Zápisky z cvičení NUM 2011

Matěj Novotný

10. března 2011

1 Diferenční vztahy pro náhrady derivací

Poznámka 1 (Taylorův rozvoj)**.** *Nechť $g \in C^{(m)}$ na $\langle a, b\rangle$; $x \in (a, b)$; $0 < h < min\{x - a, b - x\}$. Pak je*

$$g(x + h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x)h^k + h^m \int\limits_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} g^{(m)}(x + (1 - s)h) \, \mathrm{d}s \tag{1}$$

Druhý sčítanec je Lagrangeův tvar zbytku.

Definice 1 (Landaův symbol O)**.** *Nechť $f : H_0 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na prstencovém okolí 0 (H_0). Řekneme, že f se chová na H_0 jako h^α pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$ (značíme $f(x) = O(h^\alpha)$), právě když*

$$(\exists K > 0)(\forall h \in H_0 - \{0\}) \left(\left| \frac{f(h)}{h^\alpha} \right| < K \right) \tag{2}$$

Poznámka 2. *Chyba aproximace závisí na h.*

Věta 1. *Nechť $g \in C^{(2)}$ na $\langle a, b\rangle$; $x \in (a, b)$; $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$. Pak*

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = g'(x) + O(h) \quad \textit{(dopředná diference)}$$

$$\frac{g(x) - g(x - h)}{h} = g'(x) + O(h) \quad \textit{(zpětná diference)}$$

Důkaz. V Taylorově rozvoji (1) použijeme $m = 2$.

$$g(x + h) = g(x)h^0 + g'(x)h + h^2 \int\limits_0^1 \frac{1}{2!} s^1 g^{(2)}(x + (1 - s)h) \, \mathrm{d}s$$

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = g'(x) + h \int\limits_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1 - s)h) \, \mathrm{d}s$$

Je poslední člen roven $O(h)$? $g \in C^{(2)}(\langle a,b\rangle) \implies g^{(2)} \in C(\langle a,b\rangle)$, tj. $g^{(2)}$ je spojitá na $\langle a,b\rangle \implies g^{(2)}$ je omezená na $\langle a,b\rangle \implies g^{(2)}(x) < K$ na $\langle a,b\rangle$.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 sg^{(2)}(x+(1-s)h)\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{2}\int_0^1 sK\,\mathrm{d}s = \frac{K}{2}\int_0^1 s\,\mathrm{d}s = \frac{K}{4}$$

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x)\right| = h\left|\int_0^1 \frac{1}{2}sg^{(2)}(x+(1-s)h)\,\mathrm{d}s\right| \le h\frac{K}{4}$$

$$\frac{\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x)\right|}{|h|} \le \frac{K}{4} \implies \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x) = O(h)$$

Druhý vzorec se dokáže úplně stejně až na znaménko $-$. □

Věta 2. *Nechť* $g \in C^{(3)}(\langle a,b\rangle)$; $x \in (a,b)$; $0 < h < \min\{x-a, b-x\}$. *Pak*

$$\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h} = g'(x) + O(h^2)$$

Důkaz.

$$g(x\pm h) = g(x) \pm hg'(x) + h^2\int_0^1 \frac{1}{2}sg^{(2)}(x\pm(1-s)h)\,\mathrm{d}s$$

$$g(x+h)-g(x-h) = g(x) + hg'(x) + \frac{h^2}{2}\int_0^1 sg^{(2)}(x+(1-s)h)\,\mathrm{d}s -$$

$$-(g(x) - hg'(x) + \frac{h^2}{2}\int_0^1 sg^{(2)}(x-(1-s)h)\,\mathrm{d}s) =$$

$$= 2hg'(x) + \frac{h^2}{2}\int_0^1 s\left[g^{(2)}(x+(s-1)h) - g^{(2)}(x-(1-s)h)\right]\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h} - g'(x)\right| = \frac{h}{4}\left|\int_0^1 \dots\,\mathrm{d}s\right| \le h\frac{K}{4}$$

To znamená, že zbytek je $O(h)$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce ($\exists\xi$: $g(a)-g(b) = g'(\xi)(a-b)$):

$$\exists\xi = \xi(s,x,h);\ \xi \in (x-(1-s)h, s+(1-s)h) \subset \langle a,b\rangle$$

$$g^{(2)}(x+(1-s)h) - g^{(2)}(x-(1-s)h) = g^{(3)}(\xi)(x+(1-s)h-x+(1-s)h) =$$
$$= g^{(3)}(\xi)2(1-s)h$$

Dosadíme do integrálu (3):

$$\int\limits_0^1 s g^{(3)}(\xi) 2(1-s)h \,\mathrm{d}s = 2h \int\limits_0^1 g^{(3)}(\xi) s(1-s) \,\mathrm{d}s$$

$g^{(3)}$ je spojitá $\implies$ je omezená na $\langle a, b\rangle$

$$2h \left| \int\limits_0^1 g^{(3)}(\xi) s(s-s) \,\mathrm{d}s \right| \leq 2hK \left| \int\limits_0^1 s(s-s) \,\mathrm{d}s \right| \leq Kh$$

Po dosazení do (2) dostávám tvrzení věty. $\square$

Poznámka 3. *Vynechávám domácí úkol a nějaké povídání k němu. Tady najdete zadání.*