Taller ecuaciones en diferencias

1. Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?
2. Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?
3. Resuelva:

- $u_n = 4u_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$
- $u_n = 3u_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

4. Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:

- $u_n + 4un - 1 + 3 = 0$, para $n \geq 1$
- $u_n + 2un - 1 - 13 = 0$, para $n \geq 1$

5. Encuentre las soluciones particulares para:

- $u_n = 3u_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ $u_0 = 1$
- $u_n = -2u_{n-1} + 6$, para $n \geq 2$ $u_1 = 3$

6. Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...
7. Encuentre el pago mensual por un prestamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interes del 21% por año.
8. Una plantación de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes- ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?
9. La productividad en una plantación de 2000 arboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores tecnicas de agricultura. El granjero tambien planta ademas 100 arboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.
10. Resuelva $u_n = 3u_{n-1} + n$, para $u_1 = 5$
11. Encuentre la solución general para $u_n = un - 1 + 2^n$ y $u_n = 2un - 1 + n$
12. Si $u_n = ku_{n-1} + 5$ y $u_1 = 4$ y $u_2 = 17$ encuentre los valores de k y u_6.
13. Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, para $n \geq 2$,sujeto a la condición inicial $u_1 = \frac{1}{6}$.
14. Investigue el límite de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ si $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$
15. Encuentre el n-esimo termino de la siguiente secuencia: -3,21,3,129,147,...
16. Resuelva $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $u_1 = 10$ y $u_2 = 28$. Evalue u_6.
17. Encuentre la solución particular para $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$, para $n \geq 1$, cuando $u_1 = -1$, $u_2 = -2$.
18. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = f(n)$, cuando $f(n) = 2$, $f(n) = n$, $f(n) = 5^n$ y $f(n) = 1 + n^2$.
19. Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatríz $u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$, dado $u_0 = 0$, y $u_1 = 20$, $n \geq 2$.
20. Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci.
21. Utilice el método de la función generatriz para resolver $u_n - 2u_{n-1} = 3^n$, para $n \geq 1$ dado $u_0 = 1$

TALLER ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Elaborado por: Sergio Alejandro Nova Pérez

Para: Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

1 $X_0 = 1 \rightarrow 100\%$ del aire

$X_1 = 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 100\% - 33{,}33\%$ que tenia

$X_2 = (1 - 1 \cdot 1/3) - (1 - 1 \cdot 1/3) \cdot 1/3$

$X_1 = X_0 - X_0 \frac{1}{3} = X_0 \frac{2}{3}$

$X_2 = X_1 - X_1 \frac{1}{3}$

$= X_0 - X_0 \frac{1}{3} - (X_0 - X_0 \frac{1}{3}) \frac{1}{3}$

$X_0 - X_0 \frac{1}{3} - X_0 \cdot \frac{1}{3} + X_0 \frac{1}{9} = X_0 \frac{4}{9}$

$X_3 = X_2 - X_2 \frac{1}{3} = X_0 \frac{4}{9} \quad X_0 \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = X_0 \frac{8}{27}$

Nota: $X_0 = 1$

En general, tenemos que $X_t = \left(\frac{2}{3}\right)^t$

$\frac{1}{1.000.000} = \left(\frac{2}{3}\right)^t$ # recordando que la función log es creciente tenemos

$\ln(1/1000000) = t \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$t = \ln(1/1000.000)/\ln(2/3)$

≈ 34.07

2 $x_1 = x_0 + x_0 \cdot \frac{25}{1000}$. • Si $x_0 = 1000$ tendriamos

$x_1 = 1000 + 25 = 1025$ ---> En general para x_t

$$x_t = x_{t-1} + x_{t-1} \cdot \frac{25}{1000}$$

$$x_{t-1}\left(1 + \frac{25}{1000}\right)$$

$$x_{t-1} \cdot 1.025$$

$$x_t = k(1.025)^t \qquad k = x_0 - \frac{b}{1-a}$$

$$x_t = x_0(1.025)^t \qquad k = x_0$$

=> Poblacion en 15 años

$$x_{15} = x_0(1.025)^{15} \approx x_0(1.45)$$

Asumiendo que la población ahora es de 200 millones ¿Que tan largo tomará que la población alcance 750 millones?

$$x_0 = 200.000.000$$

$$750.000.000 = 200.000.000\ (1.025)^n$$

$$\frac{15}{4} = (1.025)^n$$

$$\ln\left(\frac{15}{4}\right) = n \cdot \ln(1.025)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{15}{4}\right)}{\ln(1025)} \approx 53.5$$

3 $U_n = 4U_{n-1} - 1 \quad , \; n \geq 2$

$\downarrow a \quad \downarrow b$

$U_n = Ka^n + \frac{b}{1-a}$

$U_n = K4^n - \frac{1}{1-4} = K \cdot 4^n + \frac{1}{3}$

$K = U_0 - \frac{b}{1-a}$

$K = U_0 - \left(\frac{-1}{1-4}\right) = U_0 - \frac{1}{3}$

$U_n = \left(U_0 - \frac{1}{3}\right)4^n + \frac{1}{3} = U_0 4^n + \frac{1}{3}\left(1 - 4^n\right)$

$U_n = 3U_{n-1} + 2 \quad , \; n \geq 2$

$\Downarrow a \quad \Downarrow b$

$U_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$

$U_n = \left(U_0 - \frac{2}{1-3}\right) \cdot 3^n + \frac{2}{1-3}$

$= \left(U_0 + 1\right) \cdot 3^n - 1$

4 • $U_n + 4U_{n-1} + 3 = 0 \quad , \quad n \geq 1$

$U_n = -4U_{n-1} - 3$

$\quad\;\; \downarrow \qquad\quad \downarrow$

$\quad\;\; a \qquad\quad\; b$

$$U_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = \left(U_0 - \left(\frac{-3}{1+4}\right)\right) \cdot (-4)^n + \left(\frac{-3}{1+4}\right)$$

$$= \left(U_0 + \frac{3}{5}\right) \cdot (-4)^n - \frac{3}{5}$$

$U_n + 2U_{n-1} - 13 = 0 \quad , \quad n \geq 1$

$U_n = -2U_{n-1} + 13$

$\quad\;\; \downarrow \qquad\quad \downarrow$

$\quad\;\; a \qquad\quad\; b$

$$U_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = \left(U_0 - \frac{13}{3}\right) \cdot (-2)^n + \frac{13}{3}$$

5 · $U_n = \underset{\downarrow\, a}{3}\, U_{n-1} + \underset{\downarrow\, b}{5}$, $n \geq 1$, $U_0 = 1$

$$U_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right)\cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = \left(1 - \frac{5}{1-3}\right)\cdot 3^n + \frac{5}{1-3}$$

$$= \frac{7}{2}\cdot 3^n - \frac{5}{2}$$

· $U_n = \underset{\downarrow\, a}{-2}\, U_{n-1} + \underset{\downarrow\, b}{6}$, $n \geq 2$, $U_1 = 3$

$U_3 = -2 \cdot 0 + 6$

$U_n = a U_{n-1} + b$

$U_2 = a U_1 + b$

$U_3 = a(aU_1 + b) + b = a^2 U_1 + ab + b$

$U_4 = a(a^2 U_1 + ab + b) + b = a^3 U_1 + a^2 b + ab + b$

En general

$$U_n = a^{n-1} U_1 + \underbrace{a^{n-2} b + \dots + a^2 b + ab + b}_{S_a}$$

$S_a = \cancel{a^{n-2} b} + \dots + \cancel{a^2 b} + \cancel{ab} + b$

$a S_a = a^{n-1} b + \dots + a^3 b + a^2 b + ab$

$S_a - a S_a = b - a^{n-1} \cdot b$

$$Sa\,(1-a) = b\,(1-a^{n-1})$$

$$Sa = \frac{b\,(1-a^{n-1})}{(1-a)}$$

$$U_n = a^{n-1}U_1 + \frac{b\,(1-a^{n-1})}{1-a}$$

$$U_n = \underset{a}{-2}\,U_{n-1} + \underset{b}{6} \quad , \quad n \geq 2 \quad , \quad U_1 = 3$$

$$U_n = (-2)^{n-1} \cdot 3 + 6\,\frac{\left[1-(-2)^{n-1}\right]}{3}$$

6 Notemos lo siguiente

$37 = 2 \cdot 17 + 3$

$\begin{array}{ll} a_1 & a_0 \end{array}$

$17 - 7 = 10 \to 7 = 17 - 10$

$\begin{array}{ll} a_2 & a_1 \end{array}$

$37 - 17 = 20 \to 17 = 37 - 20$

$\to a_n = a_{n+1} - 2^n \cdot 10$

$\begin{array}{ll} a_3 & a_2 \end{array}$

$77 - 37 = 40 \to 37 = 77 - 40$

$\begin{array}{ll} a_4 & a_3 \end{array}$

$157 - 77 = 80 \to 77 = 157 - 80$

$a_n - a_{n+1} + 2^n \cdot 10 = 0$ (1)

$a_n = k r^n$ Homogenea

$r^n - r^n r = 0$

$r^n(1-r) = 0 \to r = 1$

$a_n = k 1^n \to a_n = k$

$f(t) = -2^n \cdot 10$

Caso particular

$2^n \cdot 10$

Propuesta

$A \cdot 2^n = a_{np}$

$a_{n+1p} = A \cdot 2^{n+1}$

Si $f(n)$	Solucion particular
Constante	a
n	$a + bn$
n^2	$a + bn + Cn^2$
k^n	$a k^n$ $(a n k^n)$

reemplazamos en 1

$A \cdot 2^n - A \cdot 2^{n+1} = -2^n \cdot 10$

$A \cdot 2^n - A \cdot 2^n \cdot 2 = -2^n \cdot 10$

$-A 2^n = -2^n \cdot 10$ entonces $A = 10$

$a_{np} = 10 \cdot 2^n$ -> Particular

$a_n = k$ -> Homogenea

$a_n = k + 10 \cdot 2^n$ -> Solución general

seria -> $k = -3$

7 Ecuación que modela el pago mensual de un prestamo

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-1} \cdot i - M \qquad i = 1.75\%$$

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-1} \cdot 7/400 - M \qquad P_0 = 400\, m$$

$$= P_{n-1} \cdot \frac{407}{400} - M \qquad P_n = \left(P_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$P_n = \left(400m - \frac{(-M)}{1-\frac{407}{400}}\right)\left(\frac{407}{400}\right)^n + \frac{-M}{1-\frac{407}{400}}$$

$$= \left(400\, m - \frac{400m}{7}\right)\left(\frac{407}{400}\right)^n + \frac{400}{7}m$$

$$P_{36} = \left(400\, m - \frac{400}{7}m\right)\left(\frac{407}{400}\right)^{36} + \frac{400}{7}M = 0$$

$$= \left(\frac{407}{400}\right)^{36} \cdot 400m - \left(\frac{407}{400}\right)^{36}\frac{400}{7}M + \frac{400}{7}M = 0$$

$$\frac{400\,M}{7}\left(1 - \left(\frac{407}{400}\right)^{36}\right) = -\left(\frac{407}{400}\right)^{36} m$$

$$M = -\left(\frac{407}{400}\right)^{36} \cdot \frac{7}{400} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{407}{400}\right)^{36}}$$

$M = 15070026.23$

M A K A pago mensual

8

$U_1 = 200t + 200t \cdot 1\% - 1600t$

$U_n = U_{n-1} + U_{n-1} \cdot 1\% - 1600t \qquad P_0 = 200t$

$U_{n-1} \cdot \underbrace{\frac{101}{100}}_{a} - \underbrace{1600t}_{b}$

$$P_n = \left(P_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = \left[200t - \frac{(-1600t)}{1 - \frac{101}{100}}\right] \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^n + \left(\frac{-1600t}{1 - \frac{101}{100}}\right)$$

$$= (-159800t) \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^n + 160.000t$$

$200t + 200t \cdot 1\% - 1600t = -1398$

Con 1600 de demanda es difícil cubrirla con 200 de producción y su incremento del 1%.

Si la demanda es mayor que el incremento nunca se acumulará café. Si el para que se acumule cafe:

Demanda $< P_{n-1} \cdot m\%$

9 $P_n = \left(P_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$

$U_0 = 2000$

$U_1 = \underset{U_0}{2000} + \underset{U_0}{2000} \cdot 5\% + 100$

$U_n = U_{n-1} \underset{a}{\frac{21}{20}} + \underset{b}{100}$

$U_n = \left[2000 - \frac{(100)}{1 - \frac{21}{20}}\right] \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^n + \frac{100}{1 - \frac{21}{20}}$

$U_n = (4000) \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^n - 2000$

$U_{10} = 4515.58$

$\Delta\% = \frac{4515.58 - 2000}{2000} \approx 126\%$

10) $U_n - 3U_{n-1} = n \sim U_n - 3U_{n-1} = 0$

$$r^n - \frac{3r^n}{r} = 0$$

$$r^n r - 3r^n = 0$$

$$r^n(r-3) = 0$$

$$r = 3$$

Homogenea

$U_n = K r^n \to K \cdot 3^n$

Particular

$U_n = An + B$ Reemplazamos en la original

$U_{n-1} = A(n-1) + B$

$$U_n - 3U_{n-1} = n \to An + B - 3(A(n-1) + B) = n$$

$$An + B - 3An + 3A - 3B = n$$

$$-2An + 3A - 2B = n$$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 3A - 2B = 0 \end{cases} \sim \begin{matrix} A = -1/2 \\ B = -3/4 \end{matrix}$$

$$U_n = -\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$$

$U_n = K \cdot 3^n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} \longrightarrow U_n = \frac{25}{12} \cdot 3^n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$

$U_1 = K \cdot 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 5$

$K \cdot 3 - \frac{5}{4} = 5$

$K \cdot 3 = \frac{25}{4} \to K = \frac{25}{12}$

11) $\alpha)\ U_n = U_{n-1} + 2^n$

$\alpha)\ U_n = U_{n-1} + 2^n$

$\beta)\ U_n = 2U_{n-1} + n$

$$U_n - U_{n-1} = 0$$

$$r^n - \frac{r^n}{r} = 0$$

$$r^n \cdot r - r^n = 0$$

$$r^n (r-1) = 0$$

$$r = 1$$

Homogenea

$$U_n = k \cdot r^n \longrightarrow k \cdot 1^n = k$$

Particular

$$U_n = a\, 2^n$$

$$U_{n-1} = a\, 2^{n-1}$$

Reemplazamos en la orginal

$$a \cdot 2^n - a \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$a \cdot 2^n - a \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2} = 2^n$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^n = 2^n$$

$$a = 2$$

$$U_n = 2 \cdot 2^n$$

$$U_n = k + 2^{n+1}$$

Solución Particular

$\beta)$ $U_n = 2U_{n-1} + n \sim U_n - 2U_{n-1} = 0$

$$r^n - \frac{2r^n}{r} = 0 \longrightarrow r^n \cdot r - 2r^n = 0$$

$$r = 2$$

Homogenea

$U_n = K \cdot 2^n$

Particular

$U_n = An + B$

$U_{n-1} = A(n-1) + B$

Reemplazamos en la ecuación original

$An + B - 2\left(A(n-1) - B\right) = n$

$An + B - 2An + 2A + 2B = n$

$-An + 3B + 2A = n$

$$\begin{cases} -A = -1 \\ 3B + 2A = 0 \end{cases} \sim \begin{matrix} A = 1 \\ B = -2/3 \end{matrix}$$

Particular: $U_n = n - \frac{2}{3}$

General: $U_n = K \cdot 2^n + n - \frac{2}{3}$

12) $U_2 = K \cdot U_1 + 5 = 17 \rightarrow 4K = 12$

$K = 3$

$U_n = 3U_{n-1} + 5$

$U_1 = 4 = 3U_0 + 5$

$U_0 = -\frac{1}{3}$

$U_3 = 3 \cdot 17 + 5 = 56$

$U_4 = 3 \cdot 56 + 5 = 173$

$U_5 = 3 \cdot 173 + 5 = 524$

$U_6 = 3 \cdot 524 + 5 = 1577$

Segunda Opción

$$P_n = \left(P_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = \left[-\frac{1}{3} - \frac{5}{1-3}\right] \cdot 3^n + \frac{5}{1-3}$$

$$\left(\frac{13}{6}\right) \cdot 3^n - \frac{5}{2}$$

$$U_6 = \frac{13}{6} \cdot 3^6 - \frac{5}{2} = 1577$$

13)

$$U_2 = \frac{U_1}{U_0} = \frac{1}{6U_0}$$

$$U_3 = \frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{6U_0} = \frac{1}{U_0}$$

$$U_4 = \frac{U_3}{U_2} = \frac{6\cancel{U_0}}{\cancel{U_0}} = 6$$

$$U_5 = 6 \cdot U_0$$

$$U_6 = \frac{U_5}{U_4} = \frac{6 \cdot U_0}{6} = U_0$$

$$U_7 = \frac{U_6}{U_5} = \frac{U_0}{6U_0} = \frac{1}{6}$$

$$U_8 = \frac{U_7}{U_6} = \frac{1}{6} \cdot U_0$$

$$U_9 = \frac{U_8}{U_7} = \frac{6}{6} \cdot U_0 = U_0$$

$$U_{10} = \frac{U_9}{U_8} = \frac{U_0 \cdot 6}{U_0} = 6$$

$$U_{11} = \frac{U_{10}}{U_9} = \frac{6}{U_0}$$

$$U_{12} = \frac{U_{11}}{U_{10}} = \frac{6}{U_0 6} = \frac{1}{U_0}$$

$$U_{13} = \frac{U_{12}}{U_{11}} = \frac{1}{U_0} \cdot \frac{U_0}{6} = \frac{1}{6}$$

$$U_{14} = \frac{U_{13}}{U_{12}} = \frac{1}{6} \cdot U_0$$

$$U_{15} = \frac{U_{14}}{U_{15}} = \frac{1}{6} \cdot U_0 \cdot 6 = U_0$$

$$U_{16} = \frac{U_{15}}{U_{14}} = \frac{U_0}{U_0} \cdot 6 = 6$$

1 $1/6$
2 $1/6\, U_0$
3 $1/U_0$
4 6
5 $6 \cdot U_0$
6 U_0
7 $1/6$

Los valores están acotados de $\frac{1}{6}$ y 6, o en 7 valores.

14) $\dfrac{U_n}{U_{n+1}} = \dfrac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_n + 2U_{n-1}}$

Si $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{U_n}{U_{n+1}}$ $\exists$ (converge a L) entonces $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$ ± i

también $\exists$ y es L

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_n + 2U_{n-1}}$$

$$L = \frac{L + 2L}{L + 2L} \sim L = 1$$

Por tanto, el límite $\dfrac{U_n}{U_{n+1}} = 1$

15) $U_1 = -3$ $\quad n > 1$

$U_2 = 21$

$U_3 = 3$

$U_4 = 129$

$U_5 = 147$

$U_1 = -2 = (-1)(-3) \quad -5$

$U_2 = 21 = (-1)^2(-3)^2 \quad +12$

$U_3 = 3 = (-1)^2(-3)^3 \quad -24$

$U_4 = 129 = (-1)^4(-3)^4 \quad +48$

$U_5 = 147 = (-1)^5(-3)^5 \quad -96$

$$f(n) = (-1)^n(-3)^n - (-1)^n \cdot 6 \cdot 2^{n-1}$$

16) $U_{n+2} - 6U_{n+1} + 8U_n = 0$

$r^n \cdot r^2 - 6r^n r + 8r^n = 0$

$r^t(r^2 - 6r + 8) = 0 \sim r_1 = 2 \; ; \; r_2 = 4$

General

$U_n = k_1(2)^n + k_2(4)^n$

$U_1 = k_1 \cdot 2 + k_2 \cdot 4 = 10$ $\sim k_1 = 3$, $k_2 = 1$

$U_2 = k_1 \cdot 4 + k_2 \cdot 16 = 28$

$U_n = 3 \cdot (2)^n + (4)^n$ $\quad U_6 = 4288$

17) $r^n r^2 + 2r^n r + r^n = 0$

$r^n(r^2 + 2r + 1) = 0 \sim r_{1,2} = -1$

General

$U_n = k_1(-1)^n + k_2 n(-1)^n$

$U_1 = -k_1 - k_2 = -1$ $\sim k_1 = 4, \; k_2 = -3$

$U_2 = k_1 + 2k_2 = -2$

$U_n = 4(-1)^n - 3n(-1)^n$

18) $U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 2$

Solución homogenea (Válida para todo $f(n)$)

$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 0$

$r^n r^2 - 5r^n r + 6r^n = 0$

$r^n(r^2 - 5r + 6) = 0$ $\quad r_1 = 2 \quad r_2 = 3$

$U_n = K_1(2)^n + K_3(3)^n$ no existen condiciones iniciales

Solución particular

$U_n = a = U_{n-1} = U_{n-2}$

$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 2$

$a - 5a + 6a = 2 \qquad 2a = 2 \sim a = 1$

$U_n = K_1(2)^n + K_3(3)^n + 1$

Para $f(n) = n$

Solución particular $U_n = a + bn$
$U_{n-1} = a + b(n-1)$
$U_{n-2} = a + b(n-2)$

$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = n$

$a + bn - 5a - 5b(n-1) + 6a + 6b(n-2) = n$

$a + bn - 5a - 5bn + 5b + 6a + 6bn - 12b = n$

$2a - 7b + 2bn = n \qquad \begin{cases} 2a - 7b = 0 \\ 2b = 1 \end{cases}$

$a = \frac{7}{4}, \; b = \frac{1}{2}$ entonces

$U_n = K_1 \cdot (2)^n + K_3(3)^n + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}n$

Para $f(n) = 5^n$ $\quad a k^n \ (an\, k^n)$

Solución Particular

$U_n = a5^n,\ U_{n-1} = a5^{n-1},\ U_{n-2} = a5^{n-2}$

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 5^n$$
$$a5^n - 5a5^{n-1} + 6a5^{n-2} = 5^n$$
$$a5^n - a5^n + 6a5^{n-2} = 5^n$$
$$\frac{6a5^n}{25} = 5^n$$
$$a = \frac{25}{6}$$

$$U_n = k_1 \cdot (2)^n + k_3 (3)^n + \frac{25}{6} 5^n$$
$$k_1 \cdot (2)^n + k_3 (3)^n + \frac{5^{n+2}}{6}$$

Para $f(n) = 1 + n^2$ $\quad \boxed{a + bn + Cn^2}$

$U_n = a + bn + Cn^2$

$U_{n-1} = a + b(n-1) + C(n-1)^2$

$U_{n-2} = a + b(n-2) + C(n-2)^2$

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 1 + n^2$$

$a + bn + Cn^2 - 5a - 5b(n-1) - 5C(n-1)^2 + 6a + 6b(n-2) + 6C(n-2)^2$
$= 1 + n^2$

$2a + 2nb + 2n^2c - 7b - 14nc + 19c = 1 + n^2$
$(2a - 7b + 19c) + n(2b - 14c) + n^2(2c) = 1 + n^2$

$$a = 8 \ ; \ b = \frac{7}{2} \quad c = \frac{1}{2}$$

$$U_n = k_1 \cdot (2)^n + k_3 (3)^n + 8 + \frac{7}{2} n + \frac{1}{2} n^2$$

19) $G(x) = 0 + 20x + U_2 x^2 + \dots$

$U_2 = \underbrace{3U_1}_{20} - \underbrace{4U_0}_{0}$ $\quad U_4 = 3U_3 - 4U_2$

$U_3 = 3U_2 - 4U_1$

$G(x) = 0 + 20x + (3U_1 - 4U_0)x^2 + 3U_2 - 4U_1)x^3 + (3U_3 - 4U_2)x^4 \dots$

$G(x) = 0 + 20x + (3U_1x^2 + 3U_2x^3 + 3U_3x^4) + 2 + n - 7 - (4U_0x^2 + 4U_1x^3$

$+ 4U_2x^4)$

$G(x) = 0 + 20x + 3x\,(G(x) - U_0) - 4x^2(\theta(x))$

$0 + 20x + 3x\,G(x) \quad - 4x^2 G(x)$

$\frac{G(x)}{x} = 20 + 3\,G(x) - 4x\,G(x)$

$G(x) - 3x\,G(x) + 4x^2 G(x) = 20x$

$G(x) = \frac{20x}{1 - 3x + 4x^2} =$

$\frac{1}{1 - x(-3 + 4x)}$ $\quad G(x)\left(\frac{1}{x} - 3 + 4x\right.$

$\frac{1}{(1 - x(4x-3))} = 1 + x(4x-3) + (x(4x-3))^2 + (x(4x-3))^3$

$1 + 4x^2 - 3x + 16x^4 - 24x^3 + 9x^2 + 64x^6 - 144x^5 + 108x^4 \dots$

$\dots - 27x^3 + 258x^8 - 768x^7 + 864x^6 - 432x^5 + 81x^4$

$1 - 3x + x^2(4 + 9) - x^3(24 + 27) + x^4(16 + 108 + 81)$

$-3 \qquad 13 \qquad 51 \qquad 205$

Al dar un polinomio irreducible asumimos $n \geq 2$

$U_n = -3U_{n-1} + 4U_{n-2} = 0 \qquad U_0 = 0 \,,\; U_1 = 20$

$U_2 = -3U_1 + 4U_0$

$U_3 = -3U_2 + 4U_1$

$U_4 = -3U_3 + 4U_2$

$G(x) = 0 + 20x + (-3U_1 + 4U_0)x^2 + (-3U_2 + 4U_1)x^3 + (-3U_3 + 4U_2)x^4 + \cdots$

$\cdots U_n \cdot x^n$

$= 0 + 20x + (-3U_1x^2 - 3U_2x^3 - 3U_3x^4 + \cdots) +$

$(4U_0x^2 + 4U_1x^3 + 4U_2x^4 + \cdots)$

$0 + 20x - 3x(U_1x + U_2x^2 + U_3x^3 + \cdots) +$

$4x^2(U_0 + U_1x + U_2x^2 + \cdots)$

$G(x) = 0 + 20x - 3x(G(x) - U_0) + 4x^2(G(x))$

$G(x) + 3xG(x) - 4x^2G(x) = 20x$

$$G(x) = \frac{20x}{1 + 3x - 4x^2} = \frac{20x}{-(4x+1)(x-1)}$$

Por fracciones parciales tenemos

$$G(x) = \frac{-4}{4x+1} - \frac{4}{x-1} = \frac{-4}{4x+1} + \frac{4}{1-x}$$

$4x = u$

$(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \cdots + (-1)^n u^n$

$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

$$G(x) = 4\left[1 + x + x^2 + \cdots + x^n - (1 - 4x + (4x)^2 - (4x)^3 \cdots)\right]$$

$$= 4\left[(1-1) + (x + 4x) + (x^2 - (4x)^2) + (x^3 + (4x)^3) \cdots\right]$$

$$= 4\left[(1-4) + x(1+4) + x^2(1-4^2) + x^3(1+4^3)\right]$$

AK. A

$$4\left[x^n(1 + 4^n \cdot (-1)^{n+1})\right] \sim U_n = 4(1 + 4^n \cdot (-1)^{n+1})$$

$$U_0 = 4(1 + 4^0 \cdot (-1)^1) = 0 \; ; \; U_1 = 4(1 + 4^1 \cdot (-1)^2) = 20$$

20)

$n \geq 2$

$U_n = U_{n-2} + U_{n-1} = 0 \qquad U_0 = 0, \; U_1 = 1$

$U_2 = U_0 + U_1 = 1$

$U_3 = U_1 + U_2 = 2$

$U_4 = U_2 + U_3 = 3$

$$G(x) = 0 + x + (U_0 + U_1)x^2 + (U_1 + U_2)x^3 + (U_2 + U_3)x^4 + \cdots$$

$$G(x) = 0 + x + (U_0 x^2 + U_1 x^3 + U_2 x^4 + \cdots) + (U_1 x^2 + U_2 x^3 + U_3 x^4) \cdots$$

$$G(x) = 0 + x + x^2(U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots +) \, x(U_1 x + U_2 x^2 + U_3 x^3 + \cdots)$$

$$= 0 + x + x^2 \cdot G(x) + x(G(x) - U_0)$$

$$(-x^2 - x + 1) \cdot G(x) = x$$

$$G(x) = \frac{x}{1 - x^2 - x}$$

En general, si resolvemos mediante cualquier método, particularmente acá usando L_z^{-1} tenemos

$$U_n = -(-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n - \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Para el n-esimo termino de la sucesión de fibonacci

21) $U_n - 2U_{n-1} = 3^n \quad , \quad n \geq 1 \quad U_0 = 1$

Planteamos la homogenea

$U_n - 2U_{n-1} = 0$

$U_1 = 2U_0 = 2 \qquad U_3 = 2 \cdot U_2 = 8$

$U_2 = 2 \cdot U_1 = 4 \qquad U_4 = 2 \cdot U_3 = 16$

$G(x) = 1 + (2U_0)x + (2U_1)x^2 + (2U_2)x^3 + (2U_3)x^4 + \dots +$

$G(x) = 1 + 2x + (2 \cdot 2)x^2 + (2 \cdot 4)x^3 + (2 \cdot 8)x^4 + \dots$

En general, tenemos que el n-termino de

$G(x) = 2(2^n)x^n \sim U_n = 2^n \cdot 2$

resolvemos homogenea de f(n) particular

$3^n = 0 \qquad U_n = \alpha 3^n \; ; \; U_{n-1} = \alpha 3^{n-1}$

$\alpha 3^n - 2 \cdot \alpha 3^{n-1} = 3^n$

$\alpha 3^0 - 2 \cdot \alpha 3^{-1} = 3^0 = 1$

$\alpha - \frac{2}{3}\alpha = 1$

$\frac{1}{3}\alpha = 1$

$\alpha = 3$

$U_n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$

$U_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

$U_0 = 3^1 - 2^1 = 1$