Arkadenfadendarstellung von Knoten und eine neue Darstellung der Knotengruppe

Von GÜNTER HOTZ in Konstanz

Einleitung

Wir führen in dieser Arbeit eine neue Knotendarstellung, die Arkadenfadenlage von Knoten, ein. Diese Darstellung der Knoten gibt uns einen neuen Zugang zur Knotengruppe. Wir erkennen, daß die Lösung der Aufgabe, die Elemente einer durch endlich viele freie Erzeugende gegebene Untergruppe eines direkten Produktes zweier freien Gruppen zu bestimmen, die Lösung des Wortproblems für Knotengruppen enthält. Aus der Arkadenfadenlage läßt sich leicht ein solches endliches, freies Erzeugendensystem angeben. Mittels eines solchen Erzeugendensystems der Untergruppe geben wir ein System von erzeugenden und definierenden Relationen der zugehörigen Knotengruppe an.

Im Paragraphen 1 stellen wir Definitionen und Hilfssätze*) über Teilzerschneidungen der n-mal gelochten Ebene zusammen, auf denen wir in den beiden folgenden Paragraphen aufbauen. In § 2 führen wir die Arkadenfadenlagen ein, klären ihren Zusammenhang mit den Knotennormallagen und erhalten eine vollständige Übersicht über den Zusammenhang von Arkadenfadenlagen des gleichen Knotens. Damit sind wir in der Lage, in § 3 das oben genannte Hauptergebnis abzuleiten.

§ 1. Knotennormallagen und Teilzerschneidungen

Sei E eine euklidische Ebene im R^3, die diesen in einen oberen Halbraum O und einen unteren Halbraum U zerlegt. O und U seien abgeschlossen. Eine Knotenlinie [1] K befindet sich bezüglich E in *Normallage*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. K durchsetzt E in endlich vielen Punkten, die mit $P_1, \ldots, P_m$ bezeichnet seien, und hat außer diesen Punkten keinen Punkt mit E gemeinsam.

2. Die Normalprojektion auf E der in O verlaufenden Bögen ergebe ein System von doppelpunktfreien und paarweise punktfremden Streckenzügen; das gleiche gelte von den in U verlaufenden Bögen.

---

*) Diese ohne Beweis gegebenen Hilfssätze von K. REIDEMEISTER werden in anderem Zusammenhang mit Beweis veröffentlicht werden.

Man erkennt, daß die Anzahl n der oberen Bögen gleich der Anzahl der unteren Bögen ist und daß $m = 2n$ ist.

Sei nun E' eine in den Punkten $P_1, \ldots, P_{2n}$ gelochte Ebene. Ein doppelpunktfreier, orientierter Streckenzug von E', der von zweien der Punkte P_i berandet wird, heißt ein *Teilschnitt* von E'. Ein System von n paarweise punktfremden Teilschnitten, von denen keine zwei einen gleichen Randpunkt haben, heißt eine Teilzerschneidung von E'.

Wir denken uns von nun an K orientiert und die Orientierung auf die oben genannten Normalprojektionen übertragen. Dann wird auf diese Weise K eindeutig ein Teilzerschneidungspaar von E' zugeordnet. Hat man umgekehrt ein Teilzerschneidungspaar S, T von E', dessen Teilschnitte sich zu einer geschlossenen orientierten Kurve zusammensetzen, so findet man leicht Knotennormallagen, die $S\,T$ als Projektion besitzen. Setzen wir nun fest, daß die mit S bezeichnete Teilzerschneidung stets die Projektionen der oberen Bögen enthält, dann definiert ein solches Teilzerschneidungspaar $S\,T$ eine normierte reguläre Knotenprojektion [1] und damit eindeutig einen Knoten.

Wie hängen nun verschiedene, den gleichen Knoten definierende Normallagen zusammen? Um diese Frage zu beantworten, definieren wir zunächst einige Abänderungen von Teilzerschneidungen und Teilzerschneidungspaaren.

Ein Teilzerschneidungspaar der betrachteten Art liefert eine Zerlegung von E in Punkte, Strecken und Flächenstücke. Haben wir zwei Teilzerschneidungspaare $S\,T$ und $S'\,T'$, die E so zerlegen, daß sich die Zerlegungskomplexe so isomorph aufeinander abbilden lassen, daß die Teilschnitte von S in die von S' und die von T in die von T' übergehen, dann heißt $S\,T$ *isomorph* zu $S'\,T'$. Man erkennt, daß zu isomorphen Teilzerschneidungspaaren isomorphe normierte Schemata [1] gehören, während das umgekehrte nicht gilt.

Seien nun S und T zwei Teilzerschneidungen von E', die als Projektion zu einer Normallage gehören. s_i sei ein Teilschnitt von S und $s_i = s'ts''$ sei eine Zerlegung von s_i in drei Polygonzüge. Davon besitze t keinen gemeinsamen Punkt mit T. Wir lochen nun E' in den Endpunkten von t und erhalten so eine $2n + 2$-mal gelochte Ebene E''. Die Teilschnitte von T bilden zusammen mit t eine Teilzerschneidung von E''. Ebenso bilden die von s_i verschiedenen Teilschnitte von S zusammen mit s' und s'' eine Teilzerschneidung von E''. Wir nennen das so gewonnene Teilzerschneidungspaar von E'' eine *Erweiterung* von $S\,T$. Der dazu inverse Prozeß heißt *Reduktion*. Ebenso sagen wir, wenn die Rolle von S und T vertauscht ist.

Wir erkennen ohne weiteres, daß durch Reduktionen und Erweiterungen das normierte Schema der Knotenprojektion nicht geändert wird, während ST und seine Erweiterungen nicht isomorph sind. Aber man kann leicht zeigen, daß sich zu den gleichen normierten Schemata gehörige Teilzerschneidungspaare durch Reduktionen und Erweiterungen in isomorphe Systeme verwandeln lassen.

Sei s ein auf einem Teilschnitt t von T liegender, gleichsinnig zu t orientierter Streckenzug mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B; s' sei ein einfacher, orientierter Streckenzug in E', der A als Anfangs- und B als Endpunkt besitze und der außer diesen beiden Punkten keinen Punkt mit T gemeinsam habe. Dann bilden s uns s' zusammen den Rand eines Elementarflächenstückes J. Durch die Ersetzung von s durch s' wird T in eine neue Teilzerschneidung T' übergeführt. Dieser Prozeß heißt eine *isotope Deformation* von T, wenn in J kein singulärer Punkt liegt. Der Prozeß heißt ein *α-Prozeß*, wenn in j genau ein Teilschnitt von T liegt. T und T' heißen *äquivalent*, wenn T durch eine Kette von isotopen Deformationen und α-Prozessen in T' übergeführt werden kann. Ebenso bezeichnen wir die entsprechenden Abänderungen der S-Zerschneidung.

Nun sind wir in der Lage, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen ST-Systemen des gleichen Knotens auszusprechen. Dies geschieht durch

Satz 1: ST und $S'T'$ definieren genau dann den gleichen Knoten, wenn sich ST durch isotope Deformationen der Teilzerschneidungen, durch α-Prozesse, Reduktionen und Erweiterungen in ein zu $S'T'$ isomorphes Teilzerschneidungspaar verwandeln läßt.

Unser Ziel ist nun, diesen Satz zu einer Form zu verschärfen, in der wir ihn später brauchen werden.

Hilfssatz 1: Sei ST isomorph zu $S'T'$ und sei $S''T''$ äquivalent zu ST. Dann gibt es auch eine zu $S'T'$ äquivalente Lage, die zu $S''T''$ isomorph ist. Analoges gilt für Reduktion und Erweiterung.

Hilfssatz 2: Gehe $S'T'$ durch eine Reduktion aus ST hervor, bei der s_1 als Teilschnitt von S verschwindet und $t_n s_1 t_1 = t_1'$ an die Stelle von t_1 und t_n tritt. Dann läßt sich S unter Festhaltung von s_1 so durch eine äquivalente Teilzerschneidung S'' ersetzen, daß $S''T'$ um t_1 reduzierbar ist und bei dieser Reduktion in ein zu $S'T'$ isomorphes Teilzerschneidungspaar übergeführt wird.

B e w e i s: Wir legen alle Teilschnitte von S, die t_1 schneiden durch α-Prozesse über s_1 hinweg auf t_n. Da s_1 nach Voraussetzung von keinem T-Schnitt getroffen wird, können wir das so vornehmen, daß dabei das normierte Schema der Projektion unverändert bleibt. Dadurch ist S in eine äquivalente Teilzerschneidung übergegangen und t_1 ist nun schnittpunktfrei geworden und damit reduzierbar. Nehmen wir die Reduktion vor, so erkennen wir, daß wir in der Tat ein zu $S' T'$ isomorphes System von Teilzerschneidungen erhalten.

Satz 2: Definieren $S T$ und $S' T'$ den gleichen Knoten, dann läßt sich $S T$ durch α-Prozesse, Erweiterungen und Reduktionen, wovon die letzteren s_1 und t_n, d. h. die an P_1 anstoßenden Teilschnitte nicht betreffen, in ein zu $S' T'$ isomorphes Teilzerschneidungspaar überführen.

Beweis: Nach Satz 1 können wir $S T$ durch die genannten Prozesse in die gewünschte Lage bringen. Nur müssen wir dabei Reduktionen um s_1 oder t_n in Kauf nehmen. Sei nun $S T = S_1 T_1, \ldots, S_m T_m, \ldots, S_l T_l$ eine Kette, deren benachbarte Glieder durch einen der Prozesse zusammenhängen und $S_l T_l$ isomorph zu $S' T'$. Wir wollen zeigen, daß sich $S T$ durch eine solche Kette, in der keine Reduktionen um s_1 oder t_1 vorkommen, in eine zu $S' T'$ isomorphe Lage bringen läßt. Kommt in der obigen Kette keine solche Reduktion vor, so haben wir nichts zu beweisen. Es gebe also solche Reduktionen. $S_m T_m$ sei das erste Glied der Kette, das durch eine solche Reduktion aus seinem Vorgänger hervorgeht. Dann ersetzen wir $S_m T_m$ nach Hilfssatz 2 durch ein isomorphes Teilzerschneidungspaar $S'_m T'_m$ und gelangen von diesem nach Hilfssatz 1 zu einem Teilzerschneidungspaar $S'_l T'_l$, das zu $S_l T_l$ und damit auch zu $S' T'$ isomorph ist. $S'_l T'_l$ ist nun aber mit $S T$ durch eine Kette verbunden, in der einmal weniger um s_1 oder t_n reduziert wird. Durch Iteration des Verfahrens erhalten wir unsere Behauptung. (Wir haben hier den Hilfssatz 2 auch für eine Reduktion um t_n angewandt. Man erkennt analog wie oben für s_1, daß man die Reduktion um t_n durch eine Reduktion um s_n ersetzen kann.)

Wir formulieren nun noch drei Hilfssätze, die wir später brauchen werden. Dazu ist uns die folgende abkürzende Schreibweise nützlich: Seien k und k' zwei orientierte Kurven, die sich in P schneiden. Wir ordnen diesem Punkt den Index $i_P(k, k') = +1$ oder -1 zu, je nachdem, ob k von k' von links nach rechts (oder in umgekehrter Richtung) durchsetzt wird. Sei nun S eine Teilzerschneidung von E' und k eine orientierte Kurve in E', die mit S keinen Punkt, oder nur Schnittpunkte gemeinsam hat. Seien $Q_1, \ldots, Q_r$ die der Reihe nach auf k liegenden Schnittpunkte mit S; s_{il} sei der Teilschnitt, auf dem Q_l liegt, und sei $i_{Q_l}(s_{i_l}, k) \equiv \varepsilon_l$, dann definieren wir $a_S(k) \equiv s_{i1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{ir}^{\varepsilon_r}$ und nennen $a_S(k)$ die Ablesung von k in S; haben S und k keine Schnittpunkte gemeinsam, dann setzen wir $a_S(k) \equiv 1$.

Hilfssatz 3: Seien S und S' zwei Teilzerschneidungen von E', mit den Teilschnitten s_i bzw. s'_i. s_i und s'_i mögen die gleichen Randpunkte besitzen. Weiter mögen durch isotope Deformationen von S sämtliche Berührungspunkte von S und S' beseitigt sein. Dann ist S genau dann äquivalent zu S', wenn

$$a_S(s_i') = s_i^{n_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ist, wobei die n_i ganz rationale Zahlen sind.

Sei A ein nicht auf der Teilzerschneidung S liegender Punkt von E'. Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die zu A als Aufpunkt gehörige Fundamentalgruppe von E'. Wir ordnen nun jedem Weg w der Fundamentalgruppe das Wort $a_S(w)$ zu. Man erkennt, daß aus w homotop w' folgt $a_S(w) = a_S(w')$, wobei das Gleichheitszeichen so wie in Hilfssatz 3 bedeutet, daß die linke Seite durch Einschieben oder Streichen von Termen $s_i^{\varepsilon} s_i^{-\varepsilon}$ in die rechte Seite übergeführt werden kann. Schreiben wir nun in $a_S(w)$ an Stelle von s_i das Zeichen σ_i und bezeichnen wir mit Σ die durch $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ als freies Erzeugendensystem erzeugte Gruppe, dann definiert die Zuordnung $f \to a_\Sigma(w)$ einen Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf Σ, wenn w ein Repräsentant von f ist; der Homomorphismus ist ein Homomorphismus „auf", da auch zu jedem Wort in $s_1, \ldots, s_n$ ein Weg gehört, dessen Ablesung gerade dieses Wort ist. Den Kern dieses Homomorphismusses wollen wir in Zukunft stets mit $\mathfrak{K}_S$ bezeichnen.

Hilfssatz 4: Zwei Teilzerschneidungen S und S' sind genau dann äquivalent, wenn $\mathfrak{K}_S = \mathfrak{K}_{S'}$ ist.

Hilfssatz 5: Sei K eine Knotenlinie in Normallage bezüglich E, und R^* sei der Knotenaußenraum von K. Bezeichnet O den eingangs erklärten Halbraum, und ist S die Projektion der in O verlaufenden Teilbögen von K, dann ist ein Element f aus $\mathfrak{F}$ dann und nur dann homotop Null in $O^* = R^* \cap O$, wenn $f \in \mathfrak{K}_S$ ist.

§ 2. Arkadenfadenlagen

Die zweidimensionale euklidische Ebene E teile den R^3 in den oberen Halbraum O und den unteren Halbraum U. O und U seien abgeschlossen. A sei ein orientierter, doppelpunktfreier Streckenzug des R^3, dessen Anfangspunkt P_1 und dessen Endpunkt P_m in E liege. Außer P_1 und P_m habe A mit E genau die Punkte $P_2, \ldots, P_{m-1}$ gemeinsam, in denen A die Ebene durchsetzt. Die in $P_1, \ldots, P_m$ gelochte Ebene bezeichnen wir mit E' und die Punkte P_i als ihre singulären Punkte. Besitzt nun A eine doppelpunktfreie Normalprojektion in E, dann bezeichnen wir A als eine *Arkade* auf E'.

Da A in P_i $(i = 2, \ldots, m - 1)$ die Ebene durchsetzt, so zerlegt E die Arkade in abwechselnd im oberen und unteren Halbraum verlaufende Bögen. Wir nehmen im folgenden stets an, daß der erste Bogen der Arkade im oberen Halbraum verläuft. Ist die Anzahl der Bögen gerade, dann sind $P_1, \ldots, P_{m-1}$ die Randpunkte der oberen Bögen; die in diesen Punkten gelochte Ebene werde mit E_1' bezeichnet, die in den Randpunkten der unteren Bögen gelochte Ebene werde mit E_2' bezeichnet.

Wir übertragen die Orientierung von A auf seine Normalprojektion und zerlegen diese in eine Teilzerschneidung S von E_1' und eine Teilzerschneidung T von E_2', wovon S die Projektion der oberen und T die Projektion der unteren Bögen darstellt.

Zwei Arkaden A und A' heißen äquivalent, wenn S äquivalent zu S' und T äquivalent zu T' ist, wovon $S\,T$ zu A und $S'\,T'$ die zu A' gehörigen Teilzerschneidungen sind.

Sei nun F ein von P_1 nach P_m führender Streckenzug von E', der doppelpunktfrei und orientiert ist. Dann definiert AF^{-1} als geschlossener, orientierter doppelpunktfreier Polygonzug einen orientierten Knoten. AF nennen wir eine Arkadenfadendarstellung dieses Knotens und F den Faden.

§ 3. Verwandlung von Knotennormallagen in Arkadenfadenlagen

Sei K eine Knotenlinie in Normallage bezüglich einer waagerecht gedachten Ebene E im R^3. Die Durchstoßungspunkte von K und E seien $P_1, \ldots, P_{2n}$, und E_1' bezeichne die in diesen Punkten gelochte Ebene E. $S\,T$ sei das zu K gehörige Teilzerschneidungspaar von E_1', wovon S die Projektion der oberen Bögen darstellt.

F sei ein orientierter von einem Punkt P_{2n+1} von E_1' ausgehender Polygonzug, der P_1 als Endpunkt besitzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir im folgenden stets annehmen, daß F und $S\,T$ keinen Punkt gemeinsam haben, da wir das durch eine isotope Deformation der Teilzerschneidungen, die sogar $S\,T$ in ein isomorphes Teilzerschneidungspaar überführen, erreichen können.

Nun öffnen wir K in P_1 und schieben den Endpunkt des unteren Bogens so auf F von P_1 nach P_{2n+1}, daß die Projektion dieses Bogens doppelpunktfrei bleibt, und daß auch keine Schnittpunkte oder Berührungspunkte mit den anderen Teilschnitten von $S\,T$ auftreten. Dadurch erhalten wir eine zu K isotope Knotenlinie K', die in den in E_1' liegenden Polygonzug F und einen Streckenzug p zerfällt, der in P_1 beginnt und in P_{2n+1} endet und mit E noch genau die Punkte $P_2, \ldots, P_{2n}$ gemeinsam hat, in denen er die Ebene durchsetzt. Die Normalprojektion von p zerfällt in zwei Teilzerschneidungen, eine von E_1' und eine der in $P_2, \ldots, P_{2n+1}$ gelochten Ebene, die mit E_2' bezeichnet werde.

Mögen nun S und T^* die beiden letztgenannten Teilzerschneidungen bezeichnen. Dann, so wollen wir zeigen, gibt es zu S eine äquivalente Teilzerschneidung S', und zu T^* eine äquivalente T', so daß S' und T' keinen Schnittpunkt gemeinsam haben; $S' T'$ ist dann also eine Arkadenprojektion.

Die Teilschnitte von $S T^*$ setzen sich zu einer orientierten zusammenhängenden Kurve zusammen, die P_1 als Anfangs- und P_{2n+1} als Endpunkt hat. Hat dieser Streckenzug keine Doppelpunkte, dann sind wir fertig. Seien also Doppelpunkte vorhanden und Q sei der erste, auf den man stößt, wenn man $S T^*$ in P_1 beginnend durchläuft. Der Abschnitt von $S T^*$, den man durchlaufen hat, wenn man zum erstenmal auf Q stößt, nennen wir q. q ist ein doppelpunktfreier Polygonzug. Endet nun q auf einem S-Schnitt, dann ändern wir den „unterkreuzenden" T-Schnitt in folgender Weise ab: Wir schieben den betreffenden Teilschnitt in einer schmalen Schleife längs q in Richtung auf P_1 und schließlich unter P_1 hindurch auf F; das nehmen wir so vor, daß der Teilschnitt ein einfacher Streckenzug bleibt und auch keine Berührungspunkte oder Schnittpunkte mit anderen Teilschnitten von $S T^*$ erhält. Das ist möglich, da q ja ein doppelpunktfreier Streckenzug von $S T^*$ war. Man erkennt leicht, daß sich diese Abänderung von T^* durch eine isotope Deformation von T^* erreichen läßt wenn Q auf s_1 liegt, und in den anderen Fällen durch eine Folge von α-Prozessen. Wir haben also T^* durch eine äquivalente Teilzerschneidung ersetzt, die mit S weniger Schnittpunkte gemeinsam hat. Endet q auf einem T-Schnitt, dann vertauschen sich in der eben durchgeführten Konstruktion nur die Rollen von S und T^*. Durch Iteration dieses Verfahrens gelangen wir nach endlich vielen Schritten zu einem Teilzerschneidungspaar $S' T'$, dessen Teilschnitte sich zu einem doppelpunktfreien Streckenzug zusammensetzen. Da sich jeder Knoten in Normallagen bezüglich E bringen ließ, haben wir damit

Satz 1: Jeder Knoten besitzt Arkadenfadendarstellungen.

Bei der Öffnung von äquivalenten Knotennormallagen längs des gleichen Fadens F bleiben die zugehörigen S-Zerschneidungen trivialerweise äquivalent; sie erfahren ja keine Abänderung. Von den T-Zerschneidungen werden nur die n-ten Teilschnitte abgeändert. Die beiden T-Zerschneidungen seien T und T', und $t_1, \ldots, t_n$ und $t'_1, \ldots, t'_n$ seien die jeweiligen Teilschnitte. Da F weder T noch T' schneidet, kann die Abänderung so erfolgen, daß T' von dem abgeänderten Teilschnitt t^*_n in genau der gleichen Weise durchsetzt wird, wie dies von t_n geschieht. Ebenso können wir T' so abändern, daß t'_n in einen Schnitt t'^*_n übergeht, der T in genau der gleichen Weise durchsetzt wie t'_n, während die anderen Teilschnitte fest bleiben. Dann unterscheidet sich aber $a_T(t'_i)$ von

$a_{T^*}(t_i'^*)$ für $i < n$ nur durch die Sterne; für $i = n$ kann noch ein Faktor t_n^{*r} hinzukommen, wo r eine ganz rationale Zahl ist. Dann folgt aber aus Hilfssatz 3, daß T^* äquivalent T'^* ist. Hieraus und aus dem oben bewiesenen folgt nun

Hilfssatz 6: Bei der oben beschriebenen Verwandlung von Normallagen in Arkadenfadenlagen unter Benutzung des gleichen Fadens gehen äquivalente Normallagen in äquivalente Arkaden über.

Wir wollen in Zukunft den gesamten Prozeß der Verwandlung einer Normallage in der geschilderten Weise in eine Arkadenfadenlage als das Öffnen einer Normallage bezeichnen.

Man kann aber auch umgekehrt jede Arkadenfadenlage mit einer geraden Anzahl von Bögen in eine Normallage von gleicher Bogenzahl verwandeln.

Sei AF eine Arkadenfadenlage und ST das zu A gehörige Teilzerschneidungspaar. ST möge mit F Schnittpunkte gemeinsam haben. Ist Q der erste Schnittpunkt von F mit T, von P_1 aus gezählt, und liegt Q auf t_k, dann deformieren wir t_k in einer schmalen Schleife längs F in Richtung auf P_1 und schließlich unter P_1 hindurch unter den Bogen s_1; da Q der erste Schnittpunkt war, kann das so geschehen, daß t_k dabei doppelpunktfrei bleibt und daß dabei auch keine Schnittpunkte mit anderen T-Schnitten auftreten. Wir haben dann also durch eine isotope Deformation von T die Anzahl der Schnittpunkte mit F um einen vermindert. Durch Iteration des Verfahrens und durch Anwendung des gleichen Verfahrens auf S, indem man nun in Richtung auf P_{2n+1} deformiert, erhält man ein Teilzerschneidungspaar $S'\,T'$, das mit F keinen Schnittpunkt mehr gemeinsam hat. Nun ziehen wir F auf einen Punkt zusammen und erhalten damit eine Normallage des zu AF gehörigen Knotens, die ebensoviele Bögen besitzt wie A.

Wir wollen die eben beschriebene Verwandlung einer Arkadenfadenlage in eine Knotennormallage als Zusammenziehung der Arkadenfadenlage längs des Fadens bezeichnen.

Man erkennt analog wie Hilfssatz 6 nun

Hilfssatz 7: Bei der Zusammenziehung von äquivalenten Arkaden längs des gleichen Fadens gehen diese in äquivalente Normallagen über.

Hilfssatz 8: Ist AF durch Zusammenziehung längs F in K übergegangen, und geht nun K durch Öffnen längs F in $A'F$ über, dann ist A äquivalent A'.

Entsprechende Sätze gelten auch für Reduktion und Erweiterung von Knotennormallagen. Bei der Reduktion muß man nur vorsichtig sein, da bei einer Reduktion eines an P_1 anstoßenden Bogens P_1 als singulärer

Punkt verschwindet. Zunächst definieren wir noch Reduktion und Erweiterung für Arkadenfadenlagen.

Ist AF eine Arkadenfadenlage, die einen Bogen besitzt, dessen Projektion F nicht schneidet, dann können wir diesen Bogen durch die Ebene hindurch auf die andere Seite ziehen und erhalten so eine Arkade mit einer um zwei kleineren Bogenzahl, wenn der Bogen zwei Nachbarbogen hatte, und eine mit einer nur um eins kleineren Bogenzahl, wenn der betreffende Bogen ein Randbogen war. Diesen Prozeß wollen wir als eine Reduktion der Arkadenfadenlage AF bezeichnen. Den inversen Prozeß bezeichnen wir als eine Erweiterung der Arkadenfadenlage.

Bei der Öffnung einer Knotennormallage geht ein reduzierbarer Bogen wieder in einen solchen über, da F zu der Projektion der Knotennormallage schnittpunktfrei liegt, und ein reduzierbarer Bogen, der ja keine Schnittpunkte seiner Projektion mit den anderen Teilschnitten besitzt, keine Abänderung erfährt und so zu F schnittpunktfrei bleibt.

Bei dem umgekehrten Prozeß, der Verwandlung einer Arkadenfadenlage in eine Normallage, bleiben in der Arkadenlage reduzierbare Bögen auch unverändert. Die bei der Verwandlung durch die isotopen Deformationen der beiden Teilzerschneidungen hervorgerufenen Schnittpunkte mit dem zu dem reduzierbaren Bogen gehörigen Teilschnitt lassen sich durch isotope Deformationen der Teilzerschneidungen wieder beseitigen, wenn es sich bei dem Bogen um keinen Randbogen handelt. Damit haben wir den

Hilfssatz 9: AF gehe durch Reduktion eines inneren Bogens in $A'F$ über. Durch Zusammenziehung werde AF in K und $A'F$ in K' verwandelt. Dann läßt sich K durch Reduktion in K' verwandeln. Geht umgekehrt K durch Reduktion eines nicht mit P_1 inzidierenden Bogens in K' über, und geht K durch Öffnen in AF und K' in $A'F$ über, dann läßt sich auch AF durch Reduktion in $A'F$ verwandeln.

Da jede Normallage, die aus K durch eine Erweiterung hervorgeht, durch eine Reduktion wieder in K verwandelt werden kann und Reduktion und Erweiterung auch bezüglich Arkadenfadenlagen inverse Prozesse sind, gilt der analoge Satz auch für Erweiterungen; nur brauchen wir hier keine Einschränkung bezüglich des Ortes der Erweiterung der Normallagen zu machen, da die eingeschobenen Bögen per definitionem nicht mit P_1 inzidieren. In der umgekehrten Richtung behalten wir die Einschränkung bei, daß der eingeschobene Bogen kein Randbogen ist.

Hilfssatz 10: Geht AF durch Einschieben eines Bogens, der kein Randbogen ist, in $A'F$ über, dann läßt sich K durch eine Erweiterung in K' überführen, wenn K bzw. K' durch Zusammenziehung aus AF bzw. $A'F$ gewonnen wurde. Die Umkehrung dieses Satzes gilt ohne Einschränkung über die Stelle der Erweiterung.

AF und $A'F'$ seien nun Arkadenfadendarstellungen des gleichen Knotens. Durch Zusammenziehen gehe AF in K und $A'F'$ in K' über. Auf Grund von Satz 2 läßt sich nun K durch α-Prozesse, Erweiterungen und Reduktionen, die keinen an P_1 anstoßenden Teilschnitt betreffen, in eine Normallage K^* bringen, deren Teilzerschneidungspaar $S^* T^*$ isomorph ist zu dem Teilzerschneidungspaar $S' T'$ von K'. Ist nun P_k der durch die Isomorphie P'_1 zugeordnete Punkt, und ist F^* ein von diesem Punkt ausgehender Faden, dann führt die Öffnung von K' längs F' auf eine Arkadenfadenlage $A''F'$, worin A'' nach Hilfssatz 8 zu A' äquivalent ist, und die Öffnung von $S^* T^*$ längs F^* zu einer Arkadenfadenlage A^*F^*, die isomorph zu $A''F'$ ist; die Isomorphie von Arkadenfadenlagen wird völlig analog zu der für Normallagen erklärten Isomorphie definiert. Öffnen wir K^* längs F, dann kommen wir zu einer Arkadenfadenlage $\bar{A}F$, in die wir AF auch direkt ohne den Umweg über K und K^* unter Verwendung der Hilfssätze 6, 9 und 10 in $\bar{A}F$ verwandeln. Wie hängen nun $\bar{A}F$ und A^*F^* zusammen?

Hilfssatz 11: Sei K eine Knotennormallage, die durch Öffnen in P_1 längs F in AF und durch Öffnen in P_k längs F^* in A^*F^* übergeht. Dann läßt sich AF durch Erweiterungen, Reduktionen und Ersetzen von Arkaden durch äquivalente in eine zu A^*F^* isomorphe Lage bringen.

Beweis: Sei $k = 2$, so daß die Arkade also in benachbarten singulären Punkten geöffnet wird. Liegt auf dem zu dem ersten Bogen gehörigen Teilschnitt s_1 kein Schnittpunkt mit den anderen Teilschnitten der zu K gehörigen Teilzerschneidungen $S T$, dann führt das Öffnen in P_1 und P_2 offensichtlich zu zwei Arkadenfadenlagen, von denen bei der einen der erste Bogen und bei der anderen der letzte Bogen reduzierbar ist und die durch die Reduktion beider Bögen in isomorphe Arkadenfadenlagen übergehen. Liegen auf s_1 Schnittpunkte mit T-Schnitten, dann führen wir diesen Fall folgendermaßen auf den eben betrachteten zurück: Wir erweitern t_n durch einen S-Schnitt, der so liegt, daß zwischen dessen Endpunkt und P_1 auf t_n kein Schnittpunkt mit einem S-Schnitt liegt. Dann können wir durch α-Prozesse die s_1 schneidenden T-Schnitte unter den neuen T-Schnitt legen und s_1 auf diese Weise schnittpunktfrei machen. Öffnen wir nun, dann erhalten wir nach dem Vorigen zwei Arkadenfadenlagen, von denen man eine durch eine Reduktion und eine Erweiterung in eine zu der anderen isomorphe Lage bringen kann. Aus Hilfssatz 6, 8, 9 und 10 folgt nun, daß man AF durch die eben genannten Prozesse im Fall $k = 2$ in A^*F^* überführen kann. Hieraus folgt nun durch $k-1$ fache Anwendung dieses Ergebnisses die Behauptung für $k > 2$.

Also können wir, indem wir an das vor diesem Hilfssatz gesagte anknüpfen, $\bar{A}F$ durch jene Prozesse in eine zu A^*F^* isomorphe Arkadenfadenlage $\bar{\bar{A}}F$ überführen. Da A^*F^* isomorph ist zu $A''F$, A'' äquivalent zu A' ist, die Isomorphie transitiv ist, gibt es eine zu $\bar{\bar{A}}$ äquivalente Arkade $\bar{A}'$, so daß $\bar{A}'F$ eine zu $A'F'$ isomorphe Arkadenfadenlage ist. Damit haben wir das Hauptergebnis dieses Paragraphen:

Haupttsatz: Stellen AF und $A'F'$ den gleichen Knoten dar, dann läßt sich AF durch Reduktionen, Erweiterungen und Übergang von Arkaden zu äquivalenten Arkaden in eine zu $A'F'$ isomorphe Arkadenfadenlage verwandeln.

§ 4. Die Knotengruppe

Wir knüpfen nun an Hilfssatz 3, 4 und 5 an. R sei der dreidimensionale euklidische Raum, E eine euklidische Ebene in R, die R in einen unteren und oberen Halbraum zerlegt; den abgeschlossenen oberen Halbraum bezeichnen wit mit O, den abgeschlossenen unteren Halbraum mit U. AF sei eine Arkadenfadenlage auf E; A sei von gerader Bogenzahl und die Teilzerschneidung S sei die Projektion des oberen und die Teilzerchneidung T die Projektion des unteren Bogensystems von A. E' sei die in den Randpunkten der Arkadenbögen gelochte Ebene, R' der Knotenaußenraum und $O' = O \cap R'$ und $U' = U \cap R'$. Sei Q ein nicht auf F liegender Punkt von E', und $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{H}$ sei die zu Q gehörige Fundamentalgruppe von E' bzw. von R'. Die Gruppe $\mathfrak{H}$ ist dann die Knotengruppe. Wir werden in diesem Paragraphen eine neue Darstellung der Knotengruppe geben.

Die Elemente $f \in \mathfrak{F}$, die einen Repräsentanten w enthalten, der F nicht schneidet, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{F}$, die mit $\mathfrak{U}(F)$ bezeichnet werde. Da jeder solche Repräsentant w auch in R' liegt, und w und w' in R' homotop sind, wenn sie es in der längs F aufgeschnittenen Ebene E' sind, wird durch die Zuordnung $f(w) \to h(w)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{U}(F)$ in $\mathfrak{H}$ definiert, wenn wir unter $f(w)$ bzw. $h(w)$ das Element f von $\mathfrak{F}$ bzw. h von $\mathfrak{H}$ verstehen, das w als Repräsentant enthält. Wir behaupten schärfer: Der eben definierte Homomorphismus ist ein Homomorphismus „auf". Das sieht man folgendermaßen ein: Sei $w \in h$ ein Weg in R' und w' seine Normalprojektion in E. Hat w' mit S, T und F keinen Punkt gemeinsam, dann ist w offensichtlich homotop w'. Hat w' mit S, T und F Punkte gemeinsam, dann zerlegen wir w in ein Produkt von Wegen, die je in O' oder ganz in U' verlaufen. Sei nun w ein Weg in O'. w' bezeichne wieder die Normalprojektion in E. Hat dann w' mit S und F keinen Punkt gemeinsam, dann sind w und w' wieder homotop. Im anderen Fall ersetzen wir w durch ein Produkt von Wegen, das zu w homotop ist und dessen Wege eine Projektion besitzen, die mit S höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Sei w ein solcher Weg, und w' sei seine Projektion. Wenn w' den Schnitt s_i schneidet, dann unterscheiden wir, ob w den zu s_i gehörigen Bogen überkreuzt oder unterkreuzt. Ist letztes der Fall, dann ist w homotop w', wenn w' und F keinen Schnittpunkt gemeinsam haben. Überkreuzt w den über s_i stehenden Bogen, dann können wir w so in einen homotopen Weg deformieren, daß dessen Projektion zu S und F schnittpunktfrei liegt. Damit haben wir wieder einen zu w homotopen Weg in der längs F aufgeschnittenen Ebene E' gefunden. Wir haben nun noch den Fall zu untersuchen, daß w ein Weg ist, dessen Projektion w' mit F Schnittpunkte besitzt und der den zu s_i gehörigen Bogen unterkreuzt, wenn w' mit s_i einen Schnittpunkt gemeinsam hat. Sei P ein Schnittpunkt von F mit w'; P' und P'' seien auf verschiedenen Seiten von F liegende Punkte von w', so daß zwischen P und P'' auf w' kein Punkt von F mehr liegt. Nun läßt sich w' in E längs F in Richtung auf P_{2n+1} und schließlich über P_{2n+1} hinweg auf t_n in einer schmalen Schleife so deformieren, daß w' in seiner Endlage einen Schnittpunkt weniger mit F gemeinsam hat (Fig. 1). Man kann nun w homotop in einen Weg w^* deformieren, der die abgeänderte Lage von w' als Projektion besitzt und in allen Punkten, in denen seine Projektion einen S-Schnitt schneidet, den zugehörigen Bogen unterkreuzt. Durch Fortsetzung des Verfahrens gelangen wir zu einem Weg w^{**}, dessen Projektion zu F schnittpunktfrei liegt und der an allen Stellen, an denen seine Projektion mit einem Schnitt von S einen Punkt gemeinsam hat, den zugehörigen Bogen unterkreuzt. Dann ist aber w^{**} homotop zu seiner Projektion und damit haben wir zu jedem Weg w eines Elements h von $\mathfrak{H}$ einen homotopen Weg w' gefunden, der Repräsentant eines Elements f von $\mathfrak{F}$ ist. Also ist jedes Element h bei unserem Homomorphismus Bild eines Elements f, das heißt, der Homomorphismus ist ein Homomorphismus „auf". Also gilt

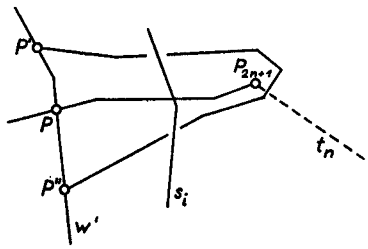

Fig. 1

Hilfssatz 12: Durch $f(w) \to h(w)$ wird ein Homomorphismus von $\mathfrak{U}(F)$ auf $\mathfrak{H}$ definiert.

Um zu einer Darstellung der Knotengruppe zu gelangen, bestimmen wir den Kern $\mathfrak{K}$ dieses Homomorphismusses. In $\mathfrak{K}$ liegen genau die Elemente von $\mathfrak{U}(F)$, deren Wege in R' homotop Null sind. Nun kann man aber jeden in R' zusammenziehbaren Weg homotop in ein Produkt von Wegen deformieren, von denen jeder schon im oberen oder unteren Halbraum allein homotop Null ist. Also gilt nach Hilfssatz 5: $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_S \cdot \mathfrak{K}_T \cap \mathfrak{U}(F)$, worin $\mathfrak{K}_S \cdot \mathfrak{K}_T$ die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{F}$ bedeutet, die sich in der Form $k_S \cdot k_T$ schreiben lassen, wo $k_S \in \mathfrak{K}_S$ und $k_T \in \mathfrak{K}_T$ ist. Damit haben wir

Satz 2:

$$\mathfrak{H} \cong \mathfrak{U}(F)/\mathfrak{K} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_S \cdot \mathfrak{K}_T \cap \mathfrak{U}(F).$$

Setzen wir nun $\mathfrak{K}_{ST} = \mathfrak{K}_S \cap \mathfrak{K}_T \cap \mathfrak{U}(F)$, dann gilt, da mit $\mathfrak{K}_S$ und $\mathfrak{K}_T$ auch $\mathfrak{K}_{ST}$ Normalteiler von $\mathfrak{U}(F)$ und auch von $\mathfrak{K}$ ist,

$$\mathfrak{H} \cong \mathfrak{U}(F)/\mathfrak{K}_{ST} \big/ \mathfrak{K}/\mathfrak{K}_{ST},$$

wie man aus dem zweiten Isomorphiesatz erkennt.

Da $\mathfrak{U}(F)$ per definitionem invariant ist gegenüber α-Prozessen von S und T, und $\mathfrak{K}_S$ und $\mathfrak{K}_T$ dies nach Hilfssatz 4 sind, ist $\mathfrak{U}(F)/\mathfrak{K}_{ST}$ und $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_{ST}$ invariant gegenüber der Ersetzung von A durch eine äquivalente Arkade. Wir wollen nun die Struktur der beiden letzten Gruppen etwas näher untersuchen.

Sei s aus f und $a_{ST}(w)$ die Ablesung von w in ST. Ersetzen wir darin s_i durch σ_i und t_i durch τ_i, dann erhalten wir mittels $w \to a_{ST}(w)$ und $s_i \to \sigma_i$ und $t_i \to \tau_i$ einen Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf die freie Gruppe $\{\sigma_i, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$, dessen Kern sowohl in $\mathfrak{K}_S$ als auch in $\mathfrak{K}_T$ enthalten ist. Wir bilden nun die Faktorgruppe $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$ nach diesem Kern und erhalten $\mathfrak{F}' \cong \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$. Dabei geht $U(F)$ über in $\mathfrak{U}'(F)$, $\mathfrak{K}_S$ in $\mathfrak{K}'_S$, $\mathfrak{K}_T$ in $\mathfrak{K}'_T$, $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}_{ST}$ in $\mathfrak{K}'_{ST}$. Nach dem zweiten Isomorphiesatz gilt nun Satz 5 auch, wenn wir alle dort vorkommenden Gruppen außer $\mathfrak{H}$ mit einem Strich versehen.

Sei nun $\mathfrak{K}(\sigma, \tau)$ der durch die Kommutatoren $\sigma_i \tau_k \sigma_i^{-1} \tau_k^{-1}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ erzeugte Normalteiler von $\mathfrak{F}'$; wir denken uns hier und auch in dem folgenden $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$ und $\mathfrak{F}'$ mittels der zwischen beiden bestehenden Isomorphie identifiziert. Jedes Element von $\mathfrak{K}(\sigma, \tau)$ läßt sich als Kommutator eines Elements von $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ und eines Elementes von $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ schreiben. Also erhalten wir $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}(\sigma, \tau) \cong \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \times \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$. Nun behaupten wir

$$\mathfrak{U}'(F) \cap \mathfrak{K}(\sigma, \tau) \cong \mathfrak{K}'_{ST}.$$

B e w e i s: 1. Sei $u \in \mathfrak{U}'(F) \cap \mathfrak{K}(\sigma, \tau)$, dann ist $u \in \mathfrak{K}'_S$ und $u \in \mathfrak{K}'_T$; es läßt sich nämlich, wie oben schon gesagt wurde, u als Kommutator eines Elementes aus $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ und eines Elementes aus $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ schreiben, was aber bedeutet, daß die Ablesung eines Repräsentanten w von u in S und in T beidesmal eins ergibt. Das heißt aber gerade, daß u in $\mathfrak{K}'_S$ und in $\mathfrak{K}'_T$ liegt. Es gilt also $\mathfrak{U}'(F) \cap \mathfrak{K}(\sigma, \tau) \subseteq \mathfrak{K}_{ST}$.

2. Bei dem kanonischen Homomorphismus von $\mathfrak{F}'$ auf $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}(\sigma, \tau)$ geht jedes Element u von $\mathfrak{K}'_{ST}$ in das Einheitselement über, da für die Wege von u gilt $a_S(w) = 1$ und $a_T(w) = 1$; es war ja $\mathfrak{K}'_{ST} = \mathfrak{K}'_S \cap \mathfrak{K}'_T \cap \mathfrak{U}(F)$, und $\mathfrak{K}'_S$ bzw. $\mathfrak{K}'_T$ waren gerade durch $a_S(w) = 1$ bzw. $a_T(w) = 1$ definiert worden. Also gilt auch die, zu der in 1. bewiesenen, umgekehrte Inklusion, woraus zusammen mit 1. die Behauptung folgt.

Setzen wir $\mathfrak{F}^* = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \times \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, dann haben wir

$$\mathfrak{U}(F)/\mathfrak{K}_{ST} \cong \mathfrak{U}^*(F) \subseteq \mathfrak{F}^*$$
$$\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_{ST} \cong \mathfrak{K}^* \subseteq \mathfrak{F}^*.$$

Bei dem kanonischen Homomorphismus von $\mathfrak{F}'$ auf $\mathfrak{F}^*$ geht $\mathfrak{K}'_S$ in $\overline{\mathfrak{K}}_S \subseteq \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ und $\mathfrak{K}'_T$ in $\overline{\mathfrak{K}}_T \subseteq \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ über, so daß wir $\mathfrak{K}^* = \overline{\mathfrak{K}}_S \times \overline{\mathfrak{K}}_T \cap \mathfrak{U}^*(F)$ haben. Wir setzen nun $\mathfrak{K}^*_S = \overline{\mathfrak{K}}_S \cap \mathfrak{U}^*(F)$ und $\mathfrak{K}^*_T = \overline{\mathfrak{K}}_T \cap \mathfrak{U}^*(F)$ und behaupten $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}^*_S \times \mathfrak{K}^*_T$.

Beweis: Sei u_σ bzw. u_τ die in $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ bzw. in $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ liegende Komponente von u. Dann gilt

$$\mathfrak{K}^*_S = \{u \in \mathfrak{U}^*(F) | u_\sigma = 1\}$$
$$\mathfrak{K}^*_T = \{u \in \mathfrak{U}^*(F) | u_\tau = 1\}.$$

Daraus folgt $\mathfrak{K}^*_S \times \mathfrak{K}^*_T \subseteq \mathfrak{K}^*$. Da sich aber auch jeder Weg w der in R' homotop Null ist, in ein Produkt von Wegen deformieren läßt, von denen jeder schon allein im oberen oder unteren Halbraum homotop Null ist, läßt sich auch jedes u aus $\mathfrak{K}^*$ als Produkt $u_\sigma \times u_\tau$ mit $u_\sigma \in \mathfrak{K}^*_S$ und $u_\tau \in \mathfrak{K}^*_T$ schreiben.

Wir haben also den

Satz 3:

$$\mathfrak{H} \cong \mathfrak{U}^*(F)/\mathfrak{K}^*$$

mit

$$\mathfrak{U}^*(F) < \mathfrak{F}^*, \quad \mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}^*_S \times \mathfrak{K}^*_T,$$

wo

$$\mathfrak{K}^*_S = \{u \in \mathfrak{U}^*(F) | u_\sigma = 1\},$$
$$\mathfrak{K}^*_T = \{u \in \mathfrak{U}^*(F) | u_\tau = 1\}.$$

Damit haben wir die Lösung des Wortproblems für die Knotengruppe zurückgeführt auf die Frage, wann ein Element von $\mathfrak{F}^*$ in einer Untergruppe $\mathfrak{U}^*(F)$ liegt, die durch endlich viele Erzeugende gegeben ist; letztes werden wir nun durch Angabe eines endlichen Erzeugendensystems beweisen. Weiter werden wir aus dem Erzeugendensystem noch die $\mathfrak{K}^*_S$ und $\mathfrak{K}^*_T$ definierenden Relationen berechnen.

Seien nun w und w' zwei Wege, die das gleiche Element von $\mathfrak{F}'$ repräsentieren; das heißt es ist $a_{ST}(w) = a_{ST}(w')$. Dann läßt sich w durch die beiden folgenden Prozesse in w' überführen:

1. Dreiecksdeformationen von w in E'.

2. Die Ersetzung eines Teilweges q von w durch einen Weg q', der zusammen mit q eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve bildet, die alle singulären Punkte von E' im Inneren enthält.

Umgekehrt erkennt man, daß auch $a_{ST}(w) = a_{ST}(w')$ ist, wenn w durch Prozesse der Form 1. und 2. in w' überführbar ist. w und w' liegen also genau dann im selben Element von $\mathfrak{F}$, wenn sich w durch die genannten Prozesse in w' überführen läßt.

Seien nun $P_1, \ldots, P_{2n+1}$ die singulären Punkte von E'. F verbinde P_1 und P_{2n+1}. Der Streckenzug p_i sei orientiert und verbinde P_i mit einem Punkt Q_i von F $(i = 2, \ldots, 2_n)$; p_i habe sonst keinen Punkt mit F gemeinsam und, p_i sei mit p_k für $i \neq k$ punktfremd. Wir nennen die Gesamtheit der Polygonzüge P und betrachten nun die Ablesung $a_P(w)$. Seien w und w' zwei Wege, die das Element u bzw. u' von $\mathfrak{U}(F)$ repräsentieren und die mit F keinen Schnittpunkt gemeinsam haben. Dann ist genau dann $u = u'$, wenn $a_P(w') = a_P(w)$ ist. Das erkennt man leicht daraus, daß sich ein Weg w mit $a_P(w) = 1$ durch die oben erklärten Prozesse 1. und 2. auf den Aufpunkt Q zusammenziehen läßt, und umgekehrt $a_P(w) = a_P(w')$ ist, wenn w und w' zu F punktfremd sind und w sich durch die genannten Prozesse in w' überführen läßt.

Ist dann w_i $(i = 2, \ldots, 2n)$ ein System von Wegen mit der Eigenschaft, daß w_i nur einen Polygonzug von P, nämlich p_i und diesen genau einmal schneidet, dann bildet e_i' $(i = 2, 3, \ldots, 2n)$ ein freies Erzeugendensystem von $\mathfrak{U}'(F)$, wenn w_i ein Repräsentant von e_i' ist. Wir wählen nun unsere Wege w_i in spezieller Weise: Sei z_i ein von Q ausgehender einfacher orientierter Streckenzug, der P nicht schneidet; k_i sei ein von dem Endpunkt von z_i ausgehender doppelpunktfreier, orientierter Streckenzug, der geschlossen ist und unsere vorgegebene Arkadenprojektion genau zweimal und zwar in den beiden von P_i ausgehenden Teilschnitten schneidet. Dann können wir $w_i = z_i k_i z_i^{-1}$ als Repräsentant von e_i' wählen. Gehen wir nun von $\mathfrak{U}'(F)$ zu $\mathfrak{U}^*(F)$ über, dann soll e_i' in e_i übergehen. Wir haben

$$e_{2i} = u_{2i}(\sigma)\sigma_i^{\varepsilon_{2i}} u_{2i}^{-1} \times v_{2i}(\tau)\tau_i^{-\varepsilon_{2i}} v_{2i}^{-1}(\tau) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$e_{2i+1} = u_{2i+1}(\sigma)\sigma_{i+1}^{\varepsilon_{2i+1}} u_{2i+1}^{-1} \times v_{2i+1}(\tau)\tau_i^{-\varepsilon_{2i+1}} v_{2i+1}^{-1} \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

worin die $u(\sigma)$ Worte nur in den σ_i sind und die $v_i(\tau)$ Worte in den τ_i. Wir behaupten nun schärfer:

Satz 4: Man kann die Erzeugenden von $\mathfrak{U}^*(F)$ so wählen, daß sie die Form

$$e_{2i} = \sigma_i \times v_{2i}(\tau)\tau^{-1} v_{2i}^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$e_{2i+1} = u_{2i+1}\sigma_{i+1}u_{2i+1}^{-1} \times v_{2i+1}\tau_i^{-1} v_{2i+1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

haben.

Beweis: Nach Hilfssatz 4 ist $\mathfrak{K}_S = \mathfrak{K}_{S'}$, wenn S äquivalent S' ist. Also ist $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}_S = \mathfrak{F}/\mathfrak{K}_{S'}$. Mittels der Ablesung $a_S(w)$ und der Zuordnung $s_i \to \sigma_i$ erhielten wir einen Isomorphismus von $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}_S$ auf $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Wir denken uns nun beide Gruppen identifiziert und erhalten so zu jeder Teilzerschneidung S in eindeutiger Weise zugeordnet ein Erzeugendensystem $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ von $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}_S$. Somit gehört zu einem Paar äquivalenter Teilzerschneidungen ein Automorphismus $\sigma_i \to \sigma_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$, wenn S und S' die äquivalenten Teilzerschneidungen sind und σ_i das zu S und σ_i' das zu S' gehörige Erzeugendensystem darstellt. Man kann nun zeigen, daß dieser Automorphismus die Gestalt

$$\sigma_i \to \sigma_i' = Q_i \sigma_i Q_i^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

besitzt, wenn man die Teilschnitte von S und S', die die gleichen Randpunkte besitzen, gleich numeriert. Und es gibt auch zu jedem Automorphismus dieser Gestalt und einer beliebig vorgegebenen Teilzerschneidung S eine Teilzerschneidung S', so daß der vorgegebene Automorphismus gerade der zu S, S' gehörige ist. Wir brauchen hier aber nur weniger, nämlich:

Hilfssatz 13: Sei S isotop in S' deformierbar und sei $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ das zu S und $\sigma_1', \ldots, \sigma_n'$ das zu S' gehörige Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}_S = \mathfrak{F}/\mathfrak{K}_{S'}$, dann ist $\sigma_i' = \sigma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Der Beweis dieses Hilfsatzes läßt sich leicht mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der isotopen Deformationen führen, die S in S' überführen.

Hilfssatz 14: Sei A eine Arkade von gerader Bogenzahl und ST ihr zugehöriges Teilzerschneidungspaar. Dann läßt sich S isotop in eine Teilzerschneidung S' deformieren, die mit dem vorgegebenen Faden F keinen Punkt gemeinsam hat.

Der Beweis zu diesem Satz ist in dem Beweis zu Hilfssatz 7 schon enthalten.

Nun erkennt man, daß man die Wege w_{2i} $(i = 1, \ldots, n)$ so wählen kann, daß k_i S' nur einmal und zwar in s_i' schneidet und daß z_i keinen Punkt mit S' gemeinsam hat; weiter kann man die Orientierung von k_i so wählen, daß der Index des Schnittpunktes positiv wird. Daraus folgt zusammen mit den beiden letzten Hilfssätzen die Behauptung von Satz 4.

Wir verstehen nun unter $u_i(e)$ bzw. unter $u_i(e_\tau)$ den Ausdruck, den man erhält, wenn man in dem in Satz 4 erklärten $u_i(\sigma)$ formal σ_i durch e_{2i} bzw. σ_i durch $v_{2i}\tau_i^{-1}v_{2i}^{-1}$ ersetzt. Man erkennt

$$u_{2i+1}(e) = u_{2i+1}(\sigma) \times u_{2i+1}(e_\tau).$$

Setzen wir nun

$$e^*_{2\,i} = e_{2i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$e^*_{2\,i+1} = u_{2i+1}(e)e^{-1}_{2(i+1)}u^{-1}_{2i+1}(e)e_{2i+1}, \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

dann haben wir in e^*_i $(i, 1, \ldots, 2n)$ wieder ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{U}^*(F)$; darin ist also

$$e^*_{2\,i+1} = 1 \times \bar{v}_{2i+1}(\tau), \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

worin

$$\bar{v}_{2\,i+1}(\tau) = u_{2i+1}(e_\tau)v_{2(i+1)}\tau_{i+1}v^{-1}_{2(i+1)}u^{-1}_{2i+1}(e_\tau)v_{2i+1}\tau_i^{-1}v^{-1}_{2i+1}$$

gesetzt ist.

In einem Wort $w \in \mathfrak{U}^*(F)$ ist die σ-Komponente dann und nur dann gleich 1, wenn gilt

$$w = \prod_l \left(w_l(e^*_{2\,i})e^*_{2\,k_l+1}w_l^{-1}(e^*_{2\,i})\right),$$

worin w_l allein in $e^*_{2\,i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ geschrieben ist. Das heißt aber, daß $\mathfrak{K}^*_S$ genau aus den in dieser Weise schreibbaren Elementen besteht. Nun erkennt man aber aus der Gestalt von $e^*_{2\,i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, daß alle Elemente von $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ als Komponenten von Elementen von $\mathfrak{U}^*(F)$ vorkommen. Da S in keiner Weise vor T ausgezeichnet ist, gilt das gleiche auch für die τ-Komponenten von $\mathfrak{U}^*(F)$. Ist also v ein beliebiges Element von $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, dann gibt es ein Element $w = u \times v$ aus $\mathfrak{U}^*(F)$, das sich in den Erzeugenden e^*_i $(i = 1, \ldots, 2n)$ ausdrücken läßt. Daraus folgt aber, daß das Element $1 \times v \cdot e^*_{2\,i+1}v^{-1}$ in $\mathfrak{K}^*_S$ liegt. Also gilt

Satz 5: $\mathfrak{K}^*_S$ ist der von $e^*_{2\,i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ in $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ erzeugte Normalteiler.

Die $\mathfrak{K}^*_T$ erzeugenden Relationen lassen sich in analoger Weise gewinnen.

Literatur

[1] K. Reidemeister, „Knotentheorie", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 1.

Eingegangen am 19. 1. 1959