Διαφορικές Εξισώσεις

$f'(x) + 2\cdot f(x) + 1 = e^x$ (Γραφική, Α' τάξης)

$\downarrow$

$y'(x) + 2y(x) + 1 = e^x$

$\downarrow$

$y'(t) + 2y(t) + 1 = e^t$

$\downarrow$

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{cases} y' + 2y + 1 = e^t \\ y(0) = 1 \text{ (αρχική συνθήκη)} \end{cases}$$

Θέμα 6.2 / Ιουν. 2016

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \\ y(1) = -1. \end{cases} \qquad 1 \le t \le 2$$

SOS $O(h)$

$h = 1/2, \quad y(2) = ?$

Πεπλεγμένη Euler: $y_{i+1} = y_i + h\cdot f(t_{i+1}, y_{i+1})$, $f(t,y) = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2$.

Έχουμε: $h = 1/2$, $t_0 = 1$, $t_1 = 3/2$, $t_2 = 2$, $y_0 = -1$,

SOS: Η $f(t,y)$ είναι το Β' μέλος της ΔΕ. αφού πρώτα έχει λυθεί ως προς y'.

1ο Βήμα ($i=0$):

$y_1 = y_0 + h\cdot f(t_1, y_1) \Rightarrow y_1 = -1 + \frac{1}{2}\cdot f(\frac{3}{2}, y_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y_1 = -2 + \frac{4}{9} - \frac{y_1\cdot 2}{3} - y_1^2 \Rightarrow y_1^2 + 2y_1 + \frac{2y_1}{3} + 2 - \frac{4}{9} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -0.86, \text{ δεκτή (πιο κοντά στο } y_0 = -1) \\ y_1 = -1.80, \text{ απορ/ται.} \end{cases}$

2ο Βήμα ($i=1$):

$y_2 = y_1 + h\cdot f(t_2, y_2) \Rightarrow y_2 = -0.86 + \frac{1}{2}\cdot f(2, y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y_2 = -1.72 + \frac{1}{4} - \frac{y_2}{2} - y_2^2 \Rightarrow y_2^2 + 2y_2 + \frac{y_2}{2} + 1.72 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{y_2 = -0.94}, \text{ δεκτή (πιο κοντά στο } y_0 = -0.86) \\ \underline{y_2 = -1.55}, \text{ απορ/ται} \end{cases}$

Ακριβής Τιμή: $y(2) = -\frac{1}{2}$ άρα Απόλυτο Σφάλμα $= |-0.5 - (-0.94)| = 0.44 = \varepsilon$

Η πεπλεγμένη Euler έχει $O(h)$, δηλ. σε κάθε υποδιπλ/σμό του h, το σφάλμα υποδιπλ/ται. Έστω ότι το h υποδιπλ/ται n φορές. Πρέπει

$\varepsilon' < 10^{-5} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2^n} < 10^{-5} \Rightarrow 2^n > 0.44\cdot 10^5 \Rightarrow n\cdot \ln 2 > \ln(0.44\cdot 10^5) \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \frac{\ln(0.44\cdot 10^5)}{\ln 2} = 15.42$ άρα $h' = \frac{h}{2^{15.42}} = \frac{1/2}{2^{15.42}}$

Θέμα 6 (β) / Σεπτ. 2017 $\begin{cases} y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, & 1 \le t \le 3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ ②

(i) $h=1$, $y(3)=?$

(Πεπλεγμένη) Τραπεζίου: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\cdot\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})\right)$, $\boxed{O(h^2)}$

Έχουμε: $h=1$, $t_0=1$, $t_1=2$, $t_2=3$, $y_0=1$, $f(t,y) = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2$

1ο Βήμα $(i=0)$:

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(t_0,y_0) + f(t_1,y_1)\right) \Rightarrow y_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(f(1,1) + f(2,y_2)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y_1 = 2 + 0 + \frac{y_1}{2} - \frac{y_1^2}{4} \Rightarrow \frac{y_1^2}{4} + 2y_1 - \frac{y_1}{2} - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{y_1 = 1.1}, \text{ δεκτή (πιο κοντά στο } y_0 = 1) \\ y_1 = -7.1, \text{ απορ/ται.} \end{cases}$

2ο Βήμα $(i=1)$:

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(f(t_1,y_1) + f(t_2,y_2)\right) \Rightarrow y_2 = 1.1 + \frac{1}{2}\cdot\left(f(2,1.1) + f(3,y_2)\right)$

$\Rightarrow 2y_2 = 2.2 + \frac{1.1}{2} - \left(\frac{1.1}{2}\right)^2 + \frac{y_2}{3} - \frac{y_2^2}{9} \Rightarrow \frac{y_2^2}{9} + 2y_2 - \frac{y_2}{3} - 2.2 - \frac{1.1}{2} + \left(\frac{1.1}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{y_1 = 1.34}, \text{ δεκτή (πιο κοντά στο } y_1 = 1.1) \\ y_1 = -16.34, \text{ απορ/ται} \end{cases}$

(ii) ΑπολυτοΣφάλμα $= |1.42 - 1.34| = 0.08$

Η μέθοδος τραπεζίου έχει $O(h^2)$ δηλ. σε κάθε υποδιπλ/σμό του h, το σφάλμα υποτετραπλ/ται.

$h' = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{h}{2^3}$, δηλ. το h υποδιπλ/ται 3 φορές.

Άρα $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4^3} = \frac{0.08}{4^3}$

Scanned by CamScanner

Θέμα 7.2 / Φεβρ. 2017

$h=0.2$, $y(0.4)=?$

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{1+t^2} - y^2, & 0 \le t \le 0.4 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Απλή Euler: $O(h)$

Βελτιωμένη Euler (Heun): $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$

$\boxed{O(h^2)}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i,y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right)$$

Έχουμε: $h=0.2$, $t_0=0$, $t_1=0.2$, $t_2=0.4$, $y_0=0$, $f(t,y)=\frac{1}{1+t^2}-y^2$

1ο Βήμα $(i=0)$: $\tilde{y}_1 = y_0 + h \cdot f(t_0,y_0) = 0 + 0.2 \cdot f(0,0) = 0.2 \cdot 1 = 0.2$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\cdot\left(f(t_0,y_0)+f(t_1,\tilde{y}_1)\right) = 0 + 0.1\cdot\left(f(0,0)+f(0.2,0.2)\right) =$$
$$= 0.1\cdot\left(1+\frac{1}{1.04}-0.04\right) = 0.19$$

2ο Βήμα $(i=1)$:

$$\tilde{y}_2 = y_1 + h\cdot f(t_1,y_1) = 0.19 + 0.2\cdot f(0.2, 0.19) =$$
$$= 0.19 + 0.2\cdot\left(\frac{1}{1.04} - 0.19^2\right) = 0.37$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\cdot\left(f(t_1,y_1)+f(t_2,\tilde{y}_2)\right) = 0.19 + 0.1\cdot\left(f(0.2,0.19)+f(0.4,0.37)\right) =$$
$$= 0.19 + 0.1\cdot\left(\frac{1}{1.04} - 0.19^2 + \frac{1}{1.16} - 0.37^2\right) = 0.35$$ (προσέγγιση).

Ακριβής Τιμή: $y(0.4) = \frac{0.4}{1+0.4^2} = 0.34$

Απόλυτο Σφάλμα $= |0.34 - 0.35| = 0.01 = \varepsilon$

Η Heun έχει $O(h^2)$ δηλ. σε κάθε υποδιπλ/σμό του h, το σφάλμα υποτετραπλ/ται. Έστω ότι το h υποδιπλ/ται n φορές. Πρέπει:

$$\varepsilon' < 10^{-4} \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{4^n} < 10^{-4} \Longrightarrow 4^n > 0.01\cdot 10^4 \Longrightarrow n \cdot \ln 4 > \ln 100$$
$$\Longrightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 4} = 3.32$$ άρα $h' = \frac{h}{2^{3.32}} = \frac{0.2}{2^{3.32}}$

Θέμα 6.2 / Σεπτ. 2016

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+t}{1+y}, & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$h = 0.5$, $y(2) = ?$

// Μέθοδος Μέσου : $y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$, $\boxed{O(h^2)}$

Έχουμε: $h = \frac{1}{2}$, $t_0 = 1$, $t_1 = 3/2$, $t_2 = 2$, $y_0 = 2$, $f(t,y) = \dfrac{1+t}{1+y}$.

1ο Βήμα $(i=0)$:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right) \Rightarrow y_1 = 2 + \frac{1}{2} \cdot f\left(1 + \frac{1}{4}, \frac{2+y_1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y_1 = 4 + \frac{1 + 5/4}{1 + \frac{2+y_1}{2}} \Rightarrow 2y_1 = 4 + \frac{9/4}{\frac{4+y_1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y_1 = 4 + \frac{9}{8+2y_1} \Rightarrow 16y_1 + 4y_1^2 = 32 + 8y_1 + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y_1^2 + 8y_1 - 41 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2.3, \text{ δεκτή (πιο κοντά στο } y_0 = 2) \\ y_1 = -4.3, \text{ απορ/ται.} \end{cases}$$

2ο Βήμα $(i=1)$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f\left(t_1 + \frac{h}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow y_2 = 2.3 + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}, \frac{2.3+y_2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y_2 = 4.6 + \frac{1 + 7/4}{1 + \frac{2.3+y_2}{2}} \Rightarrow 2y_2 = 4.6 + \frac{11/4}{\frac{4.3+y_2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y_2 = 4.6 + \frac{11}{8.6+2y_2} \Rightarrow 17.2y_2 + 4y_2^2 = 39.56 + 9.2y_2 + 11$$

$$\Rightarrow 4y_2^2 + 8y_2 - 50.56 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 2.69, \text{ δεκτή (πιο κοντά στο } y_1 = 2.3) \\ y_2 = -4.69, \text{ απορ/ται.} \end{cases}$$

Ακριβής Τιμή: $y(2) = \sqrt{4+4+6} - 1 = \sqrt{14} - 1 = 2.74$

Απόλυτο Σφάλμα $= |2.74 - 2.69| = 0.05$.