Ein Planaritätstest für planar-konvexe Grapheneinbettungen mit linearer Komplexität

von

U. Groh, G. Hotz

02/1984

Fachbereich 10
Universität des Saarlandes
D-6600 Saarbrücken

Zusammenfassung

Bei der Berechnung eines bzgl. einer gegebenen Kostenfunktion optimalen planaren Layouts eines planaren Graphen erhält man u.U. nicht planare Näherungslösungen; daher benötigt man als zusätzliches Abbruchkriterium einer Iteration einen "schnellen" Planaritätstest. Wir geben hier ein Planaritätskriterium an, das bei geeignet abgespeicherten Graphen linear ist. Die zugrundeliegende Idee ist, daß ein nicht-planares Layout entweder nicht konvex ist, oder aber die Reihenfolge der aus einem Knoten ausgehenden Kanten gegenüber einem planaren Layout des Graphen geändert ist.

Einleitung und Definitionen

Die Arbeit ist motiviert durch folgendes Chip-Layout-Problem: Man möchte ein bzgl. einer gegebenen Kostenfunktion, z.B. der l_p-Norm, optimales Layout eines Graphen konstruieren. In [G] sind Iterationsverfahren zur Approximation von optimalen Layouts zur l_p-Norm beschrieben. Das optimale Layout eines dreifach zusammenhängenden planaren Graphen (Schaltkreises) ist planar-konvex (s. [B/H]). Dies muß aber für die Approximation nicht zutreffen, so daß man durch evtl. wiederholtes Testen auf Planarität sicherstellen muß, ob das Layout, mit dem man die Iteration abbricht, planar-konvex ist. Wir geben hier ein Planaritätskriterium für Einbettungen, das in linearer Zeit in Abhängigkeit von der Knotenzahl des Graphen entschieden werden kann. Einen ausführlicheren Beweis des Planaritätskriteriums findet man in [G]. Im allgemeinen benötigt man Zeit O(nlogn) (n = Anzahl der Kanten), um die Planarität der Einbettung eines Graphen zu testen (s. z.B. [B/O]).

Sei $G = (V,E)$ ein ungerichteter dreifach zusammenhängender Graph (d.h. zwischen je zwei Knoten gibt es mindestens drei kreuzungsfreie Wege). Eine <u>Einbettung</u> $\chi(G)$ von G in die euklidische Ebene ist gegeben durch eine Abbildung $\chi: V \longrightarrow \mathbb{R}^2$; die Kanten $e = (v,w) \in E$ werden auf die Verbindungsstrecke $\overline{\chi(v)\chi(w)} =: \chi(e)$ abgebildet.

$G_{\rho(c)} := (G,c,\rho)$ heißt Graph mit <u>festem konvexem Rand</u> $\rho(c)$ genau dann, wenn

- $G = (V,E)$ ist ein ungerichteter dreifach zusammenhängender Graph mit $V = V_{in} \dot{\cup} V_c$
- $c = (V_c, E_c)$ ist ein nichttrivialer einfacher Kreis in G
- $\rho : V_c \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung von c, die c auf einen konvexen einfachen Polygonzug abbildet.

Dann ist

$$K_\rho := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sum_{v \in V_c} \lambda_v \rho(v) \text{ mit } \lambda_v \in [0,1],\ \sum_{v \in V_c} \lambda_v = 1\},$$

$K_\rho \subset \mathbb{R}^2$, ein konvexes Gebiet.

Eine Einbettung χ von G mit festem konvexem Rand $\rho(c)$ heißt

- $\rho(c)$-beschränkt genau dann, wenn $\chi(V) \subset K_\rho$
- $\rho(c)$-planar genau dann, wenn sie $\rho(c)$-beschränkt und planar ist.

Für eine planare Einbettung χ eines Graphen G gilt:
$\mathbb{R}^2 - \chi(E)$ ist eine Menge von offenen zusammenhängenden Gebieten, von denen genau eines unbeschränkt ist; wir nennen die beschränkten Gebiete zusammen mit ihrem Rand Elementarflächen von $\chi(G)$.

$\text{int}(F) := F - \chi(E)$ bezeichnet dann das Innere einer Elementarfläche F,

$\partial F := F \cap \chi(E)$ den Rand von F.

Eine $\rho(c)$-planare Einbettung χ von G heißt $\rho(c)$-planar-konvex, falls alle ihre Elementarflächen konvexe Gebiete sind.

Um das Planaritätskriterium einfacher formulieren zu können, benötigen wir noch eine weitere Definition:

Sei χ eine Einbettung von $G=(V,E)$; für $v \in V$ bezeichne

$E_v := \{e \in E \mid e = (v,w)\}$;

falls

- die Länge der Kante e in χ, $|\chi(e)| > 0$ für alle $e \in E_v$

und

- es für kein $v \in V_{in}$ zwei abgeschlossene Halbebenen H_1, H_2 des $\mathbb{R}^2$ gibt, mit:

  (i) $H_1 \cap H_2 =: g$ ist eine Gerade mit $\chi(v) \in g$

  (ii) $\chi(E_v) \subset H_1$

  (iii) $\chi(E_v) \cap H_2 = \{\chi(v)\}$.

  - falls es zwei solche Halbebenen gibt, heißt v in χ konvexe Ecke -, so definiere $\sigma_{v,\chi}: E_v \longrightarrow E_v$ mit $\sigma_{v,\chi}(e) = e'$ falls $\chi(e')$ "links benachbart" ist zu $\chi(e)$.

Ist eine der obigen Voraussetzungen nicht erfüllt, so definiere

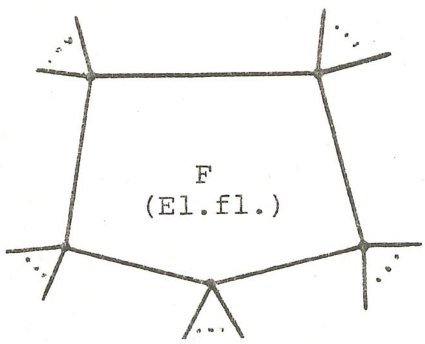
$$\sigma_{v,\chi} = id_{E_v} .$$

Bemerkung:

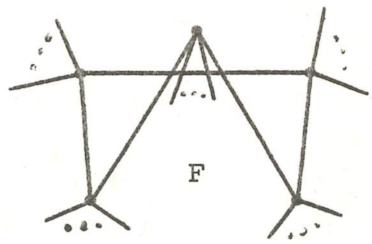
Liegt in einer Einbettung χ eine konvexe Ecke vor, so kann χ nicht planar sein, obwohl die Reihenfolge der aus der Ecke ausgehenden Kanten gegenüber einer planaren Einbettung nicht verändert ist.

Bsp.:

planare Einbettung:



χ:



Mit diesen Begriffen können wir das folgende Planaritätskriterium formulieren:

Planaritätskriterium

Satz:

Sei G dreifach zusammenhängend,
χ_o eine $\rho(c)$-planar-konvexe Einbettung von G,
χ eine Einbettung von G mit konvexem Rand $\rho(c)$.

χ ist $\rho(c)$-planar-konvex $\Leftrightarrow$

(1) $\forall e \in E$: $\quad |\chi(e)| > 0$
(2) $\forall v \in V$: $\quad \sigma_{v,\chi} = \sigma_{v,\chi_o}$

(3) Für alle Elementarflächen F in χ_o gilt:
F ist auch in χ Elementarfläche und $\partial\chi(F)$ ist ein konvexer einfacher Polygonzug.

Beweis:

"$\Rightarrow$"

z.z.: χ $\rho(c)$-planar-konvex $\Rightarrow$ (1) - (3) sind erfüllt.

Falls (1) nicht erfüllt ist, ist χ nicht planar.
Da nach [H] die Elementarflächen von dreifach zusammenhängenden Graphen eindeutig bestimmt sind, ist auch (3) erfüllt. Außerdem überlegt man sich leicht, daß man χ vom Rand ausgehend aus den Elementarflächen eindeutig zusammensetzen kann, d.h. auch (2) ist erfüllt.

"$\Leftarrow$"

Wir definieren eine Abbildung φ_o: $\chi_o(V) \longrightarrow \chi(V)$ mit $\varphi_o(\chi_o(v)) = \chi(v)$ $(\Rightarrow \varphi_o|\chi_o(V_c) = id)$
Wir wollen diese Abbildung φ_o zu einer Abbildung φ: $K_\rho \longrightarrow K_\rho$ "linear" fortsetzen. Hierzu definieren wir neue "Knoten" im Innern der Elementarflächen von χ_o, die mehr als 3 Ecken haben und ziehen Kanten von diesen Knoten zu allen Randknoten der entsprechenden Elementarfläche. Der entstehende Graph ist dann trianguliert.
Da χ_o $\rho(c)$-planar-konvex ist, besitzt jedes $x \in K_\rho$ bzgl. dieser Erweiterung von χ_o eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von höchstens drei Punkten in K_ρ:

$$x = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \chi_o(v_i) + \lambda_v v \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{2} \lambda_i + \lambda_v = 1$$

Ordnet man nun jedem neuen "Knoten" v ein Bild $\varphi(v)$ zu, so ergibt sich eine Fortsetzung φ von φ_o in natürlicher Weise:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \chi_o(v_i) + \lambda_v v\right) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \chi(v_i) + \lambda_v \varphi(v)$$

Man sieht leicht ein, daß φ wohldefiniert und stetig ist.

Bemerkung:

χ ist planar $\Leftrightarrow$ φ ist bijektiv.

Wir setzen nun (1) - (3) voraus und wählen zu einem neuen "Knoten" v in einer Elementarfläche F $\varphi(v)$ im Innern von $\varphi(F)$ (nach (3) ist das möglich). Dann kann man die Bijektivität von φ nachweisen und ist wegen obiger Bem. fertig.

a) φ ist surjektiv.

b) Der Beweis der Injektivität ergibt sich aus den folgenden Lemmata:

Lemma 1:

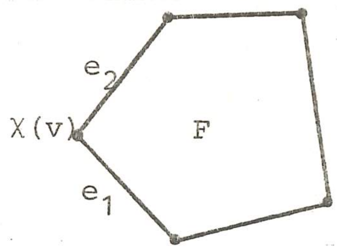
Sei F eine Elementarfläche von χ_o, so gilt:
$\varphi|F$ ist injektiv.

Beweis:

Nach (3) ist $\varphi(F)$ auch Elementarfläche in χ, berandet von einem einfachen konvexen Polygonzug. Da $\varphi(v)$ im Innern von $\varphi(F)$ liegt, entspricht jedem Dreieck in F genau ein Dreieck in $\varphi(F)$ und keines der Dreiecke in $\varphi(F)$ ist zu einer Strecke oder einem Punkt degeneriert $\Rightarrow$ Beh.

Definition:

Sei $v \in V$, $e_1, e_2 \in E_v$ zwei Kanten, die eine Elementarfläche in χ definieren.



Wir bezeichnen

$F =: F_\chi(v, e_1, e_2)$

Dann ist die Umgebung eines Punktes $\chi(v)$

$$U_\chi(v) := \bigcup_{F \text{ El.fl.}} F_\chi(v,e,e')$$

die Vereinigung über die anliegenden Elementarflächen.

Lemma 2:

Sei $v \in V$; es gilt: $\varphi|U_{\chi_o}(v)$ ist injektiv

Beweis:

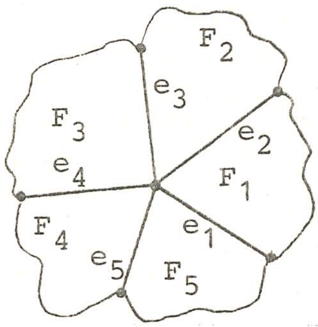
Wegen Lemma 1 bleibt zu zeigen: für je zwei Elementarflächen F_1, F_2 gilt:

$$\mathrm{int}(\varphi(F_1)) \cap \mathrm{int}(\varphi(F_2)) = \emptyset$$

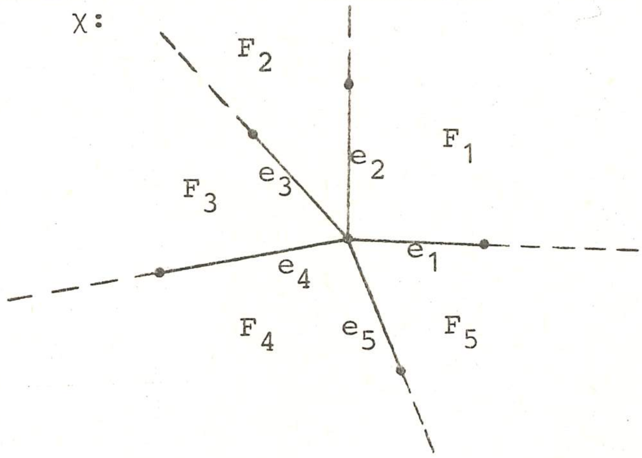
Da wegen (2) die Anordnung der Kanten von E_v in χ_o die gleiche ist wie in χ und außerdem (wegen (2)) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kanten kein Winkel > 180^o vorkommt und die Elementarflächen konvex sind (wegen (3)), gilt für $F_1 \neq F_2$:

$$\mathrm{int}(\varphi(F_1)) \cap \mathrm{int}(\varphi(F_2)) = \emptyset .$$

χ_o:



χ:



Lemma 3:

φ ist bijektiv.

Beweis:

Beh.1: Sei $\bar{\gamma}$ eine einfache Kurve von $\bar{x} \in K_\rho$ nach $\bar{y} \in K_\rho$, $x \in \varphi^{-1}(\bar{x})$, dann gilt:
Es gibt genau eine Kurve γ: $\varphi(\gamma) = \bar{\gamma}$, die in x beginnt.

Bew.:
Sei E die Elementarfläche in χ_o mit $x \in E$. Da $\varphi | E$ injektiv

ist (Lemma 1), gilt: $\bar{\gamma} \cap \varphi(E)$ hat in E ein eindeutig bestimmtes Urbild γ_o.
Falls γ_o auf einer Kante endet, betr. die an dieser Kante anliegende zweite Elementarfläche E': das Urbild von $\bar{\gamma} \cap \varphi(E')$ ist wegen Lemma 1 eindeutig.
Falls γ_o in einem Knoten v endet, betr. die Umgebung $U_{\chi_o}(v)$; wegen Lemma 2 ist das Urbild von $\gamma \cap \varphi(U_{\chi_o}(v))$ eindeutig.

Beh.1 folgt mit Induktion.

Beh.2: $\bar{x} \in \rho(c)$: $\bar{x}$ hat genau ein Urbild $\varphi^{-1}(\bar{x})$.

Bew.:
Ann.: Es gibt $\bar{x} \in \rho(c)$ mit mehr als einem Urbild.
Man überlegt sich leicht, daß kein $v \in V_{in}$ in χ außerhalb von K_ρ eingebettet sein kann (sonst gibt es eine konvexe Ecke); also folgt aus der Ann.: $\exists v \in V_{in}$: $\chi(v) \in \rho(c)$. Es gibt eine Elementarfläche $F_\chi(v, e_1, e_2) = F$ mit:
Entweder F ist nicht konvex (Widerspruch zu (3))
oder es gibt eine konvexe Ecke (Widerspruch zu (2)).
$\Rightarrow$ Beh.2

Ann.: $\exists z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in K_\rho - \rho(c)$ mit: $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$.
Sei $y \in \rho(c)$ ein bel. Punkt auf dem Rand, $\overline{\gamma_1}$ bzw. $\overline{\gamma_2}$ einfache Kurven von $\varphi(z_1)$ bzw. $\varphi(z_2)$ nach y.
Beh.1 $\Rightarrow$ es gibt genau ein Urbild γ_1 bzw. γ_2 von $\overline{\gamma_1}$ bzw. $\overline{\gamma_2}$ von z_1 bzw. z_2 ausgehend.
Da $\varphi^{-1}(y) = y$ ist nach Beh.2, gilt: γ_1 bzw. γ_2 enden in y.
Umgekehrt ist aber das Urbild von $\bar{\gamma}$ von y ausgehend eindeutig, also gilt: $z_1 = z_2$.

□

Bemerkung:

1. Will man nicht-konvexe Einbettungen mit Hilfe des obigen Kriteriums auf Planarität testen, so kann es vorkommen - wie man der Bemerkung am Ende des Definitionsteils entnehmen kann -, daß eine nicht-planare Einbettung als planar erkannt wird.
2. Falls der Planaritätstest zum Abbruch eines Iterationsverfahrens zur Bestimmung optimaler Einbettungen bzgl. der l_p-Norm ausgeführt wird, stellt die Konvexitätsforderung keine Einschränkung dar, da eine nicht-konvexe Einbettung nicht optimal sein kann (s. [B/H]).

Literaturangaben:

[B/H] B.Becker, G.Hotz: On the optimal layout of planar graphs with fixed boundary
Saarbrücken 1983

[B/O] J.L.Bentley, T.Ottmann: Algorithms for reporting and counting geometric intersections
IEEE Transactions on Computers C-28, 643-647 (1979)

[G] U.Groh: Optimale Einbettungen von Graphen mit festem Rand
Diplomarbeit, Saarbrücken 1983

[H] G.Hotz: Einbettung von Streckenkomplexen in die Ebene
Math. Annalen 167, 214-223 (1966)