Zápisky z cvičení NUM 2011

Matěj Novotný

6. dubna 2011

1 Diferenční vztahy pro náhrady derivací

Poznámka 1 (Taylorův rozvoj). *Nechť $g \in C^{(m)}$ na $\langle a, b\rangle$; $x \in (a, b)$; $0 < h < min\{x - a, b - x\}$. Pak je*

$$g(x+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x) h^k + h^m \int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} g^{(m)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s \qquad (1)$$

Druhý sčítanec je Lagrangeův tvar zbytku.

Definice 1 (Landaův symbol O). *Nechť $f : H_0 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na prstencovém okolí 0 (H_0). Řekneme, že f se chová na H_0 jako h^α pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$ (značíme $f(x) = O(h^\alpha)$), právě když*

$$(\exists K > 0)(\forall h \in H_0 - \{0\}) \left(\left| \frac{f(h)}{h^\alpha} \right| < K \right) \qquad (2)$$

Poznámka 2. *Chyba aproximace závisí na h.*

Věta 1. *Nechť $g \in C^{(2)}$ na $\langle a, b\rangle$; $x \in (a, b)$; $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$. Pak*

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) + O(h) \quad \textit{(dopředná diference)}$$
$$\frac{g(x) - g(x-h)}{h} = g'(x) + O(h) \quad \textit{(zpětná diference)}$$

Důkaz. V Taylorově rozvoji (1) použijeme $m = 2$.

$$g(x+h) = g(x)h^0 + g'(x)h + h^2 \int_0^1 \frac{1}{2!} s^1 g^{(2)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) + h \int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s$$

Je poslední člen roven $O(h)$? $g \in C^{(2)}(\langle a,b\rangle) \implies g^{(2)} \in C(\langle a,b\rangle)$, tj. $g^{(2)}$ je spojitá na $\langle a,b\rangle \implies g^{(2)}$ je omezená na $\langle a,b\rangle \implies g^{(2)}(x) < K$ na $\langle a,b\rangle$.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 s g^{(2)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{2}\int_0^1 sK\,\mathrm{d}s = \frac{K}{2}\int_0^1 s\,\mathrm{d}s = \frac{K}{4}$$

$$\left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x)\right| = h \left|\int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s\right| \leq h\frac{K}{4}$$

$$\frac{\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x)\right|}{|h|} \leq \frac{K}{4} \implies \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) = O(h)$$

Druhý vzorec se dokáže úplně stejně až na znaménko $-$. $\square$

Věta 2. *Nechť $g \in C^{(3)}(\langle a,b\rangle)$; $x \in (a,b)$; $0 < h < \min\{x-a, b-x\}$. Pak*

$$\frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} = g'(x) + O(h^2)$$

Důkaz.

$$g(x \pm h) = g(x) \pm hg'(x) + h^2 \int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x \pm (1-s)h)\,\mathrm{d}s$$

$$g(x+h) - g(x-h) = g(x) + hg'(x) + \frac{h^2}{2}\int\limits_0^1 sg^{(2)}(x+(1-s)h)\,\mathrm{d}s -$$

$$-(g(x) - hg'(x) + \frac{h^2}{2}\int\limits_0^1 sg^{(2)}(x-(1-s)h)\,\mathrm{d}s) =$$

$$= 2hg'(x) + \frac{h^2}{2}\int\limits_0^1 s\left[g^{(2)}(x+(s-1)h) - g^{(2)}(x-(1-s)h)\right]\,\mathrm{d}s \qquad (3)$$

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h} - g'(x)\right| = \frac{h}{4}\left|\int\limits_0^1 \dots\,\mathrm{d}s\right| \leq h\frac{K}{4}$$

To znamená, že zbytek je $O(h)$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce ($\exists \xi : g(a) - g(b) = g'(\xi)(a-b)$):

$$\exists \xi = \xi(s,x,h);\ \xi \in (x-(1-s)h, s+(1-s)h) \subset \langle a,b\rangle$$

$$g^{(2)}(x+(1-s)h) - g^{(2)}(x-(1-s)h) = g^{(3)}(\xi)(x+(1-s)h-x+(1-s)h) =$$
$$= g^{(3)}(\xi)2(1-s)h$$

Dosadíme do integrálu (3):

$$\int\limits_0^1 sg^{(3)}(\xi)2(1-s)h\,\mathrm{d}s = 2h\int\limits_0^1 g^{(3)}(\xi)s(1-s)\,\mathrm{d}s$$

$g^{(3)}$ je spojitá $\implies$ je omezená na $\langle a,b\rangle$

$$2h\left|\int\limits_0^1 g^{(3)}(\xi)s(s-s)\,\mathrm{d}s\right| \leq 2hK\left|\int\limits_0^1 s(s-s)\,\mathrm{d}s\right| \leq Kh$$

Po dosazení do (2) dostávám tvrzení věty. □

Poznámka 3. *Vynechávám domácí úkol a nějaké povídání k němu. Tady najdete zadání.*

2 Numerické řešení ODR s počáteční podmínkou

Máme problém

$$y'(x) = f(x, y(x))$$
$$y(x_0) = y_0$$

Snažíme se nalézt vztah tvaru

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + \Delta y(x_0)$$

Člen $y(x_0)$ označíme y_0.
Máme teoretickou možnost použít Taylorova rozvoje

$$\Delta y_0 = y(x + h) - y(x_0) = hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \cdots$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$y''(x_0) = f'(x_0, y(x_0)) = \partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) =$$
$$= \partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0)$$

$$\Delta y_0 = h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left(\partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0)\right)$$

Tato metoda má složité vzorce a špatnou stabilitu.

2.1 Runge-Kuttovy metody

Navrhujeme Δy_0 ve tvaru

$$\Delta y_0 = p_1 k_1(h) + p_2 k_2(h) + \cdots + p_n k_n(h)$$

kde

$$
\begin{aligned}
k_1(h) &= hf(x_0, y_0) \\
k_2(h) &= hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1(h)) \\
k_3(h) &= hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)) \\
&\vdots \\
k_n(h) &= hf(x_0 + \alpha_n h, y_0 + \beta_{n1} k_1(h) + \cdots + \beta_{n,n-1} k_{n-1}(h))
\end{aligned}
$$

Sem Matěj doplní zápisky z druhého cvičení.

2.2 Mexsonova metoda

1.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf_0 \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{3},\ y_0 + \frac{k_1}{3}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{3},\ y_0 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{6}\right) \\
k_4 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_3}{8}\right) \\
k_5 &= hf\left(x_0 + h,\ y_0 + \frac{k_1}{2} - \frac{3k_3}{2} + 2k_4\right)
\end{aligned}
$$

2. Chyba:

$$
e = \frac{1}{3}\left|\frac{k_1}{5} - \frac{9k_3}{10} + \frac{4k_4}{5} - \frac{k_5}{10}\right|
$$

3. Pokud $e < \varepsilon,\ y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5)$

4.

$$
h := h\frac{4}{5}\left(\frac{\varepsilon}{e}\right)^{\frac{4}{5}}
$$

Druhý úkol je taktéž na webu.

$$\begin{aligned} -(p(x)y')' + q(x)y &= f(x) \text{ na } (a,b) \\ y(a) &= \gamma_1 \\ y(b) &= \gamma_2 \\ y &= y(x) \end{aligned}$$

Zavedeme numerickou síť

$$\begin{aligned} \overline{\omega_h} &= \{a + jh | j \in \widehat{m_0}\} \\ \omega_h &= \{a + jh | j \in \widehat{m-1}\}. \end{aligned}$$

$$-(pu_{\overline{x}})_x + qu = f \text{ na } \omega_k;\ u_0 = \gamma_1,\ u_m = \gamma_2$$

$$u_{\overline{x_i}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{zpětná diference}$$

Hledáme přesnost aproximace

$$\psi = L_h(P_h y) - P_h(L_y).$$

P_h je projekce funkcí definovaných na (a,b) do funkcí definovaných na síti $\overline{\omega_h}$.

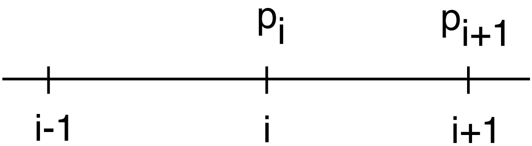
$$\begin{aligned} \psi &= -(p(P_h y)_{\overline{x}})_x + qP_h y - f - P_h(-(py')' + qy - f) \\ \psi_j &= -(p(P_h y)_{\overline{x}})_x - P_h(-(py')') \quad \to O(h) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{h}\left(p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right) + qu_i = f_i \text{ na } \omega_h$$

$$u_0 = \gamma_1;\ u_m = \gamma_2$$

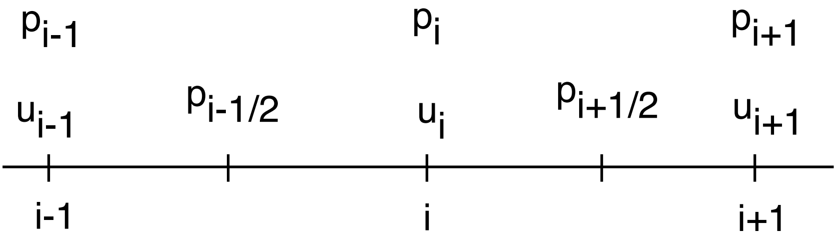
$$p_{i\pm\frac{1}{2}} = p\left(a + \left(i \pm \frac{1}{2}\right)h\right) \quad \to O(h^2)$$

1.



$$(pu_{\overline{x}})_x = \frac{(pu_{\overline{x}})_{i+1} - (pu_{\overline{x}})_i}{h} = \frac{1}{h^2}(p_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - p_i(u_i - u_{i-1}))$$

2.



$$(pu')' \approx \frac{pu'|_{i+\frac{1}{2}} - pu'|_{i-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{1}{h^2}(p_{i+\frac{1}{2}}(y_{i+1} - y_i) - p_{i-\frac{1}{2}}(y_i - y_{i-1}))$$

$$p_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_i + p_{i+1})$$
$$p_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_i + p_{i-1})$$