다음과 같은 BVP가 주어졌다고 가정하자

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$
$$A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \cdots (1)$$
$$A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \cdots (2)$$

이때, y_1은 (1)의 조건을 만족시키는 해이고 y_2는 (2)의 조건을 만족시키는 해라고 하자.(이렇게 되는 해를 설정하는 것이 매우 중요하다.)

위 방정식의 해를 y_p라고 한다면

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

이고 다음과 같이 u_i들을 잡을 수 있다.

$$u_1 = \int_b^x \frac{-y_2(t)f(t)}{W(t)}dt, \qquad u_2 = \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt$$

이때 $u_1(b) = 0, u_2(a) = 0$이다.

따라서

$$y_p = \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)y_2(x)}{W(t)}dt + \int_x^b \frac{y_2(t)f(t)y_1(x)}{W(t)}dt = \int_a^b G(x,t)f(t)dt$$

여기서 $G(x,t) = \begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)}, & \text{if } a \le t \le x \\ \frac{y_2(t)y_1(x)}{W(t)}, & \text{if } x \le t \le b \end{cases}$ 로 주어진다. 이제 y_p가 정말 해인지 살펴보자.

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$
$$y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

한편 VOP의 전개 과정을 살펴보면, $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$을 전제하고 있음을 알 수 있다. 따라서

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

따라서

$$(1) \cdots A_1 y_p(a) + B_1 y_p'(a) = A_1 u_1(a) y_1(a) + u_2(a) y_2(a) + B_1 u_1(a) y_1'(a) + u_2(a) y_2'(a)$$
$$= A_1 u_1(a) y_1(a) + B_1 u_1(a) y_1'(a)$$

(왜냐하면 $u_2(a) = 0$이기 때문) y_1이 (1)을 만족하도록 설정되었기 때문에 위 식의 값은 0이 되어 y_p가 (1)을 만족시킨다는 것을 확인할 수 있다. 마찬가지로 y_p는 (2)도 만족함을 확인할 수 있다.

교과서 185페이지에 있는 Example 8을 확인해보면 어떻게 경계 조건 (Boundary condition)을 만족하도록 y_1과 y_2를 설정하는지 예시를 확인할 수 있다.