Problema 1

Solución A

```
from sympy import *
def main():
   lista = [1, 1]
    epsilon1 = 0.00000001
    epsilon2 = 0.00000001
    lista_variables=['x', 'y']
   x = symbols('x')
   y = symbols('y')
    f = x*2(2.62*x) + y2(2.62**y) + 1
    gradient = lambda f, v: Matrix([f]).jacobian(v)
    iteraciones = 0
    while True:
        iteraciones+=1
        gradiente = gradient(f, lista_variables)
        hesiano = hessian(f, lista_variables)
        gradiente = gradiente.subs(x,lista[0]).subs(y,lista[1])
        hesiano = hesiano.inv()
        hesiano = hesiano.subs(x,lista[0]).subs(y,lista[1])
        S = -1*gradiente*hesiano
        if len(lista) != len(S):
            print("there is an error")
            return
        else:
            anterior = lista
            for i in range(len(lista)):
                lista[i] = lista[i] + S[i]
            if abs(f.evalf(subs={x:lista[0], y:lista[1]}) - f.evalf(subs={x:anterior[0], y:a
                continue
            else:
                print("cantidad de iteraciones= ",iteraciones, " y ha convergido en los valo
                return
if _name_ == "_main_":
   main()
Solución B
```

def newton_generalization(vector_x, epsilon1, epsilon2, string_symbols, delta_x, f):

```
epsilon1 -> tolerancia de la funcion de la iteración pasada
    epsilon2 -> tolerancia en el valor del gradiente
    string_symbols -> the letters that we are using in our function.
    Es la generalización del algoritmo de Newton-Raphson para N dimensiónes.
print(f)
gradient = lambda f, v: Matrix([f]).jacobian(v)
v = list(symbols(string_symbols))
#v = list(ordered(f.free\_symbols))
gradiente = gradient(f, v)
#print(gradiente)
assert len(gradiente) == len(vector_x), 'vector_x and gradient have different sizes, you
hessiano = hessian(f, v)
hessiano inverso = hessiano.inv()
#m = symbols(string_symbols)
\#list_m = list(m)
\#derivatives = [diff(f, i) for i in m]
evaluar = dict(zip(v, vector_x))
f_valued_at_points = 0.0
f_valued_at_points = f.evalf(subs=evaluar)
S = -MatMul(gradiente, hessiano_inverso)
s_evaluada = []
for i in range(len(vector_x)):
    s_evaluada.append(S[i].evalf(subs=evaluar))
\#f\_valued\_last\_points = f\_valued\_at\_points
#print("Indice", "X", "Y", "f(x)")
x_graph = np.array([])
y_graph = np.array([])
for i in range(0, 10000):
    #print(i)
    x_graph = np.append(x_graph, vector_x[0])
    y_graph = np.append(y_graph, vector_x[1])
    #print(i, vector_x[0], vector_x[1], f.evalf(subs=evaluar))
    evaluar = dict(zip(v, vector_x))
    # Sacar f(x) y guardar f(x-1)
    f_valued_last_point = f_valued_at_points
    f_valued_at_point = f.evalf(subs=evaluar)
    # Sacar el vector de búsqueda
```

```
s_evaluada = []
        for j in range(len(vector_x)):
            s_evaluada.append(S[j].evalf(subs=evaluar))
        for j in range(len(vector_x)):
            vector_x[j] = vector_x[j] + s_evaluada[j]
        # Evaluar y sacar la norma de un gradiente
        gradiente_evaluado = []
        norma = 0.0
        for j in range(len(gradiente)):
            gradiente_evaluado.append(gradiente[j].evalf(subs=evaluar))
        for j in range(len(gradiente_evaluado)):
            norma = norma + gradiente_evaluado[j]**2
        norma = sqrt(norma)
        # Condición de paro
        if norma < epsilon2 or f_valued_las_point-f_valued_at_point < epsilon1:</pre>
            print("Solution found at", vector_x, "in iteration:", i, "with the value of the
            return [x_graph, y_graph]
   print("Best solution found at", vector_x, "in iteration:", 10000, "with the value of the
    return [x_graph, y_graph]
x, y = symbols('x y')
funcion_1 = x**2*np.e**x+y**2*np.e**y
#print(function_1)
x_graph, y_graph = newton_generalization([1, 1], 0.000000001, 0.000000001, 'x y', 0, funcion
```

Al ser una función exponencial y estar multiplicado por una variable elevada al cuadrado, el minimo va a estar en 0. Si la funcion fuera igual a la $\sum_{0}^{N} X_{i}^{2} * e^{x_{i}}$, el minimo se seguiria encontrado en (0,0,0...0).

Problema 2

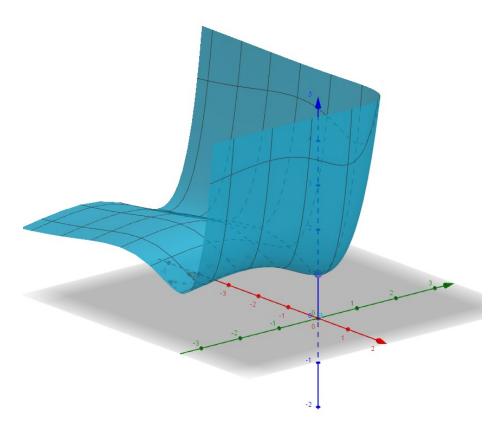


Figure 1: Gráfica del problema 1

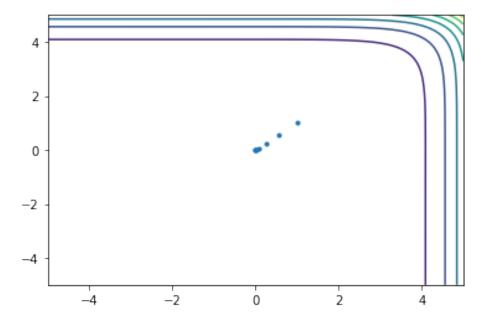


Figure 2: Gráfica de la trayectoria del problema 1

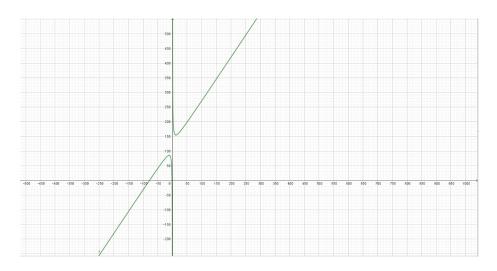
Solución

```
def newton_raphson(X, epsilon, f):
    \it X \rightarrow \it el lugar inicial de la estimación.
    epsilon -> el tamaño del error
    f \rightarrow la función original.
    x = Symbol('x')
    first_derivative = diff(f)
    second_derivative = diff(diff(f))
    x_graph = np.array([])
    y_graph = np.array([])
    xprev = 0
    #print("Indice:", "X_actual")
    for i in range(0, 10000):
        #print(i, X)
        x_graph = np.append(x_graph, X)
        y_graph = np.append(y_graph, f.evalf(subs={x: X}))
        if abs(X-xprev) > epsilon:
            xprev = X
            X = xprev - first_derivative.evalf(subs={x: X})/second_derivative.evalf(subs={x
```

```
else:
     print("Solución encontrada en =", X, " con una solución en f(x*)=", f.evalf(subsection return [x_graph, y_graph]
     break

x = Symbol('x')
```

funcion2 = 120 + 1.5*x + (200/x)



x_graph, y_graph = newton_raphson(0.1, 0.001, funcion2)

Figure 3: Gráfica del problema 2

El mínimo fue encontrado en x=15.547. En esta función se tiene que agarrar como X inicial un numero mayor a 0 debido a que la función en 0 no existe y una potencia negativa del motor no hace sentido. Entre mas cercano este el punto inicial al mínimo, las iteraciones son menores pero de igual forma encuentra el mínimo mientras que el valor sea positivo.

Problema 3

Solución

Secante

import math

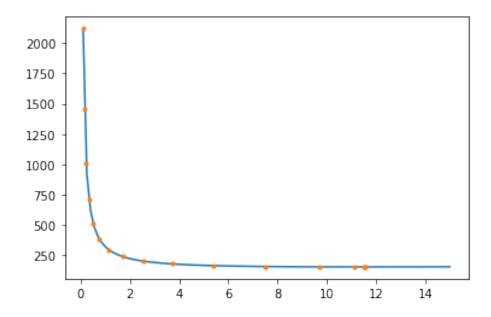


Figure 4: Gráfica de la trayectoria del problema 2

```
def evaluar_derivada(x):
    return 2*x + 4*x**3
def secante(a, b, iteraciones, error):
    flag = 0
    while flag==0:
        if iteraciones==0:
            print("Termino las 10 iteraciones en x = ",alpha)
            return
        alpha = (a + b) / 2
        if evaluar_derivada(a) * evaluar_derivada(alpha) < 0:</pre>
            b = alpha
            flag = 1
        else:
            a = alpha
        iteraciones-=1
    alpha = b - (evaluar_derivada(b)/((evaluar_derivada(b)-evaluar_derivada(a))/(b-a)))
    while evaluar_derivada(alpha)>error:
        if iteraciones==0:
            print("Termino las 10 iteraciones en x = ",alpha)
            return
        if evaluar_derivada(alpha) > 0:
```

```
a = alpha
        else:
            b = alpha
        alpha = b - (evaluar_derivada(b) / ((evaluar_derivada(b) - evaluar_derivada(a)) / ()
        iteraciones-=1;
    print("Convergio en x = ", alpha, " con ", iteraciones, " restantes")
def main():
    secante(-4, -3, 10, 0.000000001)
if _name_ == "_main_":
    main()
Newton-Raphson
import math
def evaluar_derivada(x):
    return 2*x + 4*x**3
def evaluar_2derivada(x):
    return 2 + 12*x**2
# a<=b
def newton_raphson(x, error):
   x_prev = -3
    x = 4
    iteraciones = 10
    while(iteraciones>0):
        derivada1 = evaluar_derivada(x)
        derivada2 = evaluar_2derivada(x)
        x_prev = x
        x = x_prev - (derivada1/derivada2)
        #if x > -3:
            #x=-3
        #if x < -4:
            #x=-4#
        if abs(x-x_prev) <= error:</pre>
            break
        iteraciones-=1
    print("Numero de iteraciones = ",iteraciones, " La funcion ha convergido en: ", x, '\n'.
def main():
```

```
newton_raphson(4, 0.000000001)
if _name_ == "_main_":
    main()
```

TODO Gráfica

El método de la secante encontró el mínimo en x=-3 usando 10 iteraciones. En el método de newton Raphson si la región de búsqueda esta entre [-4,-3], encuentra el mínimo en x=-3 (esto colocando la misma región de búsqueda que el método de la secante) con 1 iteración, en cambio, si no establecemos una región de búsqueda, el mínimo es encontrado en x=0 (este siendo el mínimo global de la función) con 9 iteraciones.

Problema 4

Newton-Raphson

```
import math
def evaluar_funcion(x):
   return x**2 + x**
def evaluar_derivada(x):
    return 2*x + 4*x**3
def evaluar_2derivada(x):
    return 2 + 12*x**2
def delta_x(x):
    return (x+0.00001) - x
# a<=b
def newton_raphson(x, error):
   x_prev = -3
   x = 4
    iteraciones = 10
    while(iteraciones>0):
        derivada1 = (evaluar_funcion(x+delta_x(x))- evaluar_funcion(x))/0.00001
        derivada2 = (evaluar_derivada(x+delta_x(x))- evaluar_derivada(x))/0.00001
        x_prev = x
```

```
x = x_prev - (derivada1/derivada2)
        if x>-3:
            x=-3
        if x<-4:
            x = -4
        if abs(x-x_prev) <= error:</pre>
            break
        iteraciones-=1
    print("Numero de iteraciones = ",10 - iteraciones, " La funcion ha convergido en: ", x,
def main():
    newton_raphson(4, 0.000000001)
if _name_ == "_main_":
    main()
Secante
import math
def evaluar_funcion(x):
    return x**2 + x*
    *4
def evaluar_derivada(x, delta_x):
    return (evaluar_funcion(x+delta_x) - evaluar_funcion(x))/0.00001
def delta_x(x):
    return (x + 0.00001) - x
def secante(a, b, iteraciones, error):
    flag = 0
    while flag==0:
        if iteraciones==0:
            print("Termino las 10 iteraciones en x = ",alpha)
            return
        alpha = (a + b) / 2
        if evaluar_derivada(a, delta_x(a)) * evaluar_derivada(alpha, delta_x(alpha)) < 0:</pre>
            b = alpha
            flag = 1
        else:
            a = alpha
        iteraciones-=1
```

```
alpha = b - (evaluar_derivada(b, delta_x(b))/((evaluar_derivada(b, delta_x(b))-evaluar_derivada(alpha, delta_x(alpha))>error:
    if iteraciones==0:
        print("Termino las 10 iteraciones en x = ",alpha)
            return
    if evaluar_derivada(alpha, delta_x(alpha)) > 0:
        a = alpha
    else:
        b = alpha
    alpha = b - (evaluar_derivada(b, delta_x(b))/((evaluar_derivada(b, delta_x(b))-evaluateraciones-=1;
    print("Convergio en x = ", alpha, " con ", iteraciones, " restantes")

def main():
    secante(-4, -3, 10, 0.000000001)

if _name_ == "_main_":
    main()
```

Sucede lo mismo que en el problema anterior. Tenemos que considerar que estamos utilizando un Δx chico para garantizar una solución precisa. El método de Newton-Raphson fue el más preciso, dando nuevamente una solución en x=0 si no se establece una región de búsqueda o x=-3 si se pone en el mismo espacio de búsqueda que el método de la Secante.

Problema 5

Solución

Ya que el código está lo suficientemente generalizado podemos sólo mandar llamar las funciónes y tengamos la solución.

```
second_derivative = diff(diff(f))
   x_graph = np.array([])
   y_graph = np.array([])
   xprev = 0
    #print("Indice:", "X_actual")
    for i in range(0, 10000):
        #print(i, X)
        x_graph = np.append(x_graph, X)
        y_graph = np.append(y_graph, f.evalf(subs={x: X}))
        if abs(X-xprev) > epsilon:
            xprev = X
            X = xprev - first_derivative.evalf(subs={x: X})/second_derivative.evalf(subs={x
        else:
            print("Solución encontrada en =", X, " con una solución en f(x*)=", f.evalf(subs
            return [x_graph, y_graph]
            break
def newton_generalization(vector_x, epsilon1, epsilon2, string_symbols, delta_x, f):
        epsilon1 -> tolerancia de la funcion de la iteración pasada
        epsilon2 -> tolerancia en el valor del gradiente
        string_symbols -> the letters that we are using in our function.
        Es la generalización del algoritmo de Newton-Raphson para N dimensiónes.
   print(f)
    gradient = lambda f, v: Matrix([f]).jacobian(v)
   v = list(symbols(string_symbols))
    #v = list(ordered(f.free symbols))
   gradiente = gradient(f, v)
    #print(gradiente)
    assert len(gradiente) == len(vector_x), 'vector_x and gradient have different sizes, ye
    hessiano = hessian(f, v)
    hessiano_inverso = hessiano.inv()
    #m = symbols(string_symbols)
    \#list_m = list(m)
    \#derivatives = [diff(f, i) for i in m]
    evaluar = dict(zip(v, vector_x))
    f_valued_at_points = 0.0
    f_valued_at_points = f.evalf(subs=evaluar)
    S = -MatMul(gradiente, hessiano_inverso)
    s_evaluada = []
```

```
for i in range(len(vector_x)):
    s_evaluada.append(S[i].evalf(subs=evaluar))
\#f\_valued\_last\_points = f\_valued\_at\_points
#print("Indice", "X", "Y", "f(x)")
x_graph = np.array([])
y_graph = np.array([])
for i in range(0, 10000):
    #print(i)
    x_graph = np.append(x_graph, vector_x[0])
   y_graph = np.append(y_graph, vector_x[1])
    #print(i, vector_x[0], vector_x[1], f.evalf(subs=evaluar))
    evaluar = dict(zip(v, vector_x))
    # Sacar f(x) y guardar f(x-1)
    f_valued_last_point = f_valued_at_points
    f_valued_at_point = f.evalf(subs=evaluar)
    # Sacar el vector de búsqueda
    s_evaluada = []
    for j in range(len(vector_x)):
       s_{\text{evaluada.append}}(S[j].evalf(subs=evaluar))
    for j in range(len(vector_x)):
       vector_x[j] = vector_x[j] + s_evaluada[j]
    # Evaluar y sacar la norma de un gradiente
    gradiente evaluado = []
   norma = 0.0
    for j in range(len(gradiente)):
       gradiente_evaluado.append(gradiente[j].evalf(subs=evaluar))
    for j in range(len(gradiente_evaluado)):
       norma = norma + gradiente_evaluado[j]**2
   norma = sqrt(norma)
    # Condición de paro
    print("Solution found at", vector_x, "in iteration:", i, "with the value of the
       return [x_graph, y_graph]
print("Best solution found at", vector_x, "in iteration:", 10000, "with the value of the
```

```
x, y = symbols('x y')
problema_5_x = x**2-2*x
problema_5_y = x**2
problema_5\_ambas = x**2+y**2-2*x
x_1, y_1 = newton_raphson(0.1, 0.001, problema_5_x)
x_2, y_2 = newton_raphson(0.1, 0.001, problema_5_y)
x_gen_3, y_gen_3 = newton_generalization([-5, -5], 0.000000001, 0.000000001, 'x y', 0, prob.
Y para el caso de la secante utilizamos el código de la secante siguiente:+
def secante(a, b, iteraciones, error):
    flag = 0
    while flag==0:
        if iteraciones==0:
            print("1. Termino las 1000 iteraciones en x = ",alpha)
            return
        alpha = (a + b) / 2
        if evaluar_derivada(a) * evaluar_derivada(alpha) < 0:</pre>
            b = alpha
            flag = 1
        else:
            a = alpha
        iteraciones-=1
    alpha = b - (evaluar_derivada(b)/((evaluar_derivada(b)-evaluar_derivada(a))/(b-a)))
    while evaluar_derivada(alpha)>error:
        if iteraciones==0:
            print("Termino las 10 iteraciones en x = ",alpha)
        if evaluar_derivada(alpha) > 0:
            a = alpha
        else:
            b = alpha
        alpha = b - (evaluar_derivada(b) / ((evaluar_derivada(b) - evaluar_derivada(a)) / ()
        iteraciones-=1;
    print("Convergio en x = ", alpha, " con ", iteraciones, " restantes")
Para x_1:
def evaluar derivada(x):
    return 2*x - 2
def main():
    secante(-5, 5, 10000, 0.000000001)
```

return [x_graph, y_graph]

Para x_2 :

```
def evaluar_derivada(x):
    return 2*x
def main():
    secante(-5, 1, 10000, 0.000000001)
```

Análisis

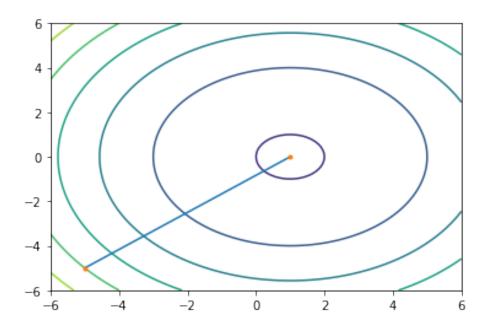


Figure 5: Gráfica del problema 5 del Método de Newton

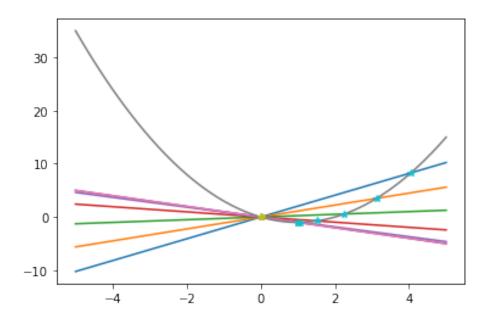


Figure 6: Gráfica del problema 5 en \boldsymbol{x}_1 con el método de la Secante

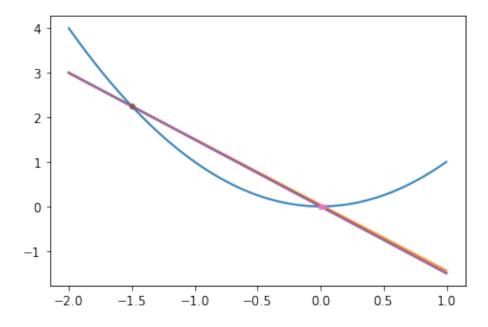


Figure 7: Gráfica del problema 5 en \boldsymbol{x}_1 con el método de la Secante

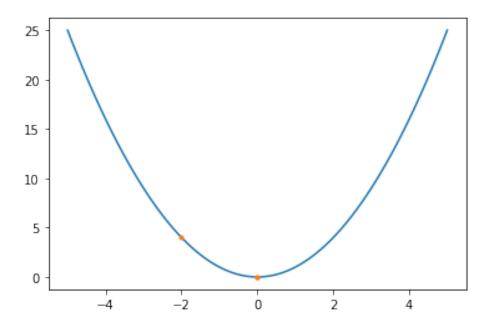
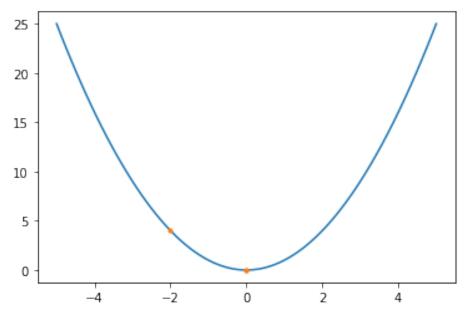


Figure 8: Gráfica del problema 5 en x_1 con el método de Newton



La función al ser separable, nos permite poder correr métodos de optimización unidimensionales. Resolviendo para X_1 , el mínimo se encuentra en $X_1=1$ y resolviendo para X_2 , el mínimo se encuentra en $X_2=0$ por lo tanto, al hacer

una unión de estos resultados, el mínimo se encuentra en [1,0]. Al ya tener el método de Newton generalizado, si comparamos el numero de iteraciones, este es mejor que el método de la secante y el método de Newton-Raphson (esto debido a que la suma de las iteraciones para resolver para X_1 y X_2 es mayor que las que toma el método de Newton generalizado) pero si comparamos la complejidad de las operaciones, calcular el gradiente y el hessiano es mas costoso que calcular derivadas. Otra cosa a analizar, es que hay que definir el espacio de búsqueda para el método de la secante, ya que si este no es adecuado puede que no converga.

Problema 6

```
def newton_generalization(vector_x, epsilon1, epsilon2, string_symbols, delta_x, f):
        epsilon1 -> tolerancia de la funcion de la iteración pasada
        epsilon2 -> tolerancia en el valor del gradiente
        string_symbols -> the letters that we are using in our function.
        Es la generalización del algoritmo de Newton-Raphson para N dimensiónes.
    print(f)
    gradient = lambda f, v: Matrix([f]).jacobian(v)
    v = list(symbols(string_symbols))
    #v = list(ordered(f.free_symbols))
    gradiente = gradient(f, v)
    #print(gradiente)
    assert len(gradiente) == len(vector_x), 'vector_x and gradient have different sizes, you
   hessiano = hessian(f, v)
    hessiano_inverso = hessiano.inv()
    #m = symbols(string_symbols)
    \#list_m = list(m)
    \#derivatives = [diff(f, i) for i in m]
    evaluar = dict(zip(v, vector_x))
    f_valued_at_points = 0.0
    f_valued_at_points = f.evalf(subs=evaluar)
    S = -MatMul(gradiente, hessiano_inverso)
    s evaluada = []
   for i in range(len(vector x)):
        s_evaluada.append(S[i].evalf(subs=evaluar))
    #f_valued_last_points = f_valued_at_points
    #print("Indice", "X", "Y", "f(x)")
```

```
x_graph = np.array([])
    y_graph = np.array([])
    for i in range(0, 10000):
        #print(i)
        x_graph = np.append(x_graph, vector_x[0])
        y_graph = np.append(y_graph, vector_x[1])
        #print(i, vector_x[0], vector_x[1], f.evalf(subs=evaluar))
        evaluar = dict(zip(v, vector_x))
        # Sacar f(x) y guardar f(x-1)
        f_valued_last_point = f_valued_at_points
        f_valued_at_point = f.evalf(subs=evaluar)
        # Sacar el vector de búsqueda
        s evaluada = []
        for j in range(len(vector_x)):
            s_evaluada.append(S[j].evalf(subs=evaluar))
        for j in range(len(vector_x)):
            vector_x[j] = vector_x[j] + s_evaluada[j]
        # Evaluar y sacar la norma de un gradiente
        gradiente_evaluado = []
        norma = 0.0
        for j in range(len(gradiente)):
            gradiente_evaluado.append(gradiente[j].evalf(subs=evaluar))
        for j in range(len(gradiente_evaluado)):
            norma = norma + gradiente_evaluado[j]**2
        norma = sqrt(norma)
        # Condición de paro
        if norma < epsilon2: \#for\ f\_valued\_las\_point-f\_valued\_at\_point < epsilon1:
            print("Solution found at", vector_x, "in iteration:", i, "with the value of the :
            return [x_graph, y_graph]
    print("Best solution found at", vector_x, "in iteration:", 10000, "with the value of the
    return [x_graph, y_graph]
x, y = symbols('x y')
problema_6 = (x+2*y-7)**2 + (2*x+y-5)**2
newton_generalization([9,8], 0.000000001, 0.000000001, 'x y', 1, problema_6)
```

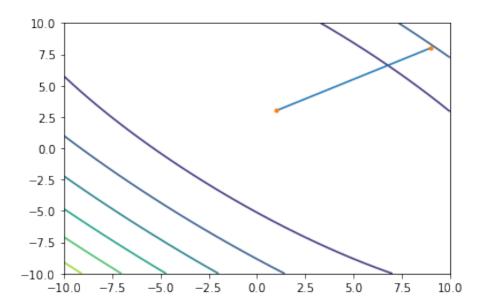


Figure 9: Gráfica de la trayectoria del problema 1

En este problema se encontró un mínimo en [1,3] después de 1 iteración. Podemos ver el salto de puntos en la gráfica.

Problema 7

Solución

```
assert len(gradiente) == len(vector_x), 'vector_x and gradient have different sizes, ye
hessiano = hessian(f, v)
hessiano_inverso = hessiano.inv()
#m = symbols(string_symbols)
\#list_m = list(m)
\#derivatives = [diff(f, i) for i in m]
evaluar = dict(zip(v, vector_x))
f_valued_at_points = 0.0
f_valued_at_points = f.evalf(subs=evaluar)
S = -MatMul(gradiente, hessiano_inverso)
s_evaluada = []
for i in range(len(vector_x)):
    s_evaluada.append(S[i].evalf(subs=evaluar))
#f_valued_last_points = f_valued_at_points
#print("Indice", "X", "Y", "f(x)")
x_graph = np.array([])
y_graph = np.array([])
for i in range(0, 10000):
    #print(i)
    x_graph = np.append(x_graph, vector_x[0])
    y_graph = np.append(y_graph, vector_x[1])
    #print(i, vector_x[0], vector_x[1], f.evalf(subs=evaluar))
    evaluar = dict(zip(v, vector_x))
    # Sacar f(x) y guardar f(x-1)
    f_valued_last_point = f_valued_at_points
    f_valued_at_point = f.evalf(subs=evaluar)
    # Sacar el vector de búsqueda
    s_evaluada = []
    for j in range(len(vector_x)):
        s_evaluada.append(S[j].evalf(subs=evaluar))
    for j in range(len(vector_x)):
        vector_x[j] = vector_x[j] + s_evaluada[j]
    # Evaluar y sacar la norma de un gradiente
    gradiente evaluado = []
    norma = 0.0
```

```
for j in range(len(gradiente)):
                                                  gradiente_evaluado.append(gradiente[j].evalf(subs=evaluar))
                                 for j in range(len(gradiente_evaluado)):
                                                  norma = norma + gradiente_evaluado[j]**2
                                 norma = sqrt(norma)
                                  # Condición de paro
                                 if norma < epsilon2: \#for\ f\_valued\_las\_point-f\_valued\_at\_point < epsilon1:
                                                  print("Solution found at", vector_x, "in iteration:", i, "with the value of the
                                                  return vector_x
                                                  #return [x_graph, y_graph]
                print("Best solution found at", vector x, "in iteration:", 10000, "with the value of the
                return vector_x
x, y, z, w = symbols('x y z w')
problema_7 = (100*(y-x**2))**2 + (1-x)**2+90*(w-z**2)**2 + (1-z)**2 + 10.1*((y-1)**2 + (w-z)**2)**2 + (1-z)**2 + 10.1*((y-z)**2) + (w-z)**2 + 10.1*((y-z)**2) + (w-z)**2 + (w-
newton_generalization([10, 10, 10, 10], 0.000000001, 0.000000001, 'x y z w', 1, problema_7)
newton_generalization([-10, -10, -10, -10], 0.000000001, 0.000000001, 'x y z w', 1, problemation newton_generalization([-10, -10, -10], -10], 0.0000000001, 0.000000001, 'x y z w', 1, problematicalization newton_generalization([-10, -10, -10], -10], 0.0000000001, 0.0000000001, 'x y z w', 1, problematicalization newton_generalization newton_generalization.
newton_generalization([0, 0, 0, 0], 0.000000001, 0.000000001, 'x y z w', 1, problema_7)
```

El mínimo de la función se encuentra en $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Probamos para valores iniciales los extremos de los limites y la mitad, esto llevando a un resultado preciso en ambos casos solo con un numero diferente de iteraciones