

# Zápisky z cvičení NUM 2011

Matěj Novotný

25. dubna 2011

## 1 Diferenční vztahy pro náhrady derivací

**Poznámka 1** (Taylorův rozvoj). *Nechť  $g \in C^{(m)}$  na  $\langle a, b \rangle$ ;  $x \in (a, b)$ ;  $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$ . Pak je*

$$g(x+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x) h^k + h^m \int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} g^{(m)}(x + (1-s)h) ds \quad (1)$$

*Druhý sčítanec je Lagrangeův tvar zbytku.*

**Definice 1** (Landaův symbol  $O$ ). *Nechť  $f : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce definovaná na prstencovém okolí  $0$  ( $H_0$ ). Řekneme, že  $f$  se chová na  $H_0$  jako  $h^\alpha$  pro nějaké  $\alpha \in \mathbb{R}$  (značíme  $f(x) = O(h^\alpha)$ ), právě když*

$$(\exists K > 0)(\forall h \in H_0 - \{0\}) \left( \left| \frac{f(h)}{h^\alpha} \right| < K \right) \quad (2)$$

**Poznámka 2.** *Chyba aproximace závisí na  $h$ .*

**Věta 1.** *Nechť  $g \in C^{(2)}$  na  $\langle a, b \rangle$ ;  $x \in (a, b)$ ;  $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$ . Pak*

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= g'(x) + O(h) && \text{(dopředná difference)} \\ \frac{g(x) - g(x-h)}{h} &= g'(x) + O(h) && \text{(zpětná difference)} \end{aligned}$$

*Důkaz.* V Taylorově rozvoji (1) použijeme  $m = 2$ .

$$\begin{aligned} g(x+h) &= g(x)h^0 + g'(x)h + h^2 \int_0^1 \frac{1}{2!} s^1 g^{(2)}(x + (1-s)h) ds \\ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= g'(x) + h \int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1-s)h) ds \end{aligned}$$

Je poslední člen roven  $O(h)$ ?  $g \in C^{(2)}(\langle a, b \rangle) \implies g^{(2)} \in C(\langle a, b \rangle)$ , tj.  $g^{(2)}$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle \implies g^{(2)}$  je omezená na  $\langle a, b \rangle \implies g^{(2)}(x) < K$  na  $\langle a, b \rangle$ .

$$\frac{1}{2} \int_0^1 s g^{(2)}(x + (1-s)h) ds \leq \frac{1}{2} \int_0^1 s K ds = \frac{K}{2} \int_0^1 s ds = \frac{K}{4}$$

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| = h \left| \int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x + (1-s)h) ds \right| \leq h \frac{K}{4}$$

$$\frac{\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right|}{|h|} \leq \frac{K}{4} \implies \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) = O(h)$$

Druhý vzorec se dokáže úplně stejně až na znaménko  $-$ . □

**Věta 2.** *Nechť  $g \in C^{(3)}(\langle a, b \rangle)$ ;  $x \in (a, b)$ ;  $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$ . Pak*

$$\frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} = g'(x) + O(h^2)$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} g(x \pm h) &= g(x) \pm h g'(x) + h^2 \int_0^1 \frac{1}{2} s g^{(2)}(x \pm (1-s)h) ds \\ g(x+h) - g(x-h) &= g(x) + h g'(x) + \frac{h^2}{2} \int_0^1 s g^{(2)}(x + (1-s)h) ds - \\ &\quad - (g(x) - h g'(x) + \frac{h^2}{2} \int_0^1 s g^{(2)}(x - (1-s)h) ds) = \\ &= 2h g'(x) + \frac{h^2}{2} \int_0^1 s [g^{(2)}(x + (s-1)h) - g^{(2)}(x - (1-s)h)] ds \quad (3) \\ \left| \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} - g'(x) \right| &= \frac{h}{4} \left| \int_0^1 \dots ds \right| \leq h \frac{K}{4} \end{aligned}$$

To znamená, že zbytek je  $O(h)$ . Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce ( $\exists \xi : g(a) - g(b) = g'(\xi)(a - b)$ ):

$$\exists \xi = \xi(s, x, h); \quad \xi \in (x - (1-s)h, x + (1-s)h) \subset \langle a, b \rangle$$

$$\begin{aligned} g^{(2)}(x + (1-s)h) - g^{(2)}(x - (1-s)h) &= g^{(3)}(\xi)(x + (1-s)h - x + (1-s)h) = \\ &= g^{(3)}(\xi)2(1-s)h \end{aligned}$$

Dosadíme do integrálu (3):

$$\int_0^1 s g^{(3)}(\xi) 2(1-s)h \, ds = 2h \int_0^1 g^{(3)}(\xi) s(1-s) \, ds$$

$g^{(3)}$  je spojitá  $\implies$  je omezená na  $\langle a, b \rangle$

$$2h \left| \int_0^1 g^{(3)}(\xi) s(s-s) \, ds \right| \leq 2hK \left| \int_0^1 s(s-s) \, ds \right| \leq Kh$$

Po dosazení do (2) dostávám tvrzení věty. □

**Poznámka 3.** *Vynechávám domácí úkol a nějaké povídání k němu. Tady najdete zadání.*

## 2 Numerické řešení ODR s počáteční podmínkou

Máme problém

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Snažíme se nalézt vztah tvaru

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + \Delta y(x_0)$$

Člen  $y(x_0)$  označíme  $y_0$ .

Máme teoretickou možnost použít Taylorova rozvoje

$$\Delta y_0 = y(x_0 + h) - y(x_0) = hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \dots$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} y''(x_0) &= f'(x_0, y(x_0)) = \partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) = \\ &= \partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\Delta y_0 = h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} (\partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0))$$

Tato metoda má složité vzorce a špatnou stabilitu.

### 2.1 Runge-Kuttovy metody

Navrhujeme  $\Delta y_0$  ve tvaru

$$\Delta y_0 = p_1 k_1(h) + p_2 k_2(h) + \dots + p_n k_n(h)$$

kde

$$\begin{aligned}
k_1(h) &= hf(x_0, y_0) \\
k_2(h) &= hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1(h)) \\
k_3(h) &= hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)) \\
&\vdots \\
k_n(h) &= hf(x_0 + \alpha_n h, y_0 + \beta_{n1} k_1(h) + \cdots + \beta_{n,n-1} k_{n-1}(h))
\end{aligned}$$

Sem Matěj doplní zápisky z druhého cvičení.

## 2.2 Mexsonova metoda

1.

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf_0 \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{3}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{6}\right) \\
k_4 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_3}{8}\right) \\
k_5 &= hf\left(x_0 + h, y_0 + \frac{k_1}{2} - \frac{3k_3}{2} + 2k_4\right)
\end{aligned}$$

2. Chyba:

$$e = \frac{1}{3} \left| \frac{k_1}{5} - \frac{9k_3}{10} + \frac{4k_4}{5} - \frac{k_5}{10} \right|$$

3. Pokud  $e < \varepsilon$ ,  $y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5)$

4.

$$h := h \frac{4}{5} \left( \frac{\varepsilon}{e} \right)^{\frac{4}{5}}$$

Druhý úkol je taktéž na webu.

$$\begin{aligned}
-(p(x)y')' + q(x)y &= f(x) \text{ na } (a, b) \\
y(a) &= \gamma_1 \\
y(b) &= \gamma_2 \\
y &= y(x)
\end{aligned}$$

Zavedeme numerickou síť

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_h &= \{a + jh | j \in \widehat{m_0}\} \\
\omega_h &= \{a + jh | j \in \widehat{m-1}\}.
\end{aligned}$$

$$-(pu_{\bar{x}})_x + qu = f \text{ na } \omega_k; \quad u_0 = \gamma_1, \quad u_m = \gamma_2$$

$$u_{\bar{x}_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{zpětná diference}$$

Hledáme přesnost aproximace

$$\psi = L_h(P_h y) - P_h(L_y).$$

$P_h$  je projekce funkcí definovaných na  $(a, b)$  do funkcí definovaných na síti  $\overline{\omega_h}$ .

$$\begin{aligned} \psi &= -(p(P_h y)_{\bar{x}})_x + qP_h y - f - P_h(-(py')' + qy - f) \\ \psi_j &= -(p(P_h y)_{\bar{x}})_x - P_h(-(py')') \rightarrow O(h) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{h} \left( p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + qu_i = f_i \text{ na } \omega_h$$

$$u_0 = \gamma_1; \quad u_m = \gamma_2$$

$$p_{i \pm \frac{1}{2}} = p \left( a + \left( i \pm \frac{1}{2} \right) h \right) \rightarrow O(h^2)$$

$$1. \quad \begin{array}{c} \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ i-1 \quad \quad p_i \quad \quad p_{i+1} \\ \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ i \quad \quad \quad i+1 \end{array}$$

$$(pu_{\bar{x}})_x = \frac{(pu_{\bar{x}})_{i+1} - (pu_{\bar{x}})_i}{h} = \frac{1}{h^2} (p_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - p_i(u_i - u_{i-1}))$$

$$2. \quad \begin{array}{c} p_{i-1} \quad \quad \quad p_{i-\frac{1}{2}} \quad \quad \quad p_i \quad \quad \quad p_{i+\frac{1}{2}} \quad \quad \quad p_{i+1} \\ u_{i-1} \quad \quad \quad \quad \quad \quad u_i \quad \quad \quad \quad \quad \quad u_{i+1} \\ \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ i-1 \quad \quad \quad \quad \quad \quad i \quad \quad \quad \quad \quad \quad i+1 \end{array}$$

$$(pu')' \approx \frac{pu'|_{i+\frac{1}{2}} - pu'|_{i-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{1}{h^2} (p_{i+\frac{1}{2}}(y_{i+1} - y_i) - p_{i-\frac{1}{2}}(y_i - y_{i-1}))$$

$$p_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_i + p_{i+1})$$

$$p_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_i + p_{i-1})$$

Máme úlohu  $-(py')' + qy = F(y)$  na  $(a, b)$ ,  $y(a) = \gamma_1$ ,  $y(b) = \gamma_2$ ,  $F(0) = 0$ ,  $g \geq 0$ ,  $F$  omezená, lipschitzovská.

Použijeme 1. schéma:

$$-\frac{1}{h} \left( p_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + q_i u_i = F(u_i), \quad i \in \widehat{m-1}$$

Maticový zápis:

$$\mathbb{A}_h u = \mathbb{F}(u) + \varphi_h \quad \mathbb{A}_h \in \mathbb{R}^{m-1, m-1}; \quad \varphi_h \in \mathbb{R}^{m-1}; \quad \mathbb{F}(n) \in \mathbb{R}^{m-1}$$