Newton - Raphson

• Ειδική περίπτωση της Γ.Ε.Μ.:

$$\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Τετραγωνική Ταχύτητα

• Η NR συγκλίνει με $r=2$, δηλ. σε κάθε επαν/ψη το σφάλμα σχεδόν υποτετραπλ/ται ανν:

1) Η $f(x)$ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη.
2) Η ρίζα είναι απλή.

Αλλιώς, συγκλίνει γραμμικά.

• $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$ (2 απλές)

• $x^3-8=0 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$ (1 απλή)

• $x^2-6x+9=0$

$\Delta = 36-36=0$, $x=\dfrac{6\pm\sqrt{0}}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+0}{2}=3 \\ \dfrac{6-0}{2}=3 \end{cases}$

Διπλή: Προκύπτει η ίδια ρίζα 2 φορές

$(x-3)^2=0 \Rightarrow (x-3)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$

• $(x+1)^3=0 \Rightarrow x=-1$ (τριπλή)

• $(x-5)^2\cdot(x+1)(x+3)^2(x+8)^3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \text{ (διπλή)} \\ x=-1 \text{ (απλή)} \\ x=-3 \text{ (διπλή)} \\ x=-8 \text{ (τριπλή)} \end{cases}$

Θέμα 2(α) / Φεβρ. 2018

$\underbrace{x=\sqrt{5}}$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{x-\sqrt{5}}_{f(x)}=0$ (NOT!) ②

$\qquad \Longrightarrow \underbrace{x^2-5}_{f(x)}=0$

$$NR: \ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad ①$$

Έστω $f(x)=x^2-5 \Longrightarrow f'(x)=2x$

$$① \Longrightarrow g(x) = x - \frac{x^2-5}{2x} = \frac{x^2+5}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{5}{2x} \Longrightarrow \ldots$$

// Βλ. Θέμα 2 Σεπτ. 2017

Β Τρόπος (noob)

Έστω $f(x)=x-\sqrt{5} \Longrightarrow f'(x)=1$ ②

$$NR: \ g(x) = x - \frac{x-\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

?

// Όταν επιλέγουμε $f(x)$ για να εφαρμόσουμε NR, πρέπει η $f(x)$ να μην είναι πολ/μο A' βαθμού, διότι στην προσέγγιση της ρίζας προκύπτει ο εαυτός της. //

Θέμα 2 / Σεπτ. 2015

// $x = 1/A \Longrightarrow \underbrace{x^2 - 1/A^2}_{f(x)} = 0$

- Έστω $f(x)=Ax-1 \Longrightarrow f'(x)=A$

$$NR: \ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{Ax-1}{A} = \frac{\cancel{Ax}-\cancel{Ax}+1}{A} = \frac{1}{A}$$

δηλ. στην προσέγγιση του $1/A$ προκύπτει ο εαυτός του, άρα η $f(x)=Ax-1$ δεν είναι κατάλληλη.

- Έστω $f(x)=x^2-1/A^2 \Longrightarrow f'(x)=2x \neq 0$

$$NR: \ g(x) = x - \frac{x^2-1/A^2}{2x} = \frac{x^2+1/A^2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2A^2x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2x^2}$$

Διάστημα Σύγκλισης

$|g'(x)| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2x^2} < 1 \Rightarrow -\frac{3}{\cancel{2}} < -\frac{1}{\cancel{2}A^2x^2} < \frac{1}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow 3A^2 > \frac{1}{x^2} > -A^2 \Rightarrow 3A^2 > \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 > \frac{1}{3A^2}$

//ισχυει

$\Rightarrow |x| > \frac{1}{A\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{A\sqrt{3}} = \frac{1}{7\sqrt{3}} \\ x < -\frac{1}{A\sqrt{3}} = \frac{-1}{7\sqrt{3}} \end{cases}$

// $(f\cdot g)' = f'g + fg'$

Επιλέγουμε $x_0 = 1 \in ΔΣ$.

1η επαν/ψη: $x_1 = g(x_0) = g(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 49} = 0.51$

2η επαν/ψη: $x_2 = g(x_1) = g(0.51) = \frac{0.51}{2} + \frac{1}{2\cdot 49\cdot 0.51} = (\ldots)$

$\rightarrow 1$

Θέμα 3.2 / Φεβρ. 2017

$f(x) = 2(x+1)(x-2)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\cdot(x-2)^2 + 2(x+1)\cdot 2(x-2)(x-2)' =$

$= 2(x-2)(x-\cancel{2}+2x+\cancel{2}) = 6x(x-2).$

NR: $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cancel{2}(x+1)(x-2)^{\cancel{2}}}{3\cancel{6}x\cancel{(x-2)}} = \frac{3x^2-(x^2-x-2)}{3x} =$

$= \frac{3x^2-x^2+x+2}{3x} = \frac{2x^2+x+2}{3x} = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3x} \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3x^2}$

Διάστημα Σύγκλισης

$|g'(x)| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{2}{3} - \frac{2}{3x^2} < 1 \Rightarrow -\frac{5}{\cancel{3}} < -\frac{2}{\cancel{3}x^2} < \frac{1}{\cancel{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{2} > \frac{1}{x^2} > -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} > \frac{1}{x^2} \Rightarrow 5x^2 > 2 \Rightarrow x^2 > \frac{2}{5}$

//ισχυει

$\Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{\frac{2}{5}} \\ x < -\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$

• Το $r_1=-1$ είναι απλή ρίζα άρα η NR συγκλίνει με $r=2$.

Επιλέγουμε $x_0=-2 \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{5}})$.

1η επαν/ψη: $x_1 = g(x_0) = g(-2) = \frac{-4}{3} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{2}{6}} = -1.33$

2η επαν/ψη: $x_2 = g(x_1) = g(-1.33) = \frac{2\cdot(-1.33)}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3(-1.33)} = (\ldots)$

// Αν η ρίζα έχει πολλ/τα k ($k=1$ απλή, $k=2$ διπλή, ...) τότε η

$$g(x) = x - k\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}$$

συγκλίνει με $r=2$. //

• Το $r_2=2$ είναι διπλή ρίζα άρα η

$$g(x) = x - 2\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}$$ συγκλίνει με $r=2$

Επιλέγουμε $x_0 = 1 \in (\sqrt{\frac{2}{5}}, +\infty)$

1η επαν/ψη: $x_1 = g(x_0) = g(1) = 1 - 2\cdot\frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - 2\cdot\frac{4}{-6} = 7/3 = 2.33$

2η επαν/ψη: $x_2 = g(x_1) = g(2.33) = 1 - 2\cdot\frac{f(2.33)}{f'(2.33)} = (\ldots)$

$$|x_1 - x_2| = |1.3701 - 1.3682| = 0.0019$$

$$|x_2 - x_3| = |1.3682 - 1.3690| = 0.0008$$

$$|x_3 - x_4| = |1.3690 - 1.3687| = 0.0003$$

Παρ/με ότι σε κάθε επαν/ψη το σφάλμα σχεδόν υποδιπλ/ται άρα έχουμε γραμμική ταχύτητα αντί για την αναμενόμενη τετραγωνική της NR. Αυτό μπορεί να συμβαίνει διότι η f(x) δεν είναι 2 φορές παρ/μη ή/και η ρίζα δεν είναι απλή.

Steffensen – Aitken: Επιταχυντικές μέθοδοι οι οποίες εφαρμόζονται σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους και μετατρέπουν τη σύγκλιση από γραμμική σε τετραγωνική (ΚΑΙ ΜΟΝΟ!).