Herrn Prof. Dr.-Ing. Johannes Dörr zum 50. Geburtstag

SONDERDRUCK

ANNALES UNIVERSITATIS SARAVIENSIS
NATURWISSENSCHAFTEN-SCIENTIA - X - 4 - 1962

Der „logische" Entwurf von Addierwerken

Von

Günter Hotz*

(Eingegangen am 25. Juli 1962)

Einleitung

Shannon [1], Ashenhurst [2] und Povarov [3] befassen sich mit der Zerlegung (decomposition) von Schaltfunktionen; d. h. binärer Funktionen von binären Variabeln. Diese Zerlegungen bestehen in Darstellungen einer Schaltfunktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ durch Funktionen $F(y_1,\ldots,y_k)$, $y_i = g_i(x_1,\ldots,x_n)$ mit $F(g_1,\ldots,g_q) = f$, worin jedoch g_i und g_k für $i \neq k$ von keiner Variabeln beide zugleich echt abhängen. Es wird also in diesen Zerlegungen eine „Trennung" der Variabeln angestebt. Diese Untersuchungen gehen von der Erkenntnis aus, daß man sich nicht auf die Darstellung der Schaltfunktionen der Variabeln $x_1,\ldots,x_n$ durch die Funktionen $f_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ in „disjunktiver" Normalform beschränken darf, wenn man möglichst „kurze" Darstellungen sucht, und daß gerade Zerlegungen, die zu einer Trennung der Variabeln führen, kürzere Darstellungen als die in disjunktiver Normalform abgeben.

In [4] und [5] werden Zerlegungen von Systemen von Schaltfunktionen untersucht, was insofern eine Verallgemeinerung der oben beschriebenen Aufgabenstellung bedeutet, als verlangt, wird, daß die Funktionen $g_1,\ldots,g_q$ nicht nur zur Zerlegung einer, sondern zur Zerlegung jeder Funktion des Systems geeignet sein sollen. Hierbei erweist sich jedoch die Forderung nach einer Trennung der Variabeln als zu scharf, so daß sie in [4] und [5] nicht gestellt wird.

In [5] wird an [1] angeknüpft und an frühere Arbeiten von Roth und ein Algorithmus entwickelt, der zu „optimalen" Darstellungen des gegebenen Funktionensystems führt. Der Algorithmus ist sehr langwierig und führt schon bei Funktionen von sechs Variabeln auf der IBM 7090 zu Rechenzeiten von mehreren Stunden. Der Algorithmus ist jedoch so aufgebaut, daß er eine monoton besserwerdende Folge von Darstellungen liefert, so daß man ihn vor seinem Ende abbrechen kann, wenn man sich mit einer Approximation an die optimale Lösung zufriedengeben will oder aus Zeitgründen zufriedengeben muß.

Die Untersuchung der Zerlegungen eines Systems von Schaltfunktionen von n Variabeln wird in [4] auf die Untersuchung von Teilverbänden des Verbandes der Unteralgebren der Booleschen-Algebra $\mathfrak{A}$ der Schaltfunktionen von n Variabeln zurückgeführt:

Ist $\mathfrak{A}'$ die durch das vorgegebene Funktionssystem erzeugte Unteralgebra von $\mathfrak{A}$, dann liefert jedes Erzeugendensystem einer Algebra $\mathfrak{A}^*$ mit $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung des gegebenen Funktionssystems. In diesem Aufsatz soll hieran angeknüpft werden. Wir suchen solche Algebren $\mathfrak{A}^*$, die ein Booleesches Produkt von Unteralgebren von $\mathfrak{A}$ sind, wovon zwei Funktionen, die in verschiedenen Faktoren liegen, keine Variable gemeinsam haben. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung der in [1] betrachteten Zerlegungen, die jedoch nicht jede Zerlegung zuläßt aus der Hoffnung heraus, daß dort, wo eine solche Zerlegung möglich ist, die optimalen

* Lehrstuhl für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes.

Zerlegungen unter diesen vorkommen, und aus der Erfahrung heraus, daß solche Darstellungen in interessanten Fällen leicht zu finden sind und dort sehr brauchbare Darstellungen liefern. Einen solchen Fall stellen die Addierwerke dar, denen wir uns im folgenden zuwenden.

Wir werden zunächst die Schaltfunktionen von $2n+1$ Variabeln durch quadratische n-reihige Matrizen darstellen, deren Koeffizienten aus der BOOLEschen Algebra aus vier Elementen sind. Es werden in naheliegender Weise Verknüpfungen zwischen den Matrizen erklärt, bezüglich deren sie eine zu der BOOLEschen Algebra der Schaltfunktionen von $2n+1$ Variabeln isomorphe Algebra $\mathfrak{M}$ bilden. Die Matrizen, die Schaltfunktionen darstellen, die bei der Beschreibung der Addierwerke durch Schaltfunktionen vorkommen, werden charakterisiert; sie bilden eine Unteralgebra $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{M}$. Nun werden Einbettungen von $\mathfrak{L}$ in BOOLEsche Produkte von Unteralgebren von $\mathfrak{M}$ in Abhängigkeit von dem Modul B angegeben, nach dem das Addierwerk addiert. Es zeigt sich, daß diese Einbettungen bei einer umfangreichen Klasse von Codierungen der Ziffern des gegebenen Zahlensystems mit der Basis B zu einer „Trennung“ der Variabeln führt in dem zuletzt beschriebenen Sinn.

Im letzten Abschnitt werden die Ergebnisse auf zwei Beispiele angewandt. Es wird der logische Entwurf für ein Dezimaladdierwerk und ein Addierwerk mit dem Modul 9 gegeben.

Addierwerke, Zifferndarstellung, Schaltfunktionen

Sei B eine natürliche Zahl, die als Basis einer Zifferndarstellung

$$a = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_h B^h$$

der natürlichen Zahlen a gewählt sei; $a_0, a_1, \dots, a_h$ gehören dem kleinsten Restsystem $0, 1, 2, \dots, (B-1)$ mod. B an.

Man erhält die Summe

$$c = c_0 + c_1 B + c_2 B^2 + \dots + c_h B^h + c_{h+1} B^{h+1}$$

der Zahl a und der Zahl

$$b = b_0 + b_1 B + \dots + b_h B^h$$

(wir können o. B. d. A. annehmen, daß a und b die gleiche Anzahl von Ziffern besitzen), indem man definiert

$$u_{-1} = 0$$

$$u_i = \begin{cases} 0 \\ & \text{für } a_i + b_i + u_{i-1} \begin{cases} < B \\ \\ \geq B \end{cases} ; \; i = 0, 1, \dots, \mathrm{h} \\ 1 \end{cases}$$

$$c_i = \text{kleinster Repräsentant von } (a_i + b_i + u_{i-1}) \text{ mod. } B\,;$$
$$\text{für } i = 0, 1, \dots, \mathrm{h}$$

$$c_{h+1} = u_h\,.$$

Man nennt u_i den Übertrag der i-ten Stelle. Man erhält alle c_i, indem man der Reihe nach $c_0, u_0, c_1, u_1, \dots, c_h, u_h$ berechnet, so wie man das in der Schule gelernt hat.

Ein Digitalrechner, der nach diesem Verfahren addiert, heißt ein Serienrechner der Basis B. Der Teil des Rechners, der die Zuordnung

$$a_i + b_i + u_{i-1} \longrightarrow c_i, u_i \tag{1}$$

ausführt, heißt das Addierwerk des Rechners. Für (1) wollen wir nun schreiben

$$c_i = a_i \oplus b_i \oplus u_{i-1} \tag{2}$$
$$u_i = f\,(a_i + b_i + u_{i-1})\,.$$

Sei nun $\mathfrak{A}_2$ die BOOLEsche Algebra (siehe etwa [6]) aus zwei Elementen, dem Nullelement 0 und dem Einselement 1; die Operationen seien mit „v, . , _" bezeichnet, so daß gilt

$$0 \vee 0 = 0\,;\quad 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1\,;$$
$$0 \,.\, 0 = 0 \,.\, 1 = 1 \,.\, 0 = 0\,;\quad 1 \,.\, 1 = 1\,;$$
$$\underline{0} = 1\,;\quad \underline{1} = 0\,.$$

Meist werden wir das Verknüpfungszeichen „." weglassen; ebenso Klammern und stets „." vor „v" ausführen.

Wir definieren

$$W_n = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n)\,,\ x_i \in \mathfrak{A}_2 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}\,.$$

Übertragen wir die Operationen von $\mathfrak{A}_2$ durch komponentenweise Ausführung auf W_n, dann wird W_n auch zu einer BOOLEschen Algebra. Es ist in diesem Sinne $\mathfrak{A}_2 = W_1$.

Sei $B \leq 2^n$ und

$$a \longrightarrow x = s\,(a) \tag{3}$$

eine eindeutige Abbildung von $\{0, 1, \ldots, B - 1\}$ in W_n. Der Bildbereich von $\{0, 1, \ldots, B - 1\}$ bei dieser Abbildung sei D. Die inverse Abbildung von D auf $\{0, 1, \ldots, B - 1\}$ bezeichnen wir durch $x \to s^{-1}(x)$. Die Abbildung (3) heißt die „Binärcodierung" der Ziffern; diese entspricht der binären Zifferndarstellung im Digitalrechner.

Wir setzen nun

$$z = s\,(c_i)\,,\ y = s\,(b_i)\,,\ x = s\,(a_i)\,,\ u = u_{i-1}\,,\ u' = u_i\,.$$

Mit dieser Bezeichnung erhält man an Stelle von (2)

$$z = s\,(s^{-1}(x) \oplus s^{-1}(y) \oplus u) \tag{4}$$
$$u' = f\,(s^{-1}(x) + s^{-1}(y) + u)\,. \tag{5}$$

Die Funktionen (4) und (5) haben $D \times D \times W_1 \subset W_{2n+1}$ als Definitions-Bereich;* (5) hat W_1 als Wertevorrat und (4) hat $D \subset W_n$ als Wertevorrat.

Durch Zerlegung in Komponenten läßt sich (4) in n Funktionen mit demselben Definitionsbereich und W_1 als Wertevorrat zerlegen.

Eine Funktion mit einem Definitionsbereich $D \subset W_n$ und W_1 als Wertevorrat heißt eine „BOOLEsche Funktion" oder „Schaltfunktion" entsprechend der Bedeutung, die diese Funktionen in der Theorie der binären Schaltkreise besitzen.

Über die Funktionswerte lassen sich die Operationen von $\mathfrak{A}_2$ auf die Menge der Schaltfunktionen mit D als Definitionsbereich übertragen: Seien g_1 und g_2 zwei definierte Schaltfunktionen, dann definiert man

$$g = g_1 \vee g_2 \Leftrightarrow g\,(x) = g_1\,(x) \vee g_2\,(x) \text{ für jedes } x \in D\,.$$

* Dabei unterschlagen wir eine Abbildung der natürlichen Zahlen 0 und 1 auf $0 \in W_1$ und $1 \in W_1$ und fassen einmal u als Variable über W_1 und einmal als Variable über den nat. Zahlen o und 1 auf.

Analog definiert man $g_1 \cdot g_2$ und $\underline{g}_1$. Man erkennt ohne weiters, daß die Menge der auf D definierten Schaltfunktionen mit diesen Operationen eine BOOLEsche Algebra bildet, die wir mit $\mathfrak{F}_D$ bezeichnen. Die Funktionen

$$f_i(x) = x_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

bilden ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}_D$. Ist $D = W_n$, dann ist das Erzeugendensystem frei, im anderen Falle nicht. Man erkennt, daß die Funktionen von $\mathfrak{F}_{D \times D \times W_1}$, die sich in der Form (4) bzw. (5) schreiben lassen, eine Teilalgebra von, $\mathfrak{F}_{D \times D \times W_1}$ bilden, die mit $\mathfrak{L}_B^*$ bzw. $\mathfrak{L}_B$ bezeichnet sei. Man erkennt $\mathfrak{L}_B^* \subset \mathfrak{L}_B$.

Die Darstellung der Schaltfunktionen durch quadratische Matrizen über $\mathfrak{A}_4$

Sei $\mathfrak{A}_4$ die BOOLEsche Algebra, bestehend aus den vier Elementen $0, r, t, 1$; d. h. die Verknüpfungen von $\mathfrak{A}_4$ werden durch die folgenden Tabellen beschrieben:

„v“	0	r	t	1
0	0	r	t	1
r	r	r	1	1
t	t	1	t	1
1	1	1	1	1

„.“	0	r	t	1
0	0	0	0	0
r	0	r	0	r
t	0	0	t	t
1	0	r	t	1

und die Negation durch

$$\underline{0} = 1, \ \underline{r} = t, \ \underline{t} = r, \ \underline{1} = 0 .$$

Wir bilden nun B-reihige quadratische Matrizen (m_{ik}) mit $m_{ik} \in \mathfrak{A}_4$ für

$$i, k = 0, 1, \ldots, B-1 .$$

Seien (m_{ik}) und (n_{ik}) zwei solche Matrizen, dann definieren wir

$$\begin{aligned}(m_{ik}) \ \mathrm{v} \ (n_{ik}) &= (m_{ik} \mathrm{v}\, n_{ik}) ,\\ (m_{ik}) \ . \ (n_{ik}) &= (m_{ik} \, . \, n_{ik}) ,\\ \underline{(m_{ik})} &= (\underline{m}_{ik}) .\end{aligned}$$

Die Menge dieser B-reihigen Matrizen bildet unter diesen Operationen eine BOOLEsche Algebra, die wir mit $\mathfrak{M}_B$ bezeichnen.

Wir definieren nun eine Abbildung von $\mathfrak{F}_{D \times D \times W_1}$ auf $\mathfrak{M}_B$.

Für $(x, y) \in D \times D$ gilt

$$0 \leqq s^{-1}(x), s^{-1}(y) < B .$$

Sei $f(x, y, u) \in \mathfrak{F}_{D \times D \times W_1}$, dann definieren wir

$$f(x, y, u) \xrightarrow{\ h\ } (m_{ik})$$

durch die Festsetzung

$$m_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } f(x,y,0) = f(x,y,1) = 0 , \\ 1 \text{ für } f(x,y,0) = f(x,y,1) = 1 , \\ r \text{ für } f(x,y,0) \neq f(x,y,1) = 1 , \\ t \text{ für } f(x,y,1) \neq f(x,y,0) = 0 , \end{cases} \tag{6}$$

für $i = s^{-1}(x)$ und $k = s^{-1}(y)$ und alle $(x, y) \in D \times D$.

Satz 1: Die Abbildung h ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{F}_{D \times D \times W_1}$ auf $\mathfrak{M}_B$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß h ein Homomorphismus ist.

Sei $f, g \in \mathfrak{F}_{D\times D\times W_1}$ und $(m_{ik}) = h(f)$, $(n_{ik}) = h(g)$, $(p_{ik}) = h(f \vee g)$.

Es ist zu zeigen

a) $m_{ik} \vee n_{ik} = p_{ik}$ für $i, k = 0, 1, \ldots, B-1$.

b) $(\underline{m_{ik}}) = h(\underline{f})$.

Es genügt dies zu zeigen, da $h(fg) = h(f)\,h(g)$ aus a) und b) folgt.

Zu a):

1. Sei $m_{ik} = 0$; das ist gleichbedeutend mit $f(s(i), s(k), u) = 0$ für $u = 0$ und $u = 1$.
   Also gilt für jedes g und $m_{ik} = 0$
   $$f(s(i), s(k), u) \vee g(s(i), s(k), u) = g(s(i), s(k), u);$$
   daraus folgt $p_{ik} = n_{ik} = m_{ik} \vee n_{ik}$.
2. Sei $m_{ik} = 1$; d. h. $f(s(i), s(k), u) = 1$ für $u = 0$ und $u = 1$. Also gilt für jedes g
   $$f(s(i), s(k), u) \vee g(s(i), s(k), u) = 1; \text{ d. h. } p_{ik} = 1.$$
   Also gilt $p_{ik} = m_{ik} \vee n_{ik}$.
3. Sei $m_{ik} = n_{ik}$; d. h. es ist $f(s(i), s(k), u) = g(s(i), s(k), u)$ für $u = 0{,}1$.
   Also gilt
   $$f(s(i), s(k), u) = f(s(i), s(k), u) \vee g(s(i), s(k), u);$$
   d. h. es ist
   $$p_{ik} = m_{ik} = m_{ik} \vee n_{ik}.$$
4. Sei $m_{ik} = r$ und $n_{ik} = t$; dann folgt
   $$f(s(x), s(y), u) \vee g(s(i), s(k), u) = 1 \text{ für } u = 0{,}1;$$
   also ist
   $$p_{ik} = 1 = m_{ik} \vee n_{ik}.$$

Damit ist a) bewiesen.

Die Behauptung b) erkennt man unmittelbar aus (6), worin die Negation die erste mit der zweiten und die dritte mit der vierten Zeile vertauscht.

Der Homomorphismus ist ein Isomorphismus:

Sei 0 die Nullmatrix aus $\mathfrak{M}_B$ und $0'$ das Nullelement aus $\mathfrak{F}_{D\times D\times W_1}$, dann ist
$$h^{-1}(0) = 0';$$
denn aus $m_{ik} = 0$ für $0 \leqslant i, k < B$ folgt $f(x, y, u) = 0$ für $(x, y, u) \in \mathfrak{F}_{D\times D\times W_1}$.

Der Isomorphismus h ist eine Abbildung „auf" $\mathfrak{M}_B$:

Sei $(m_{ik}) \in \mathfrak{M}_B$, dann ist die durch
$$\left.\begin{aligned} f(x,y,0) &= \begin{cases} 0 \text{ für } m_{ik} = 0 \text{ oder } = r \\ 1 \text{ für } m_{ik} = 1 \text{ oder } = t \end{cases} \\ f(x,y,1) &= \begin{cases} 0 \text{ für } m_{ik} = 0 \text{ oder } = t \\ 1 \text{ für } m_{ik} = 1 \text{ oder } = r \end{cases} \end{aligned}\right\} \text{für } i = s^{-1}(x),\ k = s^{-1}(y)$$
auf $D \times D \times W_1$ definierte Funktion aus $\mathfrak{F}_{D\times D\times W_1}$ und $(m_{ik}) = h(f)$.

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Auf Grund dieses Satzes unterscheiden wir häufig nicht zwischen der Funktion und der sie darstellenden Matrix und sprechen oft von der Matrix auch als der Funktion.

Die Charakterisierung von $h(\mathfrak{L}_B)$ und $h(\mathfrak{L}_B^*)$

Sei $(m_{ik}) \in \mathfrak{M}_B$. Wir bezeichnen

$$d_j = \{m_{ik} \mid i + k = j\} \;;\; j = 0, 1, \ldots, 2B - 2$$

als die Diagonalmengen von (m_{ik}).

Hilfssatz 1: Wenn $(m_{ik}) \in h(\mathfrak{L}_B)$ ist, dann enthalten die Diagonalmengen d_j $(j = 0, 1, \ldots, 2B - 2)$ von (m_{ik}) genau ein Element. Ist $(m_{ik}) \in h(\mathfrak{L}_B^*)$, dann gilt zusätzlich $d_j = d_k$ für $i \equiv k \bmod. B$.

Beweis: Auf Grund der Voraussetzung gibt es ein $f \in \mathfrak{L}_B$ mit $h(f) = (m_{ik})$ Nach Definition von $\mathfrak{L}_B$ gibt es ein f', so daß gilt

$$f(x, y, u) = f'(s^{-1}(x) + s^{-1}(y) + u).$$

Hieraus folgt

$$f(x', y', u) = f(x, y, u)$$

für

$$s^{-1}(x') + s^{-1}(y') = s^{-1}(x) + s^{-1}(y).$$

Aus der Definition von h folgt nun

$$m_{ik} = m_{jp} \text{ für } i + k = j + p\,;$$

es ist also

und
$$d_i = \{m_{0j}\} \text{ für } 0 \leq j < B$$
$$d_j = \{m_{p,\,B-1}\} \text{ für } B \leq j = p + B - 1 \leq 2B - 2.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Sei nun $(m_{ik}) \in h(\mathfrak{L}^*{}_B)$, dann folgt analog

$$m_{ik} = m_{jp} \text{ für } i + k \equiv j + p \bmod. B.$$

Also ist

$$d_j = d_k \text{ für } j \equiv k \bmod. B.$$

$$\begin{matrix} r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r \\ 1 & 0 & r & 0 \\ 0 & r & 0 & 1 \end{matrix}$$

Die nebenstehende Matrix aus $\mathfrak{M}_4$ besitzt nur Diagonalmengen aus einem Element; es gilt sogar $d_j = d_k$ für $j \equiv k \bmod. 4$. Aus dem folgenden Satz erkennen wir, daß diese Matrix jedoch nicht in $h(\mathfrak{L}_4)$ liegt. Der eben bewiesene Satz charakterisiert also $h(\mathfrak{L}_B)$ noch nicht.

Hilfssatz 2: Sei $(m_{ik}) \in h(\mathfrak{L}_B)$; dann gilt:

a) Aus $d_k = \{1\}$ und $d_{k-1} \neq \{1\}$ folgt $d_{k-1} = \{r\}$ für $0 < k \leqslant 2B - 2$.

b) Aus $d_k = \{1\}$ und $d_{k+1} \neq \{1\}$ folgt $d_{k+1} = \{t\}$ für $0 \leqslant k < 2B - 2$.

c) Aus $d_k = \{r\}$ folgt $d_{k+1} \neq \{r\}$ für $0 \leqslant k < 2B - 2$.

d) Die Aussagen a), b) und c) bleiben richtig, wenn die in ihnen vorkommenden Elemente von $\mathfrak{A}_4$ durch die jeweils negierten ersetzt werden.

Beweis: Sei $f \in \mathfrak{L}_B$ und $(m_{ik}) = h(f)$. Nach Definition von $\mathfrak{L}_B$ gibt es ein f', so daß gilt

$$f(x, y, u) = f'(s^{-1}(x) + s_{-1}(y) + u).$$

Aus den Voraussetzungen von a) und b) und der Definition von h folgt

$$m_{ij} = f'(k) = f'(k + 1) \text{ für } i + j = k.$$

Zu a): Daraus folgt

$$f'(k - 1 + u) = 1 \text{ für } u = 1.$$

Wegen $d_{k-1} \neq \{1\}$ ist aber

$$f'(k-1+u) = 0 \text{ für } u = 0 .$$

Nach der Definition von h ergibt das

$$m_{ij} = r \text{ für } i+j = k-1$$

oder

$$d_{k-1} = \{r\} .$$

Zu b) Wegen $d_k = \{1\}$ gilt analog wie unter a)

$$f'(k+1+u) = 1 \text{ für } u = 0 .$$

Wegen $d_{k+1} \neq \{1\}$ folgt

$$f'(k+1+u) = 0 \text{ für } u = 1 .$$

Also ist

$$m_{ij} = t \text{ für } i+j = k+1 ;$$

das heißt

$$d_{k+1} = \{t\} .$$

Zu c): Aus $m_{ij} = r$ folgt

$$f'(k+u) = \begin{cases} 1 \text{ für } u = 1 \\ 0 \text{ für } u = 0 \end{cases} \quad \text{für } k = i+j .$$

Hieraus folgt

$$f'(k+1+u) = 1 \text{ für } u = 0 ;$$

das heißt nach Definition von h

$$m_{ij} \neq r \text{ für } i+j = k+1 .$$

Also ist

$$d_{k+1} \neq \{r\} .$$

Zu d): Die Behauptung d) ergibt sich aus a), b) und c) mittels des Dualitätsprinzipes der BOOLEschen Algebra.

Nach Hilfssatz 1 enthält jedes d_i einer Matrix aus $h(\mathfrak{L}_B)$ genau ein Element und durch Hilfssatz 2 wird die Möglichkeit der Reihenfolge von Diagonalmengen der gleichen Matrix eingeschränkt. Auf Grund des Hilfssatzes 2 sind nur die folgenden Paarungen für d_k und d_{k+1} möglich:

$$(0,0), (0,r), (r,1), (r,t), (t,0), (t,r), (1,t), (1,1) ,$$

worin das erste Element jedes Paares in d_k und das zweite in d_{k+1} liegt.

Überträgt man die Operationen von $\mathfrak{A}_4$ durch komponentenweise Ausführung auf diese Paare, dann erkennt man, daß die Menge dieser Paare gegenüber diesen Operationen abgeschlossen ist. Hieraus folgt unmittelbar:

Hilfssatz 3: Die Menge der Matrizen von $\mathfrak{M}_B$, die den Hilfssätzen 1 und 2 genügt, bildet eine BOOLEsche Algebra. Diese soll mit $\mathfrak{L}_B'$ bezeichnet werden.

Sei nun: D_0 die Matrix mit $d_0 = \{t\}$ und $d_i = \{0\}$ mit $0 < i \leqslant 2B-2$; D_i die Matrix mit $d_{i-1} = \{r\}$, $d_i = \{t\}$, $d_k = \{0\}$ für $k \neq i, i \neq 1$ und $0 \leqslant k \leqslant 2B-2$, $0 < i \leqslant 2B-2$. D_{2B-1} die Matrix mit $d_k = \{0\}$ und $d_{2B-2} = \{r\}$, $0 \leqslant k < 2B-2$.

Hilfssatz 4: Die Matrizen D_i, $i = 0, 1, \ldots, 2B-1$ sind die Atome der BOOLEschen Algebra $\mathfrak{L}_B'$.

Beweis: Man erkennt ohne weiteres, daß die D_i in $\mathfrak{L}'_B$ liegen. Es ist zu zeigen:

a) Für jedes $M \in \mathfrak{L}'_B$ gilt $M\,D_i = D_i$ oder $M\,D_i = 0$ für $0 \leqslant i \leqslant 2B-1$; das heißt, jedes D_i ist ein Atom von $\mathfrak{L}'_B$.

b) $\bigvee\limits_{i=0}^{2B-1} D_i = 1$; das heißt, daß jedes Atom von $\mathfrak{L}'_B$ in $\{D_0, \ldots, D_{2B-1}\}$ enthalten ist.

Zu a): Sei d_k die k-te Diagonalmenge von M und d_{ik} die k-te Diagonalmenge von D_i; d'_{ik} sei die k-te Diagonalmenge von $M\,D_i$.
Sei $d_k = \{w_k\}$ und $d_{ik} = \{w_{ik}\}$, dann ist

$$d'_{ik} = \{w_k\, w_{ik}\}.$$

Also ist

$$d'_{00} = \{t\} \text{ oder } = \{0\}\,;\; d'_{0k} = \{0\} \text{ für } 0 < k \leqslant 2B-2\,;$$

das heißt, D_0 ist ein Atom von $\mathfrak{L}'_B$.
$d'_{2B-1,2B-2} = \{r\}$ oder $= \{0\}$, $d'_{2B-1,k} = \{0\}$ für $0 \leqslant k < 2B-2$; das heißt D_{2B-1} ist Atom.
$d'_{i,i-1} = \{0\}$ oder $= \{r\}$, $d'_{ii} = \{t\}$ oder $= \{0\}$, $0 < i < 2B-1$, $d'_{ik} = \{0\}$ für $k \neq i, i-1$, $0 < i < 2B-1$, $0 \leqslant k \leqslant 2B-2$.
Da nach Hilfssatz 3 $M\,D_i \in \mathfrak{L}'_B$ ist, ist nur

$$d'_{i,i} = \{0\} \text{ und } d'_{i,i-1} = \{0\}$$

oder

$$d'_{ii} = \{t\} \text{ und } d'_{i,i-1} = \{r\}$$

möglich. Also ist D_i, $0 < i < 2B-1$ ein Atom.
Zu b): Eine Matrix aus $\mathfrak{L}'_B$ ist durch ihre Diagonalmengen eindeutig bestimmt.
Bezeichne d'_i die i-te Diagonalmenge von $\bigvee\limits_{i=0}^{2B-1} D_i$. Dann ist

$$d'_i = \left\{\bigvee_{k=0}^{2B-1} w_{ki}\right\} = \{w_{ii} \vee w_{i+1,i}\} = \{t \vee r\} = \{1\}, i = 0, 1 \ldots, 2B-2,$$

woraus die Behauptung b) folgt.

Satz 2: Es ist $\mathfrak{L}'_B = h(\mathfrak{L}_B)$. Hilfssatz 1 und 2 charakterisieren also $h(\mathfrak{L}_B)$ vollständig.

Beweis: Nach Hilfssatz 1 und 2 erfüllen die Elemente von $h(\mathfrak{L}_B)$ die charakterisierenden Eigenschaften von $\mathfrak{L}'_B$. Also ist $h(\mathfrak{L}_B) \subset \mathfrak{L}'_B$. Zeigen wir nun, daß $D_i \in h(\mathfrak{L}_B)$ ist für $i = 0, 1, \ldots, 2B-1$, dann folgt damit die Behauptung des Satzes. Wir haben also zu zeigen, daß es zu jedem D_i ein $f_i \in \mathfrak{L}_B$ gibt mit $h(f) = D_i$. Das leistet aber die Funktion

$$f_i(x, y, u) = f'_i(s^{-1}(x) + s^{-1}(y) + u)$$

mit

$$f'_i(k) = \begin{cases} 1 \text{ für } k = i\,, \\ 0 \text{ für } k \neq i\,, \end{cases} \quad 0 \leqslant k \leqslant 2B-1\,,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Hieraus folgt leicht

Satz 3: Es ist genau dann $M \in h(\mathfrak{L}^{\bullet}_B)$, wenn $M \in h(\mathfrak{L}_B)$ ist und

$$d^{\bullet}_i = d_i \vee d_{i+B} = d_i \text{ für } i = 0, 1, \ldots, B-1\,.$$

Die Atome von $h(\mathfrak{L}_B^*)$ sind $D_i^* = D_i \vee D_{i+B}$ mit $i = 0, 1, \ldots, B-1$.
Auf Grund der in Satz 2 festgestellten Isomorphie zwischen $\mathfrak{L}_B'$ und $h(\mathfrak{L}_B)$ schreiben wir nun der Kürze halber an Stelle von $h(\mathfrak{L}_B)$ einfach $\mathfrak{L}_B$. Ebenso bezeichnen wir auch das Bild von $\mathfrak{L}_B^*$ bei der Abbildung h mit $\mathfrak{L}_B^*$.

Die Einbettung von $\mathfrak{L}_{B \cdot B'}$ in $\mathfrak{L}_B \times \mathfrak{L}_{B'}^*$ *

Sei $B = B^* \cdot B'$ eine Zerlegung von B in ein Produkt natürlicher Zahlen. Wir wollen zeigen, daß sich $\mathfrak{L}_B$ in ein BOOLEsches Produkt zweier BOOLEscher Algebren $\mathfrak{L}_B$ und $\mathfrak{L}_{B'}^+$ einbetten läßt, wovon aber $\mathfrak{L}_B^+$ noch zu definieren ist:

$$\mathfrak{L}_B^+ = \{(m_{ik}) \in \mathfrak{M}_B \mid m_{ik} \in \mathfrak{A}_2,\ m_{ik} = m_{jl} \text{ für } i + k = j + l\},$$
$$\mathfrak{M}_B^+ = \{(m_{ik}) \in \mathfrak{M}_B \mid m_{ik} \in \mathfrak{A}_2\}.$$

Man erkennt, daß $\mathfrak{L}_B^+$ aus genau den Matrizen von $\mathfrak{M}_B$ besteht, deren Diagonalmengen je genau ein Element enthalten, das entweder gleich 0 oder 1 ist. $\mathfrak{L}_B^+$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{M}_B^+$ und $\mathfrak{M}_B^+$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{M}_B$. Man erkennt weiter, daß $\mathfrak{L}_B^+$ und $\mathfrak{L}_B$ kein Element außer dem 0-Element, das mit 0 und dem 1-Element, das mit 1 bezeichnet wird, gemeinsam haben.

Hilfssatz 5: Sei $D_i^+ \in \mathfrak{L}_B^+$, $i = 0, 1, \ldots, 2B-2$ die Matrix mit den Diagonalmengen $d_{i0}, \ldots, d_{i,2B-2}$, worin $d_{ii} = \{1\}$ und $d_{ik} = \{0\}$ ist für $k \neq i$. Die Matrizen D_i^+ $(0 \leqslant i \leqslant 2B-2)$ sind die Atome von $\mathfrak{L}_B^+$.

Den einfachen Beweis übergehen wir. Wir definieren nun zwei Abbildungen von $\mathfrak{M}_A$ in $\mathfrak{M}_B$ für $B = A \cdot B'$.

1. Sei $T \in \mathfrak{M}_A$ und $M = (T_{ik})$ eine Einteilung von $M \in \mathfrak{M}_B$ in B'^2 quadratische Teilmatrizen T_{ik}, dann definieren wir:
   $h_B^A(T) = (T_{ik})$ genau dann, wenn $T_{ik} = T$ für $i, k = 0, 1, \ldots, B'$.
2. Sei $T = (t_{ik}) \in \mathfrak{M}_A$, und $M = (T_{ik})$ nun die Einteilung von $M \in \mathfrak{M}_B$ in A^2 quadratische Teilmatrizen, dann definieren wir:
   $g_B^A(T) = (T_{ik})$ genau dann, wenn jedes Element von T_{ik} gleich t_{ik} ist für $i, k = 0, 1, \ldots, B'$.

Die beiden eben definierten Abbildungen sind Isomorphismen von $\mathfrak{M}_A$ in $\mathfrak{M}_B$.

Wir beweisen nun den folgenden

Hilfssatz 6: Sei $\mathfrak{M}_A'$ das Bild von $\mathfrak{M}_A$ bei der Abbildung h_B^A und $\mathfrak{M}'_{B'}$ das Bild von $\mathfrak{M}_{B'}^+$ bei der Abbildung $g_B^{B'}$. Dann ist $\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_{B'}' \times \mathfrak{M}_A'$, und $\mathfrak{M}_{B'}'$ und $\mathfrak{M}_A'$ sind unabhängig in $\mathfrak{M}_B$.

Beweis: Wegen $\mathfrak{M}_{B'}' \subset \mathfrak{M}_B$ und $\mathfrak{M}_A' \subset \mathfrak{M}_B$ genügt es für den ersten Teil der Behauptung zu zeigen, daß $\mathfrak{M}_B \subset \mathfrak{M}_{B'}' \times \mathfrak{M}_A'$. Sei nun $M = (m_{jl}) \in \mathfrak{M}_B$ und

$$m_{jl} \begin{cases} = 0 & \text{für } (j, l) \neq (i, k), \\ \neq 0 & \text{für } (j, l) = (i, k), \end{cases} \qquad 0 \leq j, l < B \text{ und festem } i, k.$$

Da sich jede Matrix aus $\mathfrak{M}_B$ durch Vereinigung aus solchen Matrizen mit $0 \leqslant i, k < B$ erzeugen läßt, brauchen wir nur zu zeigen, daß M in $\mathfrak{M}_A' \times \mathfrak{M}_{B'}'$ enthalten ist. Zu diesem Zweck zerlegen wir i und k in der folgenden Weise durch Division mit Rest in

$$i = i_2 A + i_1,\ k = k_2 A + k_1 \text{ mit } 0 \leq i_1, k_1 < A \text{ und } 0 \leq i_2, k_2 < B'.$$

Setzen wir nun $T = (t_{jl}) \in \mathfrak{M}_A$ mit

* Die Verknüpfung „x" bedeutet zwischen deutschen Buchstaben das BOOLEsche Produkt der Algebren.

$$t_{jl} = \begin{cases} m_{ik} & \text{für } (j, l) = (i_1, k_1)\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $S = (s_{jl}) \in \mathfrak{M}_{B'}$ mit

$$s_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{für } (j, l) = (i_2, k_2)\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann gilt

$$M = h_B^A(T)\, g_B^{B'}(S)\,. \in \mathfrak{M}_A' \times \mathfrak{M}_{B'}'\,.$$

Der zweite Teil der Behauptung des Satzes folgt unmittelbar.

Hilfssatz 7: Sei $\mathfrak{G}$ das Bild von $\mathfrak{L}_A$ bei dem Isomorphismus h_B^A und $\mathfrak{G}^+$ das Bild von $\mathfrak{L}_{B'}^+$ bei dem Isomorphismus $h_{B'}^B$.

Dann sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^+$ voneinander unabhängig und es ist $\mathfrak{L}_B \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}^+$.

Beweis: Der Beweis der Unabhängigkeit von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^+$ folgt aus dem Hilfssatz 6 wegen $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{M}_A'$ und $\mathfrak{G}^+ \subset \mathfrak{M}_{B'}'$.

Wir bezeichnen die Atome von $\mathfrak{L}_B$ mit $D_0, D_1, \ldots, D_{2B-1}$ und die Atome von $\mathfrak{G}$ mit $D_0^1, D_1^1, \ldots, D_{2A-1}^1$ und die Atome von $\mathfrak{G}^+$ mit $D_0^2, \ldots, D_{2B'-2}^2$.

Wir zerlegen i durch Division mit Rest in $i = lA + j$ mit $0 \leqslant j < A$ und $0 \leqslant l < B'$. Mit dieser Bezeichnung gilt

$$D_i = D_l^2\, D_j \vee D_{l-1}^2\, D_{A+j}^1 \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, 2B-1\,, \tag{7}$$

worin $D_{-1}^2 = D_{2B'-1}^2 = 0$ gesetzt ist.

Da sich die Atome von $\mathfrak{L}_B$ durch die Atome von $\mathfrak{G}$ und die Atome von $\mathfrak{G}^+$ ausdrücken lassen gilt also $\mathfrak{L}_B \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}^+$.

Satz 4: Sei $B = B_1 B_2 \ldots B_q$, dann gibt es ein System von paarweise unabhängigen Unteralgebren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2^+, \ldots, \mathfrak{G}_q^+$ von $\mathfrak{M}_B$ mit $\mathfrak{G}_1 \cong \mathfrak{L}_{B_1}$, $\mathfrak{G}_2^+ \cong \mathfrak{L}_{B_2}^+$, $\ldots$ $\mathfrak{G}_q^+ \cong \mathfrak{L}_{B_q}^+$, so daß gilt

$$\mathfrak{L}_B \subset \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2^+ \times \ldots \times \mathfrak{G}_q^+\,.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach q unter Verwendung von Hilfssatz 6 und 7.

Für $q = 2$ ist der Satz 4 identisch mit dem Hilfssatz 7. Sei nun $q > 2$ und Satz 4 für $q - 1$ schon bewiesen.

Wir setzen $B_1' = B_1 \ldots B_{q-1}$ und erhalten aus Hilfssatz 7 $\mathfrak{L}_B \subset \mathfrak{G}_1' \times \mathfrak{G}_q^+$, worin $\mathfrak{G}_1' \cong \mathfrak{L}_{B_1'}$ und $\mathfrak{G}_q^+ \cong \mathfrak{L}_{B_q}^+$ und $\mathfrak{G}_1'$ unabhängig von $\mathfrak{G}_q^+$ ist. Nun wenden wir die Induktionsannahme auf $\mathfrak{L}_{B_1'} \subset \mathfrak{M}_{B_1'}$ an und erhalten

$$\mathfrak{L}_{B_1'} \subset \mathfrak{G}_1^\bullet \times \mathfrak{G}_2' \times \ldots \times \mathfrak{G}_{q-1}'$$

mit $\mathfrak{G}_1^\bullet \cong \mathfrak{L}_{B_1}$, $\mathfrak{G}_2' \cong \mathfrak{L}_{B_2}^+, \ldots, \mathfrak{G}_{q-1}' \cong \mathfrak{L}_{B_{q-1}}^+$, wobei die Faktoren paarweise unabhängig sind.

Diese Zerlegung betten wir mittels $h_B^{B'1}$ in $\mathfrak{M}_B$ ein und bezeichnen das hierdurch erhaltene Bild von $\mathfrak{G}_1^+$ mit $\mathfrak{G}_1$ und das von $\mathfrak{G}_i'$ mit $\mathfrak{G}_i^+$. Wir erhalten, da $h_B^{B'1}$ ein Isomorphismus ist,

$$\mathfrak{G}_{B_1'} \subset \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2^+ \times \ldots \times \mathfrak{G}_{q-1}^+$$

und damit

$$\mathfrak{L}_B \subset \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2^+ \times \ldots \times \mathfrak{G}_q^+\,.$$

Wegen der Isomorphie von $h_B^{B'}$ folgt weiter

$$\mathfrak{G}_1 \cong \mathfrak{L}_{B_1},\ \mathfrak{G}_2^+ \cong \mathfrak{L}_{B_2}^+, \ldots, \mathfrak{G}_q^+ \cong \mathfrak{L}_{B_q}^+ .$$

Aus dem gleichen Grund bleibt die Unabhängigkeit der ersten $q-1$ Faktoren erhalten. Die Unabhängigkeit von $\mathfrak{G}_q^+$ von den übrigen Faktoren ergibt sich folgendermaßen: Es ist

$$\mathfrak{G}_1^+ \times \mathfrak{G}_2' \times \ldots \times \mathfrak{G}_{q-1}' \subset \mathfrak{M}_{B_1'},\ \mathfrak{G}_q^+ \subset g_B^{B_q}(\mathfrak{M}_{B_q}^+) .$$

Nach Hilfssatz 6 ist aber $h_B^{B_1'}(\mathfrak{M}_{B_1'})$ und $g_B^{B_q}(\mathfrak{M}_{B_q}^+)$ voneinander unabhängig, woraus sich die Behauptung ergibt.

Sind $D_0, D_1, \ldots, D_{2B-1}$ die Atome von $\mathfrak{L}_B$, dann gilt

$$\bigvee_{i=0}^{2B-1} D_i = 1 .$$

Ist also $M \in \mathfrak{L}_B$, dann ist

$$\bigvee_{i=0}^{2B-1} M D_i = M .$$

Setzen wir

$$m_i = \begin{cases} 1 \text{ für } M D_i = D_i , \\ 0 \text{ für } M D_i = D_i , \end{cases} \quad i = 0, \ldots, 2B-1 ,$$

dann erhalten wir

$$M = \bigvee_{i=0}^{2B-1} m_i D_i .$$

Hieraus erhält man mittels Satz 4 unter mehrfacher Benutzung von (7) auch eine Darstellung von M in den Atomen von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2^+, \ldots, \mathfrak{G}_q^+$. Eine solche Darstellung ist möglich ohne Benutzung der Negation, was für manches „Bausteinsystem" aus elektrischen Gründen besonders vorteilhaft ist. Da sich Atome aus jedem Erzeugendensystem einer BOOLEschen Algebra leicht darstellen lassen, hat man damit die Möglichkeit, eine Darstellung von M aus jedem Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2^+, \ldots, \mathfrak{G}_q^+$ in einfacher Weise gewinnen zu können.

Die Darstellungen von M in diesen Erzeugendensystemen sind durch M nicht eindeutig bestimmt, so daß sich die Aufgabe stellt, bei einem gegebenen Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2^+, \ldots, \mathfrak{G}_q^+$ die einfachsten Darstellungen von M anzugeben. Diese Aufgabe werden wir an anderer Stelle für den Fall, daß diese Erzeugendensysteme die Atome der Algebren sind, durch eine Verallgemeinerung des QUINEschen Verfahrens lösen.

Der Fall $B = 2^n$

Für $B = 2^n$ mit $n > 1$ erhält man

$$\mathfrak{L}_B \subset \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2^+ \times \ldots \times \mathfrak{G}_n^+ ,$$

worin $\mathfrak{G}_1 \cong \mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{G}_2^+ \cong \ldots \cong \mathfrak{G}_n^+ \cong \mathfrak{L}_2^+$ ist. Wir wollen zunächst $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_2^+$ betrachten. Die Atome von $\mathfrak{L}_2$ sind

$$D_0^1 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad D_1^1 = \begin{pmatrix} r & t \\ t & 0 \end{pmatrix},\quad D_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & t \end{pmatrix},\quad D_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix};$$

die Atome von $\mathfrak{L}_2^+$ sind

$$D_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r & r \\ r & r \end{pmatrix}$$

ein freies Erzeugendensystem von $\mathfrak{M}_2$; X und Y bilden schon ein solches von $\mathfrak{M}_2^+$. In diesem Erzeugendensystem erhält man:

$$D_0^1 = \underline{X}\,\underline{Y}\,\underline{R}\,, \quad D_1^1 = \underline{X}\,\underline{Y}\,R \vee X\,\underline{Y}\,\underline{R} \vee \underline{X}\,Y\,\underline{R}\,, \tag{8}$$
$$D_2^1 = \underline{X}\,Y\,R \vee X\,\underline{Y}\,R \vee X\,Y\,\underline{R}, \quad D_3^1 = X\,Y\,R\,.$$

$$D_0^2 = \underline{X}\,\underline{Y}, D_1^2 = \underline{X}\,Y \vee X\,\underline{Y}, \; D_2^2 = X\,Y\,. \tag{9}$$

Sei nun h_1 der Isomorphismus, der auf Grund der Konstruktion in Satz 4 $\mathfrak{L}_2$ auf $\mathfrak{G}_1$ abbildet. Man erkennt

$$h_1 = h_4^2 \cdot h_8^4 \ldots h_{2^n}^{2^{n-1}}.$$

Ist X_1, Y_1, R_1 das Bild von X, Y bzw. R bei dieser Abbildung, dann gilt für $X_1 = (x_{ik}^1)$, $Y_1 = (y_{ik}^1)$ und $R_1 = (r_{ik})$

$$x_{ik}^1 = \begin{cases} 0 \text{ für } i \equiv 0 \bmod 2 \\ 1 \text{ für } i \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}, \quad y_{ik}^1 = \begin{cases} 0 \text{ für } k \equiv 0 \bmod 2 \\ 1 \text{ für } k \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}, \quad r_{ik} = r$$

für $i, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.

Man erhält die Atome von $\mathfrak{G}_1$, indem man in (8) überall X, Y bzw. R durch X_1, Y_1 bzw. R_1 ersetzt.

Sei $h_j, j = 2, \ldots, n$ der Isomorphismus, der auf Grund der Konstruktion im Beweis zu Satz 4 $\mathfrak{L}_2^+$ auf $\mathfrak{G}_j^+$ abbildet. Man erkennt:

$$h_j = g_{2^j}^{2} \cdot h_{2^{j+1}}^{2^j} \cdot h_{2^{j+2}}^{2^{j+1}} \ldots h_{2^n}^{2^{n-1}} \quad \text{für } j = 2, \ldots, n-1, \; h_n = g_{2^n}^{2}\,.$$

Sei nun

$$(m_{ik}) = g_{2^j}^{2}\,(X), \text{ dann ist}$$

$$m_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leq i < 2^{j-1} \\ 1 \text{ für } 2^{j-1} \leq i < 2^j \end{cases}.$$

Hieraus ergibt sich

$$X_j = h_j(X) = (x_{ik}^j)\,,$$

$$x_{ik}^j = \begin{cases} 0 \text{ für } i \equiv s \bmod 2^j \text{ und } 0 \leqslant s < 2^{j-1}\,, \\ 1 \text{ für } i \equiv s \bmod 2^j \text{ und } 2^{j-1} \leqslant s < 2^j \end{cases}.$$

Analog erhält man

$$Y_j = h_j(Y) = (y_{ik}^j)\,,$$

$$y_{ik}^j = \begin{cases} 0 \text{ für } k \equiv s \bmod 2^j \text{ und } 0 \leqslant s < 2^{j-1} \\ 1 \text{ für } k \equiv s \bmod 2^j \text{ und } 2^{j-1} \leqslant s < 2^j \end{cases}.$$

Man erhält die Atome von $\mathfrak{G}_i^+$ $(i \geqslant 2)$, indem man in (9) X bzw. Y durch X_i bzw. Y_i ersetzt. Damit haben wir

Satz 5: Jede Matrix aus $\mathfrak{L}_B$ läßt sich erzeugen durch die folgenden Matrizen:

$$K_1' = \underline{X}_1 \underline{Y}_1 \underline{R}_1, \quad G_1' = \underline{X}_1 \underline{Y}_1 R_1 \vee X_1 \underline{Y}_1 \underline{R}_1 \vee \underline{X}_1 Y_1 \underline{R}_1 ,$$
$$G_1 = X_1 \underline{Y}_1 R_1 \vee \overline{X}_1 Y_1 R_1 \vee X_1 Y_1 \underline{R}_1 , \quad K_1 = X_1 Y_1 R_1 ,$$
$$K_i' = \underline{X}_i \underline{Y}_i , \quad G_i = \underline{X}_i Y_i v X_i \underline{Y}_i , \quad K_i = X_i Y_i , \quad i = 2, \ldots , n .$$

Die Darstellung der Matrizen aus $\mathfrak{L}_B$ läßt sich ohne Negation in diesen Erzeugenden angeben.

Die Einbettung des allgemeinen Falles in den Fall $B = 2^n$
und die Codierung des Ziffernsystems

Die Beantwortung der Frage, ob die in den beiden letzten Abschnitten betrachteten Einbettungen von $\mathfrak{L}_B$ in BOOLEsche Produkte zu einer Trennung der Variabeln führt, hängt von der Codierung der Ziffern ab.

Im folgenden soll unter $x = s(a)$ die Darstellung der natürlichen Zahlen $0 \leqslant a < B$ im Dualsystem verstanden werden, wobei x_1 die Stelle niedrigster Wertigkeit sein soll; für $B = 8$ erhält man bei dieser Codierung $(0, 0, 0) = s(0)$, $(1, 0, 0) = s(1)$, $(0, 1, 0) = s(2)$, $(1, 1, 0) = s(3)$, $(0, 0, 1) = s(4)$, usw. Diese Codierung soll die natürliche Codierung heißen.

Sei nun $f_{2i}(x, y, u) = x_i$, $f_{2i-1}(x, y, u) = y_i$, $f_{2n}(x, y, u) = u$ für $(x, y, u) \in D \times D \times W_1$ und $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

Hilfssatz 8: Ist h der in (6) definierte Isomorphismus von $\mathfrak{F}_{D \times D \times W_1}$ auf $\mathfrak{M}_B$ und ist $x = s(a)$ die natürliche Codierung, dann ist $h(f_{2i}) = X_i$, $h(f_{2i-1}) = Y_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $h(f_{2n}) = R_1$.

In diesem Fall führen also, wie aus Satz 5 folgt die im vorigen Abschnitt betrachteten Zerlegungen zu einer Trennung der Variabeln.

Sei nun B beliebig und $2^{n-1} < B \leqslant 2^n$; $x = s(a)$ sei die natürliche Codierung. Dann definieren wir durch

$$x = s_c(a) = s(a + c) \text{ für } 0 \leqslant a < B \text{ und } 0 \leqslant c \leqslant 2^n - B$$

weitere $2^n - B + 1$ Codierungen. Wir zeigen, daß auch diese Codierungen bei den betrachteten Zerlegungen zu einer Trennung der Variabeln führen:
Sei

$$h_c \colon \mathfrak{M}_{2^n} \longrightarrow \mathfrak{M}_B$$

die folgendermaßen definierte Abbildung:

$$(n_{ik}) = h_c(m_{ik}) \text{ mit } (n_{ik}) \in \mathfrak{M}_B \text{ und } (m_{ik}) \in \mathfrak{M}_{2^n}$$

genau dann, wenn

$$n_{ik} = m_{i+c, k+c} \text{ für } i, k = 0, 1, \ldots, B - 1 .$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{M}_{2^n}$ auf $\mathfrak{M}_B$, der $\mathfrak{L}_{2^n}$ auf $\mathfrak{L}_B$ abbildet. Ist $M \in \mathfrak{L}_B$, dann gibt es also ein $M' \in \mathfrak{L}_{2^n}$ mit $h_c(M') = M$.

Wir setzen nun $X_i' = h_c(X_i)$, $Y_i' = h_c(Y_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $R' = h_c(R_1)$. Dann gilt für die gleichen Indices

$$h(f_{2i}) = X_i', \; h(f_{2i-1}) = Y_i', \; h(f_{2n}) = R' ,$$

wenn h die durch (6) definierte Abbildung ist.

Jede Darstellung eines $M' \in \mathfrak{M}_{2^n}$ in den X_i, Y_i, R_1 geht durch h_c in eine Darstellung von $M = h_c(M')$ in den X_i', Y_i', R' über, so daß gilt:

Satz 6: Jede Funktion $M \in \mathfrak{L}_B$ läßt sich bei der Codierung s_c durch die im Satz 5 definierten Funktionen darstellen, wenn in diesen X_i durch X'_i, Y_i durch Y'_i und R_1 durch R' ersetzt wird.

Korollar: Sei $\mathfrak{L}_2{}^n \subset \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2^+ \times \ldots \times \mathfrak{G}_n^+$ die im vorigen Abschnitt betrachtete Einbettung von $\mathfrak{L}_2{}^n$ in ein BOOLEsches Produkt. Setzen wir $\mathfrak{G}'_1 = h_c(\mathfrak{G}_1)$ und $\mathfrak{G}'_i = h_c(\mathfrak{G}_i^+)$, $(i = 2, \ldots, n)$, dann führt die Einbettung $\mathfrak{L}_B \subset \mathfrak{G}'_1 \times \mathfrak{G}'_2 \times \ldots \mathfrak{G}'_n$ bei der Codierung s_c zu einer Trennung der Variabeln.

Bei der Abbildung h_c können einige der Funktionen des Satzes 5 auf 0 abgebildet werden, so daß man zur Darstellung der Funktionen aus $\mathfrak{L}_B$ eventuell nur einen Teil dieser Funktionen braucht.

Man kann leicht noch einige weitere Codierungen angeben, die auch zur Trennung der Variabeln führen:

Sei $B = B_1 \cdot B_2 \cdots B_q$. Dann setzen wir

$$A_1 = 1, A_2 = B_1, A_3 = B_1 \cdot B_2, \ldots, A_q = B_1 \cdot B_2 \cdots B_{q-1}.$$

Jede natürliche Zahl $0 \leqslant a < B$ läßt sich eindeutig in der Form

$$a = \sum_{i=1}^{q} a_i \cdot A_i \text{ mit } 0 \leqslant a_i < B_i \text{ und } i = 1, 2, \ldots, q$$

darstellen. Wir nennen $(a_1, \ldots, a_q)$ eine Darstellung von a. Ist $x^i = s^i(a_i)$ eine beliebige Codierung von $0 \leqslant a_i < B_i$, dann gilt

Satz 7: Ist $B = B_1 \cdots B_q$ und $x = s(a) = (s^1(a_1), \ldots, s^q(a_q))$ eine Codierung von a auf Grund der eben gegebenen Darstellung von a durch $(a_1, \ldots, a_q)$, dann führt die bis auf Isomorphie durch Satz 4 gegebene Einbettung $\mathfrak{L}_B \subset \mathfrak{L}_{B1} \times \times \mathfrak{L}_{B2}^+ \times \ldots \times \mathfrak{L}_{Bq}^+$ zu einer Trennung der Variabeln.

Benutzt man bei der Codierung der a_i nicht irgendeine, sondern etwa die natürliche Codierung oder eine der Codierungen s_c, dann lassen sich die in Satz 7 auftretenden Faktoren nach Satz 6 noch weiter zerlegen.

Ein Dezimaladdierwerk und ein Addierwerk mod. 9

Wir wollen zunächst das Dezimaladdierwerk untersuchen; d. h. wir haben den Fall $B = 10$. Als Code wählen wir die natürliche Darstellung der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$. Wir können also Satz 6 anwenden und $\mathfrak{L}_{10}$ in $\mathfrak{L}_{16}$ einbetten. Zuerst erzeugen wir die Atome von $\mathfrak{L}_4$ und $\mathfrak{L}_4^+$. Hierzu benutzen wir die in Satz 5 angegebenen Funktionen, so daß unsere Hilfsfunktionen erster Stufe durch

$$K'_i, G_i, K_i \text{ mit } i = 2, 3, 4 \text{ und } K'_1, G'_1, G_1, K_1$$

gegeben sind. Bezeichnen wir die Atome von $\mathfrak{L}_4$ mit $D_0^1, D_1^1, \ldots, D_7^1$ und die Atome von $\mathfrak{L}_4^+$ mit $D_0^2, D_1^2, \ldots, D_6^2$, dann erhalten wir mittels (7)

$$D_0^1 = K'_1 K'_2,\ D_1^1 = G'_1 K'_3,\ D_2^1 = K'_1 G_2 \vee G_1 K'_2,\ D_3^1 = K_1 K'_2 \vee G'_1 G_2,$$
$$D_4^1 = K'_1 K_2 \vee G_1 G_2,\ D_5^1 = G'_1 K_2 \vee K_1 G_2,\ D_6^1 = G_1 K_2,\ D_7^1 = K_1 K_2.$$
$$D_0^2 = K'_3 K'_4,\ D_1^2 = G_3 K'_4,\ D_2^2 = K'_3 G_4 \vee K_3 K'_4,\ D_3^2 = G_3 G_4,$$
$$D_4^2 = K_3 G_4 \vee K'_3 K_4,\ D_5^2 = G_3 K_4,\ D_6^2 = K_3 K_4.$$

Wir bezeichnen nun der Reihe nach mit der niedrigsten Wertigkeit beginnend die Summenfunktionen mit z_1, z_2, z_3, z_4 und mit u' den Übertrag. Man findet:

$$\mathfrak{z}_1 = \left.\begin{array}{cccc|cccc|cc}
r & t & r & t & r & t & r & t & r & t \\
t & r & t & r & t & r & t & r & t & r \\
r & t & r & t & r & t & r & t & r & t \\
t & r & t & r & t & r & t & r & t & r \\
\hline
r & t & r & t & r & t & r & t & r & t \\
t & r & t & r & t & r & t & r & t & r \\
r & t & r & t & r & t & r & t & r & t \\
t & r & t & r & t & r & t & r & t & r \\
\hline
r & t & r & t & r & t & r & t & r & t \\
t & r & t & r & t & r & t & r & t & r
\end{array}\right., \qquad
\mathfrak{z}_2 = \left.\begin{array}{cccc|cccc|cc}
0 & r & 1 & t & 0 & r & 1 & t & 0 & 0 \\
r & 1 & t & 0 & r & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\
1 & t & 0 & r & 1 & t & 0 & 0 & 0 & r \\
t & 0 & r & 1 & t & 0 & 0 & 0 & r & 1 \\
\hline
0 & r & 1 & t & 0 & 0 & 0 & r & 1 & t \\
r & 1 & t & 0 & 0 & 0 & r & 1 & t & 0 \\
1 & t & 0 & 0 & 0 & r & 1 & t & 0 & r \\
t & 0 & 0 & 0 & r & 1 & t & 0 & r & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & r & 1 & t & 0 & r & 1 & t \\
0 & 0 & r & 1 & t & 0 & r & 1 & t & 0
\end{array}\right.,$$

$$\mathfrak{z}_3 = \left.\begin{array}{cccc|cccc|cc}
0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & r & 1 & 1 & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r & 1 & 1 & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\
1 & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 \\
1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 & t & 0
\end{array}\right., \qquad
\mathfrak{z}_4 = \left.\begin{array}{cccc|cccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & t & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & r & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & r & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & r & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1
\end{array}\right.,$$

$$u' = \left.\begin{array}{cccc|cccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & r & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & r & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
r & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right.$$

Wir haben in diesen Matrizen aus $\mathfrak{L}_{10}$ die durch den Homomorphismus h_0 von $\mathfrak{M}_{16}$ in $\mathfrak{M}_{10}$ abgebildeten „Diagonalen" D_i^2 eingezeichnet; durch Diagonallinien haben wir in $\mathfrak{z}_2$ die „Lage" von D_2^1 angedeutet.

Man erkennt, daß durch h_0 die Matrizen D_5^2 und D_6^2 auf $0 \in \mathfrak{M}_{10}$ abgebildet werden und ebenso der Term $K_3\, G_4$ von D_4^2, so daß man diese zur Darstellung von $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4$ und u' nicht braucht. Wir bezeichnen das Bild von D_i^1 und D_i^2 bei der Abbildung h_0 genauso, so daß man erhält:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_1 &= D_1^1 \vee D_3^1 \vee D_5^1 \vee D_7^1\,, \\
\mathfrak{z}_2 &= D_0^2\,(D_2^1 \vee D_3^1) \vee D_1^2\,(D_2^1 \vee D_3^1) \vee D_2^2\,(D_4^1 \vee D_5^1) \\
&\quad \vee D_3^2\,(D_0^1 \vee D_1^1 \vee D_4^1 \vee D_5^1) \vee D_4^2\,(D_0^1 \vee D_1^1)\,, \\
\mathfrak{z}_3 &= D_0^2\,(D_4^1 \vee D_5^1 \vee D_6^1 \vee D_7^1) \vee D_1^2\,(D_0^1 \vee D_1^1 \vee D_2^1 \vee D_3^1) \\
&\quad \vee D_2^2\,(D_6^1 \vee D_7^1) \vee D_3^2\,(D_2^1 \vee D_3^1 \vee D_4^1 \vee D_5^1) \vee D_4^2\,(D_0^1 \vee D_1^1)\,, \\
\mathfrak{z}_4 &= D_1^2\,(D_4^1 \vee D_5^1) \vee D_2^2\,(D_0^1 \vee D_1^1) \vee D_4^2\,(D_2^1 \vee D_3^1)\,, \\
u' &= D_1^2\,(D_6^1 \vee D_7^1) \vee D_2^2\,(D_2^1 \vee D_3^1 \vee D_4^1 \vee D_5^1 \vee D_6^1 \vee D_7^1) \vee D_3^2 \vee D_4^2\,.
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß man unter Ausnützung der speziellen Beschaffenheit dieser Funktionen die Darstellung noch vereinfachen kann: So findet man

$$\mathfrak{z}_1 = G_1' \vee K_1\,;$$

in den übrigen Funktionen kommen die D^1_i stets nur in festen Paaren vor, so daß es genügt,

$$D^3_i = D^1_{2i} \vee D^1_{2i+1}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

zu erzeugen. Die Darstellung dieser Funktionen wird sehr einfach, wenn man dazu die Hilfsfunktion $E = K'_1 \vee G'_1$ benutzt. Wir wollen diese Vereinfachungen hier jedoch nicht weiter verfolgen, da sie in diesem Rahmen nicht interessieren.*

Wir wollen uns nun dem zweiten Beispiel zuwenden, bei dessen Behandlung wir von Satz 7 ausgehen. Es handelt sich um ein Addierwerk, das die Summe nach dem Modul 9 bilden soll, aber unabhängig von einem Übertrag und es soll auch kein Übertrag erzeugt werden.

Auf Grund dieser Voraussetzungen liegen die Summenfunktionen in $\mathfrak{L}^+_g$.
Wir wählen als Codierung

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
x_3	0	0	0	1	1	1	0	0	0
x_2	0	0	1	0	0	1	0	0	1
x_1	0	1	0	0	1	0	0	1	0.

Diese Codierung genügt Satz 7. Wir betten $\mathfrak{L}^+_9$ in $\mathfrak{G}^+_1 \times \mathfrak{G}^+_2$ ein, worin $\mathfrak{G}^+_1 = g^3_9(\mathfrak{L}^+_3)$ und $\mathfrak{G}^+_2 = h^3_9(\mathfrak{L}^+_3)$ ist. Seien D^i_k $(i = 1, 2; k = 0, 1, 2, 3)$ die Atome von $\mathfrak{G}^+_i$ $(i = 1, 2)$. Man findet, wie im vorhergehenden Beispiel

$$D^1_0 = K_4 K'_3\,,\ D^1_1 = K'_4 G_3\,,\ D^1_2 = K'_4 K_3 \vee G_4 K'_3\,,\ D^1_3 = G_3 G_4\,,\ D^1_4 = K_4\,;$$

$$D^2_0 = K_2 K'_1\,,\ D^2_1 = K'_2 G_1\,,\ D^2_2 = K'_2 K_1 \vee G^2_2 K'_2\,,\ D^2_3 = G_2 G_1\,,\ D^2_4 = K_2\,.$$

Bezeichnen wir wieder z_1, z_2, z_3, z_4 als die Summenfunktionen, dann gilt:

$$z_1 = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ \hline 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ \hline 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1 \end{array} = D^2_1 \vee D^2_4\,.$$

* H. Stopper in Firma Telefunken hat dieses Beispiel, von physikalischen Gründen geleitet, weiter vereinfacht und für dieses Addierwerk eine sehr elegante technische Realisierung gefunden, worüber er an anderer Stelle berichten wird.

$$\mathfrak{z}_2 = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0 \end{array} = D_2^2 .$$

$$\mathfrak{z}_3 = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ \hline 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1\\ \hline 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0 \end{array} = (D_0^1 \vee D_3^1) \cdot (D_3^2 \vee D_4^2) \vee (D_1^1 \vee D_4^1) \cdot (D_0^2 \vee D_1^2 \vee D_2^2).$$

$$\mathfrak{z}_4 = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0\\ \hline 0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ \hline 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{array} = (D_1^1 \vee D_4^1) \cdot (D_3^2 \vee D_4^2) \vee D_2^1 \, (D_0^2 \vee D_1^2 \vee D_2^2) .$$

Literatur

[1] Shannon, C. E.: „*The Synthesis of Two-terminal Switching Circuits*", BSTJ, Vol. 28, (1949).

[2] Ashenhurst, R. L.: „*The Decomposition of Switching Functions*", *Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching*, Harvard University Press (1959).

[3] Povarov, G. N. „*Zur funktionalen Separierbarkeit von Booleschen Funktionen*". Doklady Akademii Nauk SSSR, Vol. 94, pp 801 — 03 (1954).

[4] Hotz, G.: „*Zur Reduktion von Systemen von Schaltkreispolynomen*". Colloquium über Schaltkreis- und Schaltwerk-Theorie, im Okt. 1960 in Bonn. Birkhäuser Verlag (1961).

[5] Roth, J. P.: Karp, R. M.: „*Minimization over Boolean Graphs*", IBM Journal Vol. 6 No. 2 April 1962.

[6] Sikorski, R.: „*Boolean Algebras*". Springer Verlag, Heidelberg 1960.