Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL UND STUTTGART
Vol. X, 1959 Fasc. 4

Ein Satz über Mittellinien

Von GÜNTER HOTZ in Konstanz/Bodensee

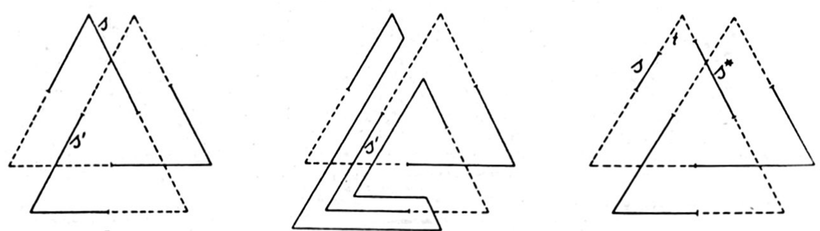
Ein Satz über Mittellinien

Von Günter Hotz in Konstanz/Bodensee

Wir denken uns die euklidische Ebene E des dreidimensionalen euklidischen Raumes R^3 in den $2n$ Punkten $P_1, \dots, P_{2n}$ gelocht. Die gelochte Ebene bezeichnen wir mit E^* und die Punkte $P_1, \dots, P_{2n}$ als ihre singulären Punkte. Ein doppelpunktfreier, orientierter Streckenzug von E^*, der zwei singuläre Punkte verbindet, heißt ein *Teilschnitt* von E^*. Ein System von n paarweis punktfremden Teilschnitten von E^*, von denen keine zwei von dem gleichen singulären Punkt berandet werden, heißt eine *Teilzerschneidung* von E^*.

Seien nun S und T je eine Teilzerschneidung von E^*, deren Teilschnitte sich zu einer orientierten geschlossenen Kurve zusammenschließen. Ist P ein Schnittpunkt eines Teilschnittes von S mit einem von T, dann sagen wir, daß der S-Schnitt den T-Schnitt in P überkreuzt. Durch diese Normierung der Teilzerschneidungspaare läßt sich diesen in eindeutiger Weise ein Knoten des R^3 zuordnen. Umgekehrt läßt sich jeder Knoten des R^3 durch ein Teilzerschneidungspaar einer hinreichend oft gelochten Ebene repräsentieren (siehe [1]).

Wir setzen im folgenden die in [1] definierten Begriffe[1]) der „*isotopen Deformation*" und des „*α-Prozesses*" von Teilzerschneidungen und der „*Isomorphie*", der „*Äquivalenz*", der „*Erweiterung*" und des dazu inversen Prozesses, der „*Reduktion*", von Teilzerschneidungspaaren voraus.



1a. 1b. 1c.

Abb. 1a zeigt eine Darstellung der Kleeblattschlinge durch Teilzerschneidungen.
Abb. 1b zeigt eine aus Abb. 1a durch einen α-Prozeß hervorgegangene Darstellung, während Abb. 1c aus 1a durch eine Erweiterung gewonnen wurde.

1) Die Definitionen sind zur Bequemlichkeit des Lesers am Schluß der Arbeit kurz zusammengestellt.

Ein Teilzerschneidungspaar, das keine Doppelpunkte besitzt, heißt eine *Mittellinie*. Eine Mittellinie repräsentiert natürlich den Kreis. Ist ein Teilzerschneidungspaar äquivalent zu einer Mittellinie, dann stellt es den Kreis dar; das Ziel dieser Arbeit ist ein Kriterium, das eine ziemlich allgemeine Klasse von Teilzerschneidungspaaren mit Mittellinien als solche zu erkennen gestattet. Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *$S'T'$ und S^*T^* seien Erweiterungen von ST. Dann gibt es zu $S'T'$ ein äquivalentes Teilzerschneidungspaar, das zu S^*T^* isomorph ist.*

Beweis. 1. Die Erweiterung, die ST in $S'T'$ überführt, bestehe in der Zerlegung des Teilschnittes s_i von S in $s't's''$, wovon s' und s'' Teilschnitte von S' sind, und t' ein Teilschnitt von T' ist. Analog möge S^*T^* durch die Zerlegung von s_i in $s^*t^*s^{**}$ gewonnen werden.

Haben t' und t^* Punkte gemeinsam, oder liegt zwischen t' und t^* auf s_i kein Schnittpunkt mit T, dann ist die Behauptung trivial.

Liegen zwischen t' und t^* auf s_i Schnittpunkte mit T, dann „heben" wir die betreffenden Teilschnitte von T über t' hinweg, so daß nun zwischen t' und t^* auf s_i keine Schnittpunkte mehr liegen. Dabei ist T' und T^* je in eine äquivalente Teilzerschneidung übergegangen, und wir haben damit diesen Fall auf den zuerst behandelten zurückgeführt.

2. Gehe nun $S'T'$ durch die Zerlegung von s_i in $s't's''$ und S^*T^* durch die Zerlegung von t_i in $t^*s^*t^{**}$ aus ST hervor, wobei s_i und t_i aneinander anstoßende Teilschnitte sein mögen. Dann können wir nach 1. ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß zwischen t' und s^* auf s_i und t_i kein Doppelpunkt der Teilzerschneidungspaare liegt, in welchem Fall die Behauptung wieder trivial ist.

3. Der allgemeine Fall folgt nun leicht unter Anwendung von 1. und 2.

Hilfssatz 2. *Sei ST äquivalent zu $S'T'$, und sei S^*T^* eine Erweiterung von ST und $S'^*T'^*$ eine Erweiterung von $S'T'$. Dann gibt es zu S^*T^* ein äquivalentes Teilzerschneidungspaar, das zu $S'^*T'^*$ isomorph ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung läßt sich ST mit $S'T'$ durch eine Kette von Teilzerschneidungspaaren verbinden, in der benachbarte Glieder durch einen α-Prozeß oder eine isotope Deformation einer der beiden Teilzerschneidungen auseinander hervorgehen. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Länge l der Kette. Sei $l = 1$. Es geht also ST durch einen einzigen α-Prozeß oder eine isotope Deformation in $S'T'$ über. Betrifft die Erweiterung den durch den Prozeß abgeänderten Teilschnitt nicht, dann folgt die Behauptung leicht mittels Hilfssatz 1. Wird bei der Erweiterung aber gerade der abgeänderte Teilschnitt zerlegt, dann können wir diese Erweiterung mittels Hilfssatz 1 in einen anderen Teilschnitt verschieben und gelangen so auf den gerade erledigten Fall. Sei die Behauptung nun für $l - 1 \geqq 1$ bewiesen. $S_{l-1}T_{l-1}$ sei das $(l-1)$. Glied der Kette. Durch eine Erweiterung gewinnen wir hieraus $S^*_{l-1}T^*_{l-1}$. Nach Induktionsannahme gibt es nun zu S^*T^* ein äquivalentes Teilzerschneidungspaar, das isomorph zu $S^*_{l-1}T^*_{l-1}$ ist. Ebenso gibt es nun zu $S^*_{l-1}T^*_{l-1}$ ein äquivalentes Teilzerschneidungspaar, das zu $S'^*T'^*$ isomorph ist. Dann gibt es aber auch ein zu S^*T^* äquivalentes Teilzerschneidungspaar, das zu $S'^*T'^*$ isomorph ist.

Hilfssatz 3. *Sei $S'T'$ durch eine Erweiterung aus ST gewonnen, das eine Mittellinie besitzt. Dann besitzt auch $S'T'$ eine Mittellinie.*

Beweis. Sei S^*T^* eine zu ST gehörige Mittellinie. Nun erweitern wir diese Mittellinie, was wieder eine Mittellinie liefert und wissen nach Hilfssatz 2, daß es zu $S'T'$ ein äquivalentes Teilzerschneidungspaar gibt, das zu der letztgenannten Mittellinie isomorph ist. Ein Teilzerschneidungspaar, das zu einer Mittellinie isomorph ist, ist selbst eine Mittellinie, womit die Behauptung bewiesen ist.

Sei nun k eine orientierte, doppelpunktfreie Kurve von E^*, die mit dem Teilschnitt s_i von S den Schnittpunkt Q gemeinsam habe. Dann ordnen wir diesem Punkt den Index $i_Q(s_i, k) = +1$ oder -1 zu, je nachdem, ob s_i von k von links nach rechts oder in umgekehrter Richtung durchsetzt wird. Schneidet nun k der Reihe nach S in genau den Punkten $Q_1, \ldots, Q_r$, dann setzen wir $a_S(k) = s_{i_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, s_{i_r}^{\varepsilon_r}$, worin s_{i_l} der Schnitt ist, worauf Q_l liegt und $\varepsilon_l = i_{Q_l}(s_{i_l}, k)$ ist. Schneidet k S nicht, dann setzen wir $a_S(k) = 1$.

Satz 1. *Sei ST eine Mittellinie, und seien $s_1, t_1, \ldots, s_n, t_n$ ihre Teilschnitte in natürlicher Reihenfolge. S' sei eine zu S äquivalente Teilzerschneidung, deren Teilschnitte so numeriert sind, daß s_i und s_i' den gleichen Anfangs- und Endpunkt besitzen; weiter habe S' mit T keine Berührungspunkte, sondern höchstens Schnittpunkte gemeinsam, was man durch eine isotope Deformation von S' ja stets erreichen kann. Dann gibt es n ganze Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_n$, so daß gilt*

$$\Pi_{S'}(T) \equiv s_1'^{\nu_1} a_{s'}(t_1) \ldots s_n'^{\nu_n} a_{S'}(t_n) = 1\,,$$

wobei wir unter $\Pi_{S'}(T)$ identisch den mittleren Ausdruck verstehen wollen, dessen Abhängigkeit von $\nu_1, \ldots, \nu_n$ wir nicht explizit anmerken. Das Gleichheitszeichen rechts besagt, daß sich die linke Seite durch Kürzungen und Erweiterungen in die rechte Seite überführen läßt.

Beweis. Laut Definition der Äquivalenz gibt es eine Kette $S = S_1, S_2, \ldots, S_k = S'$ von Teilzerschneidungen, in der S_i entweder durch eine isotope Deformation oder einen α-Prozeß in S_{i+1} übergeführt wird. Wir führen unseren Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Länge k der Kette.

Für $k = 1$ ist nichts zu beweisen. Sei die Behauptung bewiesen für $k - 1 \geqq 1$; d. h. es ist $\Pi_{S_{k-1}}(T) = 1$ für geeignet gewählte $\nu_1, \ldots, \nu_n$.

Der Prozeß, der S_{k-1} in S_k überführt, ersetzt in jedem Fall einen auf einem Teilschnitt s_i von S_{k-1} liegenden Polygonzug p durch einen Polygonzug p', wobei pp' den Rand eines in E liegenden Elementarflächenstückes J bildet, und wobei p' außer seinen Endpunkten keinen Punkt mit S_{k-1} gemeinsam hat.

1. S_{k-1} gehe durch eine isotope Deformation in S_k über. Dann liegt in J per definitionem kein singulärer Punkt. Sind nun die Randpunkte von p' verschieden von den Randpunkten von s_i, dann unterscheiden sich $a_{S_{k-1}}(t_l)$ und $a_{S_k}(t_l)$ $(l = 1, \ldots, n)$ nur um Kürzungen bzw. Erweiterungen von paarweis inversen Faktoren; dabei sehen wir von der verschiedenen Bezeichnung der zu S_{k-1} und S_k gehörigen Teilschnitten ab. Hat p' und s_i den gleichen Anfangspunkt, dann wird eventuell an $a_{S_{k-1}}(t_{i-1})$ noch ein Faktor $s_i^{\varepsilon_1}(\varepsilon_1 = 1$ oder $-1)$ angehängt. Analog kann vor $a_{S_{k-1}}(t_i)$ ein Faktor $s_i^{\varepsilon_2}(\varepsilon_2 = 1$ oder $-1)$ treten, wenn der Endpunkt von s_i und der von p' identisch sind. Setzen wir $\varepsilon_{1/2} = 0$, wenn der entsprechende Faktor nicht auftritt, dann ist $S_k(T) = 1$, wenn wir an Stelle der obigen $\nu_1, \ldots, \nu_n$ nun die Exponenten $\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}, \nu_i - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \nu_{i+1} \ldots, \nu_n$ wählen.

Aus dem Gesagten folgt weiter, daß wir durch isotope Deformationen von S in S' stets erreichen können, daß $\Pi_{S'}(T) = 1$ wird für $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_n = 0$, wenn $\Pi_S(T)$ für irgendeine Wahl der ν_i gleich 1 ist.

2. S_{k-1} gehe durch einen α-Prozeß in S_k über. Es liegt nun also in J genau ein S-Schnitt, der mit s_k bezeichnet sei. Auf Grund von 1. können wir annehmen, daß $\Pi_{s_{k-1}} = 1$ ist für $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_n = 0$. Aus dem gleichen Grund dürfen wir auch voraussetzen, daß p' die in der nebenstehenden Skizze (Abb. 2) angedeutete Lage hat: Zwischen A und B, den Randpunkten von p, liege auf s_i kein Schnittpunkt mit T; jeder T-Schnitt, der den Polygonzug AB durchsetzt, habe auch mit BC einen Schnittpunkt gemeinsam, so daß das zwischen den beiden Schnittpunkten liegende Stück des Schnittes ganz in J verläuft ohne s_k zu schneiden; zu jedem Schnittpunkt Q von S_k und einem T-Schnitt t_l gebe es einen Schnittpunkt mit FG und einen mit DE oder CH, so daß das zwischen diesen beiden Schnittpunkten liegende Stück von t_l ganz in J verläuft und dort mit s_k genau einen Schnittpunkt, und zwar Q gemeinsam hat; EF besitze genau einen Schnittpunkt mit T, der auf t_{k-1} liegt und so dicht bei dem Anfangspunkt von s_k, daß zwischen beiden Punkten kein weiterer Doppelpunkt liegt; analoges gelte für GH. Man erkennt leicht, daß sich diese Forderungen stets erfüllen lassen. Dann erhält man aber $\Pi_{S_k}(T)$ aus $\Pi_{S_{k-1}}$ bis auf Erweiterungen und Kürzungen durch die Substitution $s_l \to s_l$ für $l \neq k$ und $s_k \to s_i^{\varepsilon} s_k s_i^{-\varepsilon}$. Dann folgt aber aus $\Pi_{S_{k-1}}(T) = 1$ auch $\Pi_{S_k}(T) = 1$, was zu zeigen war.

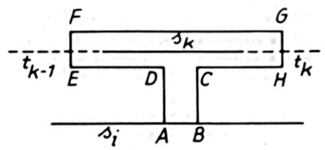


Abb. 2.

Hilfssatz 4. *Sei ST reduzierbar und $\Pi_S(T) = 1$. Geht $S'T'$ durch Reduktion aus ST hervor, dann ist auch $\Pi_{S'}(T') = 1$.*

Beweis. Ist ein Teilschnitt reduzierbar, dann besitzt er keine Doppelpunkte. Also liefert er auch keinen Beitrag in $\Pi_S(T)$. Handelt es sich um den Teilschnitt t_i bei der Reduktion, dann haben wir in der Ablesung nur $s_i = s_{i+1}$ zu setzen, was uns bis auf die Strichelung $\Pi_{S'}(T')$ liefert, woraus die Behauptung in diesem Fall folgt. Wird ein S-Schnitt reduziert, dann kommt er in der Ablesung nicht vor und $\Pi_S(T)$ und $\Pi_S(T')$ stimmen bis auf die Strichelung überein.

Hauptsatz. *Sei ST die Projektion einer Knotenlinie in Normallage, und sei $\Pi_S(T) = 1$ für eine geeignete Wahl von $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Dann besitzt ST eine Mittellinie, d. h. der Knoten ist ein Kreis.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß sich ST durch Reduktionen und α-Prozesse der S-Zerschneidungen in eine Mittellinie überführen läßt. Auf Grund unseres Hilfssatzes 3 folgt dann, daß auch ST eine Mittellinie besitzt. Auf Grund des in Satz 1 gezeigten dürfen wir voraussetzen, daß $\nu_1 = \cdots = \nu_n = 0$ ist. Wir definieren nun

Mengen von Teilzerschneidungen, die aus ST durch α-Prozesse der S-Zerschneidung und Reduktionen um T-Schnitte hervorgehen.

Seien

$M_1 = \{S_1 T$, wo S_1 die zu S äquivalenten Teilzerschneidungen durchläuft$\}$;

.

.

.

$M_k = \{S_k T_{k-1} \mid S_k$ äquivalent S^*_{k-1}, wo sich $S^*_{k-1} T_{k-1}$ durch Reduktion aus einem $S' T'$ von M_{k-1} ergibt$\}$;

$M \;= M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$, wobei k die größte natürliche Zahl ist, für die M_k nicht leer ist.

Aus Hilfssatz 4 und Satz 1 folgt nun $\Pi_S(T) = 1$ für alle ST aus M, wobei wir noch durch isotope Deformationen der S-Zerschneidungen alle ν_i zu Null machen wollen. Ebenso seien alle Berührpunkte von S- und T-Schnitten beseitigt.

Ist $u(ST)$ die Anzahl der Doppelpunkte von ST, dann nimmt $u(ST)$ auf M ein Minimum an; das sei der Fall in der Teilzerschneidung $S^* T^*$. Wir behaupten $u(S^* T^*) = 0$ oder, was das gleiche besagt, $S^* T^*$ ist eine Mittellinie.

Ist $S^* T^*$ noch reduzierbar, dann wollen wir das tun, so daß wir zu einer nicht mehr reduzierbaren Lage gelangen. Wir wollen diese wieder mit $S^* T^*$ bezeichnen.

Sei $S^* T^*$ noch keine Mittellinie. Dann ist $\Pi_{S^*}(T^*)$ nicht das leere Wort. Da es aber gleich 1 ist, läßt es sich kürzen, d. h. es gibt in ihm einen Term $s_k^{\varepsilon} s_k^{-\varepsilon}$.

1. Dieser Term stehe in $a_{S^*}(t_i^*)$. Seien Q_1 und Q_2 die auf s_k und t_i liegenden zu diesen beiden Zeichen gehörigen Punkte. Die beiden auf s_k bzw. t_i liegenden Streckenzüge, die Q_1 mit Q_2 verbinden, bilden eine einfache, geschlossene Kurve, da der auf t_i liegende Streckenzug, wie die Ablesung ergibt, von keinem S-Schnitt geschnitten wird. Ersetzen wir nun den auf s_k liegenden Streckenzug durch den auf t_i liegenden, so erhalten wir eine zu S^* äquivalente Teilzerschneidung, deren k-ter Schnitt den i-ten zwischen Q_1 und Q_2 berührt. Beseitigen wir diese Berührung durch eine isotope Deformation der S-Zerschneidung, so erhalten wir eine zu S^* äquivalente Teilzerschneidung, die mit T^* weniger Schnittpunkte gemeinsam hat als $u(S^* T^*)$, was ein Widerspruch zu der Voraussetzung über $S^* T^*$ darstellt. Also sind alle $a_{S^*}(T^*)$ Kurzworte.

2. Es gibt ein $a_{S^*}(t_i^*)$, dessen letzter Faktor sich gegen den ersten von $a_{S^*}(t_{i+1}^*)$ wegkürzt. Dieser Faktor sei s_k^*.

Die zu dieser Kürzung gehörigen Schnittpunkte werden wie unter 1 mit Q_1 und Q_2

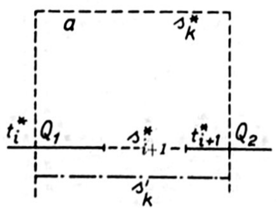


Abb. 3a.

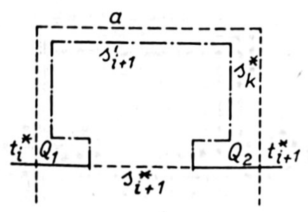


Abb. 3b.

bezeichnet. Der auf s_k^* liegende, Q_1 mit Q_2 verbindende Streckenzug wird mit a, der über s_{i+1}^* von Q_1 nach Q_2 laufende Streckenzug mit b bezeichnet. a und b bilden zusammen eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve, die von keinem S-Schnitt geschnitten wird. Auf a und auf s_{i+1}^* können aber noch Schnittpunkte mit T^* liegen. Liegen auf s_{i+1}^* gleichviele oder weniger Schnittpunkte als auf a, dann verfahren wir analog zu 1 (Abb. 3a). Wir erhalten wieder ein Element aus M, das weniger Schnittpunkte besitzt als $u(S^* T^*)$.

Liegen auf a weniger Schnittpunkte als auf s_{i+1}^*, dann ändern wir S^* in der folgenden Weise ab (Abb. 3b): Der Polygonzug b setzt sich zusammen aus einem Stück von t_i^*, das mit p bezeichnet werde, aus s_{i+1}^* und einem Stück q von t_{i+1}^*. a, q, s_{i+1}^*, p bilden den Rand eines Elementarflächenstückes J, der von keinem S-Schnitt geschnitten wird. Wir ersetzen nun s_{i+1}^* durch einen Polygonzug s'_{i+1}, der eine so dicht längs $p a q$ verlaufende Parallelkurve ist, daß er genau die gleichen T-Schnitte und diese gleich oft durchsetzt wie a und daß er außer seinen Randpunkten keinen Punkt mit S^* gemeinsam hat. Im Falle, daß die Randpunkte von s_{k+1}^* außerhalb von J liegen, verläuft auch s'_{i+1} außerhalb von J und im anderen Fall innerhalb; da die Indices von Q_1 und Q_2 entgegengesetzt gleich sind, liegen nämlich entweder beide Randpunkte von s_k^* in J oder beide außerhalb von J. Wir erhalten so aus S^* eine äquivalente Teilzerschneidung, die mit T^* weniger Punkte gemeinsam hat als $u(S^* T^*)$, was wieder im Widerspruch zu der Wahl von $S^* T^*$ steht.

Das heißt aber, daß $\Pi_{S^*}(T^*)$ das leere Wort ist, was zu beweisen war.

B e m e r k u n g. Dieser Satz kann nicht zur Umkehrung von Satz 1 verschärft werden, wie das nebenstehende Beispiel zeigt. Die darin ausgezogenen Linien gehören der T-, die gestrichelten Linien der S-Zerschneidung an. Man liest ab $\Pi_S(T) = 1$, so daß die Voraussetzung der Umkehrung von Satz 1 gegeben ist. Man erkennt aber leicht, daß es zu S keine äquivalente Teilzerschneidung S' gibt, so daß $S' T$ eine Mittellinie ist.

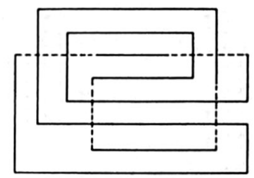


Abb. 4.

Zusammenstellung der in der Arbeit verwandten Definitionen. Sei E' die in den Punkten P_1, $P_2, \ldots, P_{2n}$ gelochte euklidische Ebene. ST sei ein Teilzerschneidungspaar von E', das einen Knoten darstellt. ST möge genau die Doppelpunkte $Q_1, \ldots, Q_m$ besitzen, die die Teilschnitte von S und von T in Streckenzüge $s_1, \ldots, s_r$ zerlegen. Durch $P_1, \ldots, P_{2n}, Q_1, \ldots, Q_m$ und die Streckenzüge $s_1, \ldots, s_r$ erhalten wir eine Zerlegung der Ebene in die genannten Punkte, Streckenzüge und in endlich viele Flächenstücke $F_1, \ldots, F_t$. $P_1, \ldots, P_{2n}, Q_1, \ldots, Q_m, s_1, \ldots, s_r, F_1, \ldots, F_t$ bilden unter Hinzunahme ihrer Incidenzrelationen „den zu ST gehörigen Zerlegungskomplex von E'".

Zwei Teilzerschneidungspaare ST von E' und $S'T'$ von E'' heißen „*isomorph*", wenn sich die zu den Teilzerschneidungspaaren gehörigen Zerlegungskomplexe unter Berücksichtigung der Orientierung so isomorph aufeinander abbilden lassen, daß S auf S' und T auf T' abgebildet wird.

Der Teilschnitt s von S werde durch P_{2n+1} und P_{2n+2} in die drei gleichsinnig zu s orientierten Streckenzüge s', t, s'' zerlegt, wovon t keinen Punkt mit der Teilzerschneidung T gemeinsam habe. Sei E'' die in $P_1, \ldots, P_{2n+2}$ gelochte euklidische Ebene; dann bilden die von s verschiedenen Teilschnitte von S zusammen mit s' und s'' eine Teilzerschneidung S' von E''; ebenso die Teilschnitte von T zusammen mit t eine Teilzerschneidung T'. $S'T'$ heißt eine „*Erweiterung*" von ST.

Der dazu inverse Prozeß heißt eine „*Reduktion*". Die Rollen von S und T dürfen vertauscht werden.

Sei nun Z eine beliebige Teilzerschneidung von E'. z' sei ein auf dem Teilschnitt z von Z liegender gleichsinnig zu z orientierter Streckenzug mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B. z'' sei ebenfalls ein Streckenzug, der A als Anfangs- und B als Endpunkt besitzt und der keinen Punkt mit Z gemeinsam hat. Das von z' und z'' berandete Elementarflächenstück der euklidischen Ebene sei J. Ersetzen wir nun z' durch z'', dann geht Z in eine andere Teilzerschneidung Z' von E' über.

Liegt in J keiner der singulären Punkte $P_1, \ldots, P_{2n}$, dann nennen wir diesen Prozeß, der Z in Z' überführte, eine „*isotope Deformation*" von Z. Liegt in J genau ein Teilschnitt von Z, dann heißt dieser Prozeß ein „*α-Prozeß*".

Zwei Teilzerschneidungen von E' heißen „*äquivalent*", wenn sie durch eine Kette von isotopen Deformationen und α-Prozessen in einander übergeführt werden können.

Ein Teilzerschneidungspaar ST heißt „*äquivalent*" zu einem Teilzerschneidungspaar $S'T'$, wenn S äquivalent zu S' und T äquivalent zu T' ist.

Literaturverzeichnis

[1] G. HOTZ, Arkadenfadendarstellung von Knoten und eine neue Darstellung der Knotengruppe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg (im Erscheinen).

Eingegangen am 21. 10. 1958