关于哈密顿回路在有向稀疏图下的求解尝试

哈密顿回路是图论中的重要部分，而且对现实生产生活也有着重要意义，应用是非常广泛的。可以应用于地震搜救，粮食分派与运输等各个方面，不仅能降低资源浪费，还可以最大化成果。特别是在对性能要求较高的遍历问题中，有极大的应用价值。

哈密顿路径是指图的一条路，经过每个顶点恰好一次。哈密顿回路则是在一条哈密顿路的基础上，再有一条边将其首尾连接，所构成的圈。不幸的是，寻找哈密顿回路是一个典型的NP-完全问题。后来人们也证明了，找一条哈密顿路的近似比为常数的近似算法也是NP-完全的。在几天前的一次比赛中，受到一道图论问题的启发，我意识到在有向稀疏图的情况下，如果充分利用图的性质，哈密顿回路问题可以得到十分优秀的解法。

在一个阶数为n的图中，可能成为哈密顿路径的顶点序列最多有有$n!$个，因此暴力搜索所有可能的顶点序列是非常慢的。 一个早期的在有向图上寻找哈密顿环的算法是Martello的枚举算法，搜索过程将图的边分为3种类型：必须在路径上的边，不能在路径上的边，和未定边。在搜索的过程中，一个决策规则的集合将未定边进行分类，并且决定是否继续进行搜索。这个算法将图分成几个部分，在它们上问题能够被单独地解决。

另外，Bellman, Held, and Karp 的动态规划 算法可以在 $O(n^2 2^n)$ 时间内解决问题。在这个方法中，对每个顶点集S和其中的每一个顶点v ，均做出如下的判定：是否有一条经过S中每个顶点，并且在v结束的路径，对于每一对S和v，当且仅当存在v的邻居w满足存在一条路径经过$S-v$的所有顶点，并在w上结束的路径时，存在路径经过S中每个顶点，并且在v结束。这个充要条件已经可以之前的动态规划计算中确认。

Andreas Björklund通过 `inclusion-exclusion principle` 将哈密尔顿环的计数问题规约成一个更简单，圈覆盖的计数问题，后者可以被通过计算某些矩阵的行列式解决。通过这个方法，并通过蒙特卡洛算法，对任意 n阶图，可以在$O(1.657^n)$时间内解决。对于二分图，这个算法可以被进一步提升至$O(1.415^n)$.对于最大度小于等于3的图，一个回溯搜索的方法可以在 $O(1.251^n)$时间内找到哈密顿环.

以上提及的方法复杂度都是指数为n的幂函数，当n较大时候，复杂度难以接受。对于一个十分稀疏（边的数量稍大于点数）的有向图而言，如果图中如果存在哈密顿回路，则图中大部分节点的入度和出度一定均为1，则它们来向和去向一定是确定的，所以可以通过某些方式将他们忽略掉，从而大大降低复杂度。

考虑将所有入度大于2的节点放进一个集合中，记作S（$|S|$在有向稀疏图的情况下远小于n）。对于这个集合中的每个点，我们都以其为起点在原图上进行一次DFS。考虑某次DFS过程中，选取了S集合中的节点U作为起点。考虑DFS遍历某个节点时出边所连节点的情况：

- 有超过2条出边连接的点的入数均为1。这种情况下，一定不存在哈密顿回路，因为一旦选择其中某个点作为DFS的下一个点之后，剩下的点就永远不能再被遍历到，因为他们的入边只有一条，而入边的起点已被遍历过。
- 仅有一条出边所连接的点的入度为1。根据上面的讨论，我们必须将这个出边所指向的点作为DFS的下一个节点
- 没有连接任何入度为1的边。这时我们结束DFS过程，将所有的出点加入数组$To[U]$中

最后我们完成了二维数组To的维护。显然，每次遍历最多只会进行一次第三步的操作。而且每轮操作复杂度时$O(n)$的。

我们构建一个新的有向图G,G中的节点即为集合S中的节点。对于任意两个节点u, v而言，如果节点v在$To[u]$中，那么我们就将有向边$u- > v$加入G中。显然，在原图中寻找到一条哈密顿回路，即等价于在G中寻找到一条哈密顿回路。可以利用前面提到的状态压缩DP的方法求解。

则这个问题在总复杂度为$O(n|S| + |S|2^{|S|})$的时间复杂度内得到了解决。