Sprawozdanie NUM5

1.Wprowadzenie:

Celem ćwiczenia jest zestawienie ze sobą metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidela w kontekście ich skuteczności i porównanie ich ze sobą.

Metody iteracyjne dokładne rozwiązanie dają nam po wykonaniu nieskończenie wielu kroków. Naszymi oczekiwaniami jest uzyskanie zbliżonego wyniku po określonej, skończonej liczbie kroków.

2.Uruchomienie programu:

- uruchomienie programu: python main.py

3.Analiza problemu:

Nasza macierz A ma postać:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0.15 & & & & & \\ 1 & 3 & 1 & 0.15 & & & & \\ 0.15 & 1 & 3 & 1 & 0.15 & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & 0.15 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & & 0.15 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jest zatem metodą rzadką, więc dla skuteczniejszej iteracji trzeba uwzględnić jej strukturę. Macierz A poza, diagonalą, dwiema ”wstęgami” nad i pod naszą diagonalą posiada same zera. Chcemy więc uniknąć w naszym algorytmie mnożenia przez nie aby rozwiązanie było efektywniejsze.

3.Iteracja metoda Gaussa:

Metoda Gaussa kontekście naszej macierzy A , musi być dostosowana do rozwiązania układu równań, w którym macierz jest trójdiagonalna. Iteracje prowadzone są zgodnie z niżej przedstawionym wzorem dla i-tej niewiadomej x_i :

$$x_i = \frac{b_i - x_{i+1} + 0.15 x_{i+2}}{3}$$

W tym wzorze b_i to i-ty element wektora wyrazów wolnych, a x_{i+1} wraz z x_{i+2} to (i+1)-szy i (i+2)-gi element wektora rozwiązania.

Metoda Gaussa jest stosowana iteracyjnie, co oznacza, że proces ten powtarzany jest wielokrotnie, aż do uzyskania zadowalającej zbieżności. Zbieżność jest monitorowana poprzez obliczanie normy różnicy pomiędzy kolejnymi wektorami x w kolejnych iteracjach. Wzór na normę różnicy dla dwóch wektorów a i b wygląda następująco:

$$norm(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

Wartość ta jest używana jako kryterium zakończenia iteracji. Proces iteracyjny jest przerywany, gdy norma różnicy między dwoma kolejnymi wektorami x spada poniżej z góry ustalonego progu, w tym przypadku 10^-12, co wskazuje na osiągnięcie dostatecznej bliskości do rozwiązania. W wyniku zastosowania metody Gaussa otrzymuje się ostateczny wektor x, który stanowi przybliżone rozwiązanie układu równań.

4.Metoda Jacobiego:

Metoda Jacobiego różni się od metody Gaussa sposobem wyznaczania wektora. Aby macierz Jacobiego była zbieżna musi być silnie diagonalna czyli:

$$\forall_i |a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$$

Nasza macierz spełnia to ponieważ, w najmniej dla nas korzystnym przypadku suma elementów na diagonali wynosi 2,3.

Zakładamy układ równań mający postać Ax=b, dla każdej nowej wartości x_i obliczamy nowa wartość, korzystając ze wzoru dla i-tej niewiadomej w k+1 iteracji wygląda następująco:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_1 - x_{i-1}^{(k)} - 0.15x_{i-2}^{(k)} - x_{i+1}^{(k)} - 0.15 \cdot x_{i+2}^{(k)}}{3}$$

Gdzie $x_i^{(k+1)}$ to i-ta niewiadoma w (k+1) iteracji a $x_{i-1}^{(k)}$ to (i-1)szy element wektora w k-tej iteracji i analogicznie $x_{i-2}^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, x_{i+2}^{(k)}$.

7. Wyniki:

Wynik otrzymany metodą Jacobiego:

[0.17801523406348943, 0.3811616836874521, 0.56528409414691, 0.7547708048477563, 0.9434196260961286, 1.132064084402794, 1.3207574555922388, 1.5094336291724042, 1.6981131715560351, 1.8867924844920065, 2.075471688855488, 2.264150944908273, 2.4528301886631185, 2.641509433882437, 2.83018867927454, 3.018867924522251, 3.2075471698116917, 3.396226415094412, 3.5849056603771707, 3.77358490566029 6, 3.9622641509432888, 4.150943396226308, 4.339622641509327, 4.528301886792344, 4.716981132075362, 4.905660377358379, 5.094339622641398, 5.283018867924416, 5.4716981132074345, 5.660377358490453, 5.84905660377347, 6.037735849056489, 6.226415094339507, 6.415094339622526, 6.603773584905543, 6.792452830188563, 6.981132075471581, 7.1698113207546, 7.358490566037617, 7.5471698113206385, 7.735849056603656, 7.924528301886672, 8.113207547169692, 8.301886792452713, 8.49056603773573, 8.679245283018751, 8.867924528301769, 9.056603773584786, 9.245283018867807, 9.433962264150825, 9.622641509433842, 9.811320754716862, 9.999999999999885, 10.1886792452829, 10.377358490565923, 10.56603773584894, 10.754716981131962, 10.943396226414977, 11.132075471698, 11.32075471698102, 11.50943396226404, 11.698113207547058, 11.886792452830077, 12.075471698113097, 12.264150943396118, 12.452830188679135, 12.641509433962156, 12.830188679245175, 13.018867924528193, 13.207547169811212, 13.396226415094231, 13.58490566037725, 13.773584905660266, 13.962264150943286, 14.150943396226305, 14.339622641509322, 14.528301886792342, 14.716981132075361, 14.90566037735838, 15.0943396226414, 15.283018867924417, 15.471698113207433, 15.66037735849045, 15.849056603773477, 16.037735849056492, 16.22641509433952, 16.415094339622538, 16.60377358490555, 16.792452830188573, 16.98113207547159, 17.1698113207546, 17.358490566037627, 17.547169811320643, 17.735849056603662, 17.92452830188669, 18.113207547169697, 18.301886792452724, 18.49056603773574, 18.67924528301876, 18.867924528301774, 19.056603773584836, 19.245283018867635, 19.433962264151404, 19.622641509433677, 19.81132075470816, 20.000000000058318, 20.188679245068734, 20.377358490884017, 20.566037737631657, 20.75471696425553, 20.943396301364658, 21.132075297360373, 21.320754490966387, 21.50943847299405, 21.698088743608906, 21.886867012254285, 22.075434068531063, 22.26306920098513, 22.460321797505387, 22.61337652779854, 22.87515845613541, 23.232865218771025, 21.061564102655183, 33.151168704843045]

Wynik otrzymany metodą Gaussa:

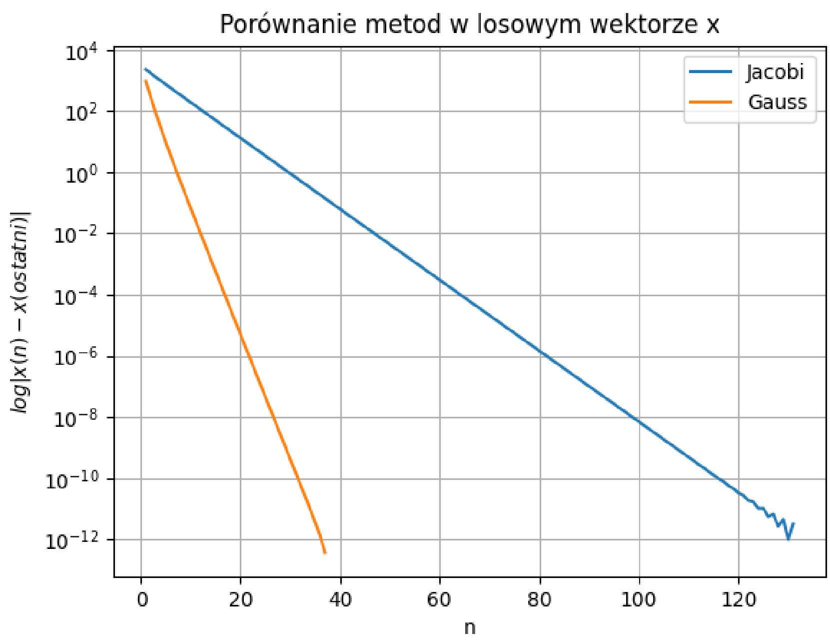
[0.17801523406348654, 0.38116168368748693, 0.5652840941469077, 0.7547708048478112, 0.9434196260961446, 1.1320640844028478, 1.3207574555922856, 1.5094336291724595, 1.6981131715560895, 1.8867924844920945, 2.0754716888555245, 2.2641509449083954, 2.4528301886631545, 2.641509433882559, 2.8301886792746065, 3.0188679245223473, 3.2075471698117997, 3.396226415094487, 3.584905660377295, 3.7735849056603823, 3.9622641509434016, 4.150943396226409, 4.339622641509446, 4.528301886792431, 4.7169811320755, 4.905660377358459, 5.094339622641542, 5.2830188679245, 5.471698113207569, 5.660377358490552, 5.84905660377359, 6.037735849056602, 6.226415094339629, 6.415094339622622, 6.603773584905697, 6.79245283018863, 6.981132075471751, 7.1698113207546745, 7.358490566037759, 7.54716981132075, 7.735849056603769, 7.924528301886798, 8.113207547169813, 8.301886792452821, 8.490566037735862, 8.679245283018858, 8.867924528301891, 9.05660377358491, 9.245283018867912, 9.433962264150962, 9.622641509433942, 9.811320754717, 9.999999999999986, 10.188679245283028, 10.37735849056603, 10.566037735849063, 10.754716981132065, 10.94339622641511, 11.132075471698089, 11.320754716981169, 11.509433962264103, 11.698113207547228, 11.886792452830129, 12.075471698113263, 12.264150943396174, 12.452830188679295, 12.641509433962215, 12.83018867924533, 13.01886792452826, 13.207547169811358, 13.396226415094302, 13.584905660377402, 13.773584905660327, 13.962264150943446, 14.150943396226369, 14.33962264150947, 14.528301886792436, 14.71698113207547, 14.905660377358506, 15.094339622641487, 15.283018867924559, 15.471698113207518, 15.660377358490598, 15.849056603773553, 16.037735849056634, 16.226415094339604, 16.415094339622645, 16.60377358490567, 16.79245283018867, 16.981132075471706, 17.169811320754725, 17.358490566037723, 17.547169811320774, 17.735849056603765, 17.92452830188679, 18.113207547169818, 18.301886792452823, 18.490566037735856, 18.67924528301887, 18.867924528301874, 19.056603773584957, 19.24528301886772, 19.433962264151518, 19.622641509433755, 19.81132075470827, 20.000000000058403, 20.188679245068826, 20.37735849088411, 20.566037737631753, 20.75471696425561, 20.94339630136474, 21.132075297360444, 21.32075449096646, 21.509438472994116, 21.698088743608967, 21.886867012254346, 22.075434068531106, 22.263069200985182, 22.46032179750542, 22.613376527798575, 22.875158456135434, 23.232865218771042, 21.0615641026552, 33.15116870484305]

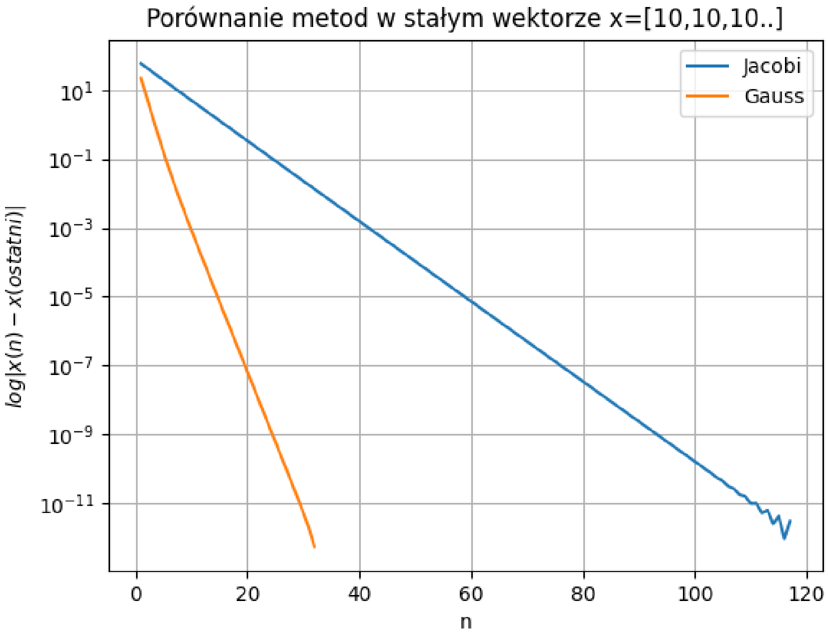
8. Wnioski:

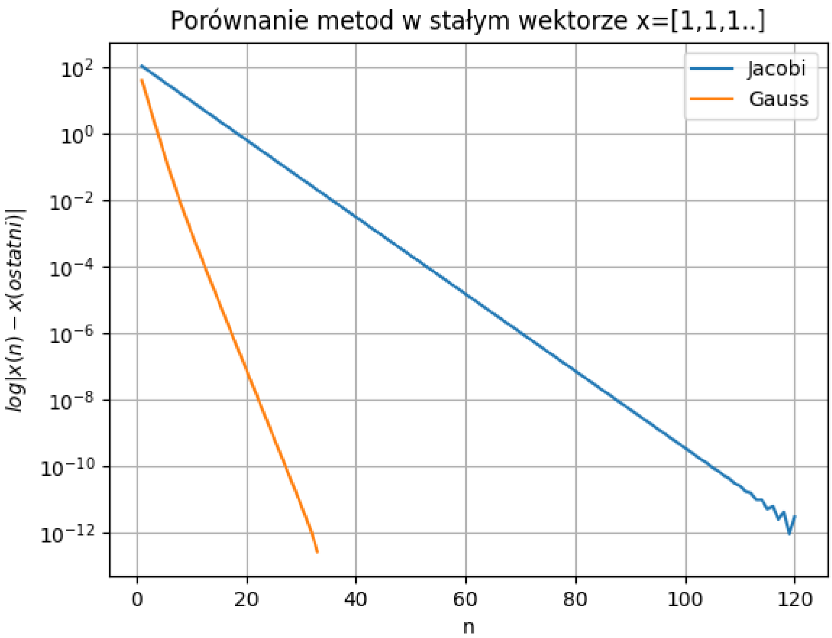
Z pozyskanych wyników widzimy, że obie metody przy określonej pozycji dają prawie te same wyniki, różnią się dopiero na dalekim miejscu po przecinku. Różnica może być spowodowania zaokrągleniami danej precyzji.

Po wykresach zamieszczonych niżej możemy wywnioskować, że metoda Jacobiego zbiega o wiele wolniej niż metoda Gauss-Seidela co jest skutkiem tego, iż metoda Jacobiego bazuje na wektorze ze stanu poprzedniej iteracji co wiąże się z większą ilością iteracji.

Z wykresów możemy również odczytać, że nie ma znaczenia czy dobieramy losowy wykres czy jakiś stały, przy każdym wynik będzie prezentował się identycznie.




Porównanie metod w stałym wektorze x=[10,10,10..]
Jacobi
Gauss
10^{1}
10^{-1}
10^{-3}
10^{-5}
10^{-7}
10^{-9}
10^{-11}
$log|x(n) - x(ostatni)|$
0
20
40
60
80
100
120
n


Porównanie metod w stałym wektorze x=[1,1,1..]
Jacobi
Gauss
10^{2}
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
$log|x(n) - x(ostatni)|$
0
20
40
60
80
100
120
n