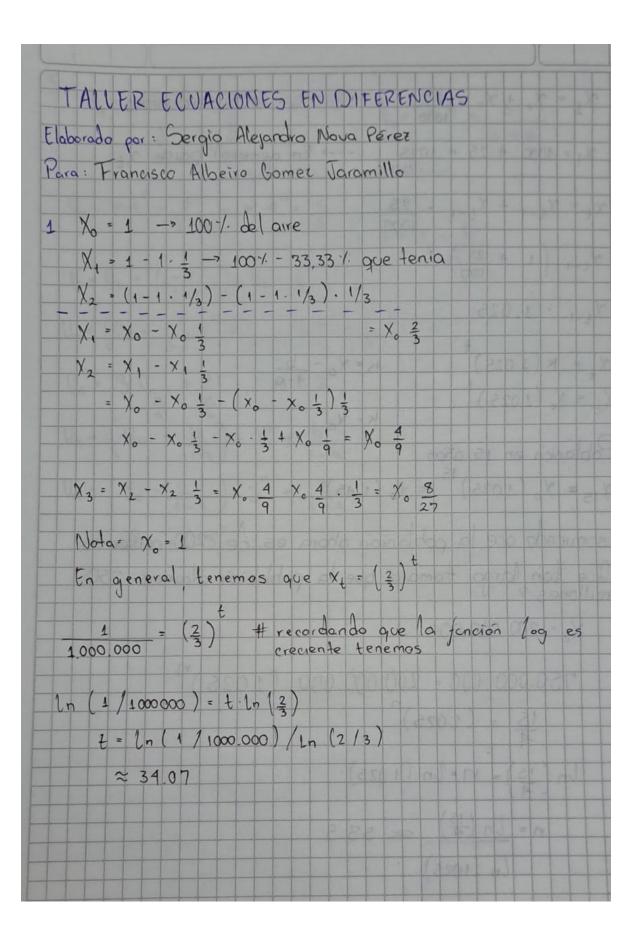
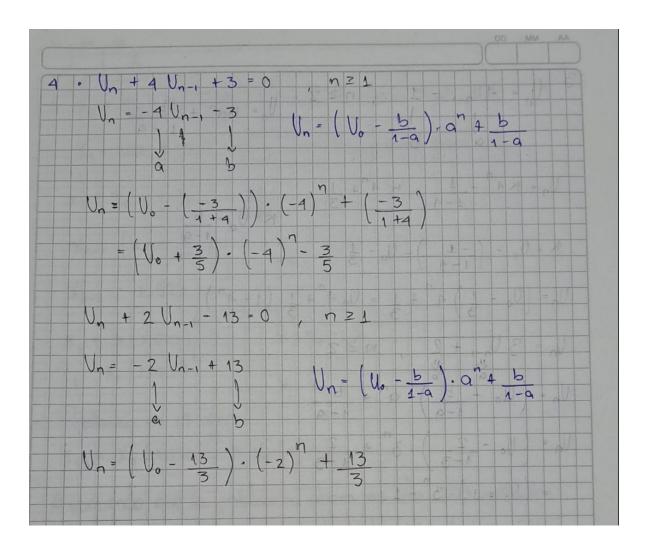
## Taller ecuaciones en diferencias

- 1. Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?
- 2. Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?
- 3. Resuelva:
- $u_n=4u_{n-1}-1$ , para  $n\geq 2$
- $u_n=3u_{n-1}+2$ , para  $n\geq 2$
- 4. Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:
- $u_n+4un-1+3=0$ , para  $n\geq 1$
- $u_n+2un-1-13=0$ , para  $n\geq 1$
- 5. Encuentre las soluciones particulares para:
- $u_n=3u_{n-1}+5$ , para  $n\geq 1$   $u_0=1$
- $u_n=-2u_{n-1}+6$ , para  $n\geq 2$   $u_1=3$
- 6. Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...
- 7. Encuentre el pago mensual por un prestamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interes del 21% por año.
- 8. Una plantación de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes-¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?
- 9. La productividad en una plantación de 2000 arboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores tecnicas de agricultura. El granjero tambien planta ademas 100 arboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.
- 10. Resuelva  $u_n=3u_{n-1}+n$ , para  $u_1=5$
- 11. Encuentre la solución general para  $u_n=un-1+2^n$  y  $u_n=2un-1+n$
- 12. Si  $u_n = k u_{n-1} + 5$  y  $u_1 = 4$  y  $u_2 = 17$  encuentre los valores de k y  $u_6$  .
- 13. Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia  $u_n=rac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$ , para  $n\geq 2$ , sujeto a la condición inicial  $u_1=rac{1}{6}$ .
- 14. Investigue el límite de  $rac{u_n}{u_{n+1}}$  si  $u_n=u_{n-1}+2u_{n-2}$
- 15. Encuentre el n-esimo termino de la siguiente secuencia: -3,21,3,129,147,...
- 16. Resuelva  $u_n-6u_{n-1}+8u_{n-2}=0$ , para  $n\geq 3$  dado  $u_1=10$  y  $u_2=28$ . Evalue  $u_6$
- 17. Encuentre la solución particular para  $u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=0$ , para  $n\geq 1$ , cuando  $u_1=-1$ ,  $u_2=-2$ .
- 18. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación  $u_n 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = f(n)$ , cuando f(n) = 2, f(n) = n,  $f(n) = 5^n$  y  $f(n) = 1 + n^2$ .
- 19. Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatríz  $u_n 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$ , dado  $u_0 = 0$ , y  $u_1 = 20$ , n > 2
- 20. Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci.
- 21. Utilice el método de la función generatriz para resolver  $u_n-2u_{n-1}=3^n$ , para  $n\geq 1$  dado  $u_0=1$

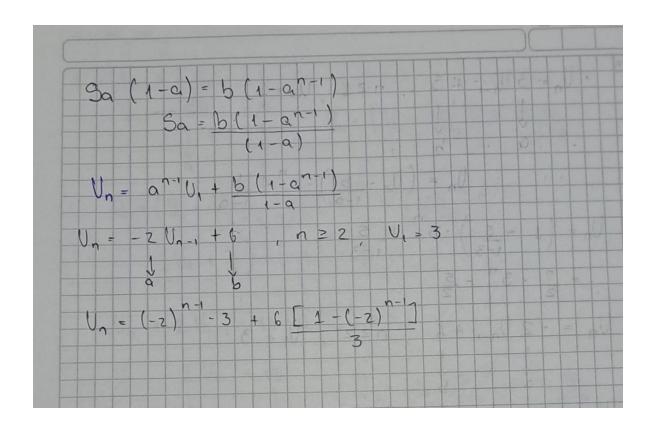


2 1 = 1 + 1 .	25 + Si Xo	= 1000 tendri	amos
X1 = 1000 + 25	= 1025> En	general para	×t
x + = x + - + x + -	1000	40 16 None	- 1 1 1/2
Xt-1 (1 + 25	)	100 1- 1	
Xt-1 · 1.025	X:		
$\chi_{t} = \kappa (1.025)^{t}$	K= X0-	- 0	
$\chi_t = \chi_o (1.025)^{\circ}$ Población en 15	K= Xe		X - JK
X15 = X0 (1.025		V 1- V - 2	- X - M
	a población ahoro tomará que la		
	00 = 200.000.000	(1025)	2010011 4 43
	(1.025)	1 00001	
I A J	n.ln (1.025)		0 +4 0
	$\left(\frac{15}{4}\right) \approx 53.5$		
Un			

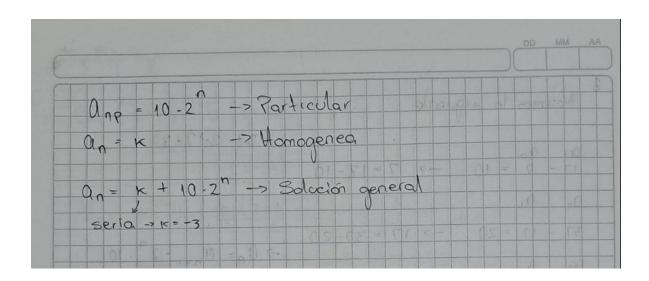
3 0	= 4Un	-, - 1		n ≥ 7	V <sub>n</sub> =	Kar	+	b 1 -			
	à	Ď	1 0					1 V	4		
Vn-	KA" -	1-4	K.An	4 1 3	K=	U	<b>b</b>	-		= 10	
K-	U (.	-1	- Uo -	13	- 1		1-9		1		
Un=	(00 -	1 ) 4 1	1 =	V. 4 +	1 (1	- 4 <sup>n</sup>	)				
Vn =	3 5	, + 2	, +	1 2 2		12		U	9-	1	1
Un =	· (Uo	$-\frac{b}{1-a}$	· an	+ 6		4			1		
Un =	( to -	2 1-3)	· 3"	4 2 1-3	10-4		45			-	U

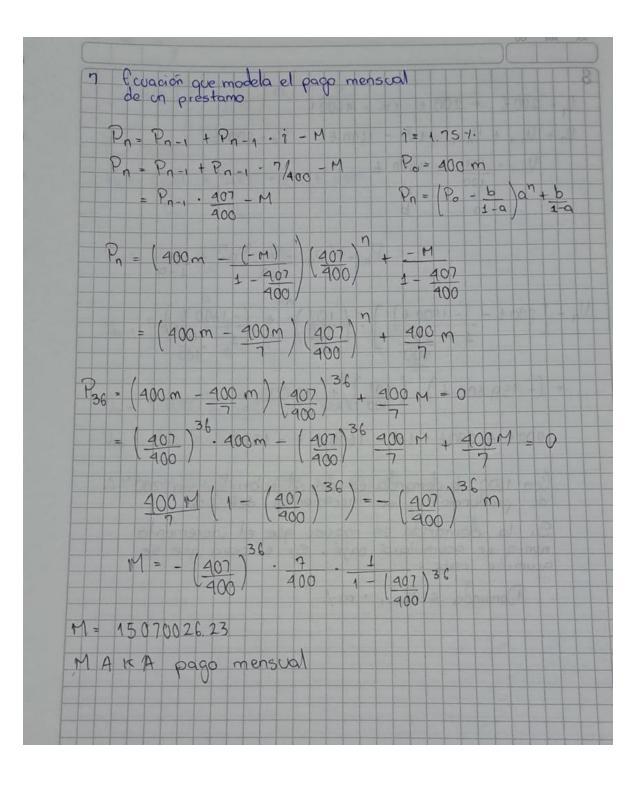


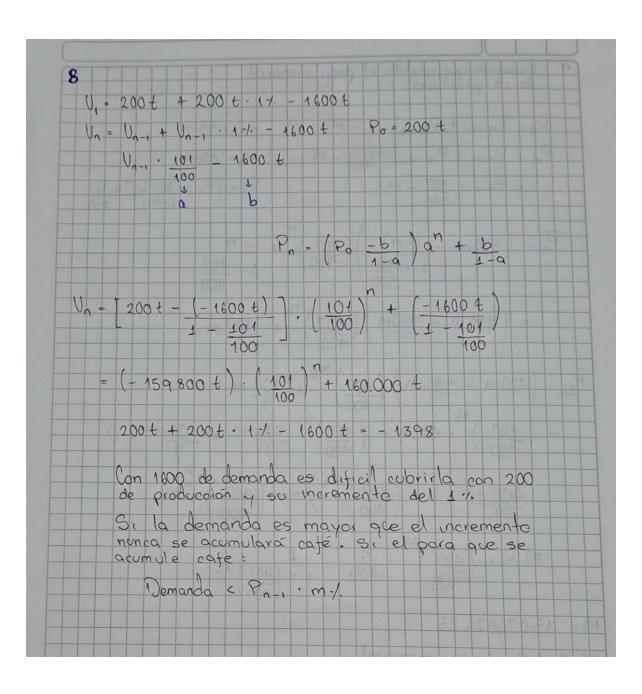
 $V_{n} = 3V_{n-1} + 5$ ,  $n \ge 1$ ,  $U_{0} = 1$   $V_{n} = (U_{0} - b_{1-a}) \cdot a^{n} + b_{1-a}$  $y_n = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1-3 \end{pmatrix} \cdot 3^n + 5$ = 7 - 37 - 5 V3 = -2.0 +6 Vn = a Un-1 + B V2 - a U, + b  $V_3 = a(aV_1 + b) + b = a^2V_1 + ab + b$ U4 = a (a2U, +ab+b)+b = a3U, +a2b+ab+b En general Vn = a7-1V1 + an-2 b + ... + a2b + ab + b Sa = 226 + -- + 225 + 25 + 5 aSa = an-1 b + - . . + a3 b + a2 b + ab Sa-aSa= b-an-1. b



6 Notemos la signiente 37 = 2.17 + 3 a1 a0 -> 7-17-10 a, a, 37 - 17 = 20 -> 17 = 37-20 -> Qn= Qn+ -27.10 03 Q2 77 - 37 = 40 -> 37 = 77 - 40 04 03 157 - 77 = 80 -> 77 = 157 - 80 an - an + + 2 - 10 = 0 1 an- Kr Homogenea r"-r"r-0 rn (1-r) =0 -> V = 1 On=K1 -> an=K f(t)=-27.10 Caso particular S. f(n) Solution particular 27-10 Constante Propesta atbn A . 2 = ane atbn+Cn2 nz On +10 = A . 27+1 ax (anx1) Kn remplazamos en 1 A-27-A-27+1=-27-10 A.27 - A.2".2 = -27 . 10 -A2" = -2"-10 infonces A=10

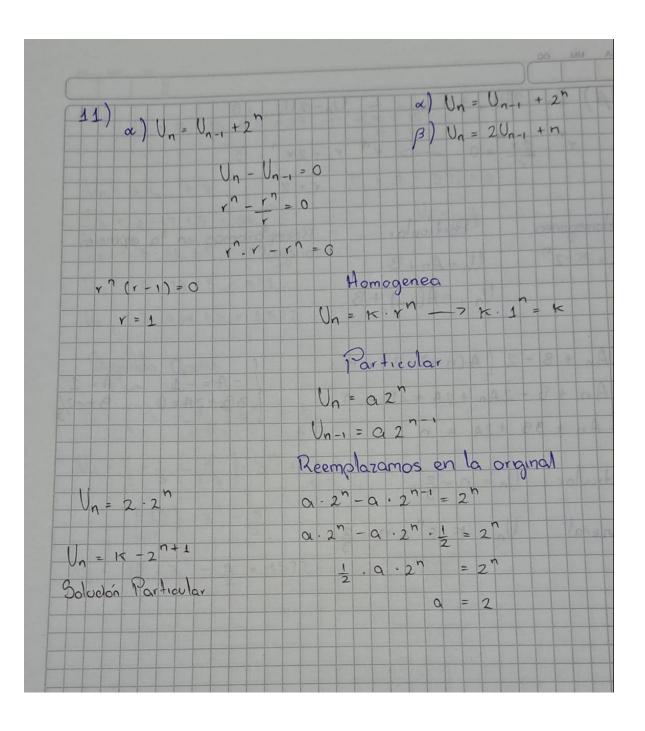


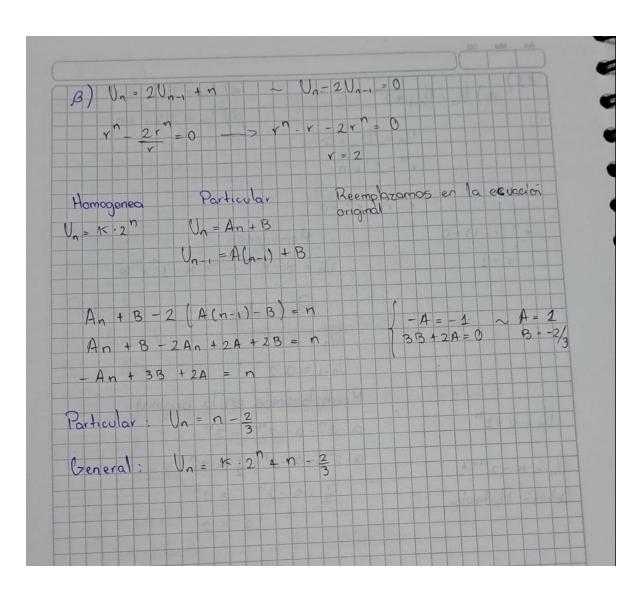


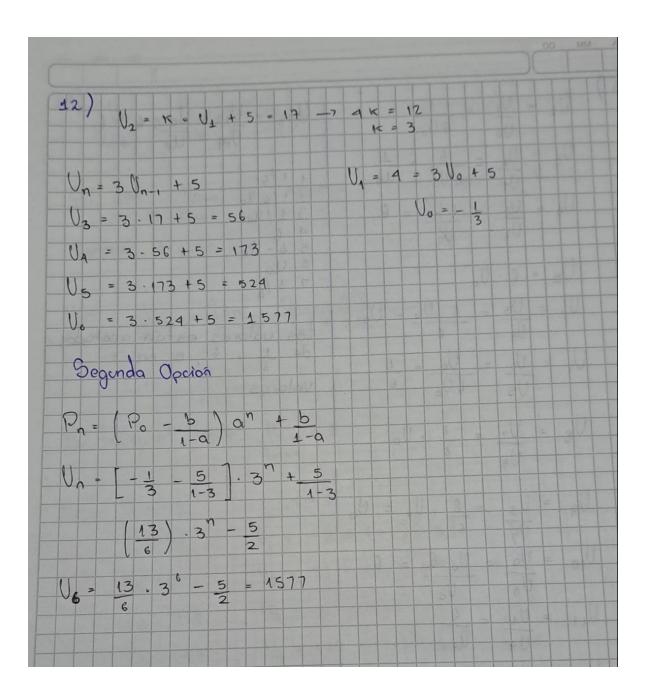


9 Pn - (Po - b) 0" + b		
U. 2000		
U 2000 + 2000 -5 + + 100		
4 %		
Un - Un - 21 + 100		
a 6		
$U_n = \begin{bmatrix} 2000 - (100) \\ 1 - \frac{21}{20} \end{bmatrix} \cdot (\frac{21}{20})^n + \frac{100}{1 - \frac{21}{20}}$		
$U_{n}$ , $(4000)$ , $(\frac{21}{20})^{n}$ - 2000		
U10 = 4515.58		
Δ % = 4515.58 - 2000 ~ 126 %		

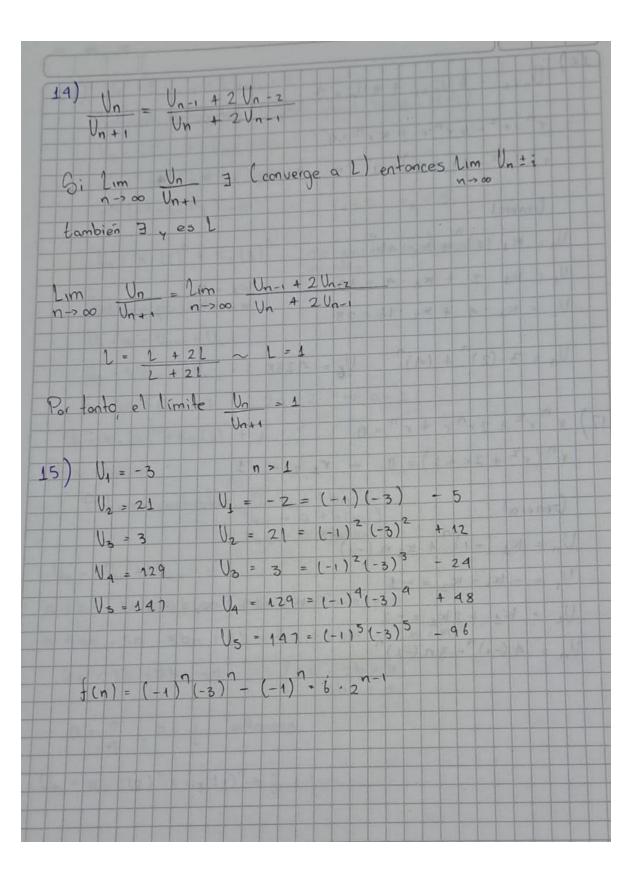
Un - 3Un-1 = 0 10) Un - 3 Un - n rn - 3rn = 0 r (r-3)=0 rr - 3 r7 = 0 Homogenea Un = 46 r n -> 16 · 3 n Particular Un = An + B Reemplazamos en la original Un-1 = A(n-1) + B Un - 3 Un - = n -> An + B - 3 (A (n-1) + B) - n An + 8 - 3 An + 3A - 38 = n -2An +3A -2B = n  $\begin{bmatrix} -2A = 1 \\ 3A - 2B = 0 \end{bmatrix}$   $A = -\frac{1}{2}$  $U_n = -\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$  $V_{n} = K-3^{n} - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} - \frac{7}{4} V_{n} = \frac{25}{12} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$  $K \cdot 3 - 5 = 5$   $K \cdot 3 = 25 - 7 \quad K = 25$   $K \cdot 3 = 25 - 7 \quad K = 25$ 

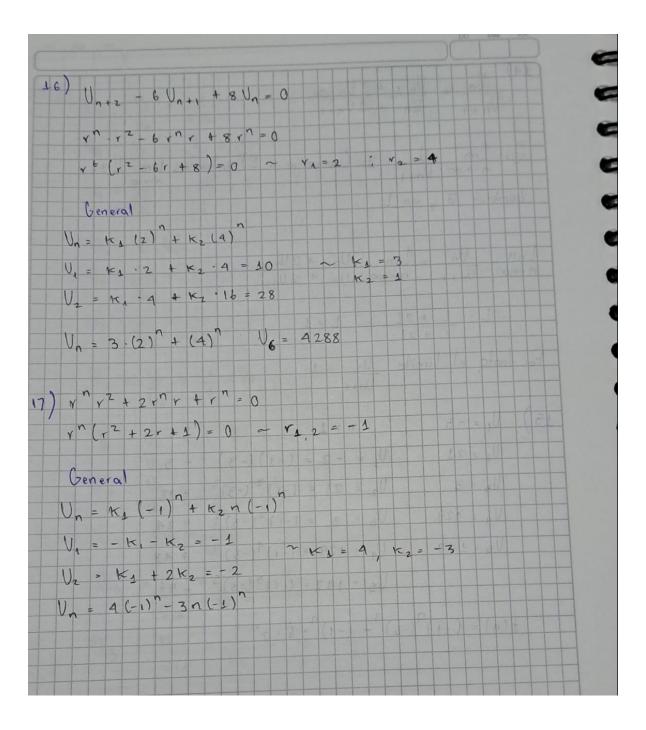


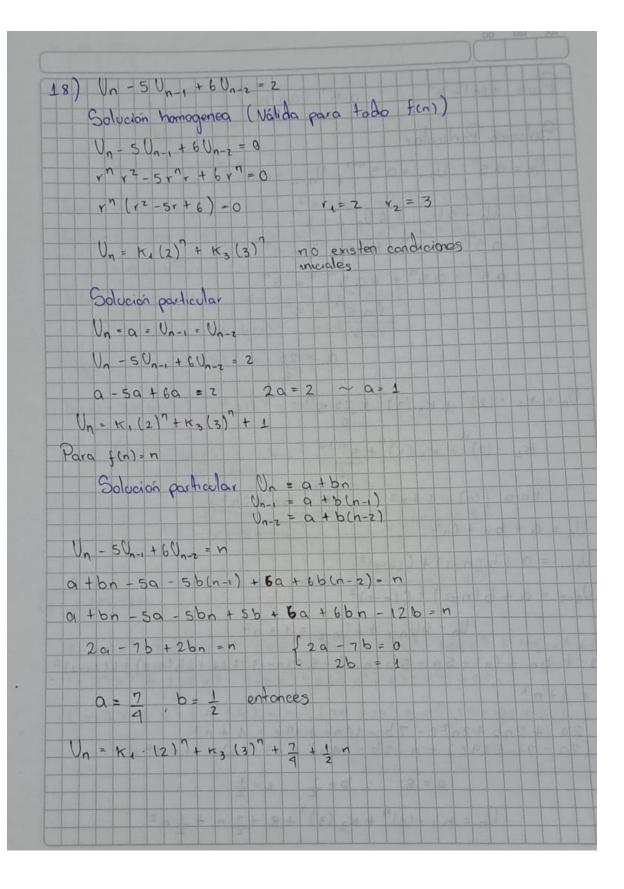




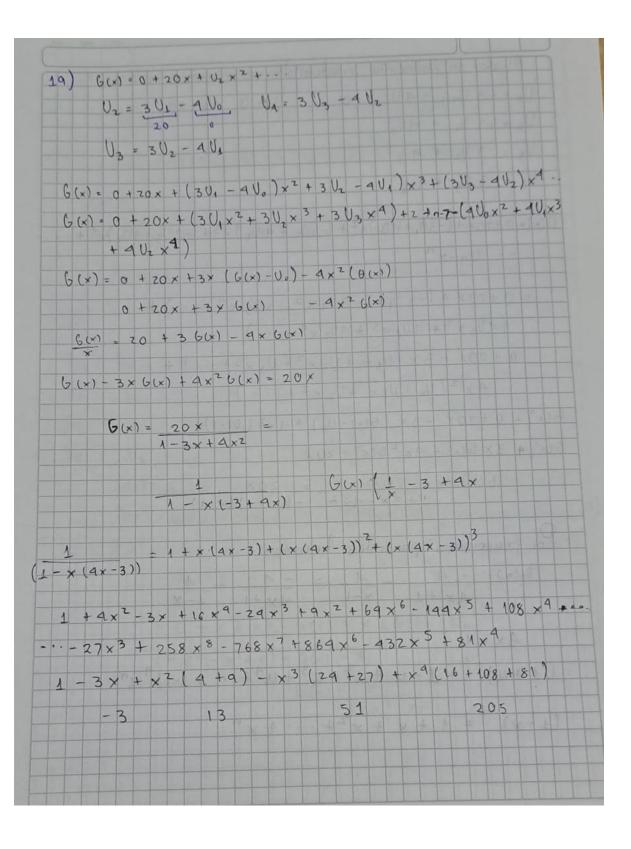
Ur6 - V.s = U0, 6 = 6  $V_3 = \frac{V_2}{V_4} = \frac{6}{6} = \frac{1}{4}$   $V_4 = \frac{1}{12} = \frac{6}{6} = \frac{1}{4}$   $V_6 = \frac{1}{6}$ 1 1/6 2 1/6 Clo 3 1/40 4 6.40 6 40 7 1/6 = 6 . 00 U<sub>e</sub> = U<sub>s</sub> = 6 · U<sub>o</sub> = U<sub>o</sub> los valores están acotados de 1 y 6 , 0 en 7  $U_7 = U_0 = U_0 = 1$   $U_5 = 6U_0 = 6$ Valores. U<sub>8</sub> = U<sub>7</sub> = 1 · V<sub>0</sub>  $V_{10} = \frac{V_{9}}{V_{8}} = \frac{V_{0} - 6}{V_{0}} = 6$ V11 = V10 = 6 V9 V0 V12 = V11 = 6 V10 6 llo U10 = U12 = 1 U0 Uo 6 013 = 1 U19 = Viz U19 = 1 . Vo. 6 = U. U13 ULS

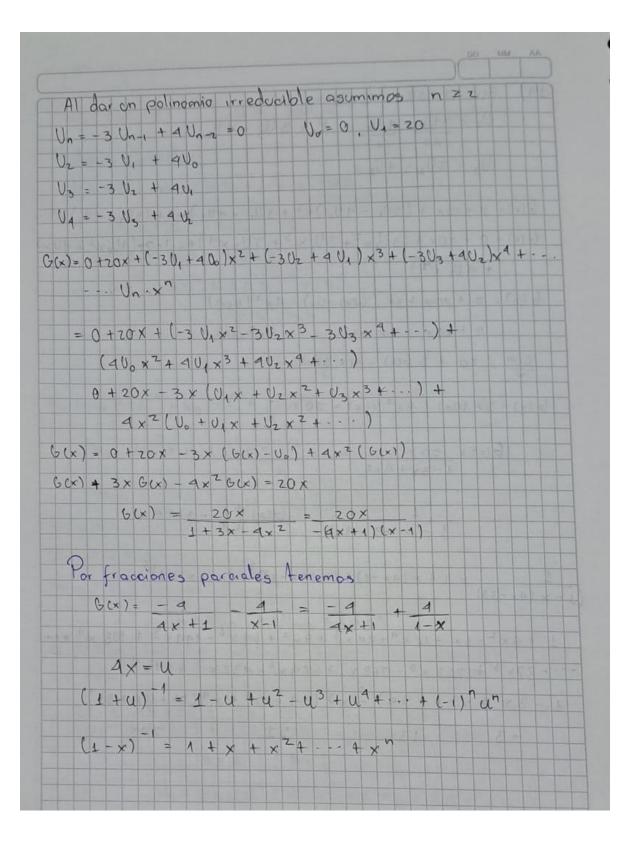






Para fent= 57 a x (an x) Solvoion Particular Vn = a5" Vn = a5" Vn = a5" = a5" Un - 5 Un + 6 Un - = 57 a57-5a57-+6a57-2=57 a57 - a57 + 6057-2 = 57 6a5" = 5" a = 25 Un = K1 . (2) + K3 (3) + 25 5 K1 - (2) + K3 (3) + 5 n+2 Para f(n) = 1 + n2 (a + bn + cn2 Un = a + bn + Cn2 Un-1 = a + b (n-1) + C (n-1)2 Vn-z = a + b (n-z) + c(n-z)2 Un - 5Un- + 6 Unz = 1 + n2 a + bn + cn2 - 5a - 5b(n-1) - 5c(n-1)2+6a+6b(n-2)+6c(n-2)2 = 1+n2 2a + 2nb + 2n2c - 7b - 19nc + 19e = 1 + n2 (2a-7b+1ac)+n(2b-1ac)+n2(2c)=1+n2 a = 8;  $b = \frac{7}{2}$ ,  $e = \frac{1}{2}$ Un= K1.(2)"+ K3 (3)" +8 + 7 n + 1 n2





```
G(x) - 9 [1+x+x2+...+x1-(1-4x+(4x)2-(4x)3-..)]
     =q[(1-1)+(x+ax)+(x2-(ax)2)+(x3+(ax)3)---]
     = 4[(1-4)+x(1+4)+x2(1-42)+x3(1+43)]
  AK. A
      4[x7(1+47.(-1)n+1)]~Un=4(1+47.(-1)n+1)
     Vo = q (1+q0. (-1)1) = 0; U1 = q (1+q1. (-1)2) = 20
20)
                    Vo = 0 V = 1
Un = Un-z + Un-1 = 0
U2 = Va + V1 = 1
V3 = V1 + V2 = Z
V_4 = V_2 + V_3 = 3
    G(x) = 0 + x + (U0 + U1) x2 + (U1 + U2) x3 + (U2 + U3) x4 + --
     G(x) = 0 + x + ( Vo x2 + U1 x3 + U2 x4 + ...) + (U1x2 + U2x3+U3x4)
     V2 ×3 4 · · · )
         = 0 + x + x 2 . G(x) + x (G(x) - Vo)
          (-x2-x+1). G(x) = x
                       G(x) = x
                            1-x2-x
```

En general, si resolvemas mediante evalquer métabo, particularmente aca usando 12 tenemos  $U_{n} = -(-1)^{n} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^{n} - \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n}$ Para el n-esimo termino de la sucesión de 21)  $U_{n} - 2U_{n-1} = 3^{n}$   $n \ge 1$   $U_{\infty} = 1$ Planteamos la homogenea Un - 2 Un-1 = 0  $6(x) = 1 + (2 V_0) \times + (2 V_1) \times^2 + (2 V_2) \times^3 + (2 V_3) \times^4 + \cdots$ B(x)=1+2x+(2.2)x2+(2.4)x3+(2.8)x9+ En general tenemos que el n-termino de  $G(x) = 2(2^n)x^n$   $u_n = 2^n \cdot 2$ resolvemos homogenea de f(n) perticular  $3^{n} = 0$   $V_{n} = \alpha 3^{n}$ ;  $V_{n-1} = \alpha 3^{n}$ 23<sup>1</sup>-2.23<sup>1</sup>=3<sup>1</sup> 030-2-031=30=1  $\alpha - \frac{2}{3}\alpha = 1$ Un = 3.37 = 37+1