Theoretical Computer Science 11 (1980) 107–116
© North-Holland Publishing Company

EINE NEUE INVARIANTE FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

Günter HOTZ
Fachbereich Mathematik und Informatik, Universität des Saarlandes, 6600 Saarbrücken, F.R.G.

Communicated by M. Nivat
Received October 1978
Revised May 1979

Abstract. Let $G=(V,T,P,S)$ a c.f. grammar and $F(V\cup T)$ the free group generated by $V\cup T$, $\mathfrak{G}(G)=F(V\cup T)/P$ is the quotient of $F(V\cup T)$ factorized by the relationsystem generated by P. We prove that $\mathfrak{G}(G)$ only depends on $L(G)$ if G has no superflous variables. This means $\mathfrak{G}(G)$ is an invariant of grammar transformations which preserve the language. Each finitely representable group can be represented by a one sided liner grammar G as $\mathfrak{G}(G)$.

In a straightforward manner one can compute finite basises for the Alexander-ideals of the groups $\mathfrak{G}(G)$. This ideals are finitely generated in an quotient of a Polynomring by a finitely generated ideal. Therefore this leads to effective computable neccessary conditions for the equivalence of c.f. grammars.

1. Aufgabenstellung und grundlegende Definitionen

Bekanntlich ist das Wortproblem schon für kontext-sensitive Grammatiken nur sehr schwer und das Äquivalenzproblem bereits für lineare Grammatiken nicht mehr entscheidbar. Aus diesem Grund ist es von Interesse, Kriterien zu entwickeln, die es wenigstens gestatten diese Probleme in einigen Fällen zu entscheiden. Zu diesem Zweck übertragen wir eine aus der kombinatorischen Topologie bezw. Gruppentheorie bekannte Darstellungsinvariante von Gruppen auf unsere Probleme. Wir beziehen uns in dieser Arbeit nur auf das Äquivalenzproblem. Wie man diese Ideen auch für das Wortproblem nutzbar machen kann, liegt auf der Hand.

Wir betrachten Grammatiken $G=(V,T,P,S)$ mit $V\cap T=\emptyset$, $S\in V$ und $P\subset V^*\times(V\cup T)^*$. $L(G)$ bezeichnet die durch G erzeugte Sprache. Ist $\{G\}$ eine Klasse solcher Grammatiken und $I:\{G\}\to M$ eine Abbildung in irgend eine Menge M, dann heißt I eine *Invariante* auf $\{G\}$, falls aus $L(G)=L(G')$ für G und G' aus $\{G\}$ folgt $I(G)=I(G')$. Ist also I eine Invariante auf der Klasse CFG der kontextfreien Grammatiken, dann folgt aus $I(G_1)\neq I(G_2)$, daß auch $L(G_1)\neq L(G_2)$ ist.

Es sind für CFG bereits einige Abbildungen I untersucht worden, die man als Invarianten deuten kann. Wir gehen auf die wichtigsten kurz ein.

(1) *Der Satz von Parikh.* Sei

$$\mathrm{com}:T\to\{\alpha\,|\,\alpha:T\to\mathbb{N}\}$$

der Monoidhomorphismus, der angibt, wie oft ein Zeichen in einem Wort enthalten ist. Es gilt also

$$\mathrm{com}(t)=\alpha \quad \text{genau dann, wenn } \alpha(s)=\begin{cases}1 & \text{für } s=t,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

und

$$\mathrm{com}(wv)=\mathrm{com}(w)+\mathrm{com}(v).$$

Wir setzen

$$\mathrm{com}(L)=\{\mathrm{com}(w)\mid w\in L\}.$$

Der Satz von Parikh besagt, daß $\mathrm{com}(L)$ für kontextfreie Sprachen L eine semilineare Menge ist. In dem Beweis zu diesem Satz erhält man ein Verfahren, die Abbildung $I_P(G):=\mathrm{com}(L(G))$ effektiv zu berechnen. Die genaue Komplexität der Entscheidung $I_P(G)=I_P(G')$? für G und G' aus CFG ist noch nicht bekannt, sie ist aber sicher nicht sehr hoch.

(2) *Das syntaktische Monoid.* Man erhält zu jeder Menge $L\subset T^*$ eine Kongruenz, indem man definiert

$$u=_L u' \quad \text{falls } (wuv\in L \text{ ist äquivalent zu } wu'v\in L).$$

Das durch diese Kongruenz definierte Monoid $T/{=_L}$ heißt das zu L gehörige syntaktische Monoid und wird durch $\mathrm{Syn}(T,L)$ bezeichnet. Setzt man nun

$$I_S(G):=\mathrm{Syn}(T,L(G)),$$

dann ist I_S trivialerweise eine Invariante auf CFG. Es ist jedoch über die Komplexität dieser Invariante noch nichts bekannt und auch noch nicht darüber, wie man aus ihr einfach berechenbare Invarianten gewinnen kann.

Man kann leicht ähnliche Invarianten angeben. Beispiele sind die beiden folgenden Gruppen. Man faktorisiere die durch T erzeugte freie Gruppe $F(T)$ nach dem Relationensytem R_1 oder R_2 oder R_3[7]:

$$R_1:=\{(u,1)\mid u=_L 1\},\qquad R_2:=\{(u,v)\mid u=_L v\},$$
$$R_3:=\{(u,v)\mid u\in L,\, v\in L\}.$$

Die für unser Ziel entscheidende Frage besteht nicht in der Feststellung einer Invariante, sondern in deren effektiven Auswertbarkeit. Diese ist zum Beispiel dann gegeben, wenn man für eine Gruppe auch eine endliche Darstellung angeben kann.

(3) *Abstrakte Familien von Sprachen—AFL-Theorie.* Man kann auch die durch eine Sprache L erzeugte $\mathrm{AFL}(L)$ als eine Invariante auffassen. Mitunter kann man bestimmen, ob diese Sprachklasse gleich CFG ist oder nicht. Hieraus ergibt sich dann auch die Verschiedenheit der Sprachen, wenn solche Eigenschaften der $\mathrm{AFL}(L)$ verschieden sind. Allerdings scheint die Komplexität der hierauf gegründeten Entscheidungen außerordentlich hoch zu sein.

(4) *Die Gruppe* $\mathfrak{G}(G)$. Wir definieren nun unsere oben angekündigte neue Invariante. Sei also $F(V \cup T)$ die durch $V \cup T$ erzeugte freie Gruppe. Wir bilden

$$\bar{P} := P \cup \{(w, x) \mid (x, w) \in P\}.$$

$\bar{P}$ ist ein Thue-oder Relationensystem. Wir bilden die Faktorgruppe

$$\mathfrak{G}(G) \quad F(T \cup V)/\bar{P}.$$

Wir beweisen im nächsten Abschnitt

Satz 1. *Sind G und G' aus CFG und enthalten beide Grammatiken keine überflüssigen Variablen, dann folgt aus* $L(G) = L(G')$, *daß auch* $\mathfrak{G}(G) = \mathfrak{G}(G')$ *gilt.*

Satz 2. *Zu jeder endlich darstellbaren Gruppe* $\mathfrak{G}'$ *läßt sich eine Grammatik aus CFG angeben, so daß* $\mathfrak{G}(G) = \mathfrak{G}'$ *ist.*

Der Satz 1 besagt, daß $\mathfrak{G}$ eine Invariante auf CFG ist. Der Satz 2 zeigt, daß diese Invariante im allgemeinen sehr schwer berechenbar ist. Allerdings sind aus der Gruppentheorie Methoden bekannt, die von endlichen Gruppendarstellungen ausgehend zu brauchbaren Invarianten führen. Wir weden hier auf eine solche Invariante, nämlich die Alexanderideale, näher eingehen.

2. Beweis der beiden Sätze

Wir erinnern zunächst an den Satz von Tietze. Hierzu definieren wir zwei Transformationen, die Darstellungen von Gruppen durch Erzeugende und Relationen in Darstellungen der gleichen Gruppe überführen.

Seien X und Y Mengen und r bezw. s seien Relationensysteme für $F(X)$ bezw. $F(Y)$.

Sei $y \notin F(X)$ und $u \in F(X)$.

($T1a$) Die Transformation

$$(X, r) \to (X \cup \{y\}, r \cup \{y = u\})$$

heißt Tietze-Transformation T1a.

(T1b) Die zu T1a inverse Transformation heißt T1b.

(T2a) Die Transformation

$$(X, r) \to (X, r \cup \{u = 1\})$$

mit $u = 1$ in $F(X)/r$ heißt Tietze-Transformation T2a.

(T2b) Die zu T2a inverse Transformation heißt Tietze-Transformation T2b.

Es gilt der Satz von Tietze: *Sind* (X, r) *und* (Y, s) *zwei Gruppendarstellungen, dann ist* $F(X)/r = F(Y)/s$ *genau dann, wenn es eine Kette von Tietze-Transformationen gibt, die* (X, r) *in* (Y, s) *überführen.*

Seien nun $G_i = (V_i, T, P_i, S)$ $(i = 1, 2)$ zwei kontextfreie Grammatiken, die keine überflüssigen Variablen enthalten. O.B.d.A. dürfen wir annehmen $V_1 \cap V_2 = \{S\}$. Weiter sei auch $L(G_1) = L(G_2)$. Offensichtlich gilt auch $L(G_1) = L(G_2 \cup G_1) = L(G_2)$ mit $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, T, P_1 \cup P_2, S)$. Zum Beweis unseres Satzes 1 genügt es also zu zeigen, daß

$$F(V_1 \cup V_2 \cup T)/(\overline{P_1 \cup P_2}) = F(V_1 \cup T)/\bar{P}_1$$

gilt. Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Zunächst bilden wir eine Grammatik $\tilde{G} = (\tilde{V}, T, \tilde{P}, S)$ mit

(i) $\tilde{V} = V_1 \cup V_2$ und $P_1 \subset \tilde{P} \subset P_1 \cup P_2$,

(ii) von jedem $y \in \tilde{V}$ ist ein Terminalwort ableitbar,

(iii) jedes $y \in \tilde{V}$ kann von S aus erreicht werden,

(iv) $F(\tilde{V} \cup T)/\tilde{\bar{P}} = F(V_1 \cup T)/\bar{P}_1$.

Im zweiten Schritt nehmen wir die restlichen Produktionen von P_2 in unsere Grammatik auf. Der erste Schritt besteht im wesentlichen in der Anwendung von Transformationen (T1a). Der zweite Schritt verwendet ausschließlich (T2a).

Schritt 1: Nach Voraussetzung enthält G_2 keine überflüssigen Variablen. Also gibt es zu jedem $y \in V_2$ eine Ableitung über P_2

$$y \underset{P_2}{\to} w_1 \underset{P_2}{\to} w_2 \underset{P_2}{\to} \cdots \underset{P_2}{\to} w_k, \quad w_k \in T^*$$

mit: y kommt in w_j, $j = 1, \ldots, k$ nicht vor.

Wir betrachten zunächst nur den Fall $y \neq S$. Induktiv nehmen wir an, daß die Variablen von $w_1, \ldots, w_k$ bereits in $G^i = (V^i, T, P^i, S)$ liegen und daß wir (V^i, P^i) aus (V^1, P^1) mittels (T1a) durch Hinzunahme von Variablen aus V_2 und Produktionen aus P_2 gewonnen haben. Hierin ist $G^1 = G_1$ gesetzt worden. Entsprechend verhält es sich mit V^1 und P^1. Weiter nehmen wir an, daß sich aus jeder Variablen $x \in V^i$ mittels den Produktionen aus P^i ein Wort aus T^* ableiten läßt.

Sei also nun das y aus obiger Ableitung noch nicht in V^i. Dann gibt es eine Produktion (y, u) in P_2, die im ersten Ableitungsschritt angewendet wurde. u liegt dann aber in $(V^i \cup T)^*$. Also stellt die Aufnahme von y in V^i, was unser V^{i+1} ergibt und die Aufnahme von (y, u) in P^1, was unser P^{i+1} liefert, eine Tietze-Transformation (T1a) dar. Weiter erfüllen V^{i+1} und P^{i+1} die oben gemachten Induktionsannahmen. Damit sehen wir, daß sich durch Anwendung von (T1a) das Alphabet V_2 mit $V_1 \cup T$ vereinigen läßt. Das hierdurch erhaltene Produktionssystem sei P^n.

Die durch diesen induktiven Prozeß konstruierte Grammatik sei G^n mit

$$n = |V_1| - 1, \qquad V^n = V_1 \cup V_2 = \tilde{V}, \qquad P_1 \subset P^n \subset P_1 \cup P_2.$$

G^n erfüllt also (i), (ii) und (iv).

Betrachten wir den Fall $y = S$. In diesem Falle haben wir wegen $S \in V_1$ bereits $S \in \tilde{V}$, so daß wir hier anders schließen müssen. Es gilt

$$w_1 \underset{P^n}{\to} w_k \quad \text{und} \quad S \underset{P^n}{\to} w_k$$

wegen $w_k \in L(G_1)$. Also haben wir in $F(\tilde{V} \cup T)/\bar{P}^n$ die Identitäten

$$S = w_k \quad \text{und} \quad w_1 = w_k.$$

Hieraus folgt $S = w_1$. Nehmen wir also (S, w_1) zu $P^{(n)}$ hinzu, dann ist dies eine Transformation (T2a). Also ändert sich unsere Gruppe bei diesem Schritt nicht.

Wir dürfen also annehmen, daß wir nun eine Grammatik $\tilde{G} = (\tilde{V}, T, \tilde{P}, S)$ mit den Eigenschaften (i), . . . , (iv) konstruiert haben.

Schritt 2: Sei (y, u) eine beliebige Produktion aus P_2, die noch nicht in $\tilde{P}$ liegt. Wegen (i), (ii) und (iii) gibt es $v_1, v_2 \in T^*$ und $w \in T^*$ mit

$$S \underset{\tilde{P}}{\overset{*}{\rightarrow}} v_1 y v_2 \quad \text{und} \quad v_1 u v_2 \underset{\tilde{P}}{\overset{*}{\rightarrow}} w.$$

Dann ist aber $w \in L(G_1)$ und also gilt auch

$$S \underset{\tilde{P}}{\overset{*}{\rightarrow}} w.$$

Nun haben wir in $F(\tilde{V} \cup T)/\overleftrightarrow{\tilde{P}}$ die Identitäten

$$S = v_1 y v_2, \qquad S = w, \qquad w = v_1 u v_2. \tag{1}$$

Hieraus folgt $y = w$. Also ist $(\tilde{V} \cup T, \tilde{P}) \rightarrow (\tilde{V} \cup T, \tilde{P} \cup \{(y, u)\})$ eine Transformation (T2a).

Durch wiederholte Anwendung dieses Schrittes können wir successive alle Produktionen von P_2 zu P hinzunehmen, ohne dabei die Gruppe zu ändern. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Korollar 1. *Sei $\mathfrak{M}(G) = (V \cup T)^*/\bar{P}$ das Faktormonoid von $(V \cup T)^*$ nach dem Thue-System $\bar{P}$. Erfüllt $\mathfrak{M}(G)$ die Kürzungsregeln, dann ist $\mathfrak{M}(G)$ nur von $L(G)$ abhängig, d.h. auch eine Invariante in unserem Sinne.*

Beweis. Die Transformation (T1a) läßt $\mathfrak{M}(G)$ offensichtlich invariant. Ebenso die Transformation (T2a) in der speziellen Form, in der wir sie gebrauchen. Nämlich Hinzunahme einer Folgerelation $y = w$. Wir haben von der Gruppeneigenschaft nur in (1) einen Gebrauch gemacht. Hierzu verwenden wir nämlich die Gültigkeit der Kürzungsregeln. Da wir diese für $\mathfrak{M}(G)$ voraussetzen, folgt das Korollar unmittelbar.

Beweis zu Satz 2. Sei (X, r) eine Gruppendarstellung mit endlicher Menge X und endlichem Relationensystem r. Wir können annehmen, daß alle Relationen aus r die Form haben

$$r_i = 1 \quad \text{mit } r_i = x_{i1}^{\varepsilon_{i1}} x_{i2}^{\varepsilon_{i2}} \cdots x_{in_i}^{\varepsilon_{in_i}} \quad \text{mit } \varepsilon_{ij} = \pm 1.$$

Wir bilden die Alphabete

$$V=\{S\},\qquad T=X\cup\{x^{-1}\,|\,x\in X\}$$

und das Produktionssystem

$$P=\{(S,Sr_i)\,|\,r_i=1 \text{ liegt in } r\}\cup\{(S,1)\}.$$

Nun setzen wir $G=(V,T,P,S)$ und sehen unmittelbar, daß $\mathfrak{G}(G)$ die durch (X,r) definierte Gruppe ist. Dies ist aber gerade die Behauptung des Satzes 2.

Wir haben mehr gezeigt, als der Satz 2 besagt, da unsere Grammatik G linkslinear ist. Es gilt also schärfer der

Satz 2a. *Zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einer endlichen Darstellung gibt es eine reguläre Sprache L mit $\mathfrak{G}(L)$ isomorph zu $\mathfrak{G}$.*

Einige offene Probleme. Wir wenden uns kurz der Frage zu, welche Sprachen die gleiche Gruppe definieren. Hierzu betrachten wir für $L, L'\subset T^*$ das Produkt

$$L*L'=\{w_1u_1w_2\cdots u_kw_{k+1}\,|\,w_1\cdots w_{k+1}\in L,\ u_i\in L' \text{ für } i=1,\ldots,k \text{ und } k\in\mathbb{N}\}.$$

Sind G und G' k.f. Grammatiken in Chomsky-Normal-Form, dann bilden wir die disjunkte Vereinigung $\bar{V}=V\cup V'$ mit $V\subset\bar{V}$ und due Grammatik $\bar{G}=(\bar{V},T,\bar{P},S)$ mit

$$\bar{P}=P\cup P'\cup\{(x,S't),(x,tS')\,|\,(x,t)\in P \text{ und } t\in T\cup\{1\}\}.$$

Offensichtlich ist für $L=L(G)$ und $L'=L(G')$

$$L*L'=L(\bar{G}).$$

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen hat man den

Satz 3. *Ist L c.f. und ist für $w\in L$ in $\mathfrak{G}(L)$ die Identität $w=1$ erfüllt, dann gilt*

$$\mathfrak{G}(L)=\mathfrak{G}(L^*)=\mathfrak{G}(L*L).$$

Beweis. Wegen $w=1$ für $w\in L$ in $\mathfrak{G}(L)$ haben wir $S=1$ in $\mathfrak{G}(L)$. Also liefert das Relationensystem $\bar{P}_1$ nur Folgerelation von $\bar{P}$. Da P aber in P_1 enthalten ist, sind die Gruppen von L und $L*L$ also gleich. Die Behauptung $\mathfrak{G}(L)=\mathfrak{G}(L^*)$ beweist man analog.

Durch diesen Satz wird die allgemeinere Frage aufgeworfen, welche kontextfreien Sprachen die gleiche Gruppe haben. Anders gewendet: Wie verändern sich die Gruppen der cf. Sprachen L unter gewissen Standartoperationen der Theorie der c.f. Sprachen.

Der Beweis unseres Satzes 1 läßt sich zumindest nicht unmittelbar auf kontext-sensitive Sprachen übertragen. Man sieht, daß der zu einer kontext-freien Grammatik hinzugefügte Kontext die Gruppe nicht beeinflußt. Ließe sich also unser Satz verallgemeinern, dann würde dieser besagen, daß alle kontext-freien Grammatiken, die mit geeignetem Kontext versehen die gleiche Sprache definieren, auch die gleiche Gruppe besitzen, falls sie nur keine überflüssigen Produktionen enthalten. Dieser Satz erscheint allerdings als etwas zu kühn. Einen Zusammenhang zwischen diesen Gruppen könnte es allerdings geben.

3. Die Alexandermatrix kontextfreier Sprachen

Wir bilden nun den Gruppenring der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganz rationalen Zahlen. Wir bezeichnen den Gruppenring mit $\mathbb{Z}(\mathfrak{G})$. Die Elemente von $\mathbb{Z}(\mathfrak{G})$ sind die Abbildungen $h:\mathfrak{G}\to\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft: h nimmt nur für endlich viele Element aus $\mathfrak{G}$ einen Wert ungleich 0 an. Die Addition und die Multiplikation sind durch

$$(h_1+h_2)(g):=h_1(g)+h_2(g)$$

und

$$(h_1\cdot h_2)(g):=\sum_{g_1g_2=g} h_1(g_1)h_2(g_2)\quad \text{für } g\in\mathfrak{G}$$

definiert. $\mathbb{Z}$ und $\mathfrak{G}$ lassen sich in natürlicher Weise in $\mathbb{Z}(\mathfrak{G})$ einbetten, so daß wir die 0 in $\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{Z}(\mathfrak{G})$ und die 1 in $\mathbb{Z}$ und in $\mathfrak{G}$ und in $\mathbb{Z}(\mathfrak{G})$ nicht unterscheiden.

Wir schreiben nun $\mathbb{Z}(X)$ für $\mathbb{Z}(F(X))$. Die Relationen aus r schreiben wir als Elemente von $\mathbb{Z}(X)$, indem wir der Relation $w=v$ das Element $w-v$ aus $\mathbb{Z}(X)$ zuordnen. Sind $p_1,\ldots,p_k$ Elemente aus $\mathbb{Z}(X)$, dann ist $(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ das zweiseitige Ideal, das durch $p_1,p_2,\ldots,p_k$ in $\mathbb{Z}(X)$ erzeugt wird. Das Ideal, das die zu dem Produktions-system P gehörigen Elemente von $\mathbb{Z}(X)$ erzeugen, bezeichnen wir mit (P). Nun gilt $\mathbb{Z}(\mathfrak{G}(G))=\mathbb{Z}(X)/(P)$. Da nach Satz 1 $\mathfrak{G}(G)$ nur von $L(G)$ abhängt, nennen wir $\mathbb{Z}(X)/(P)$ auch den zu $L=L(G)$ gehörigen Gruppenring über $\mathbb{Z}$. Nun machen wir schließlich noch $\mathbb{Z}(X)/(P)$ kommutativ und erhalten so einen Restklassenring $\mathbb{Z}[X]/(P)$ des kommutativen Polynomringes in den Unbestimmten der Menge X nach dem Ideal (P) der nun kommutativen Polynome, die den Relationen aus r zugeordnet sind. Wir definieren $R(G):=\mathbb{Z}[X]/(P)$. Aufgrund von Satz 1 haben wir dann das

Korollar 2 *$R(G)$ ist eine Invariante auf CFG.*

Fox hat nun mittels seines 'free differential calculus' weitere Invarianten von Gruppendarstellungen gewonnen. Diese sind gewisse Ideale in $R(G)$, die er in Verallgemeinerung der Alexanderpolynome gewinnt und deshalb als Alexanderideale bezeichnet. Zur Bequemlichkeit des Lesers, und auch weil dieser Kalkül für die Theorie der formalen Sprachen eine eigenständige Bedeutung besitzt, führen wir diesen Kalkül in knapper Formein.

Die auf $\mathbb{Z}(\mathfrak{G})$ definierte lineare Abbildung $D:\mathbb{Z}(\mathfrak{G})-\mathbb{Z}(\mathfrak{G})$ heißt 'freie Differentiation' falls die folgende Beziehung erfüllt ist:

$$D(h_1\cdot h_2)=D(h_1)\cdot D_1(h_2)+h_1\cdot D(h_2)\quad \text{für } h_1, h_2\in\mathbb{Z}(\mathfrak{G}).$$

Hierin ist $D_1(h)=\sum_{g\in\mathfrak{G}} h(g)$ eine triviale Differentiation.

Für $u, v\in\mathfrak{G}$ hat man also die einfachere Beziehung

$$D(u\cdot v)=D(u)+u\cdot D(v).$$

Man erhält spezielle Differentiationen, indem man für $y\in X$

$$D_y(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x=y\\ 0 & \text{für } x\neq y\end{cases}\quad x\in X$$

setzt. Für D_y schreibt Fox $\partial/\partial y$.

Nun bildet man die Matrix

$$A_g=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\quad \text{für } p\in P \text{ und } x\in X.$$

Für das Bild von A_G unter den kanonischen Abbildungen

$$\mathbb{Z}(X)\to\mathbb{Z}(X)/(P)\to R(G)$$

schreiben wir nun $A(G)$. $A(G)$ ist die von Fox für Gruppendar-stellungen eingeführte Alexandermatrix.

Wir definieren nun die oben erwähnten Ideale in $R(G)$. Diese werden durch die Minoren von A_G mit fester Reihenanzahl erzeugt. Zur genauen Definition benötigen wir die Anzahl n der Elemente von X und die Anzahl m der Elemente von P. Die Ideale werden mit $E_k(A_G)$ bezeichnet. Es ist

$$E_k(A_G)=\begin{cases}0 & \text{für } n-k>m,\\ (q_1,\ldots,q_l) & \text{für } 0<n-k\leqslant m,\\ & \text{worin die } q_i\ (n-k)\text{-reihigen}\\ & \text{Minoren von } A_G \text{ sind,}\\ R(G) & \text{für } 0\geqslant n-k.\end{cases}$$

Offensichtlich gilt $0\subset E_0\subset E_1\subset E_2\cdots\subset R(G)$.

Der Satz von Fox besagt die Invarianz dieser Ideale bei Tietze-Transformationen endlicher Gruppendarstellungen. Also erhalten wir damit eine weitere Invariante für CFG.

Korollar 3. *Die Alexanderideale $E_k(G)$ in $R(G)$ sind Invarianten auf CFG.*

4. Einige Beispiele

(1) Seien G_1 und G_2 wie folgt definiert:

$$V = \{S\}, \qquad T = \{a, b, c, d\},$$

$$P_1 = \{(S, SS), (S, aSb), (S, cSd), (S, abcd)\},$$

$$P_2 = \{(S, SS), (S, aSb), (S, cSd), (S, acbd)\}.$$

Die semi-linearen Mengen, die zu G_1 und G_2 gehören sind gleich. Es ist $\mathfrak{G}(G_1) = F(a, b)$ und $\mathfrak{G}(G_2) =$ freie abelsche Gruppe über $\{a, b\}$. Also ist $\mathfrak{G}(G_1) \neq \mathfrak{G}(G_2)$ und also nach Satz 1 $L(G_1) \neq L(G_2)$.

(2) Sei $V = \{S\}$, $T = \{a, b, c, d\}$,

$$P_1 = \{(S, aSc), (S, cSa), (S, bSd), (S, dSb), (S, SS), (S, 1),$$
$$(S, Sabcb), (S, Sbcba), (S, Scbab), (S, Sbabc),$$
$$(S, Sdadc), (S, Sadcd), (S, Sdcda), (S, Scdad)\},$$

$$P_2 = \{(S, aSc), (S, cSa), (S, bSd), (S, dSb), (S, SS), (S, 1),$$
$$(S, Sabcd), (S, Sbcda), (S, Scdab), (S, Sdabc),$$
$$(S, Sbadc), (S, Sadcb), (S, Sdcba), (S, Scbad), (S, Sbb)\}.$$

Man sieht leicht, daß $\mathfrak{G}(G_1)$ isomorph ist zu der durch $(a, b;\, aba^{-1}b = 1)$ dargestellten Gruppe, und daß $\mathfrak{G}(G_2)$ auch durch $(a, b;\, bb = 1, ab = ba)$ dargestellt werden kann.

Man sieht, daß $R(G_1) = R(G_2)$ ist. Um zu zeigen, daß beide Gruppen nicht isomorph sind, betrachten wir die Alexandermatrizen der Grammatiken Dabei können wir von den einfacheren Darstellungen der Gruppen ausgehen. Wir setzen $p_1 = aba^{-1}b - 1$, $q_1 = ab - ba$, $q_2 = b^2 - 1$.

In der ersten Spalte unserer Matrizen stehen die Ableitungen nach a, in der zweiten nach b. q_i steht in der $i$ten Zeile. Wir erhalten

$$A(G_1) = (1 - aba^{-1} \quad a + aba^{-1}) = (1 - b \quad a + b),$$

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} 1 - b & a - 1 \\ 0 & 1 + b \end{pmatrix}$$

Wir finden

$$E_k(A_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 1, \\ (1 - b, a + b) & \text{für } k = 1, \\ R & \text{für } k > 1, \end{cases}$$

$$E_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0, \\ 0 & \text{für } k = 0 \text{ (wegen } bb - 1 = 0), \\ (1 - b, 1 - a, 1 + b) & \text{für } k = 1, \\ R & \text{für } k > 1. \end{cases}$$

Wegen $a+b=1+b-(1-b)$ ist $E_1(A_1) \subset E_1(A_2)$. Es ist aber $E_1(A_1) \neq E_1(A_2)$, da $E_1(A_1)$ bei $b=1$, $a=-1$ eine Nullstelle besitzt, nicht aber $E_1(A_2)$. Also ist $L(G_1) \neq L(G_2)$.

5. Schlußbemerkungen

(1) Die Alexanderideale einer k.f. Sprache können effektiv berechnet werden. Dies ergibt sich daraus, daß sie endlich erzeugte Ideale eines Ringes sind, der Selbst aus einem Polynomring durch die Faktorisierung nach einem endlich erzeugten Ideal hervorgeht.

(2) Ich glaube, daß diese Resultate zeigen, daß es für die Theorie der formalen Sprachen von Interesse ist, diese in einem allgemeineren Zusammenhang, nämlich in Gruppenringe eingebettete zu behandeln. Dies wird auch gestützt durch den Zusammenhang von Monoid-semi-Ringen und der schwersten kontext-freien Sprache auf den in den Arbeiten [4] und [5] ningeweisen wurde. Die hier verwendeten Resultate von Fox findet man in [2]. Die Tietze-Transformationen werden auch in [6] behandelt. Dort findet man auch eine recht vollständige Einführung in Probleme, die mit Darstellungsfragen von Gruppen zusammenhängen. Den Satz von Parikh findet man in [3] ausfürlich hergeleitet. Das übrige Material aus dem Gebiet der Formalen Sprachen findet man in [1].

Literature

[1] J. Berstel, Transductions and context-free languages, in: *Studienbücher Informatik* (Teubner, Stuttgart, 1978).

[2] H.R. Crowell and R.H. Fox, *Introduction to Knot Theory* (Ginn and Company, Boston, 1963).

[3] S. Ginsburg, *The Mathematical Theory of Context-Free Languages* (McGraw-Hill, New York, 1966).

[4] G. Hotz, Der Satz von Chomsky–Schützenberger und die schwerste kontextfreie Sprache von Greibach, *Soc. Math. France Astérisque* **3839** (1976) 105–115.

[5] G. Hotz, Untere Schranken für das Analyseproblem kontextfreier Sprachen, Bericht des Fachbereiches für Angew. Math. und Informatik der Universität des Saarlandes (1975).

[6] K. Reidemeister, *Einführung in die kombinatorische Topologie* (Vieweg, Braunschweig, 1951).

[7] E. Valkema, Einige Zusammenhänge zwischen Halbgruppen und Formalen Sprachen, Diplomarbeit, Mathematisches Institut der Universität Kiel (1970).