Θέμα 3.1 / Φεβρ. 2012

_ _ _ _ _ _ $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{t=4}$ $\underbrace{\_\ \_}_{\text{εκθέτης}}$ → 00, 01, 10, 11 $\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 3\end{pmatrix}$

πρόσημο αριθμού (0: +, 1: −) πρόσημο εκθέτη

$b=2,\ t=4,\ [L,U]=[-3,3]$

$\pi=(3.1415927)_{10}$, Ακέραιο μέρος: $(3)_{10}=(11)_2$

Κλασματικό:
$0.1415927\cdot 2 = 0.2831854 \to 0$
$0.2831854\cdot 2 = 0.5663708 \to 0$
$0.5663708\cdot 2 = 1.1327416 \to 1$
0
0
1

$\pi=(11.001001\ldots)_2 = 1.1001\,001\cdot 2^{1}$, $\underbrace{1001}_{t=4}$

$001<100 \Rightarrow$

$\to fl(\pi) = 1.1001\cdot 2^1 = 1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+0\cdot 2^{-1}+0\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-3}=(3.125)_{10}$

Σχετικό Σφάλμα $= \left|\dfrac{3.1415927-3.125}{3.1415927}\right| = \ldots$

$|x_{min}| = 1.0000\cdot 2^{-3} = 1\cdot 2^{-3} = (0.125)_{10}$

$|x_{max}| = 1.1111\cdot 2^3 = 1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}=(15.5)_{10}$

Bonus: Να βρεθεί με ποιους αριθμούς μηχανής αναπαρίστανται $y=(18.5)_{10}$ και $z=(0.120)_{10}$.

01

- $y=(18.5)_{10}$ Ακέραιο μέρος: $(18)_{10}=(10010)_2$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 0 & 9 \mid 2 \\ & 1 \quad 4 \mid 2 \\ & \quad 0 \quad 2 \mid 2 \\ & \quad\quad 0 \quad 1 \mid 2 \\ & \quad\quad\quad 1 \quad 0 \end{array}$$

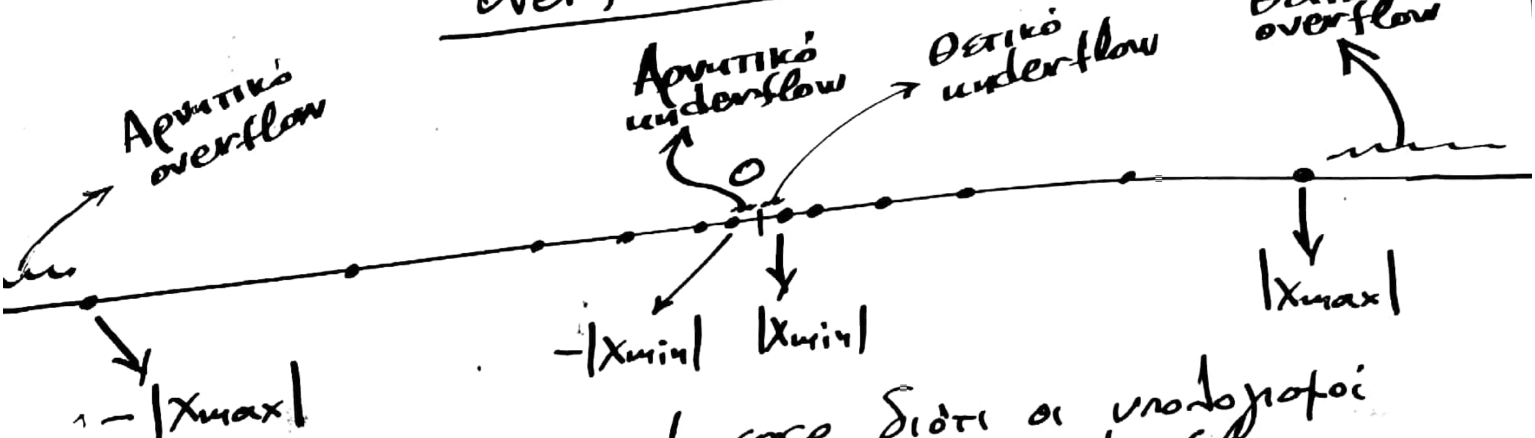
Κλασματικό: $0.5\cdot 2 = 1.0 \to 1$
$0.0\cdot 2 = 0.0 \to 0$
⋮

$y=(10010.1000\ldots)_2 = 1.00101000\cdot 2^4$, όμως $4>3=U$ άρα οι υπολογισμοί σταματούν με μήνυμα overflow.

- $z=(0.120)_{10}$ Ακέραιο μέρος: $(0)_{10}=(0)_2$ Κλασματικό: $0.120\cdot 2 = 0.240 \to 0$
$0.240\cdot 2 = 0.480 \to 0$
$0.480\cdot 2 = 0.960 \to 0$
⋮ 1
1
1

$z=(0.000111\ldots)_2 = 1.11\cdot 2^{-4}$, όμως $-4<-3=L$ άρα έχουμε underflow, δηλ. $fl(z)=0$.

Overflow – Underflow



Το overflow είναι worst case διότι οι υπολογισμοί σταματούν με μήνυμα λάθους ενώ στο underflow εκχωρείται το 0 κ οι υπολογισμοί συνεχίζονται.

Θέμα 2.2 / Φεβρ. 2013

$b=2,\ t=7,\ [L,U]=[-126,127].$

$x=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$

// Ένας αριθμός x είναι αριθμός μηχανής (δηλ. μπορεί να παρασταθεί ακριβώς στο (Σ)) αν $fl(x)=x$. //

Ακέραιο μέρος: $(1)_{10}=(1)_2$ Κλασματικό:

$\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$ (0)

$\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}$ (1)

$\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$ (0)

1

⋮

$x=(1.0101010101\ldots)_2=$

$=1.\underbrace{0101010}_{t=7}(101)\cdot 2^0 \xrightarrow{101>100}$

$\Rightarrow fl(x)=1.0101011\cdot 2^0\neq x$ άρα ο x δεν αναπαρίσταται ακριβώς στο (Σ). με καμία πεπερασμένη ακρίβεια διότι ο x είναι περιοδικός.

Θέμα 3.1 / Σεπτ. 2011

1. _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $\rightarrow$ 000 ... 111 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 7 \end{pmatrix}$

πρόσημο αριθμού, πρόσημο εκθέτη, $t=4$, εκθέτης

$b=2,\ t=4,\ [L,U]=[-7,7]$

$x=(8.6518)_{10}$ Ακέραιο μέρος: $(8)_{10}=(1000)_2$

Κλασματικό: $0.6518\cdot 2 = 1.3036 \rightarrow 1$

$0.3036\cdot 2 = 0.6072 \rightarrow 0$

$0.6072\cdot 2 = 1.2144 \rightarrow 1$

$\vdots$ 0 0 1

$x=(1000.101001\ldots)_2 =$

$= 1.\underbrace{0001}_{t=4}01001\cdot 2^3$; $0.1001 < 10000$

$\Rightarrow fl(x) = 1.0001\cdot 2^3 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^{-1} = (8.5)_{10} \neq x$: άρα ο x δεν αναπαρίσταται ακριβώς στο (Σ).

Σχετικό Σφάλμα $= \left| \dfrac{8.6518 - 8.5}{8.6518} \right| = \ldots$

2. $fl(x) = 1.0001\cdot 2^3$

Αμέσως μεγαλύτερος: $1.0010\cdot 2^3 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^0 = (9)_{10}$

Αμέσως μικρότερος: $1.0000\cdot 2^3 = 1\cdot 2^3 = (8)_{10}$

// $1.1111\cdot 2^3 \xrightarrow[\text{μεγαλύτερος}]{\text{αμέσως}} 1.0000\cdot 2^4$ (level up)

$1.0000\cdot 2^3 \xrightarrow[\text{μικρότερος}]{\text{αμέσως}} 1.1111\cdot 2^2$ (level drain)

3. Έχουμε $b=2$ δηλ. το (Σ) κερδίζει ένα bit ακρίβειας

άρα για $t=4+1=5$:

$$\varepsilon_{mach} = \frac{1}{2}\cdot 2^{1-5} = \frac{1}{32}.$$

// $b=10,\ t=3$! $\varepsilon_{mach} = \frac{1}{2}\cdot 10^{1-3} = 1/200$

ε_{mach}: Το max σχετικό σφάλμα του (Σ).

$$\boxed{\varepsilon_{mach} = \frac{1}{2}\cdot b^{1-t} \quad (\text{αν } b \neq 2)}$$

Θέμα 1 / Ιουν. 2014 $b=2$, $t=5$, $[L,U]=[-2,2]$

(α) $1.25 + \frac{2}{3}$

$x=(1.25)_{10}$ Ακέραιο μέρος: $(1)_{10}=(1)_2$

Κλασματικό: $0.25\cdot 2=0.5 \rightarrow 0$
$0.5\cdot 2=1.0 \rightarrow 1$
$0.0\cdot 2=0.0 \rightarrow 0$

$x=(1.010000\ldots)_2 = 2^0$
$= 1.\underbrace{01000}_{t=5}00\cdot 2^0 \xrightarrow{00<10} fl(x)=1.01000\cdot 2^0$

$y=\left(\frac{2}{3}\right)_{10}$ Ακέραιο μέρος: $(0)_{10}=(0)_2$

Κλασματικό: $\frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3}$ (1)
$\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3}$ (0)
1
0
⋮

$y=(0.1010101010\ldots)_2 =$
$= 1.\underbrace{01010}_{t=5}101\cdot 2^{-1} \xrightarrow{101>100} fl(y) = 1.01011\cdot 2^{-1} =$

// Ευθυγράμμιση Εκθετών: Επιλέγουμε τον μικ. εκθέτη ώς μετακινούμε αριστερά την υποδιαστολή έτσι ώστε να αποκτήσουν κοινό εκθέτη. //

$= 0.101011\cdot 2^0$ άρα:

$$\begin{array}{r} 1.01000 \\ +0.101011 \\ \hline 1.111011 \end{array}$$

$fl(x)+fl(y) = 1.\underbrace{11101}_{t=5}1\cdot 2^0 \xrightarrow[\text{R. to Ev.}]{1=1} fl(1.25+\frac{2}{3}) = 1.11110\cdot 2^0 =$

περιττό

$= 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} = 1.9375$

$$\text{Σχετικό Σφάλμα} = \left| \frac{(1.25+2/3) - 1.9375}{1.25+2/3} \right| = \ldots$$

b) $\underline{4+2^{-5}}$

$x=(4)_{10}=(100)_2=1.00000\cdot 2^{2}=fl(x)$ $\quad 2 \in [L,U]$

$y=2^{-5}=1.00000\cdot 2^{-5}$, όμως $-5<-2=L$ άρα έχουμε underflow, δηλ. $fl(y)=0$ Άρα

$$fl(4+2^{-5})=1.00000\cdot 2^{2}=(4)_{10}$$

$$\text{Σχετικό Σφάλμα}=\left|\frac{(4+2^{-5})-4}{4+2^{-5}}\right|=\ldots$$