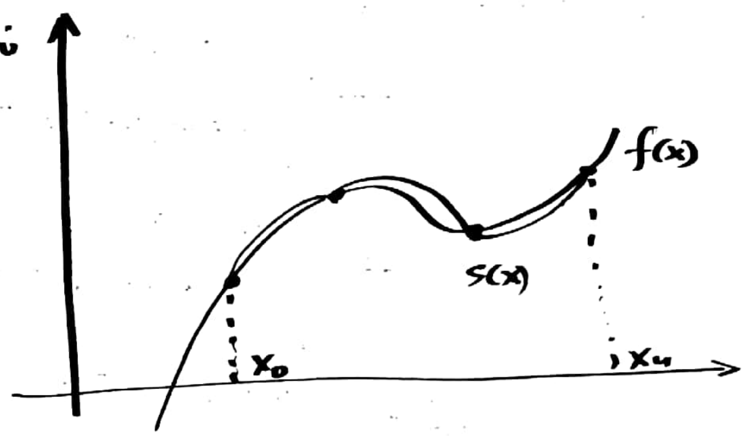
Splines

- **Γραμμικές**: ένα πολ/μο Α' βαθμού για κάθε υποδιάστημα.

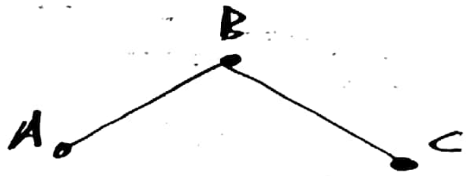


- **Κυβικές**:
  - $s(x_i)=f(x_i)$
  - Οι $s(x), s'(x), s''(x)$ είναι συνεχείς.

+ Φυσικές (ή Ελεύθερες)
  $$s''(x_0)=0 \qquad s''(x_n)=0$$

+ Δεσμευμένες
  $$s'(x_0)=f'(x_0) \qquad s'(x_n)=f'(x_n)$$

Άσκ Να βρεθεί η γραμμική spline που διέρχεται από τα $A(-2,0)$, $B(0,3)$, $C(1,4)$.



- Έστω $AB: y=ax+b$

$$\begin{cases} 0=-2a+b \Rightarrow a=3/2 \\ 3=0a+b \end{cases} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+3$$

- Έστω $BC: y=cx+d$

$$\begin{cases} 3=0c+d \\ 4=1c+d \Rightarrow c=1 \end{cases} \Rightarrow y=x+3$$

Άρα
$$s(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x+3, & -2\le x\le 0 \\ x+3, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

Θέμα 3.1 / Φεβρ. 2015

$$s(x)=\begin{cases} 3+b_1x-x^3, & 0\le x\le 1\\ 1+b_2(x-1)+b_3(x-1)^2-2(x-1)^3, & 1\le x\le 3\end{cases}$$

$$s'(x)=\begin{cases} b_1-3x^2, & 0\le x\le 1\\ b_2+2b_3(x-1)-6(x-1)^2, & 1\le x\le 3\end{cases}$$

$$s''(x)=\begin{cases} -6x, & 0\le x\le 1\\ 2b_3-12(x-1), & 1\le x\le 3\end{cases}$$

Πρέπει:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} s''(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} s''(x) \Longrightarrow -6=2b_3 \Rightarrow b_3=-3$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} s'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} s'(x) \Longrightarrow b_1-3=b_2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} s(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} s(x) \Longrightarrow 3+b_1-1=1 \Rightarrow b_1=-1\end{array}\right\}\Rightarrow b_2=-4$

Άρα: $s'(0)=b_1=-1$, $s'(1)=b_2=-4$.

Θέμα. 3.3 ~~Ιαν~~ Φεβρ. 2014

$$s(x)=\begin{cases} 2+Bx+x^2-2x^3, & 0\le x\le 1\\ 2+b(x-1)-5(x-1)^2+7(x-1)^3, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$s'(x)=\begin{cases} B+2x-6x^2, & 0\le x\le 1\\ b-10(x-1)+21(x-1)^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$s''(x)=\begin{cases} 2-12x, & 0\le x\le 1\\ -10+42(x-1), & 1\le x\le 2\end{cases}$$

Πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 1^-} s''(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} s''(x) \Longrightarrow 2-12=-10 \Rightarrow -10=-10$, ισχύει.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} s'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} s'(x) \Longrightarrow B+2-6=b \Rightarrow b=B-4\\ s'(0)=f'(0) \; ①\\ s'(2)=f'(2) \; ②\\ \lim\limits_{x\to 1^-} s(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} s(x) \Longrightarrow 2+B+1-2=2 \Rightarrow B=1\end{array}\right\}\Rightarrow b=-3$

Άρα: $① \Rightarrow f'(0)=s'(0)=B=1$, $② \Rightarrow f'(2)=s'(2)=b-10+21=$
$=-3-10+21=8$.

Θέμα 4.1 / Φεβρ. 2016

$$s(x)=\begin{cases} ax^3+2x^2-1, & 0\le x\le 1\\ b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+e, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$s'(x)=\begin{cases} 3ax^2+4x, & 0\le x\le 1\\ 3b(x-1)^2+2c(x-1)+d, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$s''(x)=\begin{cases} 6ax+4, & 0\le x\le 1\\ 6b(x-1)+2c, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

Πρέπει:

$s''(0)=0 \Longrightarrow 4=0$?

αδύνατο, άρα το δεδομένο ότι η $s(x)$ είναι φυσική κυβική spline είναι λανθασμένο.

Θέμα 3.1 / Σεπτ. 2016

$$f(x)=\begin{cases} 6-2x+\frac{x^3}{2}, & 0\le x\le 2\\ 6+4(x-2)+c(x-2)^2+d(x-2)^3, & 2\le x\le 3\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -2+\frac{3x^2}{2}, & 0\le x\le 2\\ 4+2c(x-2)+3d(x-2)^2, & 2\le x\le 3\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 3x, & 0\le x\le 2\\ 2c+6d(x-2), & 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Πρέπει:

$\lim_{x\to 2^-} f''(x)=\lim_{x\to 2^+} f''(x) \Longrightarrow 6=2c \Longrightarrow c=3$

$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^+} f'(x) \Longrightarrow -2+6=4 \Rightarrow 4=4$, ισχύει.

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Longrightarrow 6-\cancel{4}+\frac{\cancel{8}}{\cancel{2}}=6 \Rightarrow 6=6$, ισχύει.

Για να είναι φυσική:

$f''(0)=0 \Longrightarrow 0=0$, ισχύει

$f''(3)=0 \Longrightarrow 2c+6d=0 \Longrightarrow d=-1$.

Scanned by CamScanner

Θέμα 3.2 / Ιαν. 2016

(4)

Not!

Έστω:

$$\cancel{s(x)=\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d, & -1\le x\le 0 \\ ex^3+fx^2+gx+d, & 0\le x\le 1 \end{cases}}$$

$x-(-1)$

$$s(x)=\begin{cases} a\cdot(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d, & -1\le x\le 0 \\ e\cdot(x-0)^3+f(x-0)^2+g(x-0)+h, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

$x-0$

$$s'(x)=\begin{cases} 3a(x+1)^2+2b(x+1)+c, & -1\le x\le 0 \\ 3e(x-0)^2+2f(x-0)+g, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

$$s''(x)=\begin{cases} 6a(x+1)+2b, & -1\le x\le 0 \\ 6e(x-0)+2f, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

Πρέπει:

$s''(-1)=0 \longrightarrow 2b=0 \Rightarrow \underline{b=0}$

$s''(1)=0 \Rightarrow 6e+2f=0 \Rightarrow f=-3e \Rightarrow e=-a$

$\lim_{x\to 0^-} s''(x)=\lim_{x\to 0^+} s''(x) \longrightarrow 6a+\cancel{2b}^{0}=2f \Rightarrow f=3a$

$\lim_{x\to 0^-} s'(x)=\lim_{x\to 0^+} s'(x) \longrightarrow 3a+\cancel{2b}^{0}+c=g \Rightarrow g=2a+2$

$s(-1)=5 \longrightarrow \underline{d=5}$

$s(0)=7 \longrightarrow \underline{h=7}$

$s(1)=9 \Rightarrow e+f+g+h=9$ (1)

$\lim_{x\to 0^-} s(x)=\lim_{x\to 0^+} s(x) \Rightarrow a+\cancel{b}^{0}+c+d=h \Rightarrow c=2-a$

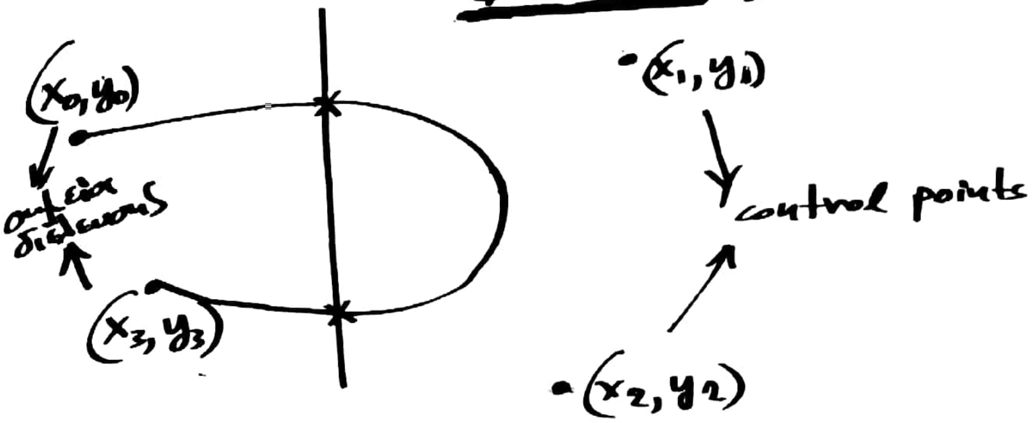
(1) $\Rightarrow -a+3a+2a+2+7=9 \Rightarrow \underline{a=0}, \underline{e=0}, \underline{f=0}, \underline{g=2}, \underline{c=2}$

Άρα

$$s(x)=\begin{cases} 2x+2+5=2x+7, & -1\le x\le 0 \\ 2x+7, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

$// = 2x+7, \quad -1\le x\le 1$

Bezier (κυβικές)



Θέμα 4.2 / Φεβρ. 2017

$(x_0,y_0)=(1,1)$, $(x_3,y_3)=(3,1)$, $(x_1,y_1)=(1,3)$, $(x_2,y_2)=(3,3)$

• Έστω:

$B(t)=(x(t),y(t))=(at^3+bt^2+ct+d,\ et^3+ft^2+gt+h)$, $t\in[0,1]$

$x'(t)=3at^2+2bt+c$, $y'(t)=3et^2+2ft+g$

Πρέπει:

$\boxed{\begin{array}{l} x(0)=x_0 \\ y(0)=y_0 \\ x(1)=x_3 \\ y(1)=y_3 \\ x'(0)=3(x_1-x_0) \\ y'(0)=3(y_1-y_0) \\ x'(1)=3(x_3-x_2) \\ y'(1)=3(y_3-y_2) \end{array}}$

$\Rightarrow d=1$

$\Rightarrow h=1$

$\Rightarrow a+b+c+d=3$

$\Rightarrow e+f+g+h=1$

$\Rightarrow c=3(1-1)=0$

$\Rightarrow g=3(3-1)=6$

$\Rightarrow 3a+2b+c=3(3-3)=0$

$\Rightarrow 3e+2f+g=3(1-3)=-6$

a, b γνωστά

e, f γνωστά.

Άρα: $B(t)=(\ldots\ ,\ \ldots)$, $t\in[0,1]$