Zápisky z cvičení NUM 2011

Matěj Novotný

10. března 2011

1 Diferenční vztahy pro náhrady derivací

Poznámka 1 (Taylorův rozvoj). *Nechť* $g \in C^{(m)}$ *na* $\langle a, b\rangle$; $x \in (a, b)$; $0 < h < min\{x - a, b - x\}$. *Pak je*

$$g(x+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x) h^k + h^m \int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} g^{(m)}(x + (1-s)h) \,\mathrm{d}s \qquad (1)$$

Druhý sčítanec je Lagrangeův tvar zbytku.

Definice 1 (Landaův symbol O). *Nechť* $f : H_0 \to \mathbb{R}$ *je funkce definovaná na prstencovém okolí 0* (H_0). *Řekneme, že* f *se chová na* H_0 *jako* h^α *pro nějaké* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(značíme* $f(x) = O(h^\alpha)$*), právě když*

$$(\exists K > 0)(\forall h \in H_0 - \{0\}) \left(\left| \frac{f(h)}{h^\alpha} \right| < K \right) \qquad (2)$$

Poznámka 2. *Chyba aproximace závisí na h.*

Věta 1. *Nechť* $g \in C^{(2)}$ *na* $\langle a, b\rangle$; $x \in (a, b)$; $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$. *Pak*

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) + O(h) \quad \textit{(dopředná diference)}$$

$$\frac{g(x) - g(x-h)}{h} = g'(x) + O(h) \quad \textit{(zpětná diference)}$$

Důkaz. V Taylorově rozvoji (1) použijeme $m = 2$.

$$g(x+h) = g(x)h^0 + g'(x)h + h^2 \int\limits_0^1 \frac{1}{2!} s^1 g^{(2)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) + h \int\limits_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s$$

Je poslední člen roven $O(h)$? $g \in C^{(2)}(\langle a, b\rangle) \implies g^{(2)} \in C(\langle a, b\rangle)$, tj. $g^{(2)}$ je spojitá na $\langle a, b\rangle \implies g^{(2)}$ je omezená na $\langle a, b\rangle \implies g^{(2)}(x) < K$ na $\langle a, b\rangle$.

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^1 s g^{(2)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^1 sK\,\mathrm{d}s = \frac{K}{2} \int\limits_0^1 s\,\mathrm{d}s = \frac{K}{4}$$

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| = h \left| \int\limits_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1-s)h)\,\mathrm{d}s \right| \leq h \frac{K}{4}$$

$$\frac{\left| \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x) \right|}{|h|} \leq \frac{K}{4} \implies \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) = O(h)$$

Druhý vzorec se dokáže úplně stejně až na znaménko $-$. $\square$

Věta 2. *Nechť* $g \in C^{(3)}(\langle a, b\rangle)$; $x \in (a, b)$; $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$. *Pak*

$$\frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} = g'(x) + O(h^2)$$

Důkaz.

$$g(x \pm h) = g(x) \pm hg'(x) + h^2 \int\limits_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x \pm (1-s)h)\,\mathrm{d}s$$

$$g(x+h)-g(x-h)=g(x)+hg'(x)+\frac{h^2}{2}\int\limits_0^1 sg^{(2)}(x+(1-s)h)\,\mathrm{d}s-$$

$$-(g(x)-hg'(x)+\frac{h^2}{2}\int\limits_0^1 sg^{(2)}(x-(1-s)h)\,\mathrm{d}s)=$$

$$=2hg'(x)+\frac{h^2}{2}\int\limits_0^1 s\left[g^{(2)}(x+(s-1)h)-g^{(2)}(x-(1-s)h)\right]\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}-g'(x)\right|=\frac{h}{4}\left|\int\limits_0^1 \ldots\,\mathrm{d}s\right|\le h\frac{K}{4}$$

To znamená, že zbytek je $O(h)$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce ($\exists\xi: g(a)-g(b)=g'(\xi)(a-b)$):

$$\exists\xi=\xi(s,x,h);\ \xi\in(x-(1-s)h,s+(1-s)h)\subset\langle a,b\rangle$$

$$g^{(2)}(x+(1-s)h)-g^{(2)}(x-(1-s)h)=g^{(3)}(\xi)(x+(1-s)h-x+(1-s)h)=$$
$$=g^{(3)}(\xi)2(1-s)h$$

Dosadíme do integrálu (3):

$$\int\limits_0^1 sg^{(3)}(\xi)2(1-s)h\,\mathrm{d}s=2h\int\limits_0^1 g^{(3)}(\xi)s(1-s)\,\mathrm{d}s$$

$g^{(3)}$ je spojitá $\implies$ je omezená na $\langle a,b\rangle$

$$2h\left|\int\limits_0^1 g^{(3)}(\xi)s(s-s)\,\mathrm{d}s\right|\le 2hK\left|\int\limits_0^1 s(s-s)\,\mathrm{d}s\right|\le Kh$$

Po dosazení do (2) dostávám tvrzení věty. □

Poznámka 3. *Vynechávám domácí úkol a nějaké povídání k němu. Tady najdete zadání.*