UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE BOGOTA

MATEMATICAS DISCRETAS II

Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

Sergio Alejandro Nova Pérez
Ingeniería de Sistemas y computación
Facultad Ingeniería

Primera Tarea

Sergio Alejandro Nova Pérez

February 2023

1 Ejercicios

1. Comprobar si la siguiente tabla corresponde a un monoide.
2. Demostrar si el producto de matrices cuadradas es asociativo
3. Demostrar si el producto de números complejos es asociativo

SOLUCIÓN

1 Dada la siguiente tabla, demostrar si corresponde a un monoide

*	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

CARACTERÍSTICAS DE UN MONOIDE

Las características de un monoide deben ser

1 **Conjunto**: Un monoide se define sobre un conjunto no vacío, el cual puede ser finito o infinito.

2 **Operación binaria**: Debe haber una operación binaria definida en el conjunto del monoide. Esto significa que para cualquier par de elementos del conjunto, la operación binaria debe combinarlos y producir otro elemento del conjunto. La operación se denota generalmente con el símbolo "*".

3 **Asociatividad**: La operación binaria en un monoide debe ser asociativa. Esto implica que para cualquier tripleta de elementos a, b y c en el conjunto, se cumple la propiedad de asociatividad: (a * b) * c = a * (b * c). En otras palabras, el resultado de la operación no depende del orden en que se realice.

4 **Elemento neutro**: El monoide debe tener un elemento neutro, denotado comúnmente como "e" o "1". Este elemento cumple la propiedad de que, para cualquier elemento a en el conjunto, se cumple que a * e = e * a = a. En otras palabras, cuando se combina cualquier elemento del monoide con el elemento neutro, el resultado es el mismo elemento.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos afirmar que nuestra tabla no es un monoide, ya que, por más que se cumpla la característica de conjunto, en el caso de la **asociatividad** se tiene que

$$\begin{aligned} (b * c) * d &= b * (c * d) \\ d * d &= b * c \\ b &\neq d \end{aligned}$$

Podemos observar que para esta tabla en este caso no se tiene la asociatividad, y con el hecho de que en un caso no se cumpla la condición podemos afirmar que dicha tabla no es un monoide

2 Demostrar si el producto de matrices cuadradas es asociativo

$$\text{Siendo} \quad A, B, C \in R^{2*2}, donde \quad a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R$$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Para ello se debe cumplir la siguiente igualdad, si esta se cumple se demuestra que el producto de matrices cuadradas es asociativo

$$(A * B) * C = A * (B * C) \tag{1}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} b_{11} \cdot c_{11} + b_{12} \cdot c_{21} & b_{11} \cdot c_{12} + b_{12} \cdot c_{22} \\ b_{21} \cdot c_{11} + b_{22} \cdot c_{21} & b_{21} \cdot c_{12} + b_{22} \cdot c_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} \cdot c_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot c_{11} + a_{11} \cdot b_{12} \cdot c_{21} + a_{12} \cdot b_{22} \cdot c_{21} & a_{11} \cdot b_{11} \cdot c_{12} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot c_{12} + a_{11} \cdot b_{12} \cdot c_{22} + a_{12} \cdot b_{22} \cdot c_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} \cdot c_{11} + a_{22} \cdot b_{21} \cdot c_{11} + a_{21} \cdot b_{12} \cdot c_{21} + a_{22} \cdot b_{22} \cdot c_{21} & a_{21} \cdot b_{11} \cdot c_{12} + a_{22} \cdot b_{21} \cdot c_{12} + a_{21} \cdot b_{12} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot b_{22} \cdot c_{22} \end{bmatrix}\right)$$
$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} \cdot c_{11} + a_{11} \cdot b_{12} \cdot c_{21} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot c_{11} + a_{12} \cdot b_{22} \cdot c_{21} & a_{11} \cdot b_{11} \cdot c_{12} + a_{11} \cdot b_{12} \cdot c_{22} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot c_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \cdot c_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} \cdot c_{11} + a_{21} \cdot b_{12} \cdot c_{21} + a_{22} \cdot b_{21} \cdot c_{11} + a_{22} \cdot b_{22} \cdot c_{21} & a_{21} \cdot b_{11} \cdot c_{12} + a_{21} \cdot b_{12} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot b_{21} \cdot c_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \cdot c_{22} \end{bmatrix}\right)$$

De acuerdo a lo anterior podemos afirmar que se satisface la condición de igualdad para demostrar que el producto de matrices cuadradas es asociativo

3 Demostrar si el producto de números complejos es asociativo.

Primero debemos definir el producto de números complejos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) \\ ac + (bc + ad)i + bdi^2 \\ (Dado \;\; que \;\; i = \sqrt{-1} \;\; entonces \;\; i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1) \\ ac + (bc + ad)i - bd \\ (ac - bd) + (bc + ad)i \\ ac + (bc + ad)i - bd \\ (ac - bd) + (bc + ad)i \end{aligned}$$

Donde a, b, c, d $\in R$; se debe comprobar si la siguiente condición de igualdad se cumple para cualquier elemento del conjunto:

$$(a + bi) \cdot [(c + di) \cdot (e + fi)] = [(a + bi) \cdot (c + di)] \cdot (e + fi) \tag{2}$$

Donde $\quad$ e,f $\in R$

De tal manera que, operando:

$$
\begin{aligned}
(a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)] &=[(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(e+fi)\\
(a+bi)\cdot[(ce-df)+(de+cf)i] &=[(ac-bd)+(bc+ad)i]\cdot(e+fi)\\
a(ce-df)+a(de+cf)i+b(ce-df)i+b(de+cf)i^2 &=e(ac-bd)+e(bc+ad)i+f(ac-bd)i+f(bc+ad)i^2\\
a(ce-df)+a(de+cf)i+b(ce-df)i-b(de+cf) &=e(ac-bd)+e(bc+ad)i+f(ac-bd)i-f(bc+ad)\\
a(ce-df)+[a(de+cf)+b(ce-df)]i-b(de+cf) &=e(ac-bd)+[e(bc+ad)+f(ac-bd)]i-f(bc+ad)\\
ace-adf+[ade+acf+bce-bdf]i-bde-bcf &=eac-ebd+[ebc+ead+fac-fbd]i-fbc-fad\\
ace-adf+[ade+acf+bce-bdf]i-bde-bcf &=ace-adf+[ade+acf+bce-bdf]i-bde-bcf
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se puede afirmar que la igualdad se cumple, de esta manera comprobamos la asociatividad del producto de números complejos.