Θέμα 4 (β) / Ιουν. 2014 $\quad I=\int_0^4 (x-1)(x-3)(x-4)\,dx$ ①

Η $f(x)=(x-1)(x-3)(x-4)$ είναι πολ/μο $3^{ου}$ βαθμού άρα ο κανόνας $\frac{1}{3}$ Simpson δίνει ακριβώς το I. $\quad // h=\frac{b-a}{2}$

$h=2$

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	-12	2	0

$$I=\frac{2}{3}\cdot\left(-12+4\cdot 2+0\right)=-8/3$$

Θέμα 4(α) / Σεπτ. 2018 $\quad I=\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx$

Η $f(x)=3x^2-2x+1$ είναι πολ/μο βαθμού 2 άρα ο κανόνας $\frac{1}{3}$ S. δίνει ακριβώς το I.

$h=3/2$

x_i	-1	1/2	2
$f(x_i)$	6	3/4	9

$$I=\frac{3/2}{3}\cdot\left(6+\cancel{4\cdot\frac{3}{4}}+9\right)=9.$$

Διπλά Ολοκληρώματα

Ασκ. Να βρεθεί ακριβώς το

$$I=\int_0^1\underbrace{\int_0^2\underbrace{(x^3y+y^2+x+1)\,dx}_{J}\,dy}$$

$$J=\int_0^2(x^3y+y^2+x+1)\,dx$$

Η $f(x)=x^3y+y^2+x+1$ είναι πολ/μο βαθμού 3 άρα ο κανόνας $\frac{1}{3}$ S. δίνει ακριβώς το J.

$h=1$

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	y^2+1	y^2+y+2	y^2+8y+3

$$J=\frac{1}{3}\cdot\left(y^2+1+4(y^2+y+2)+y^2+8y+3\right)=$$

$$=\frac{6y^2+12y+12}{3}=2y^2+4y+4.$$

$I=\int_0^1(2y^2+4y+4)\,dy$. Η $g(y)=2y^2+4y+4$ είναι πολ/μο βαθμού 2 άρα ο κανόνας $1/3$ S. δίνει ακριβώς το I.

$h=1/2$

y_i	0	1/2	1
$g(y_i)$	4	13/2	10

$$I=\frac{1/2}{3}\cdot\left(4+4\cdot\frac{13}{2}+10\right)=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$$

Gauss

$$\int_A^B f(x)dx = a\cdot f(x_0) + b\cdot f(x_1) + c\cdot f(x_2) + \dots$$

Θέμα 4(α) | Σεπτ. 2017

// Τάξη ακρίβειας : Ο max βαθμός πολ/μου για τον οποίο ο τύπος δίνει ακρίβεια 100 %, π.χ. ο $\frac{1}{3}$ Simpson έχει τάξη ακρίβειας 3.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = c_0\cdot f(0) + c_1\cdot f(1) + c_2\cdot f'(1) \quad ①$$

• Για $f(x)=1 \Rightarrow f'(x)=0$

$① \Rightarrow [x]_0^2 = c_0\cdot 1 + c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0 \Rightarrow c_1 + c_0 = 2$

• Για $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

$① \rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = c_0\cdot 0 + c_1\cdot 1 + c_2\cdot 1 \rightarrow c_1 + c_2 = 2$

• Για $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$: $① \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = c_0\cdot 0 + c_1\cdot 1 + c_2\cdot 2 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = \frac{8}{3}$

Άρα : $c_0 = \frac{2}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$, $c_2 = \frac{2}{3}$.

• Για $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$

$$\int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4-0 = 4$$

$c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2\cdot f'(1) = \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{4}{3}\cdot 1 + \cancel{\frac{2}{3}\cdot 3} = \frac{10}{3} \neq 4$ άρα όχι.

Θέμα 4(β) | Φεβρ. 2018

$$\int_{-1}^1 x\cdot f(x)\,dx = w_0\cdot f(-1) + w_1\cdot f(0) + w_2\cdot f(1) \quad ①$$

• Για $f(x)=1$: $① \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = w_0\cdot 1 + w_1\cdot 1 + w_2\cdot 1 \Rightarrow w_0 + w_1 + w_2 = 0$

• Για $f(x)=x$: $① \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = w_0\cdot(-1) + w_1\cdot 0 + w_2\cdot 1 \Rightarrow -w_0 + w_2 = 2/3$

• Για $f(x)=x^2$: $① \Rightarrow \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = w_0\cdot 1 + w_1\cdot 0 + w_2\cdot 1 \rightarrow w_0 + w_2 = 0$

άρα $w_0 = -1/3$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1/3$.

• Για $f(x)=x^3$:

$$\int_{-1}^1 x\cdot f(x)dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = 2/5$$

$w_0\cdot f(-1) + w_1 f(0) + w_2\cdot f(1) = -\frac{1}{3}\cdot(-1) + \cancel{w_1\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot 1 = 2/3 \neq 2/5$

άρα η τάξη ακρίβειας είναι 2.

Θέμα 4(γ) / Σεπτ. 2018

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + w_2 \cdot f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \quad (1)$$

• Για $f(x)=1$: $(1) \Rightarrow [x]_{-1}^{1} = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 = 2 \Rightarrow w_1 = w_2 = 1$

• Για $f(x)=x$: $(1) \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = w_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + w_2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow w_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - w_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$

Ακριβής Τιμή: $\int_{-1}^{1} (\sqrt{2}x^3 - \pi x - 1)\,dx = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{x^4}{4} - \pi \cdot \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} =$

$= \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} - \pi \cdot \frac{1}{2} - 1\right) - \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} - \pi \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = -2.$

Προσέγγιση:
$w_1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + w_2 \cdot f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1\right) + \left(\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \pi \cdot \frac{-\sqrt{3}}{3} - 1\right) = -2$

άρα Απόλυτο Σφάλμα $= |-2 - (-2)| = 0$

Θέμα 4(α) / Ιουν. 2014

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = c_0 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + c_1 \cdot f(x_1) \quad (1)$$

• Για $f(x)=1$: $(1) \Rightarrow [x]_0^2 = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 \Rightarrow c_0 + c_1 = 2$

• Για $f(x)=x$: $(1) \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = c_0 \cdot \frac{1}{2} + c_1 \cdot x_1 \Rightarrow c_0 \cdot \frac{1}{2} + c_1 \cdot x_1 = 2$

• Για $f(x)=x^2$: $(1) \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = c_0 \cdot \frac{1}{4} + c_1 \cdot x_1^2 \Rightarrow c_0 \cdot \frac{1}{4} + c_1 \cdot x_1^2 = 8/3$

c_0, c_1, x_1 γνωστά.

Θέμα 4.2 / Ιουν. 2016

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = a \cdot f(2) + b \cdot f'(-2) + c \cdot f''(0) \quad (1)$$

• Για $f(x)=1 \Rightarrow f'(x) = f''(x) = 0$

$(1) \Rightarrow [x]_{-2}^{2} = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 \Rightarrow a = 4$

• Για $f(x)=x \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f''(x) = 0$

$(1) \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2} = a \cdot 2 + b \cdot 1 + c \cdot 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -8$

• Για $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2$

$(1) \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = a \cdot 4 + b \cdot (-4) + c \cdot 2 \Rightarrow 4a - 4b + 2c = \frac{16}{3} \Rightarrow c =$ γνωστό

Legendre

- Αν η $f(x)$ είναι πολ/μο μέχρι και $5^{ου}$ βαθμού, τότε ο παραπάνω τύπος δίνει ακρίβεια 100%.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{5}{9}\cdot f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\cdot f(0) + \frac{5}{9}\cdot f\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) \quad (1)$$

Θέμα 5.2 / Σεπτ. 2015

$$\int_0^1 \underbrace{\left(3x^5 - \frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - x^2 - \frac{1}{5}x + 1\right)}_{f(x)} dx.$$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

x	u
0	-1
1	1

// Έστω $u = ax + b$:

$$\begin{cases} -1 = 0a + b \\ 1 = 1a + b \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

άρα $u = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{u+1}{2}$

Θέταμε $x = \frac{u+1}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{u+1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} f\left(\frac{u+1}{2}\right)du \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{9}\cdot f\left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right) + \frac{8}{9}\cdot f\left(\frac{0+1}{2}\right) + \frac{5}{9}\cdot f\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right)\right)$$

Bonus: Να βρεθεί το I

$$f\left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right) = f(0.1) = 3\cdot 0.1^5 + \ldots + 1 = \ldots$$

$$f\left(\frac{0+1}{2}\right) = f(0.5) = 3\cdot 0.5^5 + \ldots + 1 = \ldots$$

$$f\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right) = \ldots$$

άρα $I = \ldots$