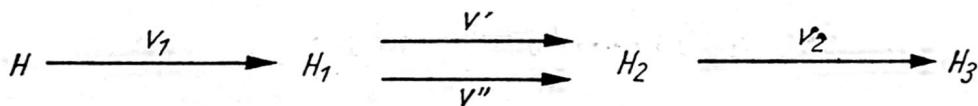


Abb. 12

Kürzungsregel

1.4. Die Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen $N \circ X = N'$

Satz 5. Sei $F, G, G' \in \mathfrak{N}$ und $G' \circ F$ erklärt, und jeder innere Punkt von $G \circ F$ sei Endpunkt von mindestens einer Strecke. Dann gilt:

$$G \circ F = G' \circ F \Rightarrow G = G'. \quad (1)$$

Es gilt auch die dazu symmetrische Aussage: Ist $F \circ G$ und $F \circ G'$ erklärt und jeder innere Punkt Anfangspunkt mindestens einer Strecke, dann folgt:

$$F \circ G = F \circ G' \Rightarrow G = G'. \quad (2)$$

Sind die Voraussetzungen von (1) oder aber die Voraussetzungen von (2) erfüllt, so gilt:

$$F \times G = F \times G' \Rightarrow G = G' , \quad (3)$$

$$G \times F = G' \times F \Rightarrow G = G' . \quad (4)$$

Wie man aus dem Beispiel auf Abb. 13 erkennt, sind die Behauptungen (1) und (2) des Satzes ohne eine Einschränkung über die inneren Punkte nicht

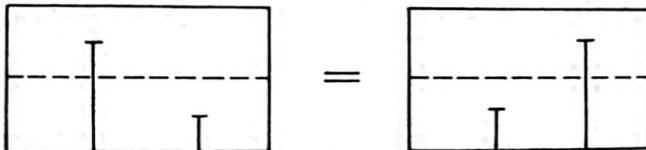


Abb. 13

richtig. Das Beispiel zeigt:

$$(E \times \gamma_1^0) \circ \gamma_1^0 = (\gamma_1^0 \times E) \circ \gamma_1^0 ,$$

$$E \times \gamma_1^0 \neq \gamma_1^0 \times E .$$

Für die Aussagen (3) und (4) ist die Voraussetzung zwar überflüssig, aber sie erleichtert sehr den Beweis. Da wir mit (3) und (4) mit Voraussetzung im folgenden auskommen, geben wir uns mit Satz 5 zufrieden.

Wir beweisen zunächst (3) und (4) unter der Voraussetzung von (1) und (2).

Beweis zu (3) und (4). Sei die Voraussetzung von (1) erfüllt. Wir wenden (R2') an und erhalten

$$G \times F = (G \times E_n) \circ (E_m \times F) ,$$

$$G' \times F = (G' \times E_n) \circ (E_k \times F) .$$

Wegen $G \times F = G' \times F$ ist $Q(G) = Q(G')$ und also $k = m$. Wir wenden die Voraussetzung zu (4) und die Behauptung (1) an und haben

$$G \times E_n = G' \times E_n .$$

Nun wählen wir sequentielle Darstellungen H von G und H' von G' . Hieraus erhalten wir eine sequentielle Darstellung von $G \times E_n$ bzw. $G' \times E_n$, indem wir jeden Faktor von rechts „direkt“ mit E_n multiplizieren; die so erhaltenen sequentiellen Darstellungen seien H_1 bzw. H'_1 . Aus Hilfssatz 1 folgt, daß es eine Deformationskette v gibt mit $H'_1 = v H_1$. Nun sieht man, daß v auch eine Deformationskette für H beschreibt und daß $H' = v H$ ist, woraus $G = G'$ folgt.

Der Beweis läuft analog, wenn die Voraussetzung von (2) erfüllt ist; wir bringen dann $G \times F$ auf die Form, die für die Anwendung von (2) geeignet ist. Damit ist (4) bewiesen. (3) beweist man entsprechend. Es genügt nun, (1) zu beweisen, da der Beweis zu (2) symmetrisch verläuft. Wir beweisen zunächst noch einige Hilfssätze.

Hilfssatz 5. $H_2 \circ H_1$ und $H'_2 \circ H_1$ seien sequentielle Darstellungen des gleichen Netzes. H_1 bestehe aus einem einzigen Faktor. Ist die Voraussetzung von (1) erfüllt, und ist $v = [v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ eine Deformationskette für $H_2 \circ H_1$ mit $H'_2 \circ H_1 = v(H_2 \circ H_1)$, dann ist $h(0) = h(k)$, wo h die in 1.3. definierte Funktion ist.

Beweis. Wir führen den Beweis geometrisch, indem wir zu Repräsentanten der Netze übergehen, die den beiden sequentiellen Darstellungen entsprechen. $h(k)$ gibt an, an welche Stelle in der Reihenfolge der inneren Punkte der in $H_2 \circ H_1$ oberste Punkt durch die v entsprechende Deformation gebracht wird.

Auf Grund der Voraussetzung von (1) wissen wir, daß der in $H_2 \circ H_1$ und $H'_2 \circ H_1$ jeweils oberste Punkt mit mindestens einem Anfangspunkt des Netzes verbunden ist. Da in beiden sequentiellen Darstellungen die beiden obersten Faktoren gleich sind und von einem Anfangspunkt höchstens eine Strecke ausgeht, bei der Deformation aber die Inzidenzrelationen des Streckenkomplexes nicht geändert werden, folgt, daß der an $(h(k))$ -ter Stelle in $H'_2 \circ H_1$ stehende Punkt mit dem an erster Stelle stehenden identisch ist, d. h. $h(k) = 1 = h(0)$.

Hilfssatz 6. Sei $H_2 \circ H_1 \xrightarrow{v_{i_1}} H'_2 \circ H_1 \xrightarrow{v} H'_2 \circ H_1$ eine Deformationskette, und H_1 bestehe aus nur einem Faktor, dann ist $H'_2 = v_{i_1-1} H_2$, d. h. $H'_2 \circ H_1 = v(v_{i_1-1} H_2) \circ H_1$.

Beweis. Da $i_1 > 1$, betrifft v_{i_1} den ersten Faktor nicht, sondern nur Faktoren in H_2 . Deren Platz hat aber in H_2 gemessen eine um 1 kleinere Stellenzahl als in $H_2 \circ H_1$, woraus die Behauptung folgt.

Beschreibt $v = [v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ eine Deformationskette für H , dann definieren wir

$$A(v) = \text{Anzahl der Stellen } i \text{ mit } h(i) = h(i+1) \\ \text{für } i = 0, \dots, k-1.$$

Hilfssatz 7. Sei $v = [v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ eine reduzierte Deformationskette für H , und sei $h(0) = h(k)$. Ist $A(v) > 0$, dann gibt es eine Deformationskette $v' = [v_{l_1}, \dots, v_{l_k}]$ mit $l_1 > 1$ und $v'H = vH$, $A(v) = A(v')$ und $h(0) = h'(k)$.

Beweis. Da $A(v) > 0$ ist, gibt es ein j mit $h(j) = h(j-1)$; j sei die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Ist $j = 1$, dann ist $v_{i_1} \neq v_1$, und es ist nichts zu zeigen.

Sei also $j > 1$. Da v reduziert ist und j minimal ist mit $h(j) = h(j-1)$, folgt $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{j-1} = j-1, h(j-1) = j$ und $i_j \neq j-1, j$. Ist $i_j > j$, dann können wir v_{ij} nach Hilfssatz 4 mit $[v_1, \dots, v_{j-1}]$ vertauschen und erhalten so die gesuchte Deformationskette v' . Ist $i_j < j-1$, dann können wir so lange vertauschen, bis wir an ein v_l mit $l = i_j + 1$ gelangen. Dann wenden wir die in Hilfssatz 4 betrachtete Ersetzung von $[v_{l-1}, v_l, v_{l-1}]$ durch $[v_l, v_{l-1}, v_l]$ an, so daß die nun erhaltene Deformationskette die Gestalt $[v_1, \dots, v_{l-2}, v_l, v_{l-1}, v_l, \dots]$ hat. Wir können nun v_l mit $[v_1, \dots, v_{l-2}]$ vertauschen und haben so eine Deformationskette v' von gleicher Länge wie v erhalten, die mit $v_l \neq v_1$ beginnt und für die $v'H = vH$ gilt (nach Hilfssatz 4). Man erkennt ohne weiteres: $A(v') = A(v)$ und $h(k) = h'(k)$, d. h. $h(k) = 1$.

Hilfssatz 8. Sei H_1 ein Netz mit genau einem inneren Punkt, $H_2 \circ H_1$ und $H'_2 \circ H_1$ seien erklärt und mögen die Voraussetzung von (1) (Satz 5) erfüllen. $v = [v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}]$ definiere eine Deformationskette für $H_2 \circ H_1$ mit $H'_2 \circ H_1 = v(H_2 \circ H_1)$. Dann gilt: H_2 und H'_2 definieren das gleiche Netz.

Beweis (vollständige Induktion nach der Länge k der Deformationskette).

1. Verankerung. Für $k = 0$, d. h. $v = e$ folgt $H_2 = H'_2$.
2. Die Behauptung sei richtig für $0 \leq n \leq k-1$. Ist v nicht reduziert, dann folgt die Behauptung über Hilfssatz 2. Sei also v reduziert. Dann ist $A(v) > 0$ wegen Hilfssatz 3. Nach Hilfssatz 5 ist $h(0) = h(k)$. Damit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllt. Es gibt ein

$$v' = [v_{l_1}, \dots, v_{l_{k-1}}] \text{ mit } v_{l_1} \neq v_1 \text{ und } v'(H_2 \circ H_1) = H'_2 \circ H_1.$$

Wir wenden nun Hilfssatz 6 an und erhalten ein H_2'' mit

$$H_2 \circ H_1 \xrightarrow{v_{i_1}} H_2'' \circ H_1 \xrightarrow{[v_{l_2}, \dots, v_{l_k}]} H_2' \circ H_1$$

und

$$H_2'' = v_{i_1-1} H_2.$$

Auf Grund der Induktionsvoraussetzung können wir schließen, daß H_2'' und H_2' das gleiche Netz definieren, woraus dies auch für H_2 und H_2' folgt, was zu beweisen war.

Nun können wir Satz 5 endlich beweisen.

Sei $G \circ F = G' \circ F$. Dann wählen wir eine sequentielle Darstellung von G , G' und F , die wir zu sequentiellen Darstellungen von $G \circ F$ und $G' \circ F$ zusammensetzen. Enthält F genau einen inneren Punkt, dann folgt direkt aus Hilfssatz 8 die Behauptung $G = G'$. Wir beweisen den Satz allgemein durch Induktion nach der Anzahl der inneren Punkte von F , d. h. nach der Anzahl der Faktoren in der sequentiellen Darstellung von F . Sei $F_2 \circ F_1 = F$, und F_1 enthalte genau einen inneren Punkt, dann gilt $(G \circ F_2) \circ F_1 = (G' \circ F_2) \circ F_1$, woraus nach vorigem $G \circ F_2 = G' \circ F_2$ folgt. Hierauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten $G = G'$, womit Satz 5 bewiesen ist.

Die Ergebnisse des Satzes 5 gestatten es, uns ein einfaches Verfahren zur Entscheidung der Gleichheit von Netzen anzugeben, die den Voraussetzungen des Satzes genügen.

Eine notwendige Voraussetzung für $N_1 = N_2$ ist $Q(N_1) = Q(N_2)$ und $Z(N_1) = Z(N_2)$ und die Gleichheit der Anzahl der inneren Punkte von N_1 und N_2 .

N_1 und N_2 mögen die Voraussetzungen von (1) und die genannten notwendigen Bedingungen erfüllen; m sei die Anzahl der inneren Punkte von N_1 und N_2 .

Ist $m = 1$, dann ist die Entscheidung trivial.

Sei $m > 1$. In diesem Fall gibt es ein Netz N_1' mit $m - 1$ inneren Punkten, so daß gilt: $N_1 = N_1' \circ H_1$. Nun untersuchen wir, ob sich von N_2 der Faktor H_1 abspalten läßt. Dies kann geschehen, indem man nachprüft, ob es einen inneren Punkt von N_2 mit der gleichen Anzahl von Ein- und Ausgängen wie der innere Punkt von H_1 gibt, und ob dieser Punkt in entsprechender Weise mit den Anfangspunkten von N_2 verbunden ist, wie es für den inneren Punkt von H_1 gilt. Gibt es keinen solchen Punkt, dann folgt $N_1 \neq N_2$. Gibt es einen solchen Punkt, dann können wir schreiben $N_2 = N_2' \circ H_1$ und wegen Satz 5 folgt $N_2 = N_1$ genau dann, wenn $N_2' = N_1'$. N_2' und N_1' haben aber nur $m - 1$ innere Punkte. Also haben wir damit ein Verfahren, daß uns spätestens in m Schritten die gesuchte Entscheidung liefert.

2. Definition von Kategorien mit einem direkten Produkt durch Erzeugende und definierende Relationen

2.1. Die freie durch \mathfrak{A} erzeugte X -Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$

Sei \mathfrak{A} ein endliches oder abzählbar unendliches Alphabet, und Q und Z seien Abbildungen, die jedem Element von \mathfrak{A} eine ganze Zahl zuordnen.

Sei nun N' Repräsentant eines Netzes und $\mathfrak{M}_{N'}$ die Menge seiner inneren Punkte. Eine Abbildung $f: \mathfrak{M}_{N'} \rightarrow \mathfrak{A}$ heißt *erlaubt*, wenn für $P \in \mathfrak{M}_{N'}$ gilt:

- (1) $Q(f(P))$ = Anzahl der Strecken in N' , die P als Endpunkt besitzen;
- (2) $Z(f(P))$ = Anzahl der Strecken von N' , die P als Anfangspunkt besitzen.

Eine erlaubte Abbildung belegt also die Punkte von N' mit Zeichen aus \mathfrak{A} , so daß der jeweilige Punkt und das zugeordnete Zeichen die gleiche Anzahl von „Ein- und Ausgängen“ besitzen.

Wir bilden nun Paare (N', f) und wollen zwischen diesen eine Gleichheitsrelation definieren. Seien N_1 und N_2 Repräsentanten von $N \in \mathfrak{N}$. Dann gibt es eine Deformation Δ von N_1 in N_2 . Wir definieren eine Abbildung $\alpha_\Delta : \mathfrak{M}_{N_1} \rightarrow \mathfrak{M}_{N_2}$, indem wir setzen: $\alpha_\Delta(P_1) = P_2$ genau dann, wenn P_1 durch Δ in P_2 übergeht. Man erkennt, daß α_Δ eine eindeutige Abbildung ist.

Wir definieren nun

$$(N_1, f) = (N_2, g) \iff \begin{aligned} &\text{es existiert ein } \Delta \text{ mit} \\ &N_2 = \Delta N_1 \text{ und } f = g \circ \alpha_\Delta. \end{aligned}$$

Hierdurch erhalten wir eine Klasseneinteilung der Paare (N, f) ; die durch (N, f) definierte Klasse bezeichnen wir mit $[N, f]$.

Sei

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) = \{[N, f] \mid N \text{ Repräsentant von } N; N \in \mathfrak{N}; f: \mathfrak{M}_N \rightarrow \mathfrak{A} \text{ ist eine erlaubte Abbildung}\}.$$

Wir definieren Q und Z auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ durch $Q([N, f]) = Q(N)$ und $Z([N, f]) = Z(N)$.

Ist $F = [N_1, f], G = [N_2, g], H = [N_3, h] \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und ist $N_3 = N_2 \circ N_1$ und

$$h(P) = \begin{cases} f(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N_1}, \\ g(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N_2}, \end{cases}$$

dann schreiben wir $H = G \circ F$.

Man erkennt, daß $G \circ F$ erklärt ist für $G, F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $Q(G) = Z(F)$ (und zwar unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten) und daß das Produkt assoziativ ist.

Es gibt zu jedem Element $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine Links- und eine Rechts-Einheit. Es ist $\mathfrak{M}_{E_F} = \emptyset$ und damit $f_k : \mathfrak{M}_{E_F} \rightarrow \mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt. Man erkennt:

$$F \circ [E_F, f_k] = [E_F, f_k] \circ F = F$$

für $k = Q(F)$ und $m = Z(F)$.

Der Kürze halber schreiben wir für $[E_F, f_k]$ wieder E_F .

Damit haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ bezüglich „ \circ “ eine Kategorie bildet. Nun erklärt man in entsprechender Weise das direkte Produkt in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, bezüglich dessen $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine Halbgruppe bildet.

Ist γ_n^m eine Erzeugende von \mathfrak{N} , dann gibt es genau so viele erlaubte Abbildungen f zu γ_n^m , wie es Elemente A in \mathfrak{A} gibt mit $Q(A) = m$ und $Z(A) = n$. Wir identifizieren nun $[\gamma_n^m, f] \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit dem zugehörigen $A \in \mathfrak{A}$ und haben dann in \mathfrak{A} ein vollständiges Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Wir fassen das Ergebnis zusammen zu

Satz 6. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ist bezüglich „ \circ “ eine Kategorie und bezüglich „ \times “ eine Halbgruppe. \mathfrak{A} bildet ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Die Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ genügen (R1⁺) und (R2⁺), d. h. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ist eine X-Kategorie (siehe 1.3.).

Die Relationen von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ erhält man leicht aus den Relationen von \mathfrak{N} . Zunächst sieht man, daß

$$(E_{n+k} \times A) \circ (B \times E_{k+l}) = (B \times E_{k+l}) \circ (E_{k+m} \times A) \quad (\text{R1}^+)$$

für $A \in \mathfrak{A}$ und $Q(A) = l$, $Z(A) = j$, $Q(B) = m$, $Z(B) = n$ und

$$\left. \begin{array}{l} (H \circ G) \times F = (H \times F) \circ (G \times E_m) = (H \times E_n) \circ (G \times F), \\ F \times (H \circ G) = (F \times H) \circ (E_m \times G) = (E_n \times H) \circ (F \times G) \end{array} \right\} \quad (\text{R2}^+)$$

für $F, G, H \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $m = Q(F)$, $n = Z(F)$ und $Q(H) = Z(G)$ Relationen von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ sind. Ganz analog wie in 1.3. zeigt man, daß sich durch (R1⁺) und (R2⁺) zwei Darstellungen des gleichen Elements aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ineinander überführen lassen. (R2⁺) ist gerade hinreichend dafür, daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine X -Kategorie ist.

2.2. Die Eindeutigkeit der Lösung $F \circ X = G$

Hilfssatz 9. Seien N und N' Repräsentanten des gleichen Netzes, das den Voraussetzungen des Satzes 5(1) oder 5(2) genügt. Δ_1 und Δ_2 seien zwei Deformationen mit $N' = \Delta_1 N = \Delta_2 N$. Dann gilt: $\alpha_{\Delta_1} = \alpha_{\Delta_2}$.

Beweis. Es genügt, den Fall zu betrachten, daß $N = N'$ ist, d. h. daß Δ_1 eine Deformation des Repräsentanten in sich selbst ist. Die Behauptung lautet dann: α_{Δ_1} ist eine Identität.

Man kann sich weiter auf den Fall beschränken, daß keine zwei Punkte von N auf einer Parallelen zu g liegen. Dann gehen wir zu der zugehörigen sequentiellen Darstellung H von N über; Δ wird dann zu einer Deformationskette v von H . Wir zeigen durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der inneren Punkte von N , daß α_v eine Identität ist.

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei für $n - 1 \geq 1$ die Behauptung bewiesen und 5(1) erfüllt. Dann spalten wir von H den obersten Faktor ab; d. h., wir zerlegen $H = H_2 \circ H_1$, wo H_1 nur einen inneren Punkt enthält. Nach Voraussetzung ist $v(H_2 \circ H_1) = H_2 \circ H_1$. Nach Hilfssatz 5 geht bei dieser Deformation der oberste Faktor in den obersten Faktor über, d. h., ist P der oberste Punkt in N , dann ist $\alpha_v(P) = P$. Nun folgt durch eine mehrfache Anwendung des Hilfssatzes 7, daß es ein $v' = v^+ \cdot v^*$ gibt, so daß $h(i) = h(0)$ für $0 < i \leq k$ und $h(i) \neq h(i + 1)$ für $k < i < m$ gilt, wo k die Länge von v^+ und m die Länge von v' ist. Beim Beweis von Hilfssatz 7 benutzten wir den Hilfssatz 4, der die Regeln enthält, durch die v' aus v gewonnen werden kann. Man sieht, daß α_v gegenüber diesen Ersetzungen invariant ist. Also ist $\alpha_v = \alpha_{v'} = \alpha_{v^*} \circ \alpha_{v^+}$.

Nun folgt aus Hilfssatz 3, daß sich v^* auf e (leere Deformationskette) reduzieren läßt. Also ist $v(H_2 \circ H_1) = v^+(H_2 \circ H_1)$ und $\alpha_v = \alpha_{v^+}$. Nun betreffen die Operationen von v^+ aber nur H_2 . Erniedrigen wir also den Index jeder Komponente von v^+ um 1 und bezeichnen wir die so für H_2 erhaltene Deformationskette mit v'' , dann gilt $v(H_2 \circ H_1) = (v'' H_2) \circ H_1$, $v'' H_2 = H_2$ und $\alpha_{v''} = \alpha_v$ auf \mathfrak{M}_{H_2} . Auf H_2 können wir nun die Induktionsannahme anwenden und erhalten, daß $\alpha_{v''}$ eine Identität ist. Also ist α_v die Identität, was zu zeigen war.

Satz 7. (1) Enthält \mathfrak{A} kein Element A mit $Z(A) = 0$, dann gilt für $F, G, G' \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $Z(F) = Q(G) = Q(G')$:

$$F \circ G = F \circ G' \Rightarrow G = G' .$$

(2) Enthält \mathfrak{A} kein Element A mit $Q(A) = 0$, dann gilt für $F, G, G' \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $Q(F) = Z(G) = Z(G')$:

$$G \circ F = G' \circ F \Rightarrow G = G'.$$

(3) Unter den Voraussetzungen von (1) oder (2) gilt

$$F \times G = F \times G' \Rightarrow G = G',$$

$$G \times F = G' \times F \Rightarrow G = G'.$$

Beweis. Behauptung (3) folgt wie in Satz 5 aus 5(1) oder 5(2). Aus Symmetriegründen genügt es, (1) zu zeigen. Sei $F = [N'_1, f_1]$, $G = [N'_2, f_2]$, $G' = [N'_3, f_3]$. Sind N_1, N_2, N_3 die durch N'_1, N'_2 bzw. N'_3 definierten Netze, dann gilt $N_2 \circ N'_1 = N_3 \circ N'_1$, und N_1, N_2, N_3 erfüllen die Voraussetzung von 5(1). Also folgt $N_2 = N_3$. Es gibt also eine Deformation Δ mit $N'_3 = \Delta N'_2$. Nun erhalten wir eine Deformation Δ' mit $\Delta'(N'_2 \circ N'_1) = N'_3 \circ N'_1$, indem wir N'_1 festhalten und Δ auf N'_2 anwenden. Nun gibt es nach Voraussetzung eine Deformation Δ^+ mit $N'_3 \circ N'_1 = \Delta^+(N'_2 \circ N'_1)$ und $f' = f^+ \circ \alpha_{\Delta^+}$ mit

$$f'(P) = \begin{cases} f_1(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N'_1}, \\ f_2(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N'_2}; \end{cases}$$

$$f^+(P) = \begin{cases} f_1(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N'_1}, \\ f_3(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N'_3}. \end{cases}$$

Nach Hilfssatz 9 ist aber $\alpha_{\Delta'} = \alpha_{\Delta^+}$ und also $f_2 = f_3 \circ \alpha_{\Delta}$, woraus $G = G'$ folgt.

2.3. Bildung der Faktorkategorie von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ nach einem Relationensystem

Eine Menge $\mathfrak{R} = \{F_1 \equiv G_1, \dots, F_k \equiv G_k\}$ mit $F_i, G_i \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $Q(F_i) = Q(G_i)$ und $Z(F_i) = Z(G_i)$ für $i = 1, \dots, k$ heißt ein *Relationensystem*.

Wir wollen in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mittels \mathfrak{R} eine Äquivalenzrelation definieren.

Zwei Elemente $H, H' \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ heißen *benachbart* bezüglich \mathfrak{R} , wenn es $H_1, H_2, H'_1, H'_2 \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ gibt, so daß folgendes gilt:

(1) $H = H_1 \circ H_2 \circ H_3$ und $H' = H_1 \circ H'_2 \circ H_3$.

(2) Es existiert ein i mit $1 \leq i \leq k$, so daß für geeignete l und j gilt:

$$H_2 = E_l \times F_i \times E_j, \quad H'_2 = E_l \times G_i \times E_j$$

oder

$$H_2 = E_l \times G_i \times E_j, \quad H'_2 = E_l \times F_i \times E_j.$$

H und H' heißen *äquivalent* bezüglich \mathfrak{R} , wenn es eine Kette $H = H_1, H_2, \dots, H_m = H'$ gibt, so daß H_i und H_{i+1} für $i = 1, \dots, m-1$ benachbart sind bezüglich \mathfrak{R} oder gleich sind. Wir schreiben dafür $H \equiv H' (\mathfrak{R})$. Es ist klar, daß diese Definition reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also eine echte Klassen-einteilung festlegt. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$.

Hilfssatz 10. Sei $H \equiv H' (\mathfrak{R})$, dann ist $Q(H) = Q(H')$ und $Z(H) = Z(H')$.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für benachbarte H, H' zu beweisen. Für Nachbarn ist die Behauptung aber klar, da sich nach Definition der Nachbarschaft von H und H' je ein erster und letzter Faktor abspalten läßt, die jeweils gleich sind.

Hilfssatz 11. Sei $F \equiv F'(\mathfrak{R})$, $Q(F) = Z(G)$ und $Z(F) = Q(H)$, dann ist $F \circ G \equiv F' \circ G(\mathfrak{R})$ und $H \circ F \equiv H \circ F'(\mathfrak{R})$.

Beweis. Nach Hilfssatz 10 ist mit $F \circ G$ auch $F' \circ G$ und mit $H \circ F$ auch $H \circ F'$ erklärt. Es genügt, wieder die Behauptung für benachbarte F, F' zu beweisen. In diesem Fall gibt es Zerlegungen

$$F = A \circ B \circ C, \quad F' = A \circ B' \circ C$$

mit $B = E_j \times F_i \times E_l$, $B' = E_j \times G_i \times E_l$ oder $B = E_j \times G_i \times E_l$, $B' = E_j \times F_i \times E_l$, deren Existenz hinreichend und notwendig für die Nachbarschaft der Produkte ist.

Nun ist aber

$$F \circ G = A \circ B \circ (C \circ G), \quad F' \circ G = A \circ B' \circ (C \circ G);$$

$$H \circ F = (H \circ A) \circ B \circ C, \quad H \circ F' = (H \circ A) \circ B' \circ C.$$

Also ist auch $F \circ G$ benachbart zu $F' \circ G$ und $H \circ F$ benachbart zu $H \circ F'$.

Hilfssatz 12. Aus $F \equiv F'(\mathfrak{R})$, $G \equiv G'(\mathfrak{R})$ und $Q(F) = Z(G)$ folgt $F \circ G \equiv F' \circ G'(\mathfrak{R})$.

Beweis. Aus Hilfssatz 11 folgt $F \circ G \equiv F \circ G'(\mathfrak{R})$ und $F \circ G' \equiv F' \circ G'(\mathfrak{R})$. Aus der Transitivität der Äquivalenz folgt $F \circ G \equiv F' \circ G'(\mathfrak{R})$.

Hilfssatz 13. Sei $F \equiv F'(\mathfrak{R})$ und $G \equiv G'(\mathfrak{R})$, dann ist $F \times G \equiv F' \times G'(\mathfrak{R})$.

Beweis. Es ist $F \times G = (F \times E_n) \circ (E_m \times G)$ und $F' \times G' = (F' \times E_n) \circ (E_m \times G')$, worin $n = Z(G)$ und $m = Q(F)$ ist. Aus der Definition der Nachbarschaft folgt unmittelbar $F \times E_n \equiv F' \times E_n(\mathfrak{R})$ und $E_m \times G \equiv E_m \times G'(\mathfrak{R})$. Aus Hilfssatz 12 folgt nun die Behauptung.

Satz 8. Sei \mathfrak{R} ein Relationensystem zu $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Definieren wir auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ die Funktionen Q und Z über Repräsentanten und ebenso die Komposition „ \circ “ und „ \times “ für die Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$, dann wird $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ eine X-Kategorie.

Als Beispiel einer topologisch interessanten Kategorie, die sich in dieser Form darstellen lässt, geben wir die Kategorie der Zöpfe an, die sich aus den Zopfgruppen (siehe [1]) ergibt, wenn man das direkte Produkt als Verknüpfung zu dem Gruppenprodukt hinzunimmt.

Sei $\mathfrak{A} = \{V, V'\}$, $Q(V) = Z(V) = Q(V') = Z(V')$ und

$$\mathfrak{R}_3 = \{V \circ V' \equiv E_2, V' \circ V \equiv E_2,$$

$$(E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V) \equiv (V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E)\},$$

dann ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}_3$ die Kategorie der Zöpfe; man erkennt: V und V' sind die zueinander inversen Verdrillungen von zwei Nachbarfäden und die zweite Relation in \mathfrak{R}_3 entspricht der Relation $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$ der n -fädigen Zopfgruppe. Die weiteren Relationen der Zopfgruppe $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$ für $i < k-1$ gelten schon in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Die Zöpfe lassen sich leicht zu einer Kategorie der räumlichen Netze verallgemeinern, die für sich schon von topologischem Interesse ist (siehe Bemerkung am Schluß).

2.4. Darstellung von Funktionen mittels Basisfunktionen

S sei eine mindestens zwei Elemente enthaltende höchstens abzählbare Menge. Wir betrachten die Menge der Abbildungen der Form $f: S^n \rightarrow S^m$ mit $n, m = 0, 1, 2, \dots$. Diese Menge bildet eine X-Kategorie \mathfrak{C} . S° enthält genau ein Element. Indem wir die Abbildungen $f: S^\circ \rightarrow S$ mit dem Bildelement des Ele-

mentes von S° identifizieren, brauchen wir im folgenden das Einsetzen von Elementen von S in Funktionen von \mathfrak{C} nicht besonders zu betrachten, da sich dies nun durch eine Multiplikation von rechts mit einer Abbildung von S° in S erreichen läßt.

Sei nun \mathfrak{B} eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge von \mathfrak{C} , die keine Einheit enthält. Wir wollen uns mit der Frage befassen, welche Elemente von \mathfrak{C} durch Elemente von \mathfrak{B} durch Anwendung der beiden in \mathfrak{C} definierten Verknüpfungen erhalten werden können. Im Zusammenhang mit dem in der Einleitung geschilderten Problem der Automatentheorie formuliert: Welche Funktionen lassen sich mittels eines gegebenen Bausteinsystems, dessen Funktionen gerade die Menge \mathfrak{B} bilden, darstellen? Wie erhält man alle möglichen Darstellungen der gleichen Funktion?

Dazu sei \mathfrak{A} ein Alphabet und $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf \mathfrak{B} . Ist $A \in \mathfrak{A}$ und $\varphi(A) = f$ eine Abbildung $S^n \rightarrow S^m$, dann definieren wir $Q(A) = n$, $Z(A) = m$. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ sei die durch \mathfrak{A} mit Q, Z erzeugte X -Kategorie mit direktem Produkt. Dann läßt sich φ zu einem Funktor von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ in \mathfrak{C} fortsetzen; d. h. zu einer Abbildung (die wir wieder mit φ bezeichnen), die folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $\varphi(F \circ G) = \varphi(F) \circ \varphi(G)$ für $Q(F) = Z(G)$ und $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$;
- (2) $\varphi(F \times G) = \varphi(F) \times \varphi(G)$ für $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$;
- (3) $\varphi(I) = I$, wo $I: S \rightarrow S$ die Identität ist.

Wir behaupten schärfer:

Satz 9. $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ läßt sich zu einem (wieder mit φ bezeichneten) Funktor $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{C}$ fortsetzen, und diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Um φ auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ fortzusetzen, verwenden wir gerade die Bedingungen (1), (2) und (3). Da \mathfrak{A} ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ist, ist es klar, daß jedem Element von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mindestens ein Element von \mathfrak{C} zugeordnet wird. Es könnte aber sein, daß diese Definition widersprüchlich ist, da die Darstellung der Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ in \mathfrak{A} nicht eindeutig ist. Zum Beweis der Eindeutigkeit von φ genügt es zu zeigen, daß die Relationen (R1⁺) und (R2⁺) von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ in Identitäten von \mathfrak{C} übergehen, was sich leicht ergibt.

φ ist eine Abbildung von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ auf die von \mathfrak{B} erzeugte Unterkategorie $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ von \mathfrak{C} . Aus dem Beweis zu Satz 9 geht hervor, daß sich jede Abbildung $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, wo \mathfrak{B} Erzeugendensystem irgendeiner X -Kategorie $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{C}$ ist, zu einem Funktor von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ auf die durch \mathfrak{B} erzeugte Kategorie fortsetzen läßt, wenn nur für jedes $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ gilt:

$$\begin{aligned} Q(F) &= Q(E_k) \Rightarrow Q(\varphi(F)) = Q(\varphi(E_k)), \\ Z(F) &= Z(E_l) \Rightarrow Z(\varphi(F)) = Z(\varphi(E_l)). \end{aligned}$$

Also gilt:

Korollar zu Satz 9. \mathfrak{A} ist ein freies Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und also $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine freie X -Kategorie.

Durch φ^{-1} wird in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine Klasseneinteilung definiert. Wir bezeichnen jedes Element $F \in \varphi^{-1}(f)$, wo $f \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ ist, als eine Darstellung von f bezüglich \mathfrak{B} . Im Zusammenhang mit der Aufgabe aus der Automatentheorie bedeutet $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ die Menge der möglichen Netzwerke aus dem Bausteinsystem \mathfrak{A} , wo φ die Funktion der Bausteine angibt. $\varphi^{-1}(f)$ gibt die Menge aller möglichen Realisierungen von f mit dem Bausteinsystem \mathfrak{A} an.

Ein Funktor φ heißt mit einem Relationensystem \mathfrak{R} von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ verträglich, wenn φ die Menge der Relationen in eine Menge von Identitäten im Bildbereich abbildet.

Wie üblich bezeichnen wir den Funktor $\varphi': \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$, der F seine Kongruenzklasse nach \mathfrak{R} zuordnet, als kanonischen Funktor.

Man erkennt: Ist $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ verträglich und ist $\varphi': \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ der kanonische Funktor, dann gibt es einen Funktor $\varphi^+: \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{C}$ mit $\varphi = \varphi^+ \circ \varphi'$.

Literatur

- [1] ARTIN, E., Theorie der Zöpfe. Abh. des Math. Seminars der Hamburgischen Universität Bd. IV (1926)
- [2] CURTIS, H. A., A New Approach to the Design of Switching Circuits. D. van Norstrand Com., Princeton 1962
- [3] HERMES, H., Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961
- [4] PUPPE, D., Kategorien und Funktoren. Ausarbeitung einer Vorlesung an der Universität Saarbrücken im Sommersemester 1963
- [5] REIDEMEISTER, K., Einführung in die kombinatorische Topologie. Vieweg-Verlag, Braunschweig 1951
- [6] KUROSCH, A. G. u. a., Zur Theorie der Kategorien. Mathematische Forschungsberichte XV. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963

Kurzfassung

Das Zusammensetzen von Schaltkreisen A , B zu neuen Schaltkreisen lässt sich auf zwei Grundverknüpfungen zurückführen:

1. Das Hintereinanderschalten $A \circ B$ von A und B , wenn die Anzahl der Ausgänge von B gleich der Anzahl der Eingänge von A ist.
2. Das Zusammenfassen von A und B zu einer begrifflichen Einheit $A \times B$; $A \times B$ hat jeden Eingang beziehungsweise Ausgang sowohl von A als auch von B als Eingang bzw. Ausgang.

Zwischen verschiedenen Zusammenschaltungen wird eine Äquivalenz erklärt, die mit „ \circ “ und „ \times “ verträglich ist. Überträgt man diese Verknüpfungen auf die Menge der Äquivalenzklassen, dann erhält man eine algebraische Struktur, die bezüglich „ \circ “ eine Kategorie und bezüglich „ \times “ eine Halbgruppe bildet. Beide Verknüpfungen genügen der Relation

$$(A \times B) \circ (C \times D) = (A \circ C) \times (B \circ D).$$

Eine Kategorie mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir als X -Kategorie. Die hier betrachteten X -Kategorien \mathfrak{F} lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

1. Die Menge der Einheiten von \mathfrak{F} bildet bezüglich „ \times “ eine freie Halbgruppe mit einer Erzeugenden e ,
2. \mathfrak{F} hat höchstens abzählbar unendlich viele Erzeugende oder es gilt
3. \mathfrak{F} ist Unterkategorie einer 1 und 2 genügenden Kategorie.

Es wird gezeigt, daß für eine freie X -Kategorie, die 1, 2 und 3 genügt, unter einer schwachen Voraussetzung die Kürzungsregeln bezüglich „ \circ “ und „ \times “ gelten.

Eine besondere Rolle spielt im Aufbau dieser Theorie die X -Kategorie der ebenen Netze, ein Begriff der kombinatorischen Topologie, der den ARTINSchen Zöpfen verwandt ist. Jede der betrachteten freien X -Kategorien läßt sich durch einen Funktor auf eine X -Kategorie von ebenen Netzen abbilden. Die Bedeutung hiervon liegt in dem folgenden Sachverhalt: Jeder Satz über \mathfrak{F} wird durch den Funktor

in einen Satz über Netze verwandelt. Hat man den Satz für die Netze bewiesen, ist es im allgemeinen leicht, indem man von den Netzen zu \mathfrak{F} übergeht, den Satz auch für \mathfrak{F} zu beweisen, d. h., die Sätze über \mathfrak{F} haben einen wesentlichen kombinatorischen Gehalt. Dies ist der Grund, daß beim Aufbau der Theorie die Netze an den Anfang gestellt wurden.

Die Verbindung der „Schaltkreise“ mit ihrer Funktion stellt ein Funktor von \mathfrak{F} in die X -Kategorie \mathfrak{C}_S der Abbildungen vom Typ $S^n \rightarrow S^m$ her, wo S eine höchstens abzählbar unendliche Menge ist, die aber mindestens zwei Elemente enthält. Das „ \times “-Produkt ist in \mathfrak{C}_S das cartesische Produkt.

Abstract

The composition of switching circuits A, B , to new circuits can be reduced to two basic operations:

1. The sequential composition $A \circ B$ of A and B , if the number of outputs of B is equal to the number of inputs of A .
2. The composition of A and B to $A \times B$ analogue to the cartesian product. The number of inputs of $A \times B$ is equal the sum of the numbers of the inputs of A and B . The same holds for the outputs.

Between different compositions a equivalence is introduced which is compatible with “ \circ ” and “ \times ”. When the compositions are carried over to the set of the equivalence classes, one gets a algebraical structure, that forms category respective to “ \circ ” and a semi-group (monoid) respective “ \times ”. The compositions satisfy the relation

$$(A \times B) \circ (C \times D) = (A \circ C) \times (B \circ D)$$

if $A \circ C$ and $B \circ D$ are defined. A category with this property is called a X -category.

The X -categories \mathfrak{F} studied here can be characterized in the following way:

1. The set of units of \mathfrak{F} form a semi-group generated by one generator relative to “ \times ”,
2. \mathfrak{F} has a countable generator set or it holds
3. \mathfrak{F} is a subcategory of a category satisfying 1 and 2.

In a free X -category of this type holds the cancellation law relativ to “ \circ ” and “ \times ” under a weak condition.

In the whole theory the X -category of „plane nets“ a concept of the combinatorial topology related to the braids of ARTIN plays an important role. Each of the studied free X -categories \mathfrak{F} may be mapped on to a X -category of plane nets by a functor. Each theorem about \mathfrak{F} by the functor is carried over to a theorem about a category of nets. The theorem proved for the nets can easy be proved in most cases for \mathfrak{F} ; i. e. the theorems about \mathfrak{F} have an essential combinatorial character. This is the reason that the first chapter only deals about nets.

The connection of the switching circuits represented by the elements of \mathfrak{F} with their function gives a functor from \mathfrak{F} into the X -category \mathfrak{C}_S of the maps of the type $f: S^n \rightarrow S^m$, where S is a countable set containing at least two elements. The “ \times “-product is in \mathfrak{C}_S the cartesian product.

Резюме

Составление новых схем из данных схем A, B сводится к двум основным операциям:

1. Последовательная операция $A \circ B$, если число выходов схемы B равно числу входов схемы A .

2. Соединение схем A и B к схеме $A \times B$; число входов схемы $A \times B$ равно сумме входов схем A и B . Тоже самое считается для выходов.

Между схемами определяется эквивалентность, совместимая с операциями „ \circ “ и „ \times “. Если перенести эти операции на множество классов эквивалентности, получается алгебраическая структура, образующая категорию относительно „ \circ “ и полугруппу относительно „ \times “. Обе операции удовлетворяют соотношению

$$(A \times B) \circ (C \times D) = (A \circ C) \times (B \circ D).$$

Категория с этим свойством называется X -категорией. Рассмотренные в данной работе X -категории можно характеризовать следующим образом:

1. Множество единиц X -категории \mathfrak{F} образует свободную полугруппу с порождающим элементом e ,
2. Множество всех порождающих элементов из \mathfrak{F} не более чем счетно.
3. \mathfrak{F} является подкатегорией категории, удовлетворяющей 1. и 2. В такой свободной X -категории имеют место правила сокращения относительно „ \circ “ и „ \times “, если выполняется некоторое слабое условие.

При построении этой теории особенную роль играет X -категория „плоских сетей“-понятие комбинаторной топологии, которая имеет сходство с „косами Артина“. Каждую изучающуюся здесь свободную X -категорию можно отобразить функтором на X -категорию плоских сетей. Каждая теорема относительно \mathfrak{F} переносится функтором в теорему о сетях. Если доказана теорема о сетях, то вообще не трудно доказать аналогичную теорему для \mathfrak{F} , т. е. теоремы о X -категории \mathfrak{F} имеют существенное комбинаторное содержание. Это явилось причиной того, что в начало построения излагаемой здесь теории поставленные сети.

Связь схем с их функциями является функтором X -категории \mathfrak{F} в X -категорию \mathfrak{S}_S , где \mathfrak{S}_S есть отображение типа $S^n \rightarrow S^m$ и S не более чем счетное множество, содержащее по крайней мере два элемента; „ X “-операция является в \mathfrak{S}_S прямым произведением множеств.

(Eingegangen am 9. 3. 1965)

Anschrift des Verfassers:

Dr. G. Hotz

Institut für Angewandte Mathematik
der Universität des Saarlandes

66 Saarbrücken 15