

Zápisky z cvičení NUM 2011

Matěj Novotný

25. dubna 2011

1 Diferenční vztahy pro náhrady derivací

Poznámka 1 (Taylorův rozvoj). *Nechť $g \in C^{(m)}$ na $\langle a, b \rangle$; $x \in (a, b)$; $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$. Pak je*

$$g(x + h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x) h^k + h^m \int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} g^{(m)}(x + (1-s)h) \, ds \quad (1)$$

Druhý sčítanec je Lagrangeův tvar zbytku.

Definice 1 (Landaův symbol O). *Nechť $f : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na prstencovém okolí 0 (H_0). Řekneme, že f se chová na H_0 jako h^α pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$ (značíme $f(x) = O(h^\alpha)$), právě když*

$$(\exists K > 0)(\forall h \in H_0 - \{0\}) \left(\left| \frac{f(h)}{h^\alpha} \right| < K \right) \quad (2)$$

Poznámka 2. *Chyba aproximace závisí na h .*

Věta 1. *Nechť $g \in C^{(2)}$ na $\langle a, b \rangle$; $x \in (a, b)$; $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$. Pak*

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= g'(x) + O(h) && \text{(dopředná diference)} \\ \frac{g(x) - g(x-h)}{h} &= g'(x) + O(h) && \text{(zpětná diference)} \end{aligned}$$

Důkaz. V Taylorově rozvoji (1) použijeme $m = 2$.

$$g(x+h) = g(x)h^0 + g'(x)h + h^2 \int_0^1 \frac{1}{2!} s^1 g^{(2)}(x + (1-s)h) \, ds$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) + h \int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1-s)h) \, ds$$

Je poslední člen roven $O(h)$? $g \in C^{(2)}(\langle a, b \rangle) \implies g^{(2)} \in C(\langle a, b \rangle)$, tj. $g^{(2)}$ je spojitá na $\langle a, b \rangle \implies g^{(2)}$ je omezená na $\langle a, b \rangle \implies g^{(2)}(x) < K$ na $\langle a, b \rangle$.

$$\frac{1}{2} \int_0^1 s g^{(2)}(x + (1-s)h) \, ds \leq \frac{1}{2} \int_0^1 s K \, ds = \frac{K}{2} \int_0^1 s \, ds = \frac{K}{4}$$

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| = h \left| \int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1-s)h) \, ds \right| \leq h \frac{K}{4}$$

$$\frac{\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right|}{|h|} \leq \frac{K}{4} \implies \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) = O(h)$$

Druhý vzorec se dokáže úplně stejně až na znaménko $-$. □

Věta 2. *Nechť $g \in C^{(3)}(\langle a, b \rangle)$; $x \in (a, b)$; $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$. Pak*

$$\frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} = g'(x) + O(h^2)$$

Důkaz.

$$g(x \pm h) = g(x) \pm h g'(x) + h^2 \int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x \pm (1-s)h) \, ds$$

$$\begin{aligned}
g(x+h) - g(x-h) &= g(x) + hg'(x) + \frac{h^2}{2} \int_0^1 sg^{(2)}(x + (1-s)h) \, ds - \\
&\quad - (g(x) - hg'(x) + \frac{h^2}{2} \int_0^1 sg^{(2)}(x - (1-s)h) \, ds) = \\
&= 2hg'(x) + \frac{h^2}{2} \int_0^1 s [g^{(2)}(x + (s-1)h) - g^{(2)}(x - (1-s)h)] \, ds \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} - g'(x) \right| = \frac{h}{4} \left| \int_0^1 \dots \, ds \right| \leq h \frac{K}{4}$$

To znamená, že zbytek je $O(h)$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce ($\exists \xi : g(a) - g(b) = g'(\xi)(a - b)$):

$$\begin{aligned}
\exists \xi &= \xi(s, x, h); \quad \xi \in (x - (1-s)h, x + (1-s)h) \subset \langle a, b \rangle \\
g^{(2)}(x + (1-s)h) - g^{(2)}(x - (1-s)h) &= g^{(3)}(\xi)(x + (1-s)h - x + (1-s)h) = \\
&= g^{(3)}(\xi)2(1-s)h
\end{aligned}$$

Dosadíme do integrálu (3):

$$\int_0^1 sg^{(3)}(\xi)2(1-s)h \, ds = 2h \int_0^1 g^{(3)}(\xi)s(1-s) \, ds$$

$g^{(3)}$ je spojitá \implies je omezená na $\langle a, b \rangle$

$$2h \left| \int_0^1 g^{(3)}(\xi)s(1-s) \, ds \right| \leq 2hK \left| \int_0^1 s(1-s) \, ds \right| \leq Kh$$

Po dosazení do (2) dostávám tvrzení věty. □

Poznámka 3. *Vynechávám domácí úkol a nějaké povídání k němu. Tady najdete zadání.*

2 Numerické řešení ODR s počáteční podmínkou

Máme problém

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

Snažíme se nalézt vztah tvaru

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + \Delta y(x_0)$$

Člen $y(x_0)$ označíme y_0 .

Máme teoretickou možnost použít Taylorova rozvoje

$$\Delta y_0 = y(x_0 + h) - y(x_0) = hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \dots$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned}y''(x_0) &= f'(x_0, y(x_0)) = \partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) = \\ &= \partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

$$\Delta y_0 = h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} (\partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0))$$

Tato metoda má složité vzorce a špatnou stabilitu.

2.1 Runge-Kuttovy metody

Navrhujeme Δy_0 ve tvaru

$$\Delta y_0 = p_1 k_1(h) + p_2 k_2(h) + \dots + p_n k_n(h)$$

kde

$$\begin{aligned}
k_1(h) &= hf(x_0, y_0) \\
k_2(h) &= hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1(h)) \\
k_3(h) &= hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)) \\
&\vdots \\
k_n(h) &= hf(x_0 + \alpha_n h, y_0 + \beta_{n1} k_1(h) + \cdots + \beta_{n,n-1} k_{n-1}(h))
\end{aligned}$$

Sem Matěj doplní zápisky z druhého cvičení.

2.2 Mexsonova metoda

1.

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf_0 \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{3}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{6}\right) \\
k_4 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_3}{8}\right) \\
k_5 &= hf\left(x_0 + h, y_0 + \frac{k_1}{2} - \frac{3k_3}{2} + 2k_4\right)
\end{aligned}$$

2. Chyba:

$$e = \frac{1}{3} \left| \frac{k_1}{5} - \frac{9k_3}{10} + \frac{4k_4}{5} - \frac{k_5}{10} \right|$$

3. Pokud $e < \varepsilon$, $y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5)$

4.

$$h := h \frac{4}{5} \left(\frac{\varepsilon}{e} \right)^{\frac{4}{5}}$$

Druhý úkol je taktéž na webu.

$$\begin{aligned} -(p(x)y')' + q(x)y &= f(x) \text{ na } (a, b) \\ y(a) &= \gamma_1 \\ y(b) &= \gamma_2 \\ y &= y(x) \end{aligned}$$

Zavedeme numerickou síť

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_h &= \{a + jh | j \in \widehat{m_0}\} \\ \omega_h &= \{a + jh | j \in \widehat{m-1}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(pu_{\overline{x}})_x + qu &= f \text{ na } \omega_k; \quad u_0 = \gamma_1, \quad u_m = \gamma_2 \\ u_{\overline{x}_i} &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{zpětná diference} \end{aligned}$$

Hledáme přesnost aproximace

$$\psi = L_h(P_h y) - P_h(L_y).$$

P_h je projekce funkcí definovaných na (a, b) do funkcí definovaných na síti $\overline{\omega}_h$.

$$\begin{aligned} \psi &= -(p(P_h y)_{\overline{x}})_x + qP_h y - f - P_h(-(py')' + qy - f) \\ \psi_j &= -(p(P_h y)_{\overline{x}})_x - P_h(-(py')') \rightarrow O(h) \\ -\frac{1}{h} \left(p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + qu_i &= f_i \text{ na } \omega_h \\ u_0 &= \gamma_1; \quad u_m = \gamma_2 \\ p_{i \pm \frac{1}{2}} &= p \left(a + \left(i \pm \frac{1}{2} \right) h \right) \rightarrow O(h^2) \end{aligned}$$

$$1. \quad \begin{array}{c} p_i \qquad \qquad p_{i+1} \\ | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ \hline i-1 \qquad \qquad i \qquad \qquad i+1 \end{array}$$

$$(pu_{\bar{x}})_x = \frac{(pu_{\bar{x}})_{i+1} - (pu_{\bar{x}})_i}{h} = \frac{1}{h^2}(p_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - p_i(u_i - u_{i-1}))$$

$$2. \quad \begin{array}{c} p_{i-1} \qquad \qquad p_{i-\frac{1}{2}} \qquad \qquad p_i \qquad \qquad p_{i+\frac{1}{2}} \qquad \qquad p_{i+1} \\ u_{i-1} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad u_i \qquad \qquad \qquad \qquad u_{i+1} \\ | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ \hline i-1 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad i \qquad \qquad \qquad \qquad i+1 \end{array}$$

$$(pu')' \approx \frac{pu'|_{i+\frac{1}{2}} - pu'|_{i-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{1}{h^2}(p_{i+\frac{1}{2}}(y_{i+1} - y_i) - p_{i-\frac{1}{2}}(y_i - y_{i-1}))$$

$$p_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_i + p_{i+1})$$

$$p_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_i + p_{i-1})$$

Máme úlohu $-(py')' + qy = F(y)$ na (a, b) , $y(a) = \gamma_1$, $y(b) = \gamma_2$, $F(0) = 0$, $g \geq 0$, F omezená, lipschitzovská.

Použijeme 1. schéma:

$$-\frac{1}{h} \left(p_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + q_i u_i = F(u_i), \quad i \in \widehat{m-1}$$

Maticový zápis:

$$\mathbb{A}_h u = \mathbb{F}(u) + \varphi_h \quad \mathbb{A}_h \in \mathbb{R}^{m-1, m-1}; \quad \varphi_h \in \mathbb{R}^{m-1}; \quad \mathbb{F}(n) \in \mathbb{R}^{m-1}$$