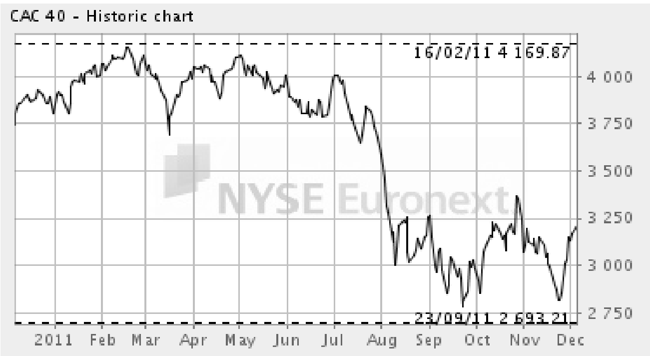
Chapitre 3 : Mouvement brownien et lemme d'Itô

I Observation empirique

Voici l'évolution de l'indice CAC40 en 2011 (source `www.euronext.com/trader/summarizedmarket/stocks-2634-EN-FR0003500008.html?selectedMep=1`)



Elle fait apparaître deux composantes :

- une *tendance générale* (*drift*), qu'on approche localement par sa dérivée ;
- des *variations aléatoires* autour de la tendance, qu'on modélise comme une variable aléatoire (suivant une loi normale).

En notant X_t le prix de l'actif à la date t, m_t la tendance moyenne et Z_t l'écart observé par rapport à la tendance moyenne,

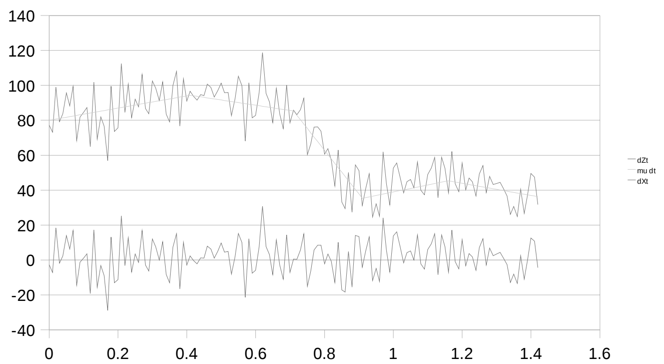
$$\mathrm{X}_{t+\,\mathrm{d}t} - \mathrm{X}_t = (m_{t+\,\mathrm{d}t} - m_t) + (\mathrm{Z}_{t+\,\mathrm{d}t} - \mathrm{Z}_t)$$

soit $$\mathrm{dX}_t = \mathrm{d}m_t + \mathrm{dZ}_t$$

En posant $\mu_t = \dfrac{\mathrm{d}m_t}{\mathrm{d}t}$, $\mathrm{d}m_t = \mu_t\,\mathrm{d}t$, donc

$$\mathrm{dX}_t = \mu_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{dZ}_t$$

On peut effectuer une simulation informatique en choisissant $\mathrm{X}_0 = 80$, $\mathrm{d}t = 0,01$ s, différentes valeurs de μ et en simulant avec Excel $\mathrm{dZ}_t \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{dt})$.



II Introduction aux mouvements browniens

1 Processus stochastiques

Définition. *Un* processus stochastique *(*stochastic process*) en temps continu est une suite* $(\mathrm{X}_t)_{t\geqslant 0}$ *de variables aléatoires indexées par le temps* $t \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Dans chaque état ω *de l'univers infini* Ω*, le processus* $(\mathrm{X}_t)_{t\geqslant 0}$ *suit une* trajectoire *(*path*) particulière correspondant à la fonction* $t \mapsto \mathrm{X}_t(\omega)$.

Le processus $(\mathrm{X}_t)_{t\geqslant 0}$ *est dit* à trajectoires continues *lorsque chaque trajectoire* $t \mapsto \mathrm{X}_t(\omega)$ *est une fonction continue du temps pour chaque état* $\omega \in \Omega$.

2 Propriété de Markov

On suppose que les cours des actions suivent des processus de Markov, ce qui signifie que la distribution de probabilité du cours d'un titre à une date future ne dépend pas de l'historique de la trajectoire suivie par le prix. La seule information pertinente est le prix actuel.

Si l'on suppose que la variation du cours d'un titre suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, sa variation sur une durée T suit alors une loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{\mathrm{T}})$.

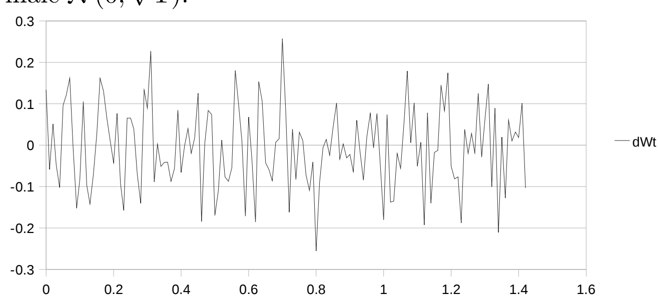
3 Mouvement brownien standard

N.B. Les mouvements browniens sont aussi appelés processus de Wiener (*Wiener process*).

Définition. *Un* mouvement brownien standard *(*standard Brownian motion*) est un processus stochastique* $(\mathrm{W}_t)_{t\geqslant 0}$ *à trajectoires continues tel que*

1. $\mathrm{W}_0 = 0$ *;*
2. *pour tous* $0 \leqslant t < t'$*, la variable* $\mathrm{W}_{t'} - \mathrm{W}_t$ *suit une loi normale d'espérance nulle et d'écart-type* $\sqrt{t' - t}$ *;*
3. *pour tous* $0 \leqslant t_1 < t'_1 \leqslant t_2 < t'_2$*, les variables* $\mathrm{W}_{t'_1} - \mathrm{W}_{t_1}$ *et* $\mathrm{W}_{t'_2} - \mathrm{W}_{t_2}$ *sont indépendantes.*

L'incrément infinitésimal $\mathrm{dW}_t = \mathrm{W}_{t+\,\mathrm{d}t} - \mathrm{W}_t$ est donc modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{\mathrm{d}t})$, et la variable W_T par une loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{\mathrm{T}})$.



Remarque. *L'espérance mathématique de la longueur du trajet suivi par le processus* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *dans tout intervalle de temps est infini.*

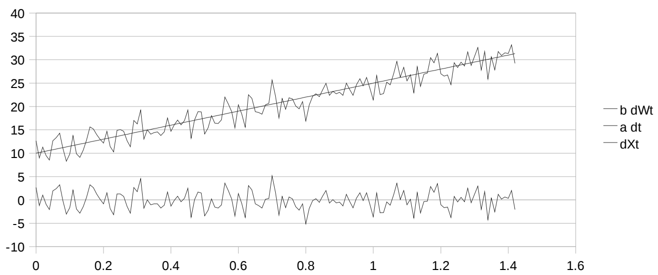
Pour tout w, *le processus* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *passe en moyenne une infinité de fois par la valeur* w *dans tout intervalle de temps.*

4 Mouvement brownien généralisé

Définition. *Un* mouvement brownien généralisé *(*generalized Brownian motion*) est un processus stochastique* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *dont l'incrément est défini par*

$$\boxed{dX_t = a\, dt + b\, dW_t}$$

où a *(le* drift*) et* b *(le paramètre d'écart-type) sont des constantes et* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *un mouvement brownien standard.*



Théorème. *Si* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *suit un tel mouvement brownien généralisé, on obtient la formule explicite suivante*

$$\boxed{X_t = X_0 + at + b\, W_t}$$

Pour tout T, *la variable* X_T *suit alors une loi normale*

$$\boxed{\mathcal{N}\left(X_0 + aT, b\sqrt{T}\right)}$$

Exemple. *Considérons une entreprise dont la trésorerie, exprimée en milliers d'euros, suit un mouvement brownien généralisé de drift 20 et de paramètre de variance 900. Si sa valeur initiale est 50, au bout de 6 mois, la trésorerie suit une loi normale* $\mathcal{N}(60; 21, 21)$. *Au bout d'un an, elle suit une loi normale* $\mathcal{N}(70, 30)$.

Exercice 1. *Soit un processus stochastique* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *qui suit un mouvement brownien généralisé de paramètres* $(a, b) = (2, 1)$. *On sait que* $X_2 = 100$.

1. *Si* $t \leqslant T$, *exprimer la loi de* X_T *en fonction de* X_t, a, b, t *et* T.
2. *Quelle est alors la loi de* X_{10} *?*

Exercice 2. *Considérons un processus stochastique* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *dont l'incrément est défini par*

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

On sait que $(\mu, \sigma) = (2, 3)$ *au cours des trois premières années,* $(\mu, \sigma) = (3, 4)$ *au cours des trois suivantes et que la valeur initiale du processus vérifie* $X_0 = 5$. *On cherche à déterminer quelle est la distribution de probabilité de cette variable au bout de la sixième année.*

1. *En vous inspirant de l'exercice précédent, commencez par exprimer la loi de* X_3 *en fonction de* X_0.
2. *Exprimez de même la loi de* X_6 *en fonction de* X_3.
3. *En déduire la loi de* X_6 *en fonction de* X_0.

Exercice 3. *Considérons un titre financier dont la valeur* X_t *issue de* $X_0 = 47$ *euros suit un mouvement brownien généralisé de paramètres* $0, 2$ *et* $0, 3$.

1. *Quelle est la probabilité que sa valeur dépasse* 50 *euros dans 2 ans ?*
2. *Donner deux valeurs extrêmes* A *et* B *en euros telles qu'il y ait* 95 % *de chances que le cours de cette action dans un an et demi soit situé entre* A *et* B.

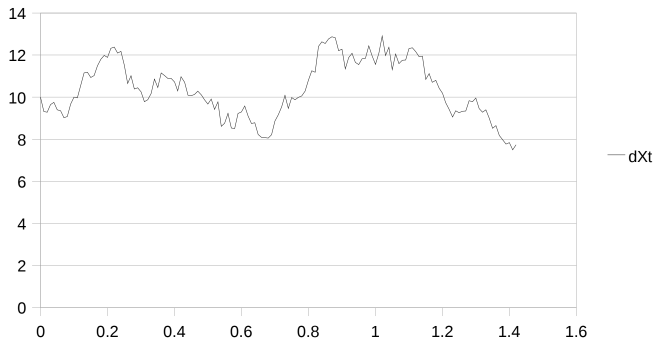
Exercice 4. *Considérons une entreprise dont la trésorerie, exprimée en millions d'euros, suit un mouvement brownien généralisé de drift* $0, 5$ *par trimestre et de paramètre de variance 4 par trimestre. Quelle doit être la trésorerie initiale de la société pour qu'elle ait une probabilité inférieure à* 5 % *de devenir négative dans un an ?*

5 Mouvement brownien géométrique

Définition. *Un* mouvement brownien géométrique *(*geometric Brownian motion*) est un processus stochastique* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *dont l'incrément est défini par*

$$\boxed{dX_t = (aX_t)\, dt + (bX_t) dW_t}$$

où a *(le* drift*) et* b *(le paramètre d'écart-type) sont des constantes et* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *un mouvement brownien standard.*



6 Processus d'Itô

Définition. *Un* processus d'Itô *(*Itô process*) est un processus stochastique* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *dont l'incrément est défini par*

$$dX_t = A(t, X_t)\, dt + B(t, X_t) dW_t$$

où A *(le* drift*) et* B *(le paramètre d'écart-type) sont des fonctions de deux variables « suffisamment régulières » et* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *est un mouvement brownien standard.*

III Processus de cours des actions

1 Mouvement brownien géométrique

Problème : quel mouvement brownien représente l'évolution du cours S_t d'une action ?

Avec un mouvement brownien généralisé, les drift et paramètre de variance sont constants. Or, l'espérance de rentabilité requise par les investisseurs est indépendante du prix de l'action. Le drift n'est donc pas constant pour le processus du cours de l'action, mais pour le processus de rentabilité de l'action. La même remarque étant vraie pour le paramètre de variance,

$$\boxed{dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t}$$

où μ et σ représentent respectivement l'espérance du taux de rentabilité de l'action et la volatilité de l'action sur la période $[\,t\,;t+\,\mathrm{d}t\,]$.

Remarque. *Dans un univers risque-neutre, le taux de rentabilité espéré μ est remplacé par le taux sans risque r.*

Remarque. *La volatilité d'une action peut être interprétée comme l'écart-type de la variation du cours de l'action sur un an, ou encore comme l'écart-type du taux de rentabilité continûment composé de l'action sur un an.*

Remarque. *Si X_t est le prix d'un actif X à l'instant t,*

$$\frac{\mathrm{X}_{t+\,\mathrm{d}t}}{\mathrm{X}_t} = a\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{dW}_t$$

suit un mouvement brownien généralisé, et représente le taux de rentabilité de cet actif sur la période $[\,t\,;t+\,\mathrm{d}t\,]$.

Remarque. *La version en temps discret s'écrit*

$$\Delta\mathrm{S}_t = \mu\mathrm{S}_t\Delta t + \sigma\mathrm{S}_t\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

où μ est la rentabilité espérée de l'action par unité de temps, σ est la volatilité de l'action et ε est une variable qui suit une loi normale centrée réduite.

2 Simulation de Monte-Carlo

Exemple. *Considérons une action ne versant pas de dividendes, de taux de rentabilité continûment composé annuel égal à 15 % et de volatilité annuelle égale à 30 %. On a alors*

$$\Delta\mathrm{S}_t = 0,15\mathrm{S}_t\Delta t + 0,30\mathrm{S}_t\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

soit $$\Delta\mathrm{S}_t = 0,00288\mathrm{S}_t + 0,0416\mathrm{S}_t\,\varepsilon$$

pour un intervalle de temps d'une semaine.

Il est possible de simuler une trajectoire du cours de l'action sur dix semaines en réalisant des tirages successifs de ε suivant la loi normale centrée réduite (`LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())` avec Excel). Par exemple, si $\mathrm{S}_0 = 100$,

S_t	ε	$\Delta\mathrm{S}_t$
100	1,5709713037	6,8232406234
106,8232406234	−1,6711779216	−7,1188077425
99,7044328808	0,561739475	2,6170780632
102,3215109441	−0,3683866186	−1,2733792664
101,0481316777	0,7798295818	3,5691120257
104,6172437033	1,734128751	7,8483601002
112,4656038036	−0,5838024744	−2,407459289
110,0581445145	0,4151442925	2,2176718944
112,2758164089	−0,3448779433	−1,2874580786
110,9883583303	1,1477443514	5,6189149438

3 Processus corrélés

Supposons l'existence de deux processus $(\mathrm{X}_{1,t})_{t\geqslant 0}$ et $(\mathrm{X}_{2,t})_{t\geqslant 0}$ décrits par

$$\mathrm{dX}_{1,t} = a_1\mathrm{d}t + b_1\mathrm{dW}_{1,t} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dX}_{2,t} = a_2\mathrm{d}t + b_2\mathrm{dW}_{2,t}$$

Si leur corrélation ρ n'est pas nulle, on considère

$$\varepsilon_2 = \rho\,\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\,\varepsilon_1'$$

IV Lemme d'Itô

1 Formule d'Itô

Théorème. *Soit $(\mathrm{X}_t)_{t\geqslant 0}$ un processus d'Itô d'incrément $\mathrm{dX}_t = \mathrm{A}(t,\mathrm{X}_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{B}(t,\mathrm{X}_t)\mathrm{dW}_t$ et f une fonction de (t,X_t) « suffisamment régulière ». Alors le processus stochastique $(\mathrm{Y}_t)_{t\geqslant 0}$ défini par $\mathrm{Y}_t = f(t,\mathrm{X}_t)$ est un processus d'Itô d'incrément*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{dY}_t = {} & \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{A}(t,\mathrm{X}_t)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_t} + \frac{1}{2}\mathrm{B}^2(t,\mathrm{X}_t)\frac{\partial^2 f}{\partial {\mathrm{X}_t}^2}\right)\mathrm{d}t \\ & + \left(\mathrm{B}(t,\mathrm{X}_t)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_t}\right)\mathrm{dW}_t\end{aligned}}$$

2 Preuve partielle

Lemme (admis)**.** *On a les formules de calcul*

$$\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\,\mathrm{dW}_t = \mathrm{dW}_t\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dW}_t\,\mathrm{dW}_t = \mathrm{d}t$$

On va en fait prouver le lemme suivant, équivalent au théorème donnant la formule d'Itô.

Lemme. *Soit $(\mathrm{X}_t)_{t\geqslant 0}$ un processus d'Itô d'incrément $\mathrm{dX}_t = \mathrm{A}(t,\mathrm{X}_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{B}(t,\mathrm{X}_t)\mathrm{dW}_t$ et f une fonction de (t,X_t) « suffisamment régulière ». Alors le processus stochastique $(\mathrm{Y}_t)_{t\geqslant 0}$ défini par $\mathrm{Y}_t = f(t,\mathrm{X}_t)$ est un processus d'Itô d'incrément*

$$\mathrm{dY}_t = \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}_t}\mathrm{dX}_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {\mathrm{X}_t}^2}(\mathrm{dX}_t)^2$$

Pour cela, on admet les deux lemmes suivants :

Lemme (Règle du produit d'Itô (admise))**.** *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô s'écrivant*

$$\mathrm{dX}_{1,t} = \mathrm{A}_1\,\mathrm{d}t + \mathrm{B}_1\mathrm{dW}_t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dX}_{2,t} = \mathrm{A}_2\,\mathrm{d}t + \mathrm{B}_2\mathrm{dW}_t$$

Alors le processus $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ est un processus d'Itô et

$$\mathrm{dY}_t = \mathrm{X}_2\mathrm{dX}_1 + \mathrm{X}_1\mathrm{dX}_2 + \mathrm{dX}_1\mathrm{dX}_2$$

Lemme (admis)**.** *Soit $g\colon [0,\mathrm{T}]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que ses dérivées $\dfrac{\partial g}{\partial t}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ existent et soient continues. Alors il existe une suite de polynômes (g_n) tels que (g_n), $\left(\dfrac{\partial g_n}{\partial t}\right)$, $\left(\dfrac{\partial g_n}{\partial x}\right)$ et $\left(\dfrac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}\right)$ convergent uniformément vers g, $\dfrac{\partial g}{\partial t}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$ sur les compacts de $[0,\mathrm{T}]\times\mathbb{R}$.*

3 Exemples

Exemple. *Si $(\mathrm{X}_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien généralisé de paramètres (a,b) et $\mathrm{Y}_t = (\mathrm{X}_t)^2$, alors $(\mathrm{Y}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Itô d'incrément*

$$\mathrm{dY}_t = \left(2a\mathrm{X}_t + b^2\right)\,\mathrm{d}t + (2b\mathrm{X}_t)\mathrm{dW}_t$$

Exemple. *(Application aux contrats forward) Considérons une action ne versant pas de dividendes, dont le cours S suit un mouvement brownien géométrique de paramètres (μ,σ), et un contrat forward F portant sur cette action, d'échéance T. Supposons que le taux d'intérêt sans risque est constant et égal à r. On sait que si $t<\mathrm{T}$, $\mathrm{F}_t = \mathrm{S}_t\mathrm{e}^{r(\mathrm{T}-t)}$. Le processus F suit alors un mouvement brownien géométrique de paramètres $(\mu-r,\sigma)$.*

Théorème. *(Propriété de log-normalité) Considérons une action ne versant pas de dividendes, dont le cours* S *suit un mouvement brownien géométrique de paramètres* (μ, σ). *Notons* L *le processus* $\mathrm{L} = \ln \mathrm{S}$. *Alors* L *suit un mouvement brownien généralisé de paramètres* $\left(\mu - \sigma^2/2, \sigma\right)$.

Autrement dit, le processus $\ln(\mathrm{S_T})$ *(logarithme du cours de l'action à la date* T*) suit une loi normale :*

$$\ln \mathrm{S_T} \sim \mathcal{N}\left(\ln \mathrm{S_0} + \left(\mu - \sigma^2/2\right)\mathrm{T}, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right)$$

Le processus $\mathrm{S_T}$ *du cours de l'action suit donc une loi dite* log-normale.

Exercice 5. *On considère un mouvement brownien géométrique* $(\mathrm{X}_t)_{t\geqslant 0}$ *de paramètres* (μ, σ), *issu de* $\mathrm{X}_0 = 1$. *À l'aide de la formule d'Itô, déterminer les processus :*

1. $\mathrm{Z}_t = (\mathrm{X}_t)^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $\mathrm{H}_t = \dfrac{1}{\mathrm{X}_t}$.

Exercice 6. *Notons* x *le taux actuariel continûment composé d'une obligation zéro-coupon qui paie* 1 € *à la date* T. *On sait qu'alors, pour tout* $t < \mathrm{T}$, $\mathrm{Ob}_t = \mathrm{e}^{-x_t(\mathrm{T}-t)}$ *en notant* Ob *le processus suivi par le cours de l'obligation.*

Supposons que x *suive le processus suivant :*

$$\mathrm{d}x_t = a(x_0 - x_t)\mathrm{d}t + s x_t \mathrm{dW}_t$$

où a, x_0 *et* s *sont des constantes positives et* W *suit un mouvement brownien standard. Quel est alors le processus suivi par le cours* Ob *de l'obligation ?*

A Rappels : calculs de dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	condition
x	1	0	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\dfrac{2}{x^3}$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{-2}{x^3}$	$\dfrac{6}{x^4}$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{n(n+1)}{x^{n+2}}$	$n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$x > 0$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$	$x \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$	condition
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$u(x) \in \mathbb{R}, v(x) \in \mathbb{R}$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$u(x) \in \mathbb{R}, v(x) \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$	$u(x) \in \mathbb{R}, v(x) \in \mathbb{R}^*$
$(u(x))^n$	$n(u(x))^{n-1}u'(x)$	$n \in \mathbb{N}^*, u(x) \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{(u(x))^n}$	$\dfrac{-nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}^*, u(x) \neq 0$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x) > 0$
$\exp(u(x))$	$\exp(u(x))u'(x)$	$u(x) \in \mathbb{R}$

B Rappels : loi normale

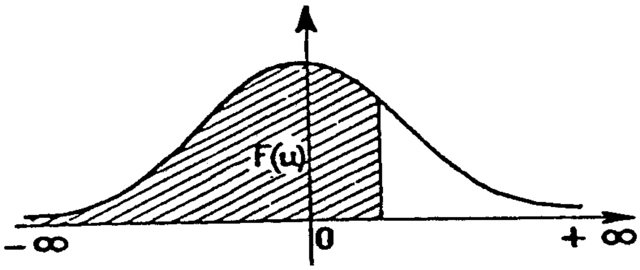
Une variable aléatoire continue suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ si elle a pour densité $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ sur $\mathbb{R}$. Son espérance vaut m et son écart-type σ.

Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors $\dfrac{\mathrm{X} - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Si deux variables aléatoires $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ et $\mathrm{Y} \sim \mathcal{N}(m', \sigma')$ sont indépendantes, alors leur somme suit également une loi normale : $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \sim \mathcal{N}(m + m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$.

L'estimateur de m est la moyenne empirique $\overline{\mathrm{X}}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Celui de σ^2 vaut $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - m)^2$ si m est connu. Si m est inconnu, il vaut $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}_n)^2$.

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota – La table donne les valeurs de F(u) pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple — pour u = 1,37 — F(u) = 0,9147

pour u = -1,37 — F(u) = 0,0853