

学校代码: 10246
学 号: 14307130043

復旦大學

本科毕业论文

对矩形杨图表示下的双辫节的 HOMFLY-PT 多项式和 Poincaré 多项式的研究

The HOMFLY-PT polynomial and Poincaré polynomial of two-braid knot colored by rectangular Young diagrams

院 系: 物理系

专 业: 物理学

姓 名: 陶润恺

指 导 教 师: Satoshi Nawata 研究员

完 成 日 期: 2019 年 5 月 16 日

指导小组成员

目 录

摘要	iii
Abstract	v
第1章 简介	1
1.1 结不变量	1
1.2 HOMFLY-PT 同调	2
1.3 双辫结 (two-braid knot)	3
第2章 着色的 (colored) HOMFLY-PT 多项式	5
2.1 Schur 函数	5
2.2 着色的 HOMFLY-PT 多项式的构建	8
2.3 着色的 (colored) HOMFLY-PT 多项式的性质和讨论	8
2.3.1 三叶草 (trefoil) 3_1 结	9
2.3.2 8 形结 (figure-eight) 4_1 结	10
2.3.3 5_2 结	10
2.3.4 6_1 结	12
2.3.5 7_2 结与 8_1 结	13
第3章 着色的 (colored)HOMFLY-PT 同调的 Poincaré 多项式	15
3.1 插值 Macdonald 多项式	15
3.2 Poincaré 多项式	17
3.3 Poincaré 多项式的性质	17
3.3.1 扭转因子 (twist factor) 的性质	17
3.3.2 Poincaré 多项式的性质	18
3.4 例子与讨论	19
3.4.1 三叶草 (trefoil) 3_1 结	19
3.4.2 8 形结 (figure-eight) 4_1 结	20
3.4.3 5_2 结和 6_1 结	21
3.4.4 7_4 结	23
第4章 总结与展望	25
参考文献	27

摘要

纽结理论是数学中拓扑几何学的重要分支，在弦论及拓扑量子场论中得以广泛的应用。自从 Jones 多项式的发现和从 Chern-Simons 理论中三维流形的 Witten 不变量的导出，二维量子场论和三维拓扑之间的关系正在不断被研究。Chern-Simons 规范理论和共形场论之间的关系在这些拓扑不变量的研究中得以阐明。在这其中，三维拓扑不变量的计算显得尤为重要。然而，计算一般形式的量子多项式是非常困难的。在本课题中，我将研究一种结-双辫结-的 HOMFLY-PT 多项式和 Poincaré 多项式这两种拓扑不变量。这一研究将扩展我们已知的纽结不变多项式的门类，为后续研究一般纽结的几何表示论及其在拓扑量子场论的应用打下基础。

关键字：结不变量；HOMFLY 多项式；Poincaré 多项式；杨图

中图分类号：O413.1

Abstract

Knot theory is an important branch of topological geometry in mathematics, and it is widely used in string theory and topological quantum field theory. Since the discovery of the Jones polynomial and the derivation of the Witten invariant of the three-dimensional manifold from the Chern-Simons theory, the relationship between the two-dimensional quantum field theory and the three-dimensional topology has been studied. The relationship between Chern-Simons gauge theory and conformal field theory is clarified in the study of these topological invariants. Among them, the calculation of 3D topological invariants is particularly important. However, it is very difficult to calculate a general form of quantum polynomial. In this paper, I will study two topological invariants of double-twist knot, HOMFLY-PT polynomial and Poincaré polynomial. This study will extend the class of knot-invariant polynomials we know, laying the foundation for the geometric representation of general knots and its application in topological quantum field theory.

Keywords: knot invariant; HOMFLY polynomial; Poincaré polynomial; Young diagram

CLC number: O413.1

第 1 章 简介

着色的 (colored) HOMFLY-PT 多项式是具有两个变量的纽结不变量. 这里着色指这样的纽结不变量会与 A_N 型的李代数的表示相关联. 在本篇文章里, 我们讨论的是 $\mathfrak{sl}(\mathfrak{N})$ 的所有矩形杨图表示下的 HOMFLY-PT 同调. 尽管我们已经计算知道了很多计算任意着色的 HOMFLY-PT 多项式的方法, 例如对于圆环面纽结的拓扑不变量的计算和应用^[1], 对于一般的着色的非圆环面纽结的拓扑不变量的计算依然充满着挑战. 然而近些年来, 对于特定类型的非圆环面结的 HOMFLY-PT 多项式的研究取得了很大进展. 事实上, 在用于范畴化 HOMFLY-PT 多项式的 HOMFLY-PT 同调层面, 很多的结构性质变得愈发清晰. 用任意表示着色的 HOMFLY-PT 同调表示被定义在^[2]. 紧接着^[3, 4] 提出了当四级 (quadruple-grading)($\mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c$) 多项式被引入, 矩形杨图着色下的结构性质会变得十分显著. 在^[5] 中对于三叶草结 (trefoil) 和 8 形结 (figure-eight) 的矩形杨图着色下的 HOMFLY 同调的 Poincaré 多项式的表达式被提出. 在^[5] 中, 这个公式被简洁的用所有 $[r^s]$ 中子杨图求和的形式给出. 这篇论文中, 主要以^[6] 为参考. 其中我们将 HOMFLY 同调的 Poincaré 多项式的表达式推广到了一般的双辫结¹⁻². 我们提出了迭代嵌套子杨图对插值 Macdonald 多项式进行求和的方法可以被理解为对于矩形杨图的对称表示的割圆 (cyclotomic) 展开的推广.^[4, 7, 8]. 在课题中我对任意双辫矩形杨图着色下的 HOMFLY-PT 同调的 Poincaré 多项式进行了编程, 实现了任意双辫结的 HOMFLY-PT 多项式和 Poincaré 多项式的计算. 相信这项课题会在数学物理上有着及其深远的应用.

本篇论文的主要构建, 第一章即简介部分是介绍本篇文章所涉及到的数学对象. 第二章第一部分是对矩形杨图着色下的双辫结的 HOMFLY-PT 多项式的计算公式所涉及的数学工具的介绍, 及给出了 HOMFLY-PT 多项式的表达式. 第二部分, 这是对计算得出的矩形杨图着色下的双辫结的 HOMFLY-PT 多项式的简单例子进行讨论, 从中可以看出我们获得该表达式的思路. 第三章是进一步研究矩形杨图着色下的双辫结的 Poincaré 多项式. 第一部分依旧补充所需的数学只是, 和给出最终的表达式, 第二部分则是对简单双辫结下 Poincaré 多项式的表达式及其性质的分析.

1.1 结不变量

在数学语言, 一个结是 S^1 在 3 维欧几里得空间的嵌入. 所以三维欧氏空间的一个圆圈是一个最基本的结. 图¹⁻¹是两种最简单的非平庸结, 3_1 结和 4_1 结. 其中 3 和 4 对应结的节点的个数, 而下标代表这个结在给定节点个数中的分类. 这样的记号方式称为 Rolfsen 表. 3 个和 4 个节点的结都各自只有一种.

结不变量是研究结的拓扑性质的一种代数手段. 在数学上, 对于两个复杂的纽结是否具有相同的拓扑性质, 光靠几何的图形难以判断. 然而利用代数的方法, 将某个纽结映照到一个多项式, 则我们可以根据代数式是否相同来判断结是否拓扑等价.

Skein 关系是一种通过递推关系获得结不变量的方法. 在本文中我们使用如下的归一化

条件:

$$H_{\square}(\bigcirc) = 1, \quad (1.1)$$

我们可以利用如下递推关系获得任意结在 $\mathfrak{sl}(N)$ 基本表示下的 HOMFLY-PT 多项式.

$$A H_{\square}\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array}\right) - A^{-1} H_{\square}\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = (q - q^{-1}) H_{\square}\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array}\right). \quad (1.2)$$

在这种规范下的 Skein 关系, 得到的 Laurent 多项式称为约化 (reduced) 的 HOMFLY 多项式.

1.2 HOMFLY-PT 同调

$\mathfrak{sl}(N)$ 的任意表示可以有相应的杨图对应, 对于这种着色的 (colored) 的可约 HOMFLY 多项式, 简单的 Skein 关系不适用. 我们引入对于一般结 K 同调群 $\mathcal{H}_{i,j,k}(K)$, 它可以范畴化 (categorifying) 可约 HOMFLY 多项式 $H(K)(a, q)$. 此时可约 HOMFLY 多项式可以被定义为

$$H(K)(A, q) = \sum (-1)^k A^i q^j \dim \mathcal{H}_{i,j,k}(K). \quad (1.3)$$

如果引入参数 t , 我们可以得到 HOMFLY-PT 同调下的三级 (triply-graded) Poincaré 多项式

$$P(K)(A, q, t) = \sum A^i q^j t^k \dim \mathcal{H}_{i,j,k}(K). \quad (1.4)$$

也可以引入四级 (quadruply-graded) 同调 $\mathcal{H}_{i,j,k_1,k_2}(K)$, 则对应的四级 Poincaré 多项式定义为

$$\mathcal{P}(K)(\mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{t}_c, \mathbf{t}_r) = \sum \mathbf{a}^i \mathbf{q}^j \mathbf{t}_c^{k_1} \mathbf{t}_r^{k_2} \dim \mathcal{H}_{i,j,k_1,k_2}(K). \quad (1.5)$$

所有的同调群 $\mathcal{H}_*(K)$ 都具有一类微分算符称为分级 (grading) 算符 d_N , 其中 $N \in \mathbb{Z}$. 例如, 对于三级同调, $N > 0$, 我们有 $d_N = (-2, 2N, -1)$. 对于 $N < 0$, 我们有 $d_N = (-2, 2N, -1+2N)$. 以及 $d_0 = (-2, 0, -3)$. 分级 (grading) 算符有与微分算符同样的性质

$$d_N^2 = 0. \quad (1.6)$$

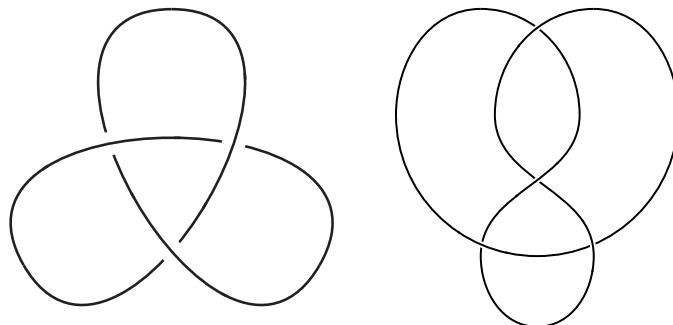
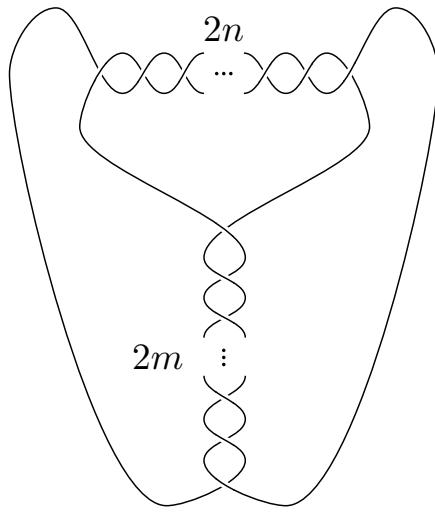


图 1-1 trefoil 3_1 and figure eight 4_1



m	n	Name
1	1	\$3_1\$
-1	1	\$4_1\$
2	1	\$5_2\$
-2	1	\$6_1\$
3	1	\$7_2\$
2	2	\$7_4\$
-3	1	\$8_1\$
3	2	\$9_3\$
4	1	\$9_2\$
-4	1	\$10_1\$
-3	2	\$10_3\$

图 1-2 双辫结 (Double-braid knot) $K_{m,n}$ 以及对应 10 以内节点数的结的 Rolfsen 记号

1.3 双辫结 (two-braid knot)

随着节点数的增加，结的种类也会迅速增加。我们有时也会按照其他的分类方法对结进行分类，最常见也是研究的较全面的结是圆环面结 (torus knot)，即将 S^1 嵌入到三维欧氏空间的一个圆环面 T^2 上，如果绕圆环面一个方向的圈数和另一个方向的圈数是互素的，我们就可以得到一个圆环面结。

本篇文章要研究的对象是双辫结 (two-braid knot)，如图所示 1-2，由两组横向和纵向的辫子所编织而成。 $2m$ 和 $2n$ 的绝对值代表着横向和纵向的辫子的节点的个数。 m, n 取正节点即为上左图所示。如果 m, n 取负，则节点翻转。 (m, n) 和 $(-m, -n)$ 在不考虑方向的情况下，描述的是结相同的拓扑结构。

右表是双辫结各种 m, n 取值对应的结的 Rolfsen 记号。双辫结无法用圆环面结来描述，这使得研究这一类结成为了一个具有挑战的课题。值得注意的是 $(m, n) = (1, 1)$ 和 $(m, n) = (-1, 1)$ 给出了上文所提到的最简单的非平庸结 3_1 和 4_1 。这两种简单的结已经被深入研究，这也为我们进一步研究双辫结提供了帮助。

第 2 章 着色的 (colored) HOMFLY-PT 多项式

着色的 HOMFLY-PT 多项式是由 (A, q) 两个变量构成的 Laurent 多项式. 在^[5] 给出了 $[r^s]$ -着色的 4_1 结 $K_{1,-1}$ 的 HOMFLY-PT 多项式

$$H_{[r^s]}(K_{1,-1}; A, q) = \sum_{\lambda \in [r^s]} D_{\lambda}^{(s)}(q) D_{\lambda^T}^{(r)}(q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \{A q^{r+a'_\square - l'_\square}\} \{A q^{a'_\square - l'_\square - s}\}, \quad (2.1)$$

其中 $\{x\} = x - x^{-1}$, λ^T 是 λ 的转置. 第一个求和是对矩形杨图 $[r^s]$ 中所有的子杨图的求和, 第二个求积是对每个子杨图的所有的方格求积. 其中 a, a', l, l' 定义如图2-2所示. $D_{\lambda}^{(s)}(q)$ 是定义成如下形式的 Schur 多项式.

$$D_{\lambda}^{(s)}(q) := s_{\lambda}(q^{s-1}, q^{s-3}, \dots, q^{-s+3}, q^{-s+1}) = \prod_{\square \in \lambda} \frac{\{q^{s-l'_\square + a'_\square}\}}{\{q^{l'_\square + a_\square + 1}\}}. \quad (2.2)$$

其中, s_{λ} 是 Schur 函数. 式(2.1)是一个 Laurent 多项式, 其变量 A, q 上的指数都是偶数, 且具有如下对称性

$$H_{[r^s]}(K_{1,-1}; A, q) = H_{[s^r]}(K_{1,-1}; A, \pm q^{-1}) \quad (2.3)$$

2.1 Schur 函数

之前的定义我们已经用到了 Schur 函数, 本节我们需要对 Schur 函数的性质做一些整理. Schur 函数的定义如下给一个整数配分 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 我们可以定义如下函数

$$a_{(\lambda_1+n-1, \lambda_2+n-2, \dots, \lambda_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \det(x_j^{\lambda_i + n - i})_{i,j=1,2,\dots,n}. \quad (2.4)$$

Schur 函数则定义为

$$s_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{a_{(\lambda_1+n-1, \lambda_2+n-2, \dots, \lambda_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_{(n-1, n-2, \dots, 0)}(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (2.5)$$

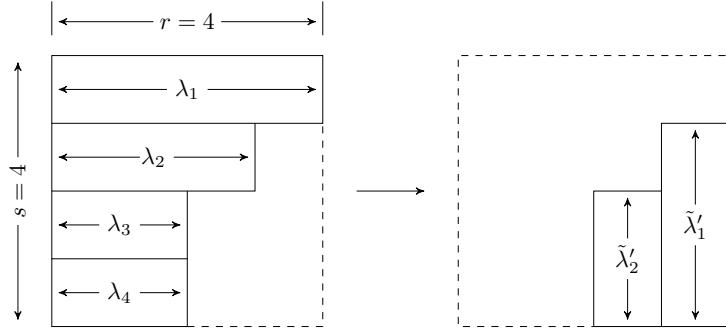
式(2.1)可以由 Cauchy 公式得出^[9]

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda^T}(y), \quad (2.6)$$

或其等价形式^[10] 给出

$$\prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^r (x_i + y_j) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\tilde{\lambda}'}(y), \quad (2.7)$$

其中 λ 在 r^s , 且为 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$, 则 $\lambda_1 \leq r$ and $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$. $\tilde{\lambda}' = (s - \lambda_r', \dots, s - \lambda_1')$.


 图 2-1 $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}'$

举一个 2^2 的例子

$$\begin{aligned}
 \text{RHS} &= s(x) \cdot s_{\square\square}(y) + s_{\square}(x) \cdot s_{\square\square}(y) + s_{\square}(x) \cdot s_{\square\square}(y) \\
 &\quad + s_{\square\square}(x) \cdot s_{\square}(y) + s_{\square\square}(x) \cdot s_{\square}(y) + s_{\square\square}(x) \cdot s(y) \\
 &= 1 \cdot y_1^2 y_2^2 + (x_1 + x_2) \cdot y_1 y_2 (y_1 + y_2) + x_1 x_2 \cdot (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + (x_i \leftrightarrow y_i) \\
 &= (x_1 + y_1)(x_1 + y_2)(x_2 + y_1)(x_2 + y_2) = \text{LHS}.
 \end{aligned}$$

现在让 $x_i = 1$, $y_i = h$, 我们可以重写 (2.7)

$$(1+h)^{rs} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(1) s_{\tilde{\lambda}'}(h). \quad (2.8)$$

对于 2^2 , 我们可以显示的将上式展开

$$\begin{aligned}
 (1+h)^4 &= s(1) \cdot s_{\square\square}(h) + s_{\square}(1) \cdot s_{\square\square}(h) + s_{\square}(1) \cdot s_{\square\square}(h) \\
 &\quad + s_{\square\square}(1) \cdot s_{\square}(h) + s_{\square\square}(1) \cdot s_{\square}(h) + s_{\square\square}(1) \cdot s(y) \\
 &= 1 \cdot h^4 + 2 \cdot 2h^3 + 1 \cdot 3h^2 + 3 \cdot h^2 + 2 \cdot 2h + 1 \cdot h^0.
 \end{aligned}$$

二项式定理告诉我们 $(1+h)^4$ 可以展开为

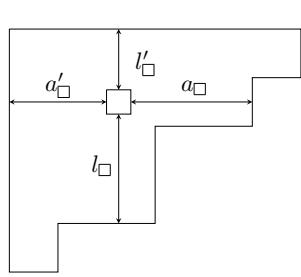
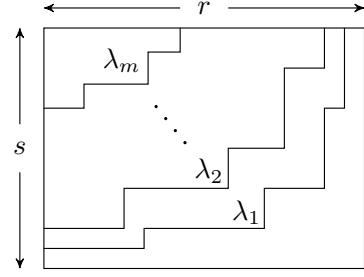
$$(1+h)^4 = \binom{4}{0} h^4 + \binom{4}{1} h^3 + \binom{4}{2} h^2 + \binom{4}{3} h^1 + \binom{4}{4} h^0,$$

其中 $\binom{l}{k}$ 是组合数. 通过观察我们即可发现如下关系 r^s

$$\binom{rs}{k} = \sum_{\substack{|\lambda|=k \\ \lambda \subset r^s}} s_{\lambda}(1_s) s_{\tilde{\lambda}'}(1_r), \quad (2.9)$$

现在 $s_{\lambda}(1_s)$ 是由 s 个变量的 Schur 函数, 并将其所有的变量替换成 1. $s_{\tilde{\lambda}'}(1_r)$ 是 r 个变量的 Schur 函数. 另一个重要的性质是对于 $\lambda \subset r^s$

$$s_{\tilde{\lambda}'}(1_r) = s_{\lambda'}(1_r). \quad (2.10)$$

图 2-2 在杨图中的方格的 a, a', l, l' 的图示图 2-3 杨图序列 $[r^s] \supset \lambda_1 \supset \dots \supset \lambda_m$.

于是我们有

$$\binom{rs}{k} = \sum_{\substack{|\lambda|=k \\ \lambda \subset r^s}} s_\lambda(1_s) s_{\lambda'}(1_r). \quad (2.11)$$

现在

$$\begin{aligned} (1+h)^{rs} &= \sum_{k=0}^{rs} \binom{rs}{k} h^{rs-k} = \sum_{k=0}^{rs} \binom{rs}{k} h^k \\ &= \sum_{k=0}^{rs} \sum_{\substack{|\lambda|=k \\ \lambda \subset r^s}} s_\lambda(1_s) s_{\lambda'}(1_r) h^{|\lambda|} \\ &= \sum_{\lambda \subset r^s} h^{|\lambda|} s_\lambda(1_s) s_{\lambda'}(1_r), \end{aligned}$$

我们知道对于任意 Schur 函数 $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$, 我们可以引入变量代换 $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow d_\lambda(\{p_k\})$:

$$p_k = \sum_{i=1}^m x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

对于一个给定的表示 λ 以及任意 m , $d_\lambda(\{p_k\})$ 的表达式不变. 在应用上面的性质我们可以得到

$$(1+h)^{rs} = \sum_{\lambda \subset r^s} h^{|\lambda|} d_\lambda(p_k=s) d_{\lambda'}(p_k=r), \quad (2.12)$$

这个表达式即是(2.1)在 $q \rightarrow 1$ 时的结果. 与此同时, 在^[5]中, 我们可以通过 q -变形 (deformation) 的方法利用上式得到(2.1). 这揭示了结不变量与由对称函数构造的二项式定理的深刻联系. 在对称表示中^[4, 8], 我可以预期 $[r^s]$ -着色的双辫结的 HOMFLY-PT 多项式可以通过在公式中加入扭转因子 (twist factor) 得到.

在对称表示的例子中, 扭转因子在 q -二项式定理中被发现. 事实上, 对于任意表示 λ 的二项式公式在^[10] §3, 例 10 中被给出

$$s_\lambda(1+x_1, 1+x_2, \dots, 1+x_n) = \sum_{\mu \subset \lambda} d_{\lambda\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_n) \quad (2.13)$$

μ 是对任意杨图 λ 的所有子杨图求和.

$$d_{\lambda\mu} = \det \left(\left(\begin{array}{c} \lambda_i + n - i \\ \mu_j + n - j \end{array} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (2.14)$$

这其中 n 是 Schur 函数的变量个数.

2.2 着色的 HOMFLY-PT 多项式的构建

通过对2.14的 q -变形 (deformation) 我们可以定义如下迭代因子.

$$B_{\lambda,\mu}^{(s)}(A, q) := A^{2|\mu|} q^{(1-s)(|\lambda|-|\mu|)} \left(\prod_{\square \in \mu} q^{4(a'_\square - l'_\square)} \right) \det \left(\begin{bmatrix} \lambda_i + s - i \\ \mu_j + s - j \end{bmatrix}_{q^2} \right)_{1 \leq i,j \leq s}. \quad (2.15)$$

其中 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_q$ 是 q -二项式系数. 当 $\mu = \emptyset$, 我们由 $B_{\lambda,\emptyset}^{(s)} = D_\lambda^{(s)}$. 用(2.15), 我们可以引入以 $m > 0$ 为参数的扭转因子 (twist factor)

$$\begin{aligned} F_\lambda^{(m)}(A, q) &= \left(D_\lambda^{(s)} \right)^{-1} \sum_{\lambda = \lambda_1 \supset \dots \supset \lambda_m} B_{\lambda_1, \lambda_2}^{(s)} B_{\lambda_2, \lambda_3}^{(s)} \dots B_{\lambda_{m-1}, \lambda_m}^{(s)} D_{\lambda_m}^{(s)} \\ &= \left(D_{\lambda^T}^{(r)} \right)^{-1} \sum_{\lambda^T = \lambda'_1 \supset \dots \supset \lambda'_m} B_{\lambda'_1, \lambda'_2}^{(r)} B_{\lambda'_2, \lambda'_3}^{(r)} \dots B_{\lambda'_{m-1}, \lambda'_m}^{(r)} D_{\lambda'_m}^{(r)} \Big|_{q \rightarrow q^{-1}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中所有对 m 层子杨图序列的求和, 如图2-3所示. 尽管在(2.16)的第一行 $B^{(s)}$ 和 $D^{(s)}$ 的结果依赖于 s , $F_\lambda^{(m)}(A, q)$ 是于 s 无关的多项式 ($\geq \text{length}(\lambda)$). 同样的, $F_\lambda^{(m)}(A, q)$ 在第二行是于 $r (\geq \text{length}(\lambda^T))$ 无关的多项式. 值得注意的是对于任意的表示 λ , 我们由 $F_\lambda^{m=1} = 1$. 为了构造双辫结 (two-braid knot) 的 HOMFLY-PT 多项式, 我们要通过(2.16)来定义扭转元素 (twist element), 此时 m 是任意不等于零的整数.

$$\text{Tw}_\lambda^{(m)}(A, q) := \begin{cases} (-A^2)^{|\lambda|} \left(\prod_{\square \in \lambda} q^{2a_\square - 2l_\square} \right) F_\lambda^{(m)}(A, q), & m \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ F_\lambda^{(-m)}(A^{-1}, q^{-1}), & m \in \mathbb{Z}_{<0}. \end{cases} \quad (2.17)$$

此时对于一般的由矩形杨图 $[r^s]$ 表示的双辫结 $K_{m,n}$ 的 HOMFLY 多项式可以表示为

$$H_{[r^s]}(K_{m,n}; A, q) = \sum_{\lambda \subset [r^s]} \frac{\text{Tw}_\lambda^{(m)} \text{Tw}_\lambda^{(n)}}{\text{Tw}_\lambda^{(1)} \text{Tw}_\lambda^{(-1)}} D_\lambda^{(s)}(q) D_{\lambda^T}^{(r)}(q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \{Aq^{r+a'_\square - l'_\square}\} \{Aq^{a'_\square - l'_\square - s}\}. \quad (2.18)$$

与(2.1)结构相同, 我们依旧需要对矩形杨图中所有子杨图求和. 求和号内的第一项因子描述了双辫结 $K_{m,n}$ 的扭转行为, 后面的项与 4_1 结 $K_{1,-1}$ 的 HOMFLY-PT 多项式(2.1)的求和因子相同. (2.18)同样具有如下关于 q 的对称性.

$$H_{[r^s]}(K_{m,n}; A, q) = H_{[s^r]}(K_{m,n}; A, \pm q^{-1}). \quad (2.19)$$

这是对矩形杨图的对称表示的合理推广^[4, 8], 我们已经验证(2.18)计算出来的结果可以涵盖^[11–13] 文献中对 HOMFLY-PT 多项式计算中的所有结果

2.3 着色的 (colored) HOMFLY-PT 多项式的性质和讨论

我们研究着色的 HOMFLY 多项式, 更多的是作为中间结论用于研究四级 (quadruply-graded) HOMFLY-PT 同调的 Poincaré 多项式. 所以其本身的性质并不多. 这一节我们主要罗列一些例子用于之后进一步的研究.

2.3.1 三叶草 (trefoil) 3_1 结

3_1 结如图1-1, 对应双辫结 $K_{1,1}$ 由(2.18)给出为

$$H_{[r^s]}(K_{1,1}; A, q) = \sum_{\lambda \subset [r^s]} (-A^2)^{|\lambda|} \left(\prod_{\square \in \lambda} q^{2a_\square - 2l_\square} \right) D_\lambda^{(s)}(q) D_{\lambda^T}^{(r)}(q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \{Aq^{r+a'_\square - l'_\square}\} \{Aq^{a'_\square - l'_\square - s}\}. \quad (2.20)$$

这个结果与^[5] 中的结果相一致. 其中求和号前的第一项是三叶草结 (trefoil) 的扭转元素 (twist element). 几个简单的结果如下所示, 对于无着色的 (uncolored) 的 3_1 结, 我们可以得到

$$H_\square(K_{1,1}; A, q) = -A^4 + A^2 q^2 + \frac{A^2}{q^2}. \quad (2.21)$$

上式可以在图2-4中给出, 其中每个点是 Laurent 多项式的每一项, 横坐标代表 q 上的指数而纵坐标表示该项 A 上的指数.

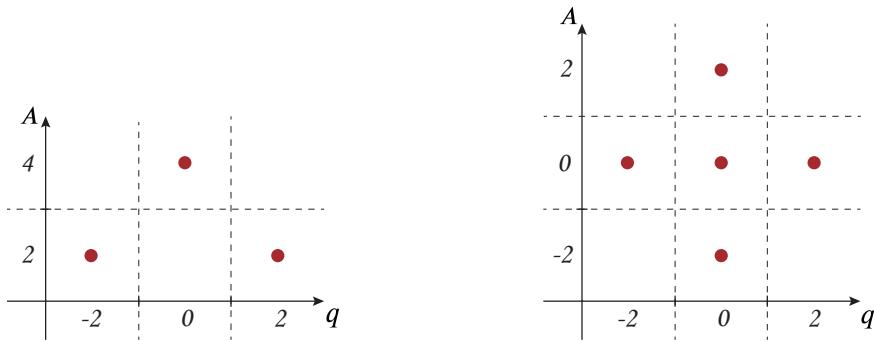


图 2-4 无着色的 (uncolored) 的 3_1 结的 HOMFLY-PT 多项式

图 2-5 无着色的 (uncolored) 的 4_1 结的 HOMFLY-PT 多项式

对于 $m = -1, n = -1$

$$H_\square(K_{-1,-1}; A, q) = -\frac{1}{A^4} + \frac{q^2}{A^2} + \frac{1}{A^2 q^2}. \quad (2.22)$$

我们可以得到如下关系

$$H_\square(K_{1,1}; A, q) = H_\square(K_{-1,-1}; \pm A^{-1}, \pm q^{-1}). \quad (2.23)$$

更一般的情况有对任意矩形杨图 $[r^s]$

$$H_{[r^s]}(K_{1,1}; A, q) = H_{[r^s]}(K_{-1,-1}; \pm A^{-1}, \pm q^{-1}). \quad (2.24)$$

这说明改变双辫结的方向 (所有扭转方向反向), 其 3_1 结的 HOMFLY-PT 多项式的变量取倒数. 对于 $[2^1]$ 表示下的 3_1 结, 其 HOMFLY 多项式的计算结果为

$$H_\square(K_{1,1}; A, q) = -A^6 + A^4 q^4 + \frac{A^4}{q^4} + (A^8 - A^6) q^6 + (A^4 - A^6) q^8 + (A^4 - A^6) q^2. \quad (2.25)$$

$[1^2]$ 表示下的 3_1 结, 同样可以由(2.18)计算得到

$$H_\square(K_{1,1}; A, q) = -A^6 + A^4 q^4 + \frac{A^4}{q^4} + \frac{A^8 - A^6}{q^6} + \frac{A^4 - A^6}{q^8} + \frac{A^4 - A^6}{q^2}, \quad (2.26)$$

上两式对比，我们可以看到

$$H_{\square}(K_{1,1}; A, q) = H_{\square\square}(K_{1,1}; A, \pm q^{-1}) \quad (2.27)$$

这也一次验证了(2.19). 对于三叶草结的计算结果与^[3]中的结果一致，这说明了行与列有一定的对称性. 较高维表示下的多项式已经由程序计算得出，这里不一一举例.

2.3.2 8形结 (figure-eight) 4_1 结

当 $m = 1, n = -1$ 时，通过(2.18)我可以回到式(2.1). 无着色的 (uncolored) 的 4_1 结的 HOMFLY-PT 多项式可以计算得

$$H_{\square}(K_{1,-1}; A, q) = \frac{A^4 + A^2 + 1}{A^2} - q^2 - \frac{1}{q^2}, \quad (2.28)$$

该结果与 $m = -1, n = 1$ 的计算一致，因为(2.18)的一般形式关于 m 和 n 对称. 上式的图示在图2-5中显示，其中每个点是 Laurent 多项式的每一项，横坐标代表 q 上的指数而纵坐标表示该项 A 上的指数. 同样，我们可以计算 [2¹] 和 [1²] 中的 HOMFLY-PT 多项式

$$\begin{aligned} H_{\square\square}(K_{1,-1}; A, q) = & \frac{(A^4 - A^6) q^6}{A^4} + \frac{A^4 - A^2}{A^4 q^6} + \frac{-A^4 - A^2 + 1}{A^4 q^4} \\ & + \frac{(A^8 - A^6 - A^4) q^4}{A^4} + \frac{(A^6 - A^2) q^2}{A^4} + \frac{A^2 - A^6}{A^4 q^2} + 3, \end{aligned} \quad (2.29)$$

以及

$$\begin{aligned} H_{\square}(K_{1,-1}; A, q) = & \frac{A^4 - A^6}{A^4 q^6} + \frac{(A^4 - A^2) q^6}{A^4} + \frac{(-A^4 - A^2 + 1) q^4}{A^4} \\ & + \frac{A^8 - A^6 - A^4}{A^4 q^4} + \frac{(A^2 - A^6) q^2}{A^4} + \frac{A^6 - A^2}{A^4 q^2} + 3, \end{aligned} \quad (2.30)$$

我们可以看出

$$H_{\square\square}(K_{1,-1}; A, q) = H_{\square}(K_{1,-1}; A, \pm q^{-1}) \quad (2.31)$$

这也再一次验证了(2.19). 对于 4_1 结的计算结果与^[3]中的结果一致，较高维表示下的多项式已经由程序计算得出，我们不一一举例.

2.3.3 5_2 结

由图1-2我们可以看出 5_2 结即对应于双辫结中 $m = 1, n = 2$ 的情况，由(2.18)，我们可以写出其表达式

$$H_{[r^s]}(K_{1,2}; A, q) = \sum_{\lambda \subset [r^s]} (-A^2)^{|\lambda|} \left(\prod_{\square \in \lambda} q^{2a_{\square} - 2l_{\square}} \right) F_{\lambda}^{(2)}(A, q) D_{\lambda}^{(s)}(q) D_{\lambda^T}^{(r)}(q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \{Aq^{r+a'_{\square}-l'_{\square}}\} \{Aq^{a'_{\square}-l'_{\square}-s}\}. \quad (2.32)$$

与(2.20)相比较，我们发现， 5_2 结的 HOMFLY-PT 多项式的表达式即是由 3_1 结的 HOMFLY-PT 的表达式在求和中加入 $m = 2$ 的扭转因子 (twist factor) $F_{\lambda}^{(2)}(A, q)$ (2.16) 得到. 所以 5_2 结可以看作是 3_1 结做一次扭转得到，如图2-6.

我们可以计算在基本表示下 5_2 结的 HOMFLY-PT 多项式：

$$H_{\square}(K_{1,2}; A, q) = -A^6 - A^4 - A^2 + (A^4 + A^2) q^2 + \frac{A^4 + A^2}{q^2} \quad (2.33)$$

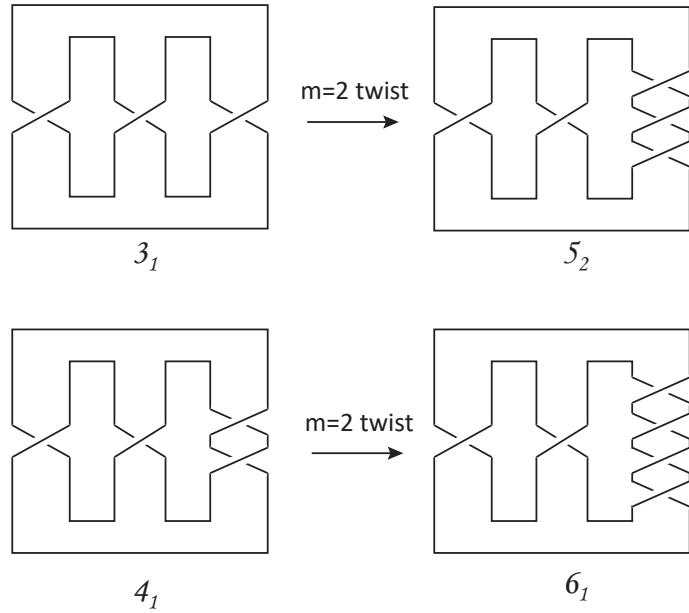


图 2-6 结扭转图示

5_2 结的 HOMFLY-PT 多项式可以如图2-7所示，其中横坐标代表 q 上的指数，纵坐标代表 A 上的指数。我们可以发现红色的点即为三叶草结的 HOMFLY-PT 多项式的对应项，而蓝色的点是红色的点加一个常数项 1，再延纵向提升两个单位得到。我们可以有在基本表示下 3_1 结和 5_2 结具有如下的关系。

$$H_{\square}(K_{1,2}; A, q) = A^2(H_{\square}(K_{1,1}; A, q) - 1) + H_{\square}(K_{1,1}; A, q), \quad (2.34)$$

而对于一般的矩形表示 r_s ，当 $q \rightarrow 1$ 时，我们有如下的表达式

$$H_{[r_s]}(K_{1,2}; A, q \rightarrow 1) = [A^2(H_{\square}(K_{1,1}; A, q \rightarrow 1) - 1) + H_{\square}(K_{1,1}; A, q \rightarrow 1)]^{r_s}, \quad (2.35)$$

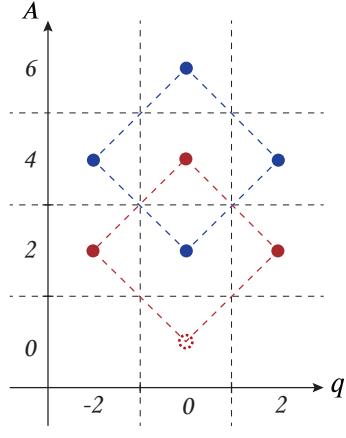
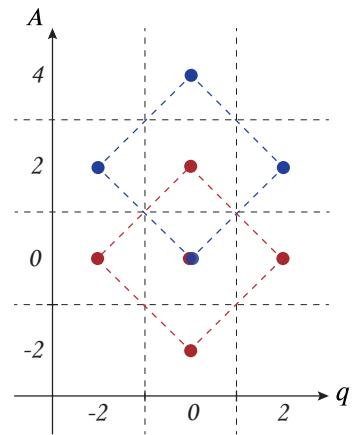
对于一般的 q ，上式不成立，但是将上式用 Schur 函数的二项式定理展开和 q -变形下的结果有着一一对应的关系。这使得找一般情况下 q -变形下的用 Schur 函数展开的二项式定理，成为寻找双辫结的 HOMFLY-PT 多项式的关键。

接下来，我们给出用 $[2^1]$ 着色的 5_2 结的 HOMFLY-PT 多项式

$$\begin{aligned} H_{\square}(K_{1,2}; A, q) = & -2A^6 - A^4 + (A^8 - A^{10})q^{12} + (3A^6 - A^{10})q^4 + (2A^4 - 2A^8)q^2 \\ & + \frac{A^6 + A^4}{q^4} + \frac{A^6 - A^4}{q^2} + (2A^8 - A^6 - A^4)q^6 + (A^{12} - A^{10} - A^8 + A^6)q^{10} \\ & + (A^{10} - A^8 - A^6 + A^4)q^8 \end{aligned} \quad (2.36)$$

且有

$$H_{\square}(K_{1,2}; A, q) = H_{\square}(K_{1,2}; A, \pm q^{-1}) \quad (2.37)$$

图 2-7 5_2 结的 HOMFLY-PT 多项式图 2-8 6_1 结的 HOMFLY-PT 多项式

2.3.4 6_1 结

由图2-2我们可以看出 6_1 结即对应于双辫结中 $m = 2, n = -1$ 的情况, 由(2.18), 我们同样可以写出其表达式

$$H_{[r^s]}(K_{2,-1}; A, q) = \sum_{\lambda \subset [r^s]} F_\lambda^{(2)}(A, q) D_\lambda^{(s)}(q) D_{\lambda^T}^{(r)}(q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \{Aq^{r+a'_\square - l'_\square}\} \{Aq^{a'_\square - l'_\square - s}\}. \quad (2.38)$$

与(2.1)相比较, 我们发现, 6_1 结的 HOMFLY-PT 多项式的表达式即是由 4_1 结的 HOMFLY-PT 的表达式在求和中加入 $m = 2$ 的扭转因子 (twist factor) $F_\lambda^{(2)}(A, q)$ (2.16) 得到. 所以 6_1 结可以看作是 4_1 结做一次扭转得到, 如图2-6. 这与 5_2 结和 3_1 结的关系一致. 我们可以计算在基本表示下 6_1 结的 HOMFLY-PT 多项式:

$$H_\square(K_{2,-1}; A, q) = A^4 + (-A^2 - 1) q^2 + \frac{-A^2 - 1}{q^2} + \frac{A^4 + A^2 + 1}{A^2} + 1, \quad (2.39)$$

与(2.28)相比较, 我们发现了与(2.34)相一致的关系式

$$H_\square(K_{2,-1}; A, q) = A^2(H_\square(K_{1,-1}; A, q) - 1) + H_\square(K_{1,-1}; A, q), \quad (2.40)$$

6_1 结的 HOMFLY-PT 多项式与 4_1 结的 HOMFLY-PT 多项式的关系如图2-8所示, 其中横坐标代表 q 上的指数, 纵坐标代表 A 上的指数. 我们可以发现红色的点即为 4_1 结的 HOMFLY-PT 多项式的对应项. 而蓝色的点是是红色的点减一个常数项 1, 再延纵向提升两个单位得到. 而对于一般的矩形表示 r_s , 当 $q \rightarrow 1$ 时, 我们亦有如下的表达式

$$H_{[r^s]}(K_{2,-1}; A, q \rightarrow 1) = [A^2(H_\square(K_{1,-1}; A, q \rightarrow 1) - 1) + H_\square(K_{1,-1}; A, q \rightarrow 1)]^{r^s}, \quad (2.41)$$

同样的对于一般的 q , 上式不成立, 但是将上式用 Schur 函数的二项式定理展开和 q -变形下的结果有着一一对应的关系.

最后我们列出由 $[2^1]$ 着色的 6_1 结的 HOMFLY-PT 多项式

$$\begin{aligned} H_{\square}(K_{2,-1}; A, q) = & \frac{1 - 3A^4}{A^4 q^4} + \frac{-A^8 + 2A^6 + 4A^4}{A^4} + \frac{(A^8 - A^{10}) q^{10}}{A^4} + \frac{(2A^8 - 2A^6 - 2A^4) q^4}{A^4} \\ & + \frac{A^6 - A^2}{A^4 q^6} + \frac{2A^2 - 2A^6}{A^4 q^2} + \frac{(A^{10} - A^8 - A^6 + A^4) q^6}{A^4} + \frac{(A^{12} - A^{10} - A^8 + A^6) q^8}{A^4} \\ & + \frac{(-A^{10} + A^8 + 3A^6 - 2A^4 - A^2) q^2}{A^4} \end{aligned} \quad (2.42)$$

且有行与列的对称性

$$H_{\square}(K_{2,-1}; A, q) = H_{\square}(K_{2,-1}; A, \pm q^{-1}) \quad (2.43)$$

2.3.5 7_2 结与 8_1 结

通过(2.18), 我们可以写出着色的 7_2 结与 8_1 结的 HOMFLY-PT 多项式的表达式. 7_2 结为

$$H_{[rs]}(K_{1,3}; A, q) = \sum_{\lambda \subset [rs]} (-A^2)^{|\lambda|} \left(\prod_{\square \in \lambda} q^{2a_{\square} - 2l_{\square}} \right) F_{\lambda}^{(3)}(A, q) D_{\lambda}^{(s)}(q) D_{\lambda^T}^{(r)}(q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \{Aq^{r+a'_{\square}-l'_{\square}}\} \{Aq^{a'_{\square}-l'_{\square}-s}\}. \quad (2.44)$$

可以很明显的看出 7_2 结是由 3_1 结做 $m = 3$ 的扭转得到. 同样对于 8_1 结, 我们由

$$H_{[rs]}(K_{3,-1}; A, q) = \sum_{\lambda \subset [rs]} F_{\lambda}^{(3)}(A, q) D_{\lambda}^{(s)}(q) D_{\lambda^T}^{(r)}(q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \{Aq^{r+a'_{\square}-l'_{\square}}\} \{Aq^{a'_{\square}-l'_{\square}-s}\}. \quad (2.45)$$

可以看出 8_1 结是由 4_1 结做 $m = 3$ 的扭转得到. 而对于更一般的情况 $(2n+1)_2$ 结可以有 3_1 结做 $m = n$ 扭转得到, $(2n+2)_1$ 结可以有 4_1 结做 $m = n$ 扭转得到, 其中 $n \geq 2$.

基本表示下 7_2 结的 HOMFLY-PT 多项式可以计算得到,

$$H_{\square}(K_{1,3}; A, q) = -A^8 - A^6 - 2A^4 - A^2 + (A^6 + A^4 + A^2) q^2 + \frac{A^6 + A^4 + A^2}{q^2}. \quad (2.46)$$

与(2.21)相比较, 我们可以得到如下关系式

$$H_{\square}(K_{1,3}; A, q) = H_{\square}(K_{1,1}; A, q) + (A^2 + A^4)(H_{\square}(K_{1,1}; A, q) - 1). \quad (2.47)$$

这一项是对(2.34)的推广, 如果表示在图中, 在图2-7的上方继续添加正方形点阵, 这里就不再画出. 同样我们有当 q 趋于 1 时, 可以得到对任意矩形杨图表示的 7_2 结的 HOMFLY-PT 多项式, 我们有

$$H_{[rs]}(K_{1,3}; A, q \rightarrow 1) = [H_{\square}(K_{1,1}; A, q \rightarrow 1) + (A^2 + A^4)(H_{\square}(K_{1,1}; A, q \rightarrow 1) - 1)]^{rs}. \quad (2.48)$$

同样的, 上式对于任意 q 并不成立. 但是我们可以找到 $q \rightarrow 1$ 和 q 变形相对应的 Schur 函数的二项式定理, 反复的迭代, 从而找到任意矩形杨图的结果. 对于一般的 $(2n+1)_2$ 结 ($n \geq 2$), 可以由 3_1 结通过 $m = n$ 扭转得到, 上述的等式的推广如下.

$$H_{\square}(K_{1,n}; A, q) = H_{\square}(K_{1,1}; A, q) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} A^{2i} \right) (H_{\square}(K_{1,1}; A, q) - 1). \quad (2.49)$$

$$H_{[rs]}(K_{1,n}; A, q \rightarrow 1) = \left[H_{\square}(K_{1,1}; A, q \rightarrow 1) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} A^{2i} \right) (H_{\square}(K_{1,1}; A, q \rightarrow 1) - 1) \right]^{rs}. \quad (2.50)$$

同样对于 $(2n+2)_1$ 结通过 $(n \geq 2)$, 可以由 4_1 结通过 $m = n$ 扭转得到, 有如下的表达式

$$H_{\square}(K_{n,-1}; A, q) = H_{\square}(K_{1,-1}; A, q) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} A^{2i} \right) (H_{\square}(K_{1,-1}; A, q) - 1). \quad (2.51)$$

$$H_{[rs]}(K_{n,-1}; A, q \rightarrow 1) = \left[H_{\square}(K_{1,-1}; A, q \rightarrow 1) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} A^{2i} \right) (H_{\square}(K_{1,-1}; A, q \rightarrow 1) - 1) \right]^{rs}. \quad (2.52)$$

第 3 章 着色的 (colored)HOMFLY-PT 同调的 Poincaré 多项式

由矩形表示 $[r^s]$ 着色的 4_1 结的四级 (quadruply-graded) HOMFLY-PT 同调的 Poincaré 多项式在^[5] 中给出

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \sum_{\lambda \subset [r^s]} \mathbb{D}_{\lambda}^{(s)}(q, t) \mathbb{D}_{\lambda^T}^{(r)}(t^{-1}, q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \left\{ \frac{A}{\sigma} q^{r+a'_{\square}} t^{-l'_{\square}} \right\} \left\{ A \sigma q^{a'_{\square}} t^{-s-l'_{\square}} \right\} \Big|_{(3.3)} \quad (3.1)$$

其中 $\mathbb{D}_{\lambda}^{(s)}$ 可以有 Macdonald 多项式 P_{λ} 写出

$$\mathbb{D}_{\lambda}^{(s)}(q, t) := P_{\lambda}(t^{s-1}, t^{s-3}, \dots, t^{-s+3}, t^{-s+1}; q, t) = \prod_{\square \in \lambda} \frac{\{t^{s-l'_{\square}} q^{a'_{\square}}\}}{\{t^{l_{\square}+1} q^{a_{\square}}\}}. \quad (3.2)$$

我们希望 Poincaré 多项式可以用另四个变量 a, Q, t_c, t_r 表示, 变量代换由下式给出

$$A \rightarrow \mathbf{a} \sqrt{-\mathbf{t}_r \mathbf{t}_c}, \quad t \rightarrow \mathbf{t}_r^{-1}, \quad q \rightarrow -\mathbf{t}_c, \quad \sigma \rightarrow \mathbf{t}_r^{-s} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (3.3)$$

当 $\mathbf{a} \rightarrow A, \mathbf{t}_c \rightarrow -q, \mathbf{t}_r \rightarrow q^{-1}$, and $\mathbf{Q} \rightarrow q^s$, Poincaré 多项式(3.1) 会回到 HOMFLY-PT 多项式(2.1).

3.1 插值 Macdonald 多项式

与之前类似, 为了找到相应的扭转元素 (twist element), 我们需要与 Macdonald 多项式相关联的二项式定理. 值得庆幸的是, 在^[4] 中, 二项式定理可以由插值 Macdonald 多项式 $P_{\lambda}^*(x, q, t)$ 推广. 在这一节, 我们回顾一下一种插值 Macdonald 多项式 (interpolation Macdonald polynomials) 的一种组合定义^[15-17] 以及其二项式定理^[14].

对于一个杨图 λ , 一个杨氏矩阵 (Young tableau) T 可以由在杨图的每个方格中填数 $\{1, \dots, n\}$ 得到. 杨氏矩阵的每一个矩阵元, 我们用 T_{\square} 表示. 如果一个杨氏矩阵的各行各列都是严格递增的, 我们称这样的杨氏矩阵是标准的 (standard). 如果每行矩阵元不递增, 每列矩阵元严格递减, 那么我们就称这样的杨氏矩阵是反转的杨氏矩阵 (reverse tableau). 从定义中我们得知, 在反转的杨氏矩阵 (reverse tableau) 中的矩阵元最大数不小于杨图的长度 (杨图的行的个数). 定义在杨图 λ 上的一个反转的杨氏矩阵 (reverse tableau) T , 会给出一个杨图序列.

$$\emptyset \equiv \lambda^{(n)} \subseteq \lambda^{(n-1)} \subseteq \dots \subseteq \lambda^{(0)} \equiv \lambda,$$

这里 $\lambda^{(k)}$ 是 T 的子杨氏矩阵满足 $T_{\square} > k$ 的矩阵元的 “形状” 例如, 如果我们考虑在 $\lambda = (4, 4, 3, 2, 2)$ 上的最大值为 6 的反转杨氏矩阵

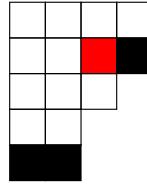
6	6	6	2
5	5	2	1
3	3	2	
2	2		
1	1		

,

其构成的序列为

$$\emptyset \subseteq \square \subseteq \square\square \subseteq \square\square\square \subseteq \square\square\square\square \subseteq \square\square\square\square\square \subseteq \square\square\square\square\square\square.$$

斜杨图 (skew Young diagram) λ/μ 是所有在 λ 内, 但在 μ 外的方格构成的形状. 一个斜杨图 (skew Young diagram) λ/μ 如果每个列至多只有一个方格在杨图 λ 里, 则被称为横向条带 (horizontal strip). 对于一个横向条带 λ/μ , 我们把与 λ/μ 相交的所有行和列的集合分别记作 $R_{\lambda/\mu}$ 和 $C_{\lambda/\mu}$. 则 $R_{\lambda/\mu} - C_{\lambda/\mu}$ 是属于 $R_{\lambda/\mu}$ 但不属于 $C_{\lambda/\mu}$ 的所有方格的集合. 对于之前的序列 $\lambda^{(k-1)}/\lambda^{(k)}$ 是横向条带, 其中 $k = 1, \dots, 6$. 作为一个例子, $\lambda^{(0)}/\lambda^{(1)}$ 和 $R_{\lambda^{(0)}/\lambda^{(1)}} - C_{\lambda^{(0)}/\lambda^{(1)}}$ 分别对应于下图的黑色方格和红色方格.



Macdonald 多项式 $P_\lambda(x; q, t)$ 组合定义为

$$P_\lambda(x; q, t) = \sum_T \psi_T(q, t) \prod_{\square \in \lambda} x_{T_\square}, \quad (3.4)$$

其中变量 $x = (x_1, \dots, x_n)$. 这里求和是对所有在 λ 上的矩阵元在 $\{1, \dots, n\}$ 中的反转杨氏矩阵 (reverse tableaux) T . 其系数 $\psi_T(q, t)$ 由下式定义:

$$\psi_T(q, t) = \prod_{i=1}^n \psi_{\lambda^{(i-1)}/\lambda^{(i)}}(q, t), \quad \psi_{\lambda/\mu}(q, t) = \prod_{\square \in R_{\lambda/\mu} - C_{\lambda/\mu}} \frac{b_\mu(\square)}{b_\lambda(\square)},$$

以及

$$b_\lambda(\square) = \frac{1 - q^{a_\square} t^{l_\square + 1}}{1 - q^{a_\square + 1} t^{l_\square}}.$$

插值 Macdonald 多项式 (interpolation Macdonald polynomials) $P_\mu^*(x; q, t)$ 由组合定义为

$$P_\lambda^*(x; q, t) = \sum_T \psi_T(q, t) \prod_{\square \in \mu} t^{1-T_\square} \left(x_{T_\square} - q^{a_\square} t^{-l'_\square} \right). \quad (3.5)$$

用插值 Macdonald 多项式 (interpolation Macdonald polynomials), 二项式定理可以得到推广^[14] to

$$\frac{P_\lambda^*(cx_1, \dots, cx_n; q, t)}{P_\lambda^*(c, \dots, c; q, t)} = \sum_\mu \frac{c^{|\mu|}}{t^{(n-1)|\mu|}} \frac{P_\mu^*(q^{-\lambda}; q^{-1}, t^{-1})}{P_\mu^*(q^{-\mu}; q^{-1}, t^{-1})} \frac{P_\mu^*(x_n, \dots, x_1; q^{-1}, t^{-1})}{P_\mu^*(c, \dots, c; q, t)}. \quad (3.6)$$

尤其是, 在 $c \rightarrow 0$ 二项式定理变为

$$\frac{P_\lambda^*(x_1, \dots, x_n; q, t)}{P_\lambda^*(0, \dots, 0; q, t)} = \sum_\mu \frac{P_\mu^*(q^{-\lambda}; q^{-1}, t^{-1})}{P_\mu^*(q^{-\mu}; q^{-1}, t^{-1})} \frac{P_\mu(x_1, x_2 t^{-1}, \dots, x_n t^{1-n}; q, t)}{P_\mu^*(0, \dots, 0; q, t)}. \quad (3.7)$$

如果限制在对称表示且只有单一变量 x_1 , 这个公式退化到 q -二项式定理.

3.2 Poincaré 多项式

由于以 (q, t) 为参数的二项式定理 (3.7) 的启发, 我们可以定义带有 t 的版本的迭代因子 (2.15)

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{\lambda, \mu}^{(s)}(A, q, t) := & (-t^{(1-s)})^{|\lambda|-|\mu|} \left(\frac{Aq}{t}\right)^{2|\mu|} \left(\prod_{\square \in \lambda} q^{2a'_\square} t^{-2l'_\square}\right) \left(\prod_{\square \in \mu} q^{2a'_\square} t^{-2l'_\square}\right) \\ & \times \frac{P_\mu^*(q^{2\lambda}; q^2, t^2)}{P_\mu^*(q^{2\mu}; q^2, t^2)} \cdot \frac{P_\lambda^*(0; q^{-2}, t^{-2})}{P_\mu^*(0; q^{-2}, t^{-2})}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

一般而言, $\mathbb{B}_{\lambda, \mu}^{(s)}$ 不是一个 Laurent 多项式且有 $\mathbb{B}_{\lambda, \emptyset}^{(s)} = \mathbb{D}_\lambda^{(s)}$. 在此基础上, 我们可以与之前一样引入扭转因子 (twist factor)

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_\lambda^{(m)}(A, q, t) &= \left(\mathbb{D}_\lambda^{(s)}\right)^{-1} \sum_{\lambda = \lambda_1 \supset \dots \supset \lambda_m} \mathbb{B}_{\lambda_1, \lambda_2}^{(s)} \mathbb{B}_{\lambda_2, \lambda_3}^{(s)} \dots \mathbb{B}_{\lambda_{m-1}, \lambda_m}^{(s)} \mathbb{D}_{\lambda_m}^{(s)} \\ &= \left(\mathbb{D}_{\lambda^T}^{(r)}\right)^{-1} \sum_{\lambda^T = \lambda'_1 \supset \dots \supset \lambda'_m} \mathbb{B}_{\lambda'_1, \lambda'_2}^{(r)} \mathbb{B}_{\lambda'_2, \lambda'_3}^{(r)} \dots \mathbb{B}_{\lambda'_{m-1}, \lambda'_m}^{(r)} \mathbb{D}_{\lambda'_m}^{(r)} \Big|_{q \leftrightarrow t^{-1}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

与(2.16)一样, (3.9) 与 s ($\geq \text{length}(\lambda)$) 和 r ($\geq \text{length}(\lambda^T)$) 无关. 值得注意的是, 尽管每个迭代因子都不是有理函数 (A, q, t) , $\mathbb{F}_\lambda^{(m)}$ 一直是一个关于 (A, q, t) 的 Laurent 多项式.

最后, 我们给出由矩阵 $[r^s]$ 着色双辫结 $K_{m,n}$ 的 HOMFLY-PT 同调的 Poincaré 多项式.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t_r}, \mathbf{t_c}) &= (-\mathbf{t_r} \mathbf{t_c})^{-rs(\text{sgn}(m)+\text{sgn}(n))/2} \times \\ &\sum_{\lambda \subset [r^s]} \mathbb{D}_\lambda^{(s)}(q, t) \mathbb{D}_{\lambda^T}^{(r)}(t^{-1}, q^{-1}) \prod_{\square \in \lambda} \left\{ \frac{A}{\sigma} q^{r+a'_\square} t^{-l'_\square} \right\} \left\{ A \sigma q^{a'_\square} t^{-s-l'_\square} \right\} \Big|_{(3.3)} \frac{\mathbb{T}\mathbb{W}_\lambda^{(m)} \mathbb{T}\mathbb{W}_\lambda^{(n)}}{\mathbb{T}\mathbb{W}_\lambda^{(1)} \mathbb{T}\mathbb{W}_\lambda^{(-1)}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中扭转元素 (twist elements) 定义为

$$\mathbb{T}\mathbb{W}_\lambda^{(m)}(\mathbf{a}, \mathbf{t_r}, \mathbf{t_c}) := \begin{cases} \left(-\mathbf{a}^2 \mathbf{t_r}^2 \mathbf{t_c}^2\right)^{|\lambda|} \left(\prod_{\square \in \lambda} \mathbf{t_c}^{2a'_\square} \mathbf{t_r}^{2l'_\square}\right) \mathbb{F}_\lambda^{(m)}(\mathbf{a}, \mathbf{t_c}, \mathbf{t_r}), & m \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ \mathbb{F}_\lambda^{(-m)}(\mathbf{a}^{-1}, \mathbf{t_c}^{-1}, \mathbf{t_r}^{-1}), & m \in \mathbb{Z}_{<0}. \end{cases} \quad (3.11)$$

$\mathcal{D}_{[r^s]}(K_{m,n})$ 是一个参数为 $(\mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t_r}, \mathbf{t_c})$ Laurent 多项式且其系数全是正数. 接下来我们将通过例子对他的结构性质进行验证^[3]

3.3 Poincaré 多项式的性质

相比 HOMFLY-PT, Poincaré 多项式的性质要丰富的多, 这一节我们主要罗列一下 Poincaré 的相关性质, 部分性质会在之后的例子中得到验证

3.3.1 扭转因子 (twist factor) 的性质

带参数 t 的扭转因子 $\mathbb{F}_\lambda^{(m)}(A, q, t)$ 由(3.9)给出. 第一个重要的性质是当 $t \rightarrow q$ 会回到不带 t 的扭转因子的形式即

$$\mathbb{F}_\lambda^{(m)}(A, q, q) = F_\lambda^{(m)}(A, q), \quad (3.12)$$

上式对任意的 m 和 λ 都是成立的. 事实上, 所有组成 Poincaré 多项式的部分都应该满足类似的能回到 HOMFLY-PT 多项式的性质.

扭转因子也要满足可因式分解的性质，对于任意杨图 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ，则当 $t \rightarrow 0$ 时，我们有

$$\mathbb{F}_{\lambda}^{(m)}(A, q, t \rightarrow 1) = \prod_{i=1}^n \mathbb{F}_{[\lambda_i]}^{(m)}(A, q, t \rightarrow 1). \quad (3.13)$$

同样对于转置杨图 $\lambda' = \{\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n\}$ 有

$$\mathbb{F}_{\lambda}^{(m)}(A, q \rightarrow 1, t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{F}_{[\lambda'_i]}^{(m)}(A, q \rightarrow 1, t). \quad (3.14)$$

3.3.2 Poincaré 多项式的性质

由定义式(1.5)出发，我们可以知道 Poincaré 多项式 $\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c)$ 是一个系数全为正的 Laurent 多项式。其性质被列于^[4] 中

1. 自对称性

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \mathcal{P}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{t}_r^{-s} \mathbf{t}_c^{-r} \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c). \quad (3.15)$$

2. 镜对称性 (Mirror Symmetry)

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \mathcal{P}_{[s^r]}(\mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_c, \mathbf{t}_r) = \mathcal{P}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{t}_c^{-s} \mathbf{t}_r^{-r} \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{t}_c, \mathbf{t}_r). \quad (3.16)$$

3. 指数增长性

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c = 1) = \mathcal{P}_{[1^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c = 1)^r, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r = 1, \mathbf{t}_c) = \mathcal{P}_{[r^1]}(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r = 1, \mathbf{t}_c)^s, \quad (3.18)$$

4. 着色微分 (Colored differentials) 在第一章中，我们已经指出对于 HOMFLY-PT 同调的 Poincaré 多项式我们可以定义相应的同调微分算符。对于四级 (quadruply-graded) Poincaré 多项式，我们有如下的微分算符定义，首先，对任意的 $r > k \geq 0$ ，我们可以定义两个不同的列消除 (column-removing) 微分作用在指数上

$$d_{[r^s] \rightarrow [k^s]}^+ = (-2, 2, -1, -2k - 1), \quad (3.19)$$

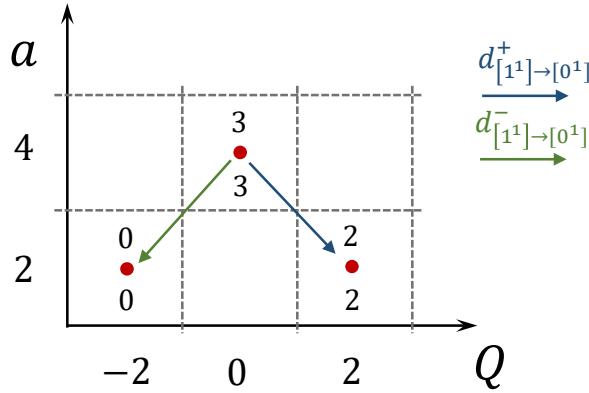
以及

$$d_{[r^s] \rightarrow [k^s]}^- = (-2, -2, -2s - 1, -2r - 2k - 1). \quad (3.20)$$

同样我们有行消除 (row-removing) 微分算符这里就不展开说明。

Poincaré 多项式(3.10)同样可以通过一定的变量代换回到 HOMFLY-PT 多项式2.18

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{m,n}; \mathbf{a} = A, \mathbf{Q} = q^s, \mathbf{t}_r = q^{-1}, \mathbf{t}_c = -q) = H_{[r^s]}(K_{m,n}; A, q). \quad (3.21)$$

图 3-1 三叶草结 3_1 的 Poincaré 多项式的图示

3.4 例子与讨论

3.4.1 三叶草 (trefoil) 3_1 结

3_1 结如图 1-1, 对应双辫结 (two-braid-knot) $K_{1,1}$ 由 3.10 给出, 其结果与^[5] 中的结果相一致. 对于无着色的 (uncolored) 的 3_1 结的 Poincaré 表达式, 我们可以得到

$$\mathcal{P}_\square(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r^3 + \mathbf{a}^2 \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2 + \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{Q}^2}, \quad (3.22)$$

上面 Laurent 多项式可以像之前一样用图示表示出来, 如图 3-1 所示. 其中每个点代表 Laurent 多项式的每一项, 每个点的横坐标是每一项 \mathbf{Q} 的指数, 每个点的纵坐标是每一项 \mathbf{a} 的指数, 每个点上方的数字是这一项 \mathbf{t}_r 的指数因子, 每个点下方的数字是这一项 \mathbf{t}_c 的指数因子. 当 $\mathbf{a} \rightarrow A, \mathbf{Q} \rightarrow q, \mathbf{t}_r \rightarrow q^{-1}, \mathbf{t}_c \rightarrow -q$, 上式可以回到 $H_\square(K_{1,1}; A, q)$ (2.21). 所以图 3-1 与图 2-4 具有相同的形状. 我们可以直接验证 Poincaré 多项式上一节列出的所有性质, 其中列消除的着色微分性被画在了图中. 其中

$$d_{[1^1] \rightarrow [0^1]}^+ = (-2, 2, -1, -1), \quad (3.23)$$

$$d_{[1^1] \rightarrow [0^1]}^- = (-2, -2, -3, -3). \quad (3.24)$$

等号右边, 括号内的数字指 $(\mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c)$ 随着微分算符的指数变化. 对于 $m = -1, n = -1$

$$\mathcal{P}_\square(K_{-1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \frac{1}{a^4 t_c^3 t_r^3} + \frac{1}{a^2 Q^2 t_c^2 t_r^2} + \frac{Q^2}{a^2} \quad (3.25)$$

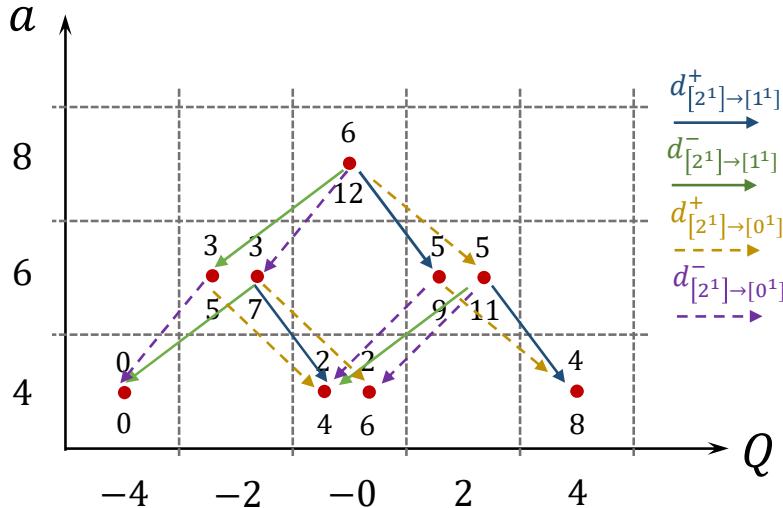
我们可以得到如下关系

$$\mathcal{P}_\square(K_{-1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \mathcal{P}_\square(K_{1,1}; \mathbf{a} = \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{t}_r = \mathbf{t}_r^{-1}, \mathbf{t}_c = \mathbf{t}_r^{-1}). \quad (3.26)$$

更一般的情况有对任意矩形杨图 $[r^s]$

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{-1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \mathcal{P}_{[r^s]}(K_{1,1}; \mathbf{a} = \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{t}_r = \mathbf{t}_r^{-1}, \mathbf{t}_c = \mathbf{t}_r^{-1}). \quad (3.27)$$

这说明改变双辫结的方向 (所有扭转方向反向), 其 3_1 结的 Poincaré 多项式的变量取倒数. 这一结果可以推广到所有双辫结.

图 3-2 $[2^1]$ 表示下的三叶草结的 Poincaré 多形式的图示

对于 $[2^1]$ 表示下的 3_1 结，其 Poincaré 多项式的计算结果为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\square}(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = & \mathbf{a}^8 \mathbf{t}_c^{12} \mathbf{t}_r^6 + \mathbf{Q}^2 (\mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^{11} \mathbf{t}_r^5 + \mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^9 \mathbf{t}_r^5) + \frac{\mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^7 \mathbf{t}_r^3 + \mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^5 \mathbf{t}_r^3}{\mathbf{Q}^2} \\ & + \mathbf{a}^4 \mathbf{Q}^4 \mathbf{t}_c^8 \mathbf{t}_r^4 + \frac{\mathbf{a}^4}{\mathbf{Q}^4} + \mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^6 \mathbf{t}_r^2 + \mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

其图示如图3-2. 其中标记了四类着色分级微分算符 (colored-grading differential operator) 如下所示

$$d_{[2^1] \rightarrow [1^1]}^+ = (-2, 2, -1, -3), \quad (3.29)$$

$$d_{[2^1] \rightarrow [1^1]}^- = (-2, -2, -3, -7), \quad (3.30)$$

$$d_{[2^1] \rightarrow [0^1]}^+ = (-2, 2, -1, -1), \quad (3.31)$$

$$d_{[2^1] \rightarrow [0^1]}^- = (-2, -2, -3, -3). \quad (3.32)$$

我们也可以算出 $[1^2]$ 表示下的 3_1 结，其 Poincaré 多项式

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\square}(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = & \mathbf{a}^8 \mathbf{t}_c^6 \mathbf{t}_r^{12} + \mathbf{Q}^2 (\mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^5 \mathbf{t}_r^{11} + \mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^5 \mathbf{t}_r^9) + \frac{\mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r^7 + \mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r^5}{\mathbf{Q}^2} \\ & + \mathbf{a}^4 \mathbf{Q}^4 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^8 + \frac{\mathbf{a}^4}{\mathbf{Q}^4} + \mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^6 + \mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^4. \end{aligned} \quad (3.33)$$

我们可以看到计算结果符合镜对称性的要求，即当矩形杨图的行列数交换时，计算得到的 Poincaré 多项式 $\mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c$ 相交换。同样我们可以验证用 $\mathbf{a} \rightarrow A, \mathbf{Q} \rightarrow q^s, \mathbf{t}_r \rightarrow q^{-1}, \mathbf{t}_c \rightarrow -q$, $[2^1]$ 和 $[1^2]$ 的 Poincaré 可以回到相应的 HOMFLY-PT 多项式。在程序中，我们验证了 3_1 结，杨图为 $[3]^3$ 的 Poincaré 多项式各种性质，这里就不再赘述。

3.4.2 8 形结 (figure-eight) 4_1 结

4_1 结如图1-1，对应双辫结 (two-braid-knot) $K_{1,-1}$ 的 Poincaré 多项式，由3.10给出，其结果与^[5] 中的结果相一致。对于无着色的 (uncolored) 的 4_1 结的 Poincaré 表达式，我们可以得

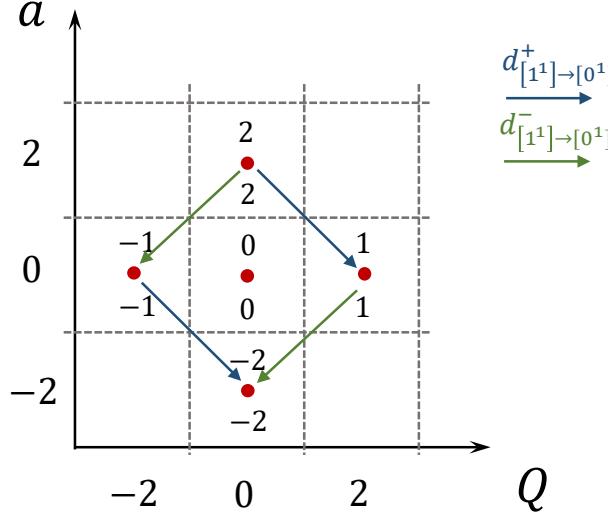


图 3-3 \$4_1\$ 结的 Poincaré 多项式的图示

到

$$\mathcal{P}_{\square}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \frac{\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^4 + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2 + 1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2} + \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r + \frac{1}{\mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r}. \quad (3.34)$$

其结果可由图3-3给出 图中亦标记了两种同调微分算符. 当做如下变量代换时 \$\mathbf{a} \rightarrow A, \mathbf{Q} \rightarrow q, \mathbf{t}_r \rightarrow q^{-1}, \mathbf{t}_c \rightarrow -q\$, 上式可以回到相应的 HOMFLY-PT 多项式.

\$[2^1]\$ 表示下的 \$4_1\$ 结, 其 Poincaré 多项式的计算结果为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\square}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = & \mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^8 \mathbf{t}_r^4 + \frac{1}{\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^8 \mathbf{t}_r^4} + \mathbf{a}^2 \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c^7 \mathbf{t}_r^3 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c^7 \mathbf{t}_r^3} + \mathbf{a}^2 \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c^5 \mathbf{t}_r^3 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c^5 \mathbf{t}_r^3} \\ & + \frac{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r}{\mathbf{Q}^2} + \frac{\mathbf{Q}^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r} + \frac{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r}{\mathbf{Q}^2} + \frac{\mathbf{Q}^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r} + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^2 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^2} \\ & + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2} + \mathbf{Q}^4 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^2 + \frac{1}{\mathbf{Q}^4 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^2} + \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r + \frac{1}{\mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r} \\ & + \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r + \frac{1}{\mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r} + \mathbf{t}_c^2 + \frac{1}{\mathbf{t}_c^2} + 3. \end{aligned} \quad (3.35)$$

上式可以在图3-4中所示, 其中我们只标记了两种列消除着色微分 \$d_{[2^1] \rightarrow [1^1]}^+\$ 和 \$d_{[2^1] \rightarrow [1^1]}^-\$. 同样我们可以直接验证 \$[2^1]\$ 着色下的 \$4_1\$ 结的 Poincaré 多项式, 例如自对称性, 镜对称性等. 在程序中, 我们验证了 \$4_1\$ 结, 杨图为 \$[3^3]\$ 的 Poincaré 多项式各种性质, 这里就不再赘述.

3.4.3 \$5_2\$ 结和 \$6_1\$ 结

\$5_2\$ 结的基本表示下的 Poincaré 多项式可由(3.10)计算得到

$$\mathcal{P}_{\square}(K_{2,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^5 \mathbf{t}_r^5 + \mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r^3 + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r + \frac{\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2 + \mathbf{a}^2}{\mathbf{Q}^2} + \mathbf{Q}^2 (\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^4 + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2). \quad (3.36)$$

上式图示由3-5表示, 其中标记了两种着色微分. \$5_2\$ 结可以由 \$3_1\$ 结扭转得到, 所以在基本表示下, \$5_2\$ 结可以由 \$3_1\$ 结的 Poincaré 多项式表示. 由图3-5可以读出, 这个关系式

$$\mathcal{P}_{\square}(K_{2,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = (\mathcal{P}_{\square}(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) + \mathbf{t}_r^{-1} \mathbf{t}_c^{-1}) \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_r^2 \mathbf{t}_c^2 + \mathcal{P}_{\square}(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c). \quad (3.37)$$

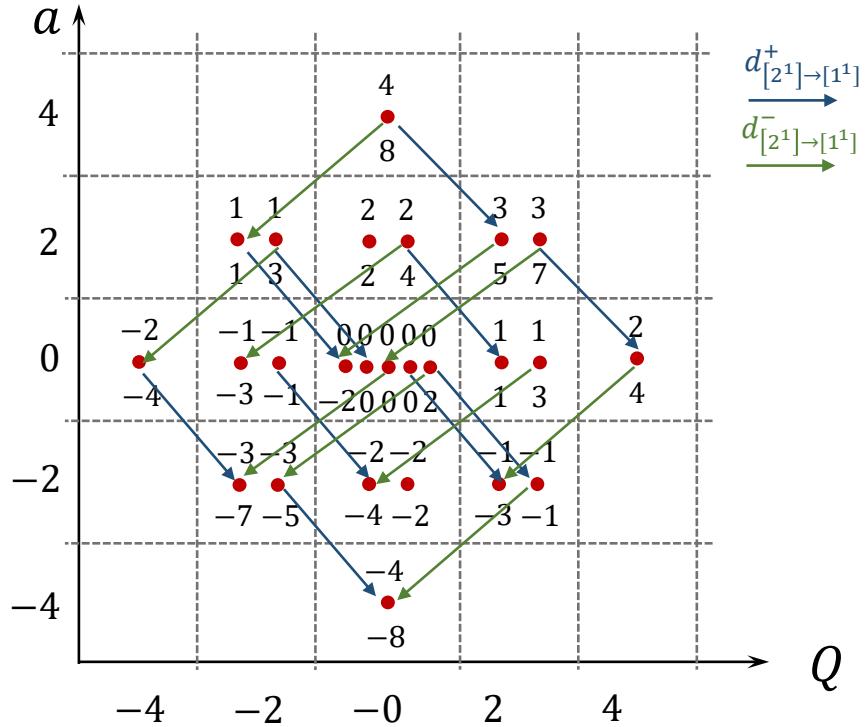


图 3-4 $[2^1]$ 表示下的 3_1 结的 Poincaré 多形式的图示

上式当 $\mathbf{a} \rightarrow A$, $\mathbf{Q} \rightarrow q$, $\mathbf{t}_r \rightarrow q^{-1}$, $\mathbf{t}_c \rightarrow -q$ 可以回到(2.34).

一般的 $(2n+1)_2$ 结, 即双辫结 $K_{n,1}$, ($n \geq 2$), 可以被 3_1 结做 $m = n$ 扭转形成. 所以上面的表达式可以推广

$$\mathcal{P}_\square(K_{n,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = (\mathcal{P}_\square(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) + \mathbf{t}_r^{-1} \mathbf{t}_c^{-1}) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{a}^{2i} \mathbf{t}_r^{2i} \mathbf{t}_c^{2i} \right) + \mathcal{P}_\square(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c). \quad (3.38)$$

与 HOMFLY-PT 多项式的讨论一样，对于一般的矩形杨图 $[r^s]$ 着色的 $K_{n,1}$ 结，我们只有

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{n,1}; \mathbf{a}, 1, -1, 1) = \left[(\mathcal{P}_{\square}(K_{1,1}; \mathbf{a}, 1, -1, 1) - 1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{a}^{2i} \right) + \mathcal{P}_{\square}(K_{1,1}; \mathbf{a}, 1, -1, 1) \right]^{rs}. \quad (3.39)$$

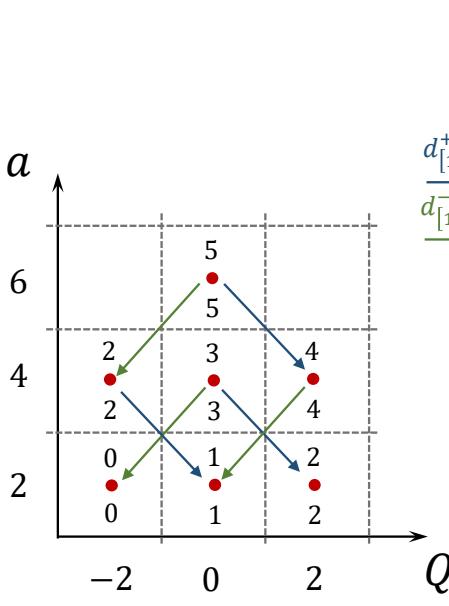
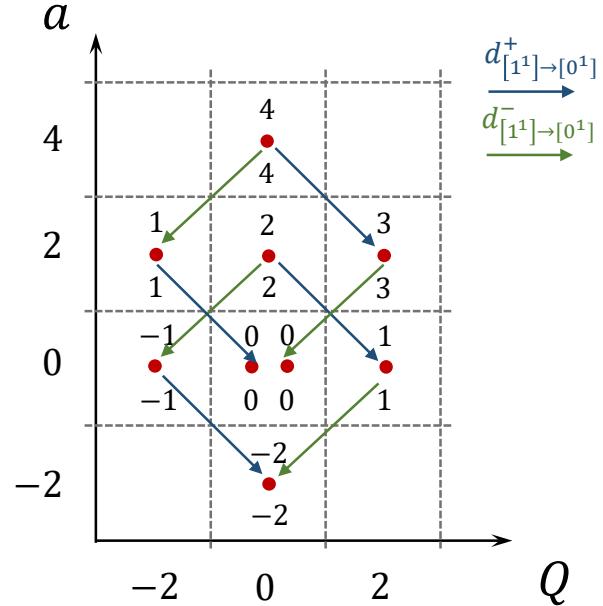
要找到带参数 $\mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c$ 的表达式，我们必须找到相应的对称函数的二项式定理法则。这也是我们利用插值 Macdonald 多项式构建扭转因子的原因。

6_1 结的基本表示下的 Poincaré 多项式可由(3.10)计算得到

$$\mathcal{P}_{\square}(K_{2,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \frac{\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r^3 + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r}{\mathbf{a}^2 \mathbf{Q}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2} + \frac{\mathbf{Q}^2 (\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^5 \mathbf{t}_r^5 + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r^3)}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2} + \frac{\mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^6 \mathbf{t}_r^6 + \mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^4 + 2\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2 + 1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2}. \quad (3.40)$$

上式图示由3-6表示，其中标记了两种着色微分。可以看到 6_1 结可由 4_1 结做 $m = 2$ 扭转得到，基本表示下对其 Poincaré 多项式，我们有如下关系

$$\mathcal{P}_{\square}(K_{2,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = (\mathcal{P}_{\square}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) - 1)\mathbf{a}^2\mathbf{t}_r^2\mathbf{t}_c^2 + \mathcal{P}_{\square}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c). \quad (3.41)$$

图 3-5 无着色 5_2 结的 Poincaré 多项式的图示图 3-6 无着色 6_1 结的 Poincaré 多项式的图示

上式当 $\mathbf{a} \rightarrow A, \mathbf{Q} \rightarrow q, \mathbf{t}_r \rightarrow q^{-1}, \mathbf{t}_c \rightarrow -q$ 可以回到(2.40). 一般的情况, $(2n+2)_1$ 结 $n \geq 2$ 可以由 4_1 结扭转 $m = n$ 得到, 其无着色的 Poincaré 多项式的关系也可以推广到更加一般的形式.

$$\mathcal{P}_{\square}(K_{n,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = (\mathcal{P}_{\square}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) - 1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{a}^{2i} \mathbf{t}_r^{2i} \mathbf{t}_c^{2i} \right) + \mathcal{P}_{\square}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c). \quad (3.42)$$

对于一般的矩形杨图 $[r^s]$ 表示下的 $K_{n,-1}$ 结, 我们同样有

$$\mathcal{P}_{[r^s]}(K_{n,-1}; \mathbf{a}, 1, -1, 1) = \left[(\mathcal{P}_{\square}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, 1, -1, 1) - 1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{a}^{2i} \right) + \mathcal{P}_{\square}(K_{1,-1}; \mathbf{a}, 1, -1, 1) \right]^{rs}. \quad (3.43)$$

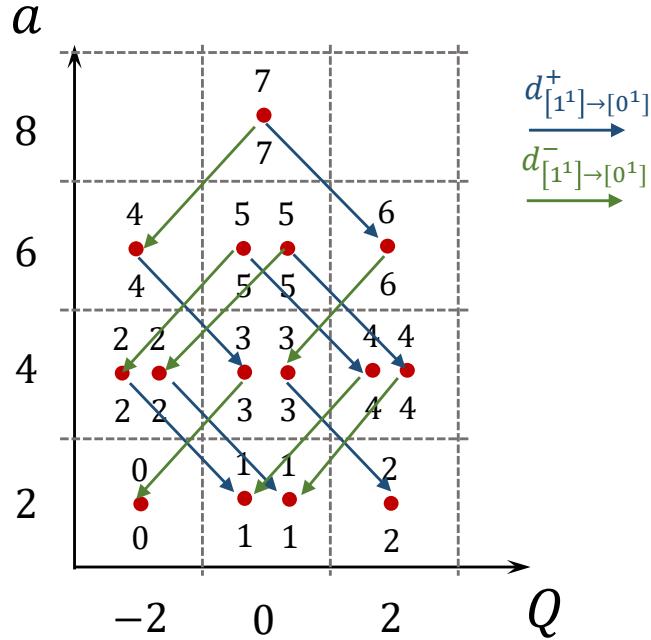
3.4.4 7_4 结

7_4 结是 $m = 2, n = 2$ 的双辫结 (two-braid knot). 我们可以由 (3.10) 计算出未着色的 Poincaré 多项式

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\square}(K_{2,2}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = & \mathbf{a}^8 \mathbf{t}_c^7 \mathbf{t}_r^7 + 2\mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^5 \mathbf{t}_r^5 + 2\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^3 \mathbf{t}_r^3 + 2\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c \mathbf{t}_r + \frac{\mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^4 + 2\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2 + \mathbf{a}^2}{\mathbf{Q}^2} \\ & + \mathbf{Q}^2 (\mathbf{a}^6 \mathbf{t}_c^6 \mathbf{t}_r^6 + 2\mathbf{a}^4 \mathbf{t}_c^4 \mathbf{t}_r^4 + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_c^2 \mathbf{t}_r^2) \end{aligned} \quad (3.44)$$

图示由图3-7给出, 其中标记了两种着色微分. 从图中我们可以看出 7_4 结和 3_1 结的无着色下的 Poincaré 多项式有如下的关系

$$\mathcal{P}_{\square}(K_{2,2}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = (\mathbf{a}^2 \mathbf{t}_r^2 \mathbf{t}_c^2 + 1)^2 (\mathcal{P}_{\square}(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) + \mathbf{t}_r^{-1} \mathbf{t}_c^{-1}) - \mathbf{t}_r^{-1} \mathbf{t}_c^{-1}. \quad (3.45)$$

图 3-7 无着色 7_4 结的 Poincaré 多项式的图示

更一般的情况，对于任意 $m, n \geq 2$ 我们有基本表示下 $K_{m,n}$ 的 Poincaré 多项式是

$$\mathcal{P}_\square(K_{m,n}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{a}^{2i} \mathbf{t}_r^{2i} \mathbf{t}_c^{2i} \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{a}^{2i} \mathbf{t}_r^{2i} \mathbf{t}_c^{2i} \right) (\mathcal{P}_\square(K_{1,1}; \mathbf{a}, \mathbf{Q}, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_c) + \mathbf{t}_r^{-1} \mathbf{t}_c^{-1}) - \mathbf{t}_r^{-1} \mathbf{t}_c^{-1}. \quad (3.46)$$

同样的等式可以在其他双辫结中找到。由于其指数增长性，对于任意的矩形杨图 $[r^s]$ 着色的情况，我们同样可以找到相对对称函数的二项式定理，来构建扭转元素 (twist element)。最终结果告诉我们这样的扭转元素可以由单辫结的扭转因子构造。所以所有双辫结的 Poincaré 多项式可以被写出。

第 4 章 总结与展望

本篇论文主要介绍了如何计算双辫结的拓扑不变量及其结构性质的分析. 第一章即简介部分是介绍本篇文章所涉及到的数学对象包括结不变量, HOMFLY-PT 同调及双辫结. 第二章第一部分是对矩形杨图着色下的双辫结的 HOMFLY-PT 多项式的计算公式所涉及的数学工具的介绍包括 Schur 不等式及其二项式定理, 并进一步给出了 HOMFLY-PT 多项式的表达式. 第二部分, 这是对计算得出的矩形杨图着色下的双辫结的 HOMFLY-PT 多项式的简单例子进行讨论, 这里的讨论主要以单辫结为主, 力求从中可以看出我们获得该表达式的思路. 第三章是进一步研究矩形杨图着色下的双辫结的 Poincaré 多项式. 第一部分依旧补充所需的数学知识, 例如插值 Macdonald 函数. 最终我们给出双辫结的 Poincaré 多项式的表达式, 然后我们对简单双辫结下 Poincaré 多项式的表达式及其性质的分析, 包括自对称性, 镜对称形, 指数增长性和着色微分 (colored differential) 等. 进一步我通过编程实现了对任意矩形杨图着色的任意双辫结的 HOMFLY-PT 多项式和 Poincaré 多项式的计算. 由于双辫结的参数与迭代深度有关, 我发展了新的技巧用于对任意迭代深度进行计算且减少计算时间. 这一个课题让我对纽结的理论有了一定的认识, 为继续深入研究数学物理这门学科打下了基础.

参考文献

- [1] ROSSO M, JONES V. On the invariants of torus knots derived from quantum groups[J/OL]. *J.Knot Theor.Ramifications*, 1993, 2:97. DOI: [10.1142/S0218216593000064](https://doi.org/10.1142/S0218216593000064).
- [2] CAUTIS S. Remarks on coloured triply graded link invariants[J]. *Algebraic & geometric topology*, 2017, 17(6):3811-3836.
- [3] GORSKY E, GUKOV S, STOSIC M. Quadruply-graded colored homology of knots[J/OL]. *Fundamenta Mathematicae*, 2018, 243:209-299. DOI: [10.4064/fm30-11-2017](https://doi.org/10.4064/fm30-11-2017).
- [4] GUKOV S, NAWATA S, SABERI I, et al. Sequencing BPS Spectra[J/OL]. *JHEP*, 2016, 03: 004. DOI: [10.1007/JHEP03\(2016\)004](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2016)004).
- [5] KONONOV YA, MOROZOV A. Rectangular superpolynomials for the figure-eight knot 4_1 [J/OL]. *Theor. Math. Phys.*, 2017, 193(2):1630-1646. DOI: [10.1134/S0040577917110058](https://doi.org/10.1134/S0040577917110058).
- [6] KAMEYAMA M, NAWATA S, TAO R, et al. Cyclotomic expansions of homfly-pt colored by rectangular young diagrams[J]. arXiv preprint arXiv:1902.02275, 2019.
- [7] HABIRO K. A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres. [J]. *Invent. Math.*, 2008, 171(1):1-81.
- [8] NAWATA S, RAMADEVI P, ZODINMAWIA, et al. Super-A-polynomials for Twist Knots [J/OL]. *JHEP*, 2012, 1211:157. DOI: [10.1007/JHEP11\(2012\)157](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2012)157).
- [9] MOROZOV A. Factorization of differential expansion for antiparallel double-braid knots [J/OL]. *JHEP*, 2016, 09:135. DOI: [10.1007/JHEP09\(2016\)135](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2016)135).
- [10] MACDONALD I G. Symmetric functions and Hall polynomials[M]. [S.l.]: Oxford university press, 1998.
- [11] KONONOV YA, MOROZOV A. On rectangular HOMFLY for twist knots[J/OL]. *Mod. Phys. Lett.*, 2016, A31(38):1650223. DOI: [10.1142/S0217732316502230](https://doi.org/10.1142/S0217732316502230).
- [12] MOROZOV A. HOMFLY for twist knots and exclusive Racah matrices in representation [333] [J/OL]. *Phys. Lett.*, 2018, B778:426-434. DOI: [10.1016/j.physletb.2018.01.062](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.01.062).
- [13] MOROZOV A. Generalized hypergeometric series for Racah matrices in rectangular representations[J/OL]. *Mod. Phys. Lett.*, 2018, A33(04):1850020. DOI: [10.1142/S0217732318500207](https://doi.org/10.1142/S0217732318500207).

- [14] OKOUNKOV A. Binomial formula for Macdonald polynomials and its applications[J]. *Math. Res. Letters*, 1997, 4:533-553.
- [15] SAHI S. Interpolation, integrality, and a generalization of Macdonald's polynomials[J]. *International Mathematics Research Notices*, 1996, 1996(10):457-471.
- [16] KNOP F. Symmetric and non-symmetric quantum Capelli polynomials[J]. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1997, 72(1):84-100.
- [17] OKOUNKOV A. (Shifted) Macdonald polynomials: q -integral representation and combinatorial formula[J]. *Compositio Mathematica*, 1998, 112(2):147-182.

复旦大学 学位论文独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。论文中除特别标注的内容外，不包含任何其他个人或机构已经发表或撰写过的研究成果。对本研究做出重要贡献的个人和集体，均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：_____ 日期：_____

复旦大学 学位论文使用授权声明

本人完全了解复旦大学有关收藏和利用博士、硕士学位论文的规定，即：学校有权收藏、使用并向国家有关部门或机构送交论文的印刷本和电子版本；允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。涉密学位论文在解密后遵守此规定。

作者签名：_____ 导师签名：_____ 日期：_____