Θέμα 1 / Φεβρ. 2018

(α) $\beta=2$, $t=22$, $[L,U]=[-255,255]$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{10} = 2^{-1} = 1.\underbrace{000\cdots00}_{22\ \text{θέσεις}}\cdot 2^{-1}$$

$$(2)_{10} = 2^{1} = 1.\underbrace{000\cdots00}_{22\ \text{θέσεις}}\cdot 2^{1}$$

Στο $[\frac{1}{2}, 2]$ ανήκουν:

- Όλοι οι α.μ. με εκθέτη -1 (δηλ. 2^{22} α.μ.)
- Όλοι » 0 (δηλ. 2^{22} α.μ.)
- Ο αριθμός 2.

Συνολικά: $(2^{22}+2^{22}+1)$ αριθμοί μηχανής.

Bonus: Να βρεθεί το πλήθος των α.μ. του (Σ).

Έχουμε $255+255+1 = 511$ εκθέτες (διότι $[L,U]=[-255,255]$).

Για καθέναν από αυτούς έχουμε 2^{22} α.μ. (διότι $t=22$).

Άρα: $511\cdot 2^{22}$ θετικοί α.μ., $511\cdot 2^{22}$ αρνητικοί.

Συνολικά: $(511\cdot 2^{22} + 511\cdot 2^{22} \underbrace{+1}_{\text{για το } 0})$ αριθμοί μηχανής.

(β) $x=(1.4)_{10}$ Ακέραιο μέρος: $(1)_{10}=(1)_2$

Κλασματικό:

$0.4\cdot 2 = 0.8 \rightarrow 0$

$0.8\cdot 2 = 1.6 \rightarrow 1$

$0.6\cdot 2 = 1.2 \rightarrow 1$

$0.2\cdot 2 = 0.4 \rightarrow 0$

Περίοδος

$$x = (1.0110011001100110011001100110\cdots)_2 =$$

$$= 1.\underbrace{0110011001100110011001}_{t=22}100110\cdot 2^0 \qquad 100110 > 100000$$

$$\Rightarrow fl(x) = 1.0110011001100110011010\cdot 2^0$$

(γ) $x = 2^{15} - 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-12}$ $\in [L, U]$

$a = 2^{15} = 1.\underbrace{000\ldots00}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{15} = fl(a)$

$b = 2^{-7} = 1.000\ldots00 \cdot 2^{-7} = fl(b) \Rightarrow fl(b) = 0.\underbrace{000\ldots01}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{15}$

$$\begin{array}{r} 1.000\ldots00 \\ -\ 0.000\ldots01 \\ \hline 0.111\ldots11 \end{array} \qquad 1$$

$fl(a-b) = 0.\underbrace{111\ldots11}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{15} = 1.\underbrace{111\ldots10}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{14}$

$c = 2^{-8} = 1.\underbrace{000\ldots00}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{-8} = 0.\underbrace{000\ldots01}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{14}$

$$\begin{array}{r} 1.111\ldots10 \\ +\ 0.000\ldots01 \\ \hline 1.111\ldots11 \end{array}$$

$fl(a-b+c) = 1.\underbrace{111\ldots11}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{14}$

$d = 2^{-12} = 1.\underbrace{000\ldots00}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{-12} = 0.\underbrace{000\ldots00}_{22\ \text{θέσεις}}0001 \cdot 2^{14}$

$$\begin{array}{r} 1.111\ldots11 \\ +\ 0.000\ldots000001 \\ \hline 1.111\ldots110001 \end{array}$$

$fl(a-b+c+d) = 1.\underbrace{111\ldots11}_{t=22}0001 \cdot 2^{14} \xrightarrow{0001 < 1000}$

$\Rightarrow fl(a-b+c+d) = 1.\underbrace{111\ldots11}_{22\ \text{θέσεις}} \cdot 2^{14}$

Άσκ 'Εστω (Σ): $b=10$, $t=3$ ③

Να βρεθεί το αποτέλεσμα: $2000+0.3$.

$$x=(2000)_{10}=0.\underbrace{200}_{t=3}0\cdot 10^4 \xrightarrow{0<5} fl(x)=0.200\cdot 10^4$$

$$y=(0.3)_{10}=0.300\cdot 10^0=fl(y) \Rightarrow fl(y)=0.0000300\cdot 10^4$$

$$\begin{array}{r} 0.200 \\ +\ 0.0000300 \\ \hline 0.2000300 \end{array}$$

$$fl(x)+fl(y)=0.\underbrace{200}_{t=3}0300\cdot 10^4 \xrightarrow{0300<5000}$$

$$\Rightarrow fl(2000+0.3)=0.200\cdot 10^4=(2000)_{10}$$

//Αποφεύγουμε να προσθέτουμε αριθμούς με μεγάλη διαφορά τάξης μεγέθους καθώς και να αφαιρούμε περίπου ίσους αριθμούς διότι έχουμε μεγάλο σφάλμα.//

Θέμα 1 / Φεβρ. 2015 $b=10$, $t=3$

$$x=\sqrt{9.01}=3.0016662=0.\underbrace{300}_{t=3}16662\cdot 10^1 \xrightarrow{16662<50000}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow fl(x)=0.300\cdot 10^1 \\ y=3=0.300\cdot 10^1=fl(y) \end{array}\right\} \Rightarrow fl(\sqrt{9.01}-3)=0.$$

//Συζυγής: $A-B \rightsquigarrow A+B$
$A+B \rightsquigarrow A-B$

$$\sqrt{9.01}-3=\frac{(\sqrt{9.01}-3)(\sqrt{9.01}+3)}{\sqrt{9.01}+3}=$$

$$=\frac{9.01-9}{\sqrt{9.01}+3}=\frac{0.01}{\sqrt{9.01}+3}\simeq\frac{0.01}{3+3}=\frac{0.01}{6}\neq 0$$

//Πολ/με και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση ώστε η αφαίρεση που δημιουργεί μεγάλο σφάλμα να μετατραπεί σε πρόσθεση

Θέμα 1 / Σεπτ. 2017

(α) $b=10,\ t=5,\ [L,U]=[-2,3]$

// $\sqrt{1.1} = 1.0488088$

$\varepsilon_{mach} = \frac{1}{2} b^{1-t} = \frac{1}{2}\cdot 10^{1-5} = 0.5\cdot 10^{-4}$

(β) $x=\sqrt{1.1} = 1.0488088 = 0.\underbrace{10488}_{t=5}088 \cdot 10^{1} \xrightarrow{088<500} \downarrow$

$\rightarrow fl(x) = 0.10488\cdot 10^{1}$

$y = 1 = 0.10000\cdot 10^{1} = fl(y)$ άρα

$$\begin{array}{r} 0.10488 \\ -0.10000 \\ \hline 0.00488 \end{array}$$

$fl(\sqrt{1.1}-1) = 0.00488\cdot 10^{1} = 0.0488$

Σχετικό Σφάλμα $= \left| \frac{(\sqrt{1.1}-1) - 0.0488}{\sqrt{1.1}-1} \right| = 1.8\cdot 10^{-4}$

Είχαμε αφαίρεση περίπου ίσων αριθμών οπότε προέκυψε μεγάλο σφάλμα.

(γ) $\sqrt{1.1}-1 = \frac{(\sqrt{1.1}-1)(\sqrt{1.1}+1)}{\sqrt{1.1}+1} = \frac{1.1-1}{\sqrt{1.1}+1} = \frac{0.1}{\sqrt{1.1}+1} \simeq$

$\simeq \frac{0.1}{0.20488\cdot 10^{1}} = \frac{0.1}{2.0488} = 0.04880905 =$

$= 0.\underbrace{48809}_{t=5}05 \cdot 10^{-1} \xrightarrow{05<50} fl(\sqrt{1.1}-1) = 0.48809\cdot 10^{-1} = 0.048809$

Σχετικό Σφάλμα $= \left| \frac{(\sqrt{1.1}-1) - 0.048809}{\sqrt{1.1}-1} \right| = \dots$

(δ) // ε_{mach}: Η μισή απόσταση ανάμεσα στο 1 και στον αμέσως επόμενο α.f.

// Αν $y \le \varepsilon_{mach}$ τότε $1+y=1$

Έστω $a=1,\ b=c=\varepsilon_{mach}$.

$(a+b)+c = (\underbrace{1+\varepsilon_{mach}}_{1}) + \varepsilon_{mach} = 1+\varepsilon_{mach} = 1$

$a+(b+c) = 1+(\varepsilon_{mach}+\varepsilon_{mach}) = 1+2\cdot\varepsilon_{mach} \neq 1$.

(διότι $2\varepsilon_{mach} > \varepsilon_{mach}$)