UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTA

MATEMÁTICAS DISCRETAS II

Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

Sergio Alejandro Nova Pérez
Ingeniería de Sistemas y computación
Facultad Ingeniería

Demostraciones

Sergio Alejandro Nova Pérez

February 2023

1 DEMOSTRACIÓN QUE EL *KERNEL*(θ) Y *IMG*(θ) SON SUBGRUPOS

En esta sección, el objetivo es demostrar que tanto el kernel (θ) como la imagen (θ) cumplen con las propiedades de un grupo. Para lograr esto, es necesario establecer que un subgrupo es cerrado bajo la operación del grupo. En otras palabras, si se toman dos elementos aleatorios del subgrupo y se operan entre sí, el resultado también debe ser parte del subgrupo. A esto se le conoce como propiedad de clausura. Además, un subgrupo debe incluir al elemento identidad. Por último, es importante destacar que para cada elemento en el subgrupo, existe otro elemento dentro del subgrupo tal que al combinarlos mediante la operación del grupo, se obtiene el elemento identidad del grupo.

1.1 DEMOSTRACIÓN PARA EL KERNEL(θ)

Si k_1, $k_2 \in$ *Kernel(θ)* se dice que $\theta\ (k_1) = \theta\ (k_2) = e$. Por lo tanto, $\theta\ (k_1,K_2) = \theta\ (k_1)\theta\ (k_2) = e$. Así entonces, $(k_1) * (k_2) \in$ Kernel(θ).
$e \in$ Kernel(θ), dado que $\theta\ (e) = \tilde{e}$, donde e es el elemento identidad del grupo de partida y $\tilde{e}$ es el elemento identidad del grupo de llegada.
Si $k_1 \in$ Kernel(θ), entonces $\theta\ (k_1) = e$. Por lo tanto,$\theta\ (k_1^{-1}) = (\theta(k_1))^{-1} = (e)^{-1}$. Entonces, $(k_1^{-1}) \in$ Kernel(θ).

1.2 DEMOSTRACIÓN PARA IMG(θ)

Si I_1 y I_2 pertenecen al grupo de partida , entonces se tiene que $\theta(I_1) = \tilde{I}_1$ y $\theta(I_2) = \tilde{I}_2$. Por lo tanto, $\theta\ (I_1 I_2) = \theta\ (I_1)\theta\ (I_2) = \tilde{I}_1\ \tilde{I}_2$. Por lo tanto, $\tilde{I}_1 * \tilde{I}_2 \in$ *Img(θ)*.
Para cada elemento identidad del grupo de llegada $e \in$ *Img(θ)*, se tiene que $\theta(e) = \tilde{e}$, donde e es elemento identidad del grupo de partida y $\tilde{e}$ es el elemento identidad del grupo de llegada.
Si $I \in$ *Img(θ)* entonces existe un elemento a en el grupo, que satisfaga $\theta(a) = I$. Dado que el inverso de a es a^{-1} entonces este se encuentra en el grupo. Por lo tanto, $\theta(a^{-1}) = ((\theta(a)))^{-1} = I^{-1}$ y se tiene $I^{-1} \in$ *Img(θ)*

1.1 DEMOSTRACIÓN: SEA G UN GRUPO Y $x \in G$. *SEA S UN SUBGRUPO DE G QUE CONTIENE A x. SE DESEA DEMOSTRAR QUE S ES UN SUGBRUPO DE T. O QUE s* $\subseteq$ ***T***

Teniendo en cuenta la demostración anterior. Demostración: S posee la identidad del grupo e. Dado que S es un subgrupo de G , entonces se dice que $e \in S$. Y dado que $x \in T$ y T son subgrupos de G, por ende $ex = x$ y $xe = x$ pertenecen a T. Entonces, e se encuentra en S y T, lo que quiere decir que $S \in T$. $\forall$ s_1 y $s_2 \in S$, su producto $s_1 * s_2$ cumple que $\in S$. No obstante, dado que S es un subgrupo de G, entonces $s_1 * s_2 \in G$. Por otra parte dado de T es otro subgrupo de G que contiene a x entonces $s_1 * s_2\ x \in T$. Ahora bien, $s_1 * s_2 \in S$ y en T, nos demuestra que S es cerrado. $\forall s \in S$, debe existir un elemento inverso $S^{-1} \in S$ que satisfaga que $S^{-1} * s = e$. Dado que $x \in T$ y T es un subgrupo de G, entonces $S^{-1}x \in T$. Sin embargo, $S^{-1} * s = e$, donde e es el elemento identidad de G. Se tiene que el elemento inverso $S^{-1} \in S$.