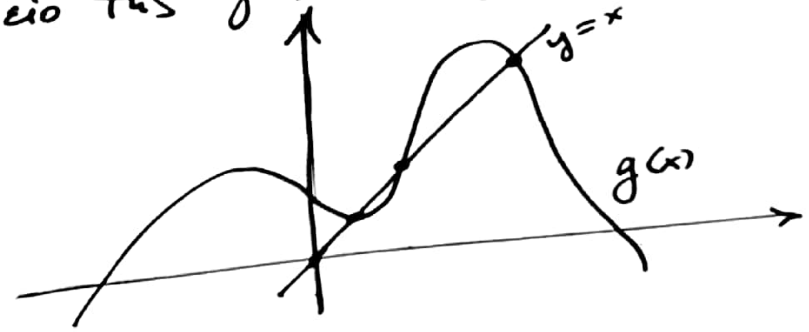
Γενική Επαναληπτική Μέθοδος

(ή: Μέθοδος Σταθερού Σημείου)

- $g(x) = x^2 - 6 \rightsquigarrow g(3) = 3^2 - 6 = 9 - 6 = 3$ άρα το 3 είναι σταθερό σημείο της $g(x)$.

- Το x_0 είναι σταθερό σημείο της $g(x)$ αν $g(x_0) = x_0$



- $f(x) = 0 \Longrightarrow \underbrace{f(x) + x}_{g(x)} = x \longrightarrow g(x) = x$

$g(x)$: Αναδιάταξη της $f(x)$, δηλ. εκεί όπου η $f(x)$ έχει ρίζες η $g(x)$ έχει σταθερά σημεία

$f(x) = 0 \Longrightarrow f^2(x) = 0 \Longrightarrow f^2(x) + 1 = 1 \Longrightarrow \underbrace{x \cdot f^2(x) + x}_{g(x)} = x \Longrightarrow g(x) = x$

$\boxed{SOS}$: Έστω x_0 σταθερό σημείο της $g(x)$.

Αν $|g'(x_0)| \geq 1$, τότε η μέθοδος αποκλίνει.

1) Αν $0 < |g'(x_0)| < 1$ τότε συγκλίνει γραμμικά ($r=1$), δηλ.

2) Αν ... σε κάθε επαν/ψη το σφάλμα σχεδόν υποδιπλ/ται.

Ταχύτητα ή Τάξη σύγκλισης

3) Αν $|g'(x_0)| = 0$ τότε συγκλίνει υπεργραμμικά ($r>1$)

3a) Αν $|g''(x_0)| \neq 0$ τότε $r=2$

3b) Αν $|g''(x_0)| = 0$, όμως $|g'''(x_0)| \neq 0$ τότε $r=3$

⋮

Θέμα 2.7 / Σεπτ. 2009

Α $g(x) = \dfrac{x^3-5}{2} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{3x^2}{2}$

$|g'(2)| = \left|\dfrac{3\cdot 4}{2}\right| = 6 \geq 1$, άρα αποκλίνει.

// $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Β $g(x) = \dfrac{x^3-19x-5}{17} \longrightarrow g'(x) = \dfrac{3x^2-19}{17}$

$|g'(2)| = \left|\dfrac{-7}{17}\right| = 7/17 < 1$ άρα συγκλίνει γραμμικά

Γ $g(x) = \dfrac{2x^3+5}{3x^2-2} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{6x^2\cdot(3x^2-2) - (2x^3+5)\cdot 6x}{(3x^2-2)^2} =$

$= \dfrac{18x^4-12x^2-12x^4-30x}{(3x^2-2)^2} = \dfrac{6x^4-12x^2-30x}{(3x^2-2)^2}$

$|g'(2)| = \left|\dfrac{-12}{100}\right| = 0.12 < 1$ άρα συγκλίνει γραμμικά

//Ανάμεσα σε 2 γραμμικές συγκλίσεις, λίγο ταχύτερη είναι αυτή με το min $|g'(x_0)|$.//

Δ $g(x) = \dfrac{x^3+19x-5}{21} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{3x^2+19}{21}$

$|g'(2)| = \left|\dfrac{12+19}{21}\right| = 31/21 \geq 1$, άρα αποκλίνει.

Άρα: Γ > Β > Α = Δ

- Γ.Ε.Μ. $x_{n+1} = g(x_n)$, $n=0,1,\dots$
- Το x_0 πρέπει να ανήκει στο Διάστημα Σύγκλισης:

$$|g'(x)| < 1.$$

Θέμα 2.4 / Φεβρ. 2013

$\varphi(x) = 2x - \frac{x^2}{4} \Longrightarrow \varphi'(x) = 2 - \frac{x}{2}$

// $\Delta = b^2 - 4a\gamma$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Σταθερά Σημεία

$\varphi(x) = x \Longrightarrow 2x - \frac{x^2}{4} = x \Longrightarrow x - \frac{x^2}{4} = 0$

$\Longrightarrow x\cdot\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

// $|x| < \delta \Rightarrow -\delta < x < \delta$

$|x| > \delta \Rightarrow \begin{cases} x > \delta \\ x < -\delta \end{cases}$

Διάστημα Σύγκλισης

$|\varphi'(x)| < 1 \Longrightarrow \left|2 - \frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow -1 < 2 - \frac{x}{2} < 1$

$\Longrightarrow -3 < -\frac{x}{2} < -1 \Longrightarrow \boxed{6 > x > 2}$

Bonus: Με κατάλληλο x_0 να γίνουν 2 επαν/ψεις.

Επιλέγουμε $x_0 = 3 \in (2,6)$

1η επαν/ψη: $x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(3) = 6 - \frac{9}{4} = 3.75$

2η επαν/ψη: $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(3.75) = 2\cdot 3.75 - \frac{3.75^2}{4} = 3.984375$

Θέμα 2 (β) / Σεπτ. 2018

$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

// $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-2}$

- $g(x) = 5/x \Longrightarrow g'(x) = -5/x^2$

$|g'(\sqrt{5})| = \left|\frac{-5}{5}\right| = 1 \geq 1$, άρα αποκλίνει

- $g(x) = 1 + x - \frac{x^2}{5} \Longrightarrow g'(x) = 1 - \frac{2x}{5}$

$|g'(\sqrt{5})| = \left|1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right| < 1$, άρα συγκλίνει γραμμικά.

Άρα ταχύτερη η $g(x) = 1 + x - \frac{x^2}{5}$.

Διάστημα Σύγκλισης

$|g'(x)| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - \frac{2x}{5} < 1 \Longrightarrow -2 < -\frac{2x}{5} < 0 \Longrightarrow 5 > x > 0$

// $\sqrt{5} = 2.2360$

Επιλέγουμε $x_0 = 1 \in (0,5)$

1η επαν/ψη: $x_1 = g(x_0) = g(1) = 2 - \frac{1}{5} = 1.8$

2η επαν/ψη: $x_2 = g(x_1) = g(1.8) = 1 + 1.8 - \frac{1.8^2}{5} = 2.152$

Θέμα 2 / Σεπτ. 2017

(a) $g(x) = \frac{4}{5}x + \frac{1}{x} \Longrightarrow g'(x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{x^2}$

$|g'(\sqrt{5})| = \left|\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right| = 3/5 < 1$, άρα συγκλίνει γραμμικά

(b) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2x} \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2}$

$|g'(\sqrt{5})| = \left|\frac{1}{2} - \frac{5}{10}\right| = 0$, άρα συγκλίνει υπεργραμμικά

(c) $g(x) = \frac{x+5}{x+1} \cdot x = \frac{x^2+5x}{x+1} \Longrightarrow g'(x) = \frac{(2x+5)(x+1) - (x^2+5x)\cdot 1}{(x+1)^2} =$

$= \frac{2x^2+7x+5-x^2-5x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}$

$|g'(\sqrt{5})| = \left|\frac{10+2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+1)^2}\right| > 1$ άρα αποκλίνει.

// $\sqrt{x^2} = |x|$

Ταχύτερη η $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2x}$

<u>Διάστημα Σύγκλισης</u>

$|g'(x)| < 1 \Longrightarrow -1 < \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2} < 1 \Longrightarrow -\frac{3}{\cancel{2}} < -\frac{5}{\cancel{2}x^2} < \frac{1}{\cancel{2}}$

$\Longrightarrow \frac{3}{5} > \frac{1}{x^2} > \frac{-1}{5} \Longrightarrow \frac{3}{5} > \frac{1}{x^2} \Longrightarrow x^2 > \frac{5}{3} \Longrightarrow$

//δεξιά: ισχύει $\forall x$

$\Longrightarrow |x| > \sqrt{\frac{5}{3}} \Longrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x < -\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$.

Επιλέγουμε $x_0 = 2 \in \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right)$

1^{η} επαν/ψη: $x_1 = g(x_0) = g(2) = \frac{2}{2} + \frac{5}{4} = 2.25$

2^{η} επαν/ψη: $x_2 = g(x_1) = g(2.25) = \frac{2.25}{2} + \frac{5}{2 \cdot 2.25} = 2.2361$