Лабораторная работа №2

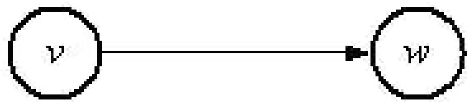
Тема: Поиск маршрутов на ориентированных графах

Теоретические сведения

Ориентированные графы заслуженно считаются одной из самых популярных математических моделей. Вершины орграф можно использовать для представления объектов, а дуги – для отношений между объектами. Например, вершины орграфа могут представлять города, а дуги – маршруты рейсовых полетов самолетов из одного города в другой. В виде орграфа может быть представлена блок-схема потока данных в компьютерной программе. В последнем примере вершины соответствуют блокам операторов программы, а дугам – направленное перемещение потоков данных.

Для представления ориентированных графов можно использовать различные структуры данных. Их выбор зависит от операторов, которые будут применяться к вершинам и дугам орграфа.

Ориентированный граф (или орграф) $G = (V, E)$ состоит из множества вершин V и множества дуг E. Дуга представляется в виде упорядоченной пары вершин (v, w), где вершина v называется началом, а w – концом дуги. Дугу (v, w) часто записывают как $v \rightarrow w$ и изображают в виде



Одним из часто используемых способов представления орграфа $G = (V, E)$ является *матрица смежности*. Предположим, что множество вершин орграфа $V = \{1, 2, \dots n\}$, тогда матрица смежности графа G – это матрица A размера $n \times n$ со значениями булевого типа, где $A[i, j] = true$ тогда и только тогда, когда существует дуга из вершины i в вершину j. Часто в матрице смежности значение *true* заменяется на 1, а значение *false* – на 0. Время доступа к элементам матрицы смежности зависит от размеров множества вершин и множества дуг. Представление орграфа в виде матрицы смежности удобно применять в тех алгоритмах, в которых надо часто проверять существование данной дуги.

С помощью матрицы смежности можно представлять и помеченные орграфы. В этом случае элемент $A[i, j]$ равен метке дуги $i \rightarrow j$. Если дуги от вершины i к вершине j не существует, то значение $A[i, j]$ может рассматриваться как пустая ячейка.

Большинство задач на орграфах связаны с поиском заданных маршрутов на графе: кратчайшего, максимального и др. Решение многих таких задач опирается на алгоритмы Дейкстры и Флойда.

Определение центральной вершины орграфа выполняется через понятие *эксцентриситет*. *Центром орграфа G* называется вершина с минимальным эксцентриситетом, т.е. это вершина, для которой максимальное расстояние (длина пути) до других вершин минимально.

Пусть есть ориентированный граф $G = (V, E)$, у которого все дуги имеют неотрицательные метки, а одна вершина определена как источник. Задача состоит в нахождении стоимости кратчайших путей от источника ко всем другим вершинам граф G. Длина пути определяется как сумма стоимостей дуг, составляющих путь. Эта задача часто называется задачей нахождения кратчайшего пути с одним источником.

Для решения поставленной задачи будем использовать алгоритм Дейкстры. Алгоритм строит множество S вершин, для которых кратчайшие пути от источника уже известны. На каждом шаге к множеству S добавляется та из оставшихся вершин, расстояние до которой от источника меньше, чем для других оставшихся вершин. Если стоимости всех дуг неотрицательны, то кратчайший путь от источника к конкретной вершине проходит только через вершины множества S. Такой путь называют *особым*. На каждом шаге алгоритма используется массив D, в который записываются длины кратчайших особых путей для каждой вершины. Когда множество S будет содержать все вершины орграфа, т.е. для всех вершин будут найдены особые пути, тогда массив D будет содержать длины кратчайших путей от источника к каждой вершине.

Нахождение путей между каждой парой вершин на орграфе выполняется с помощью алгоритма Флойда. Пусть дан орграф $G = (V, E)$ и необходимо определить кратчайшие пути между всеми парами вершин орграфа. Каждой дуге $v \rightarrow w$ этого графа сопоставлена неотрицательная стоимость $C[v, w]$. Общая задача нахождения кратчайших путей заключается в нахождении для каждой упорядоченной пары вершин (v, w) любого пути от вершины v в вершины w, длина которого минимальна среди всех возможных путей от v к w.

Пронумеруем вершины графа последовательно от 1 до n.

Алгоритм Флойда использует матрицу A размера $n \times n$, в которой вычисляются длины кратчайших путей. Вначале $A[i, j] = C[i, j]$ для всех $i \neq j$. Если дуга $i \rightarrow j$ отсутствует, то $C[i, j] = \infty$. Каждый диагональный элемент матрицы A равен 0.

Над матрицей A выполняется n итераций. После k-ой итерации $A[i, j]$ содержит значение наименьшей длины путей из вершины i в вершину j, которые не проходят через вершины с номером, большим k, т.е. между концевыми вершинами пути из i в j могут находиться только вершины, номера которых меньше или равны k. На k-ой итерации для вычисления матрицы A применяется следующая формула:

$$A_k[i, j] = \min\ (A_{k-1}[i, j], A_{k-1}[j, k] + A_{k-1}[k, j]).$$

Ход выполнения лабораторной работы

1. Изучить лекционный материал и теоретические сведения к работе.
2. Внимательно изучить предоставленное задание.

3. Реализовать программное средство, удовлетворяющее поставленной задаче.

4. Подготовить отчет следующего содержания:

– титульный лист;

– своя интерпретация задания;

– код программы с комментариями;

– скриншоты работы программы, демонстрация результатов (скриншоты делаются на фоне кода с комментариями и не обрезаются);

– ответы на контрольные вопросы;

– заключение по работе.

При выполнении задания следует учесть:

– все данные вводятся пользователем с клавиатуры; предусмотреть автоматический ввод;

– правильность вводимых значений не гарантируется.

Задание

1. Представить ориентированный граф, состоящий из 7-10 вершин, с помощью матрицы смежности, а затем выполнить следующие операторы над его элементами.

2. Указать вершину *v* и определить список вершин, смежных с вершиной *v*. Если *v* не имеет смежных вершин, то возвращается «нулевая» вершина.

3. Указать вершину *v* и определить список вершин, из которых можно попасть в вершину *v*. Если таких вершин на орграфе нет, то возвращается «нулевая» вершина.

4. Студенты с нечетными номерами зачетных книжек выполняют условие a), а с четными номерами – условие b):

a. Определить кратчайшие пути от вершины-источника до всех вершин орграфа на основе алгоритма Дейкстры.

b. Определить кратчайшие расстояния между каждой парой вершин орграфа на основе алгоритма Флойда.

Контрольные вопросы

1. Из каких элементов состоит ориентированный граф?
2. Дать определение пути в ориентированном графе.
3. Перечислите основные способы представления ориентированных графов.
4. Для решения какой задачи на ориентированном графе удобно использовать алгоритм Дейкстры?
5. Для решения какой задачи на ориентированном графе удобно использовать алгоритм Флойда?
6. Какая вершина графа называется его центром?