

The Contest Behind the Feed: Optimal Contest for Recommender Systems(论文分享)

阳先毅

浙江大学计算机科学与技术学院

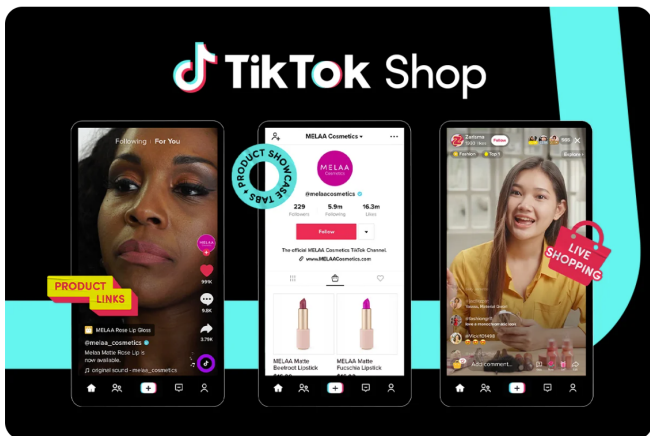
2026 年 1 月 4 日

- ① 故事介绍 & 模型设定
- ② 均衡分析
- ③ 目标函数化简
- ④ 单一目标最优结构
- ⑤ 双目标凸组合最优结构
- ⑥ 总结

- 1 故事介绍 & 模型设定
- 2 均衡分析
- 3 目标函数化简
- 4 单一目标最优结构
- 5 双目标凸组合最优结构
- 6 总结

推荐系统无处不在！

不知大家在浏览 bilibili, 抖音, 快手, 腾讯视频, 爱奇艺等视频平台时, 是否好奇自己不经意间刷新出的下一个视频是按照什么样的算法推荐出来的呢?



关于推荐视频，我们要考虑什么？

显然，推荐系统可以看做一系列视频生产者在**给定规则**下的博弈，在这个博弈中，有三方的利益都会受到影响：

- 观众：观众希望获得更高的视频的期望质量。
- 生产者：生产者希望能够自己的视频能够被推荐，当然他也要考虑自己制作视频的成本。
- 平台：按照文章的设定，平台可以考虑观众的收益，也可以考虑所有生产者上传视频的期望质量，也可以是二者的凸组合。（*）

关于“**给定规则**”，文中（包括许多实际的视频平台）采用将生产者提交的视频按照质量从高到低排序后的位置赋予不同的推荐概率。例如，对于 5 个生产者的情况，平台可以承诺 $p = \{1, 0, 0, 0, 0\}$ (Hardmax) 或 $p = \{1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5\}$ (Uniform)。

模型的正式建立——前言

在此正式地建立这个模型之前，我们应当强调：该模型相较于前人研究的单一目标模型（例如 Barut 等¹ (1998) 以及 Jagadeesan 等² (2024)）是更为一般和抽象的，作者的主要贡献有以下三个：

- ① 证明了建立的模型存在唯一的混合策略纳什均衡 (MNE)。
- ② 分析了单一目标情形下 Hardmax 和 Uniformbutlast 策略何时更好。
- ③ 给出了两目标凸组合时最优解存在的性质（尽管不存在闭式解）。

¹Yasar Barut and Dan Kovenock. *The symmetric multiple prize all-pay auction with complete information*. European Journal of Political Economy, 14(4):627–644, 1998.

²Meena Jagadeesan, Nikhil Garg, and Jacob Steinhardt. *Supply-side equilibria in recommender systems*. Advances in Neural Information Processing Systems, 36, 2024.

模型的正式建立

本文的模型是基于排名模型，即推荐系统承诺一个向量 \mathbf{p} ，使得 $\mathbf{p} \in \Delta$ ，其中

$$\Delta = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0, \\ \sum_{i=1}^n p_i \leq 1 \end{array} \right. \right\},$$

即有序的 n 维概率单纯形。当生产者提交他们的视频时，平台观测到质量 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ，将质量从高到低排列为 $q_{(1)} \geq q_{(2)} \geq \dots \geq q_{(n)}$ ，然后以 p_i 的概率推荐那个质量为 $q_{(i)}$ 的视频。我们先介绍两种常见策略：

- ① HardMax 策略： $p_1=1$ 。
- ② UniformButLast 策略： $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = \frac{1}{n-1}$ ，同时 $p_n = 0$ 。

模型的正式建立——均衡描述

显然生产者可以选择一个混合策略，即一个概率测度 μ_i ，其支撑集包含于 $\mathcal{R}_{\geq 0}$ ，对应一个 cdf $F_i: \mathcal{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$ ；纯策略对应 μ_i 的支撑集是单点的情况。我们记 n 个人的策略组合为 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ ，对第 i 个人记 $\mu_{-i} = (\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n)$ 。

记 \mathcal{U}_i 为用户 i 的收益，显然它依赖于 \mathbf{p} 和 μ 。于是，给定 \mathbf{p} ，我们定义：均衡：策略组合 μ 构成纳什均衡，当且仅当对任意 $i \in [n]$ 和任意备选策略 μ'_i ，

$$\mathcal{U}_i(\mu_i, \mu_{-i}, \mathbf{p}) \geq \mathcal{U}_i(\mu'_i, \mu_{-i}, \mathbf{p}).$$

- 若所有 μ_i 均为纯策略，则称为 纯策略纳什均衡 (PNE)；
- 否则称为 混合策略纳什均衡 (MNE)；
- 若存在公共策略 μ 使得 $\mu_i = \mu$ 对所有 i 成立，则称为 对称均衡，此时用 F 表示其公共 cdf。

模型的正式建立——生产者效用

生产者效用简单来说就是被推荐后的收益减去制作视频付出的成本。
第 i 个生产者的期望收益表示为：

$$R_i(\mu_i, \mu_{-i}, \mathbf{p}) = \mathbb{E}_{\mu}[\mathbf{1}\{I = i\}],$$

其中 I 是在给定策略组合 $\mu = (\mu_i, \mu_{-i})$ 和推荐向量 \mathbf{p} 下，被系统推荐的内容索引。

我们记生产成本为 $c(q) = q^{\beta}$ ，其中 $\beta > 0$ ，用于刻画成本函数的凹性 ($\beta < 1$) 或凸性 ($\beta > 1$)。给定其他人的策略 μ_{-i} ，第 i 个生产者采用策略 μ_i 的期望效用为：

$$U_i(\mu_i, \mu_{-i}, \mathbf{p}) = R_i(\mu_i, \mu_{-i}, \mathbf{p}) - \mathbb{E}_{q_i \sim \mu_i}[c(q_i)].$$

同时需要注意，该模型已满足个体理性 (IR)：生产者总可以选择 $q = 0$ (即不生产)，此时成本为 0、收益非负，从而保证效用 ≥ 0 。

模型的正式建立——用户效用以及平台质量

用户效用简单来说就是推荐给我的视频的期望质量，可以如下表示：

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{p}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{I = i\} \cdot q_i \right],$$

其中 I 是在策略组合 $\boldsymbol{\mu}$ 和推荐向量 \boldsymbol{p} 下被选中的内容索引， q_i 是第 i 个生产者提交的内容质量。

同时，平台本身也希望维持整体内容质量的高水平——这一因素会影响用户的长期信任以及平台的声誉。我们定义平台质量为所有提交内容的平均期望质量：

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{q_i \sim \mu_i} [q_i].$$

Tips: 当 \boldsymbol{p} 固定时，我们简记 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu})$ 和 $\mathcal{W}(\boldsymbol{\mu})$ 分别表示 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{p})$ 和 $\mathcal{W}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{p})$ 。

模型的正式建立——RS 设计者目标

我们记平台目标为最大化用户福利 $\mathcal{W}(\mu, \mathbf{p})$ 与平台质量 $\mathcal{Q}(\mu, \mathbf{p})$ 的加权和。该过程依赖于推荐向量 \mathbf{p} 。由于博弈本身是对称的，我们希望设计 \mathbf{p} ，使其在某个对称均衡下最大化目标函数：

$$\max_{\mathbf{p} \in \Delta} \alpha \mathcal{W}(\mu, \mathbf{p}) + (1 - \alpha) \mathcal{Q}(\mu, \mathbf{p})$$

s.t. μ 构成关于 \mathbf{p} 的纳什均衡。

当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$ 时，优化目标是 **单目标型的**，即仅关注平台质量或用户福利；否则称为具有凸偏好 (convex preference) 的多目标优化。

Tips: 我们研究的策略是非平凡的 (non-uniform)，因为若 $p_i = p_j$ 对所有 $i \neq j$ 成立 (即均匀推荐)，则生产者会选择零投入 ($q = 0$)。

- ① 故事介绍 & 模型设定
- ② 均衡分析
- ③ 目标函数化简
- ④ 单一目标最优结构
- ⑤ 双目标凸组合最优结构
- ⑥ 总结

均衡分析——概述

接下来我们可以分析均衡是否存在以及均衡时的一些性质了，我将作者本处的脉络总结如下：

- ① 首先，证明对于任意非平凡 p ，均不存在纯策略纳什均衡 → 转向混合策略纳什均衡分析。
- ② 证明对于非平凡 p ，必然存在一个混合策略纳什均衡 (MNE)，该证明是套用 Reny(1999) 的结论。
- ③ 最后说明了 F 是无原子且严格单调递增的，同时 MNE 也是唯一的。

由于 (2) 涉及较多拓扑学知识，我将尽量略过。

均衡分析——不存在 PNE

假设存在某个纯策略纳什均衡 (PNE), 对应质量满足

$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n \geq 0$ 。若存在 i 使得 $q_i > 0$ 但 $p_i = 0$, 则生产者 i 可将质量降至 0 以节省成本而不影响收益, 矛盾。因此, 在均衡中若 $q_i > 0$, 必有 $p_i > 0$ 。

不失一般性, 设 i 是满足 $q_i > 0$ 的最大下标。我们分两种情况讨论:

Case 1: 无质量并列 (strict ordering)

即 $q_1 > q_2 > \dots > q_i$ 。对任意 $j \leq i$, 生产者 j 可略微降低质量至 $q'_j = q_j - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 足够小), 仍满足 $q'_j > q_{j+1}$, 从而保持推荐位置不变, 但成本严格下降, 效用提升。故该情形不可能是均衡。

Case 2: 存在质量并列 (tie)

设从第 j 位开始有 $k \geq 2$ 个生产者质量相同: $q_j = q_{j+1} = \dots = q_{j+k-1}$ 。由于平台采用均匀随机打破相等, 期望收益为 $\frac{p_j + p_{j+1} + \dots + p_{j+k-1}}{k}$

- 若 $p_j = p_{j+k-1}$, 则生产者 j 可略微降低质量, 排至该组末尾, 仍获得相同期望收益 (因 p_{j+k-1} 不变), 但成本下降, 有利可图;
- 若 $p_j > p_{j+k-1}$, 则生产者 j 可略微提高质量至 $q'_j = q_j + \varepsilon$, 独占位置 j , 获得收益 $p_j > \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} p_{j+\ell}$, 而成本仅微增。

均衡分析——MNE 的存在性 (简述)

为确保后续分析有解, 需先证明: 对任意非平凡推荐策略 p , 生产者博弈存在对称混合策略纳什均衡。

作者借助 Reny (1999) 的一般性存在性定理, 通过以下关键步骤完成证明:

- 模型满足 拟对称性与 紧致 **Hausdorff** 行动空间 (Lemma 7);
- 生产者的期望效用关于策略 μ 在 弱 * 拓扑下上半连续 (Lemma 8);
- 给定他人策略, 个体收益关于自身质量 q 单调递增 (Lemma 9);
- 博弈满足 对角更好响应安全 (diagonal better-reply security) (Lemma 10)。

由此, Reny (1999) 定理适用, 对称 **MNE** 存在。

注: 此处仅列出结论所依赖的关键引理, 省略技术细节。完整证明见原文附录 B。

均衡分析——c.d.f. 的相关性质

在对称 MNE 存在的前提下，所有生产者采用相同的混合策略 μ 。为便于后续分析，我们考察其累积分布函数 F 的结构性质。

Proposition 2

给定任意非平凡推荐策略 p 及其对应的对称 MNE μ ， μ 的累积分布函数 F 是无原子的 (atomless)，且在区间 $[0, q_{\max}]$ 上严格递增，其中

$$q_{\max} = \sup\{y : F(y) < 1\}.$$

证明.

(i) 无原子性：假设存在某点 q 使得 $\mu(\{q\}) = \alpha > 0$ 。则以正概率 α^{n-1} ，其余 $n-1$ 个生产者也选择 q 。此时若生产者 i 微扰至 $q + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 极小)，由于策略 p 非平凡 (即 $p_1 > p_n$)，其排名将严格提升，从而获得高于均衡水平的期望收益，与 MNE 矛盾。

(ii) 严格递增性：假设存在区间 $(a, b) \subseteq [0, q_{\max}]$ 使得 F 在其上为常数 (即支撑集内有“空隙”)。- 若 $b < q_{\max}$ ，则将质量从 b 移至 a 可提升排名而不增加成本，严格改善效用；- 若 $a > 0$ ，则将质量从 a 移至 0 可节省成本而排名不变 (因区间内无他人)，同样改善效用。两种情形均违背均衡条件，故 F 必在 $[0, q_{\max}]$ 上严格递增。

均衡分析——效用与福利的显式表达

由 Proposition 2, 均衡 c.d.f. F 无原子, 因此任意两个生产者的质量相等的概率为零 (即几乎必然无平局)。这一性质使我们基于排名唯一地确定推荐结果, 并得到以下显式表达式。

1. 单个生产者的期望效用 (给定其选择质量 q , 其余人采用 μ):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_i(q, \mu_{-i}, p) &= \underbrace{\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{I = k\} \right]}_{\text{被推荐概率}} - c(q) \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i \cdot \Pr(\text{自己的内容排名第 } i) - c(q) \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i \binom{n-1}{i-1} F(q)^{n-i} (1 - F(q))^{i-1} - c(q).
 \end{aligned}$$

2. 用户福利:

$$\mathcal{W}(\mu, p) = \mathbb{E}_{q \sim \mu} \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{I = k\} \cdot q_k \right] = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \mathbb{E}_{q \sim \mu} [q_{(i)}],$$

均衡分析——均衡唯一性

不仅对称 MNE 存在，而且在给定条件下是唯一的。

定理 6 (对称 MNE 的唯一性)

固定 $n \geq 2$ 、 $\beta > 0$ ，以及一个非平凡的基于排名的策略 $p = (p_1, \dots, p_n)$ ，其中 $p_1 \geq \dots \geq p_n \geq 0$ 且不全相等。则该博弈存在唯一的对称混合纳什均衡。

证明概要.

引入如下记号（将在后续频繁使用）：

$$a_i(x) = \binom{n-1}{i-1} x^{n-i} (1-x)^{i-1}, \quad h(x, p) = \sum_{i=1}^n p_i a_i(x), \quad x \in [0, 1].$$

在任意对称 MNE 中，设其累积分布函数为 F 。由均衡的无差异条件，对任意 $q \in [0, q_{\max}]$ ，有

$$u_0 + q^\beta = \sum_{i=1}^n p_i \binom{n-1}{i-1} F(q)^{n-i} (1-F(q))^{i-1} = h(F(q), p),$$

代入 $q = 0$ 可得 $u_0 = p_n$ 。

均衡分析——均衡唯一性（续）

引理 17

对任意非平凡的排名策略 $p = (p_1, \dots, p_n)$ (即 $p_1 > p_n$)，函数

$$h(x, p) = \sum_{i=1}^n p_i \binom{n-1}{i-1} x^{n-i} (1-x)^{i-1}$$

在区间 $x \in [0, 1]$ 上严格递增。

证明概要（续）

由命题 2， F 在 $[0, q_{\max}]$ 上连续且严格递增。又由引理 17，对任意非平凡策略 p ，函数 $h(\cdot, p)$ 在 $[0, 1]$ 上严格递增，故在区间 $[h(0, p), h(1, p)] = [p_n, p_1]$ 上存在连续反函数。于是对所有 $q \in [0, q_{\max}]$ ，有

$$F(q) = h^{-1}(p_n + q^\beta; p).$$

此式唯一确定了 F 在其支撑集上的形式。结合（类似前面的）边界分析可知，所有均衡的支撑集必为同一区间 $[0, q_{\max}]$ 。因此，累积分布函数 F 被唯一确定，从而对称 MNE 唯一。

- 1 故事介绍 & 模型设定
- 2 均衡分析
- 3 目标函数化简
- 4 单一目标最优结构
- 5 双目标凸组合最优结构
- 6 总结

目标函数化简——主定理 1

回顾我们在第 11 页定义的平台优化目标：

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu} \in \Delta} \quad & \alpha \mathcal{W}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{p}) + (1 - \alpha) \mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{p}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\mu} \text{ 构成关于 } \boldsymbol{p} \text{ 的纳什均衡.} \end{aligned}$$

现在将该目标转化为一个不显含均衡策略 $\boldsymbol{\mu}$ 的表达式，如下定理所示。

定理 1（平台问题的等价形式）

平台的优化问题可等价写为以下形式：

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{p}} \quad & \alpha n \int_0^1 h(x, \boldsymbol{p})^{1+\frac{1}{\beta}} dx + (1 - \alpha) \int_0^1 h(x, \boldsymbol{p})^{\frac{1}{\beta}} dx \\ \text{s.t.} \quad & p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n = 0, \\ & \sum_{i=1}^n p_i = 1, \end{aligned}$$

其中 $h(x, \boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^n a_i(x) p_i$, $a_i(x) = \binom{n-1}{i-1} x^{n-i} (1-x)^{i-1}$ 为 $n-1$ 阶 Bernstein 基多项式。

目标函数化简——主定理证明 (notations)

为简化主定理的证明，我们引入两个辅助函数 $\psi(x, p)$ 和 $\phi(x, p)$ ，并给出其关键性质。

记号 1: 定义函数

$$\psi(x, p) = \sum_{i=2}^{n-1} p_i (n-1) \left[\binom{n-2}{i-1} x^{n-i-1} (1-x)^{i-1} - \binom{n-2}{i-2} x^{n-i} (1-x)^{i-2} \right] + p_1 (n-1) x^{n-2} - p_n (n-1) (1-x)^{n-2}.$$

记号 2: 定义函数

$$\begin{aligned} \phi(x, p) &= \sum_{i=1}^n \left(1 - \sum_{j=1}^i \binom{n}{j-1} (1-x)^{j-1} x^{n-j+1} \right) p_i \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} (1-x)^{i-1} x^{n-i+1} \left(\sum_{j=i}^n p_j \right) \end{aligned}$$

下一页的 lemma 12,14 会为我们带来这两个函数的性质。

目标函数化简——主定理证明（相关引理）

引理 11（顺序统计量的累积分布函数）：设 X_1, \dots, X_n 为独立同分布的随机变量，其公共 c.d.f. 为 F 。记 $F_{(i)}$ 为第 i 大顺序统计量的 c.d.f.，则对任意 $i \in [n]$ ，

$$F_{(i)}(x) = \sum_{j=1}^i \binom{n}{j-1} (1-F(x))^{j-1} F(x)^{n-j+1}.$$

引理 12（ ψ 与 h 的关系）：函数 $\psi(x, p)$ 即为 $h(x, p)$ 对 x 的导数：

$$\psi(x, p) = \frac{d}{dx} h(x, p).$$

引理 13（Bernstein 基的积分性质）：对任意 $i \in [n]$ ，有

$$\int_0^1 a_i(x) dx = \frac{1}{n}.$$

引理 14（ ϕ 与 h 的微分关系）：函数 $\phi(x, p)$ 满足：

$$\frac{d}{dx} \phi(x, p) = -n h(x, p).$$

引理 15（FKG 不等式）：设 ν_1, \dots, ν_n 为 \mathbb{R} 上的概率测度， $\nu = \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ 为其乘积测度。若函数 $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ 均为单调递增（或单调递减），则

$$\mathbb{E}_\nu[f \cdot g] \geq \mathbb{E}_\nu[f] \cdot \mathbb{E}_\nu[g].$$

目标函数化简——主定理证明 (1)

根据无差异原理，在给定其他参与者的对称均衡均衡策略 μ_{-i} 之后，参与者 i 的任意纯策略带来的收益为 $u_0 \geq 0$ 。结合前面我们的所有知识，我们正式地把优化问题如下所写：

$$\begin{aligned}
 (\text{OPT}) \quad & \max_{\mathbf{p} \in \Delta} \quad \alpha \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}[q_{(i)}] + (1 - \alpha) \mathbb{E}[q] \\
 \text{s.t.} \quad & u_0 + c(q) = \sum_{i=1}^n p_i \binom{n-1}{i-1} F(q)^{n-i} (1 - F(q))^{i-1}, \quad \forall q \in \text{supp}(F), \\
 & p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n, \quad \exists i \neq j \text{ s.t. } p_i \neq p_j, \\
 & \sum_{i=1}^n p_i = 1,
 \end{aligned}$$

F 是给定 \mathbf{p} 下对称 MNE 的累积分布函数。

前面我们知道 $u_0 = p_n$ ，带入第一类约束，则对任意 $q \in [0, q_{\max}]$ ，有

$$q = \left(\sum_{i=1}^n p_i \binom{n-1}{i-1} F(q)^{n-i} (1 - F(q))^{i-1} - p_n \right)^{1/\beta}.$$

目标函数化简——主定理证明 (2)

我们定义辅助函数

$$g(x, \mathbf{p}) := h(x, \mathbf{p}) - p_n = \sum_{i=1}^n p_i \binom{n-1}{i-1} x^{n-i} (1-x)^{i-1} - p_n,$$

则有

$$q = g(F(q), \mathbf{p})^{1/\beta}.$$

对该等式两边关于 q 求导，并进行整理得到：

$$\beta q^{\beta-1} = f(q) \psi(F(q), \mathbf{p}). \quad (1)$$

现在我们利用尾期望公式和次序统计量公式对 $\mathcal{W}(\mu, \mathbf{p})$ 进行展开：

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mu, \mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}[q_{(i)}] = \sum_{i=1}^n p_i \int_{\text{supp}(F)} (1 - F_{(i)}(q)) dq \\ &= \int_{q \in \text{supp}(F)} \sum_{i=1}^n \left(1 - \sum_{j=1}^i \binom{n}{j-1} (1 - F(q))^{j-1} F(q)^{n-j+1} \right) p_i dq \\ &= \int_{q \in \text{supp}(F)} \sum_{i=1}^n \left(1 - \sum_{j=1}^i \binom{n}{j-1} (1 - F(q))^{j-1} F(q)^{n-j+1} \right) p_i \frac{dq}{dF(q)} dF(q) \\ &= \int_{q \in \text{supp}(F)} \phi(F(q), \mathbf{p}) \cdot \frac{1}{f(q)} dF(q) \end{aligned} \quad (2)$$

目标函数化简——主定理证明 (3)

现在我们将上一页 (1) (2) 联立, 即把 $f(q)$ 带入 (2), 有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(\mu, \mathbf{p}) &= \int_{q \in \text{supp}(F)} \phi(F(q), \mathbf{p}) \psi(F(q), \mathbf{p}) \cdot \frac{1}{\beta q^{\beta-1}} dF(q) \\
 &= \frac{1}{\beta} \int_{q \in \text{supp}(F)} \phi(F(q), \mathbf{p}) \psi(F(q), \mathbf{p}) q^{-\beta+1} dF(q) \\
 &= \frac{1}{\beta} \int_{q \in \text{supp}(F)} \phi(F(q), \mathbf{p}) \psi(F(q), \mathbf{p}) g(F(q), \mathbf{p})^{-1+1/\beta} dF(q) \quad (\text{用 } x \text{ 替代 } F) \\
 &= \frac{1}{\beta} \int_0^1 \phi(x, \mathbf{p}) \psi(x, \mathbf{p}) g(x, \mathbf{p})^{1/\beta-1} dx
 \end{aligned}$$

注意到此时我们的 \mathcal{W} 已经没有显式依赖 $F(q)$ 了, 接下来:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} &= \frac{d}{dx} g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} \\
 &= \frac{1}{\beta} g(x, \mathbf{p})^{1/\beta-1} \cdot \frac{dh(x, \mathbf{p})}{dx} \\
 &= \frac{1}{\beta} g(x, \mathbf{p})^{1/\beta-1} \psi(x, \mathbf{p}),
 \end{aligned}$$

然后我们得以进一步化简福利表达式:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(\mu, \mathbf{p}) &= \int_0^1 \phi(x, \mathbf{p}) \cdot \frac{d}{dx} g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} dx \\
 &= \left[\phi(x, \mathbf{p}) \cdot g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} \right]_0^1 - \int_0^1 g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} \cdot \frac{d}{dx} \phi(x, \mathbf{p}) dx.
 \end{aligned}$$

目标函数化简——主定理证明 (3)

由于有：

$$g(0, \mathbf{p}) = p_n - p_n = 0,$$

$$g(1, \mathbf{p}) = p_1 - p_n,$$

$$\phi(1, \mathbf{p}) = 0,$$

$$\phi(0, \mathbf{p}) = 1,$$

我们就可以把分布积分项消掉，并把先前定义的辅助函数带入，于是有

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\mu, \mathbf{p}) &= \left(\phi(x, \mathbf{p}) g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d\phi(x, \mathbf{p})}{dx} g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} dx \right) \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{d\phi(x, \mathbf{p})}{dx} \right) g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{d\phi(x, \mathbf{p})}{dx} \right) (h(x, \mathbf{p}) - p_n)^{1/\beta} dx. \\ &= n \int_0^1 h(x, \mathbf{p}) g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} dx\end{aligned}$$

真正精彩的地方才刚刚开始，我们考虑对向量 \mathbf{p} 进行一个微小扰动，即 $\mathbf{p}^{(\delta)} = (p_1 + \delta, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n - \delta)$ ，接下来我们考虑这个扰动是否有助于提高目标函数。

目标函数化简——主定理证明 (4)

注意到:

$$\frac{d}{d\delta} h(x, \mathbf{p}^{(\delta)}) = a_1(x) - a_n(x),$$

$$\frac{d}{d\delta} (h(x, \mathbf{p}^{(\delta)}) - p_n^{(\delta)}) = 1 + a_1(x) - a_n(x).$$

现在我们观察扰动对于积分项有什么影响:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} \left(h(x, \mathbf{p}) (h(x, \mathbf{p}) - p_n)^{1/\beta} \right) &= (a_1(x) - a_n(x)) (h(x, \mathbf{p}) - p_n)^{1/\beta} \\ &\quad + \frac{h(x, \mathbf{p})}{\beta} (h(x, \mathbf{p}) - p_n)^{1/\beta-1} (1 + a_1(x) - a_n(x)) \\ &\geq (a_1(x) - a_n(x)) (h(x, \mathbf{p}) - p_n)^{1/\beta} \end{aligned} \quad (3)$$

$$+ \frac{h(x, \mathbf{p}) - p_n}{\beta} \cdot (1 + a_1(x) - a_n(x)). \quad (4)$$

现在我们要证明 (3)(4) 均不小于 0, 首先 (4) 不小于 0 是显然的, 我们证明 (3) 也不小于 0.

目标函数化简——主定理证明 (5)

注意到 $a_1(x) - a_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, $h(x, \mathbf{p})$ 同样在 $[0,1]$ 上单调递增 (求导可证), 于是根据 lemma 15 的 FKG 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a_1(x) - a_n(x))(h(x, \mathbf{p}) - p_n)^{1/\beta} dx &\geq \int_0^1 (a_1(x) - a_n(x)) dx \cdot \int_0^1 (h(x, \mathbf{p}) - p_n)^{1/\beta} dx \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

这意味着扰动总是有利的, 在最优解中 p_n 必然为 0。这样我们的 \mathbf{g} 和 \mathbf{h} 就成功会师了, 表达式得到大幅简化。对平台质量不分我们亦可以类似处理 (分析起来只会更简单):

$$\begin{aligned}Q(\mu, \mathbf{p}) &= \dots \\ &= \int_0^1 g(x, \mathbf{p})^{1/\beta} dx.\end{aligned}$$

同样可以知道上述扰动是有利的, 因此在最优解中 $g(x, \mathbf{p}) = h(x, \mathbf{p})$ 。现在我们的优化完全依赖于 \mathbf{p} (因为 $F\mu$ 已经蕴含在 \mathbf{p} 中, 给定任意 \mathbf{p} , 你都可以找到对应的 F 以及 μ), 因此我们可以得到定理一的化简。

Note: 对于这里的条件是否满足引用的 lemma 15, 我表示怀疑, 也许是 lemma 15 应该稍作调整。

- 1 故事介绍 & 模型设定
- 2 均衡分析
- 3 目标函数化简
- 4 单一目标最优结构
- 5 双目标凸组合最优结构
- 6 总结

单一目标最优结构——简介

回顾一下，现在我们已经将目标函数化简为：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}} \quad & \alpha n \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{1+\frac{1}{\beta}} dx + (1-\alpha) \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{\frac{1}{\beta}} dx \\ \text{s.t.} \quad & p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n = 0, \\ & \sum_{i=1}^n p_i = 1. \end{aligned}$$

现在我们考虑单一目标（即仅考虑用户福利或平台质量），此时 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$ 。作者发现：当仅优化平台质量（ $\alpha = 0$ ）时，最优策略随 β 的变化呈现显著的相变行为——要么是 HardMax，要么是 UniformButLast。

定理 2（边界情形下的最优策略）

根据权重参数 α 和成本参数 β 的不同，有如下结论：

- ① 若 $\alpha = 1$ 或 $\beta \leq 1$ ，则 HardMax 是最优策略；
- ② 若 $\alpha = 0$ 且 $\beta < 1$ ，则 HardMax 是最优策略；
- ③ 若 $\alpha = 0$ 且 $\beta > 1$ ，则 UniformButLast 是最优策略；
- ④ 若 $\alpha = 0$ 且 $\beta = 1$ ，则任意满足 $p_n = 0$ 的概率向量 $\mathbf{p} \in \Delta$ 均为最优。

单一目标最优结构——相关定义

为了证明该定理，作者采用了 Schur 凹性/凸性分析的技术。首先，我们将 $h(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 对称化。

定义 1 (对称函数) 函数 $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}$ 称为对称的，如果对任意排列 σ 和任意 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ ，都有

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

注意到 $h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) p_i$ ，前提是 $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ ，对 \mathbf{p} 并非对称。但我们可以对齐进行对称延拓：

$$O(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) p_{(i)},$$

其中 $p_{(1)} \geq p_{(2)} \geq \dots \geq p_{(n)}$ 是 \mathbf{p} 的分量按非增顺序排列后的结果，我们的下一步是分析 $O(\mathbf{x}, \mathbf{p})^r$ 的 Schur 凹/凸性，分析清楚之后我们就会得到很好的结果。

单一目标最优结构——相关引理

这里先给出我们分析的相关定义和引理：

定义 2 (主序) 对于 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 如果满足以下条件:

$$\sum_{i=1}^k x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^k y_{(i)}, \quad \forall k = 1, \dots, n-1,$$
$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i,$$

其中 $x_{(i)}$ 和 $y_{(i)}$ 分别是 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的分量按非增顺序排列的结果, 则称 \mathbf{x} 主序于 \mathbf{y} , 记作 $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ 。

定义 3 (Schur 凸性和凹性) 一个对称函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 Schur 凸的, 如果对于任意 $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, 有 $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$; 称为 Schur 凹的, 如果对于任意 $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, 有 $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ 。

引理 2 (Schur-Ostrowski 判据) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是对称且连续可微的。则 f 是 Schur 凸 (或 Schur 凹) 的充要条件是:

$$(x_i - x_j) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \geq (\leq) 0,$$

对所有 $i, j = 1, \dots, n$ 成立。

单一目标最优结构——重要引理及简单证明 (1)

这里给出我们需要证明的关键引理:

lemma 3 (标函数的 **Schur** 性质) 对任意 $\mathbf{p} \in \Delta_n$, 函数

$$\int_0^1 O(x, \mathbf{p})^r dx$$

具有如下性质:

- 当 $r \in [0, 1]$ 时, 该函数是 **Schur-凹**的;
- 当 $r \leq 0$ 或 $r \geq 1$ 时, 该函数是 **Schur-凸**的。

将用 lemma 2 进行证明, 标准的 Bernstein 多项式定义如 $a_{i,n}(x) := \binom{n}{i} x^{n-i} (1-x)^i$, 在这里我们记 $a_i(x) = a_{i-1,n-1}(x)$ 。回忆 **Lemma 2** (**Schur-Ostrowski** 判据): 若函数 f 是对称且可微的, 则其满足:

$$(p_i - p_j) \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) \begin{cases} \geq 0, & \text{若 } f \text{ 是 Schur-凸,} \\ \leq 0, & \text{若 } f \text{ 是 Schur-凹.} \end{cases}$$

我们令 $f(\mathbf{p}) = \int_0^1 O(x, \mathbf{p})^r dx$, 不失一般性可假设 $p_i > p_j$, 则 $\delta(i) < \delta(j)$, 那么我们只需判断

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\int_0^1 O(x, \mathbf{p})^r dx \right) - \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\int_0^1 O(x, \mathbf{p})^r dx \right) \geq (\leq) 0. \quad (5)$$

单一目标最优结构——重要引理及简单证明 (2)

注意到

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \int_0^1 O(x, p)^r dx = \int_0^1 r O(x, p)^{r-1} a_{\sigma(i)}(x) dx$$

则我们可以进一步化简 (5) 为

$$\int_0^1 r O(x, p)^{r-1} (a_{\sigma(i)}(x) - a_{\sigma(j)}(x)) dx \geq (\leq) 0$$

实际上, 我们只需要证明相邻 index $i = 1, 2, \dots, n-1$ 满足下述关系, 便可以用望远镜求和证明上式。我们证明 (更强的) 下式即可:

$$\int_0^1 r O(x, p)^{r-1} (a_i(x) - a_{i+1}(x)) dx \geq (\leq) 0$$

下面有一个关于 Bernstein 多项式的标准性质

$$n(a_i(x) - a_{i+1}(x)) = -\frac{d}{dx} a_{i+1,n}(x)$$

带入即可得到

$$\int_0^1 r O(x, p)^{r-1} (a_i(x) - a_{i+1}(x)) dx = -\frac{r}{n} \int_0^1 O(x, p)^{r-1} \frac{d}{dx} a_{i+1,n}(x) dx \quad (6)$$

单一目标最优结构——重要引理及简单证明 (3)

对 (6) 分部积分可得:

$$\int_0^1 O(x, \mathbf{p})^{r-1} \frac{d}{dx} a_{i+1,n}(x) dx = [O(x, \mathbf{p})^{r-1} a_{i+1,n}(x)]_0^1 - \int_0^1 a_{i+1,n}(x) \frac{d}{dx} O(x, \mathbf{p})^{r-1} dx. \quad (7)$$

对于 $i \in [n-1]$. 注意到当 $x=0$ 或 $x=1$ 时, 对于 $i \in [n-1]$, $a_{i+1,n}(x) = 0$, 所以作差项为 0. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial x} O(x, \mathbf{p})^{r-1} = (r-1) O(x, \mathbf{p})^{r-2} \psi(x, \mathbf{p})$$

直接将其带入 (7) 式并再带入 (6) 式, 可得

$$\frac{r(r-1)}{n} \int_0^1 O(x, \mathbf{p})^{r-2} \psi(x, \mathbf{p}) a_{i+1,n}(x) dx,$$

显然 O, a 均非负, ψ 非负也容易证出. 所以上式的符号完全由 r 是否大于 1 确定. 当 $r \geq 1$ 时, $f(\mathbf{p})$ 时 Schur 凸的; 当 $r \leq 1$ 时, $f(\mathbf{p})$ 时 Schur 凹的.

单一目标最优结构——定理证明

我们回到定理证明。在排序约束下，最大化 h 等价于最大化其对称延拓 O ，因此可以通过 O 的 Schur 性质刻画 h 的最优解结构。

首先，当 $\alpha = 1$ 时，目标函数退化为用户福利，表示为：

$$\mathcal{W}(\mu, \mathbf{p}) = n \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{1+1/\beta} dx.$$

由于 $1 + 1/\beta > 1$ ，积分项关于 \mathbf{p} 是 Schur-凸的。又因 HardMax 主序于所有满足 $p_n = 0$ 的概率向量 $\mathbf{p} \in \Delta_n$ ，故 HardMax 最大化该目标。

其次，考虑 $\alpha = 0$ 的情形，此时目标函数仅为用户质量：

$$\mathcal{Q}(\mu, \mathbf{p}) = \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{1/\beta} dx.$$

- 若 $\beta \leq 1$ ，则 $1/\beta \geq 1$ ，此时 $h^{1/\beta}$ 关于 \mathbf{p} 是 Schur-凸的，因此 HardMax 仍为最优；
- 若 $\beta > 1$ ，则 $1/\beta \in (0, 1)$ ，此时 $h^{1/\beta}$ 关于 \mathbf{p} 是 Schur-凹的。而 UniformButLast（即 $p_1 = \dots = p_{n-1} = \frac{1}{n-1}, p_n = 0$ ）被所有满足 $p_n = 0$ 的 \mathbf{p} 所主序，故在 Schur-凹函数下取得最大值；
- 若 $\beta = 1$ ，则目标函数为

$$\int_0^1 h(x, \mathbf{p}) dx = \sum_{i=1}^n p_i \int_0^1 a_i(x) dx = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n},$$
 其中利用了 $\int_0^1 a_i(x) dx = 1/n$ 。因此目标恒为常数，任意满足 $p_n = 0$ 的 $\mathbf{p} \in \Delta_n$ 均为最优。

- 1 故事介绍 & 模型设定
- 2 均衡分析
- 3 目标函数化简
- 4 单一目标最优结构
- 5 双目标凸组合最优结构
- 6 总结

双目标凸组合最优结构

现在我们来探讨用户福利与平台质量凸组合的情形，即

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}} \quad & \alpha n \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{1+\frac{1}{\beta}} dx + (1-\alpha) \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{\frac{1}{\beta}} dx \\ \text{s.t.} \quad & p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n = 0, \\ & \sum_{i=1}^n p_i = 1, \end{aligned}$$

我们将优化目标记为 $G(\mathbf{p})$ ，其中 \mathbf{p} 是一个有次序的概率单纯形。由于不存在闭式解，因此我们只能研究最优解存在的某些性质，而作者给出了关键的结论：

Theorem 3

对任意 $\alpha \in [0, 1]$ 和 $\beta > 0$ ，任何最优策略具有如下结构：

$$p_1 \geq p_2 = p_3 = \cdots = p_{n-1} \geq p_n = 0.$$

这意味着：最优推荐策略中，第一个位置权重最大，中间所有位置权重相等，最后一个位置不被推荐。

双目标凸组合最优结构——运用 KKT 条件

由于此定理证明涉及众多引理，因此我不在此列出需要用到的引理，仅在需要用到时进行呈现。我们首先明确，在最优解中， $p_n = 0$ 。此外，由于约束是连续的，因此该最优解必须满足 KKT 条件。（KKT 条件是必要条件）我们可以从此入手进行分析：

我们首先定义目标函数对 \mathbf{p} 的偏导：

$$\begin{aligned} d_i &:= \frac{\partial G(\mathbf{p})}{\partial p_i} = n\alpha \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{1/\beta} a_i(x) dx + \frac{1-\alpha}{\beta} \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{1/\beta-1} a_i(x) dx \\ &= \int_0^1 \left[n\alpha \left(1 + \frac{1}{\beta} h(x, \mathbf{p})^{1/\beta} + \frac{1-\alpha}{\beta} h(x, \mathbf{p})^{1/\beta-1} \right) \right] a_i(x) dx. \end{aligned}$$

我们把 $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{n-1}$ 拆成 $n-1$ 条不等式，然后正式运用 KKT 条件：

$$L(\mathbf{p}, \nu, \lambda) = G(\mathbf{p}) + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) + \sum_{i=1}^{n-2} \nu_i (p_i - p_{i+1}) + \nu_{n-1} p_{n-1},$$

双目标凸组合最优结构—— d_i 序列拟凸性

$$d_1 = \frac{\partial G(\mathbf{p})}{\partial p_1} = \lambda - \nu_1$$

$$d_i = \frac{\partial G(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \lambda + \nu_{i-1} - \nu_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\nu_i(p_i - p_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

$$\nu_{n-1}p_{n-1} = 0$$

$$\lambda(p_1 + \dots + p_n - 1) = 0$$

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{n-1} \geq 0$$

$$\nu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

接下来我们要迎接密集的定义、引理：

定义 4（拟凸）一个序列 x_1, \dots, x_n 是拟凸的，如果存在某个 $k \in [n]$ ，使得

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq x_n.$$

类似地，一个函数 $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是拟凸的，如果存在某个 $x^* \in \mathbb{R}$ ，使得对任意 $x < y \leq x^*$ 有 $f(x) \geq f(y)$ ，且对任意 $x^* \leq x < y$ 有 $f(x) \leq f(y)$ 。

双目标凸组合最优结构—— d_i 序列拟凸性

我们记

$$q(x) := n\alpha \left(1 + \frac{1}{\beta} h(x, \mathbf{p})^{1/\beta} + \frac{1-\alpha}{\beta} h(x, \mathbf{p})^{1/\beta-1} \right)$$

引理 5: 如上定义的 $q(x)$ 在 $[0,1]$ 是拟凸的。

引理 4 (梯度的拟凸性与结构): 对于任意一般形式的目标函数

$$H(\mathbf{p}) = e_1 \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{r_1} dx + e_2 \int_0^1 h(x, \mathbf{p})^{r_2} dx,$$

其中 $e_1, e_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, 其关于 p_i 的偏导数可写为:

$$\frac{\partial H(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \int_0^1 q(x) a_i(x) dx,$$

若 $q(x)$ 在区间 $x \in [0, 1]$ 上是拟凸的, 则序列 d_1, d_2, \dots, d_{n-1} 满足以下性质:

(1) 它是拟凸的;

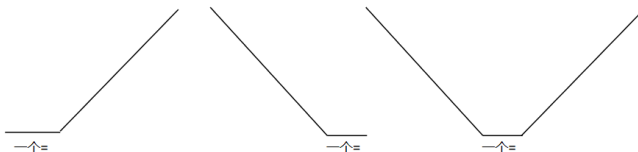
(2) 仅可能出现在以下情形之一:

- 若 k 满足 $d_{k-1} \geq d_k \leq d_{k+1}$, 则 $d_i = d_{i+1}$ 仅当 $i = k-1$ 或 $i = k$;
- 若整个序列 $\{d_i\}_{i=1}^{n-1}$ 单调递减, 则 $d_i = d_{i+1}$ 仅当 $i = n-2$;
- 若整个序列 $\{d_i\}_{i=1}^{n-1}$ 单调递增, 则 $d_i = d_{i+1}$ 仅当 $i = 1$;

(3) 若 $d_i = d_{i+1}$, 则必有 $d_i \neq d_{i-1}$, 反之亦然。

双目标凸组合最优结构——正式证明

引理 4 在这个未发表论文的 pdf 中似乎有一些 typo, 但我们可以总结为: d_i 要么是不存在两项相等的拟凸。如果有“谷底”, 那么相等只能出现在谷底, 如果没谷底, 对于递增序列两项相等只能出现在开头, 对于递减序列只能出现在末端, 且最多有一个等号出现。



总之, d_i 序列只有 3 种可能:

- ① $d_1 > d_2 > \cdots > d_k \leq d_{k+1} < \cdots < d_{n-1}$
- ② $d_1 > d_2 > \cdots > d_{n-2} \geq d_{n-1}$
- ③ $d_1 \leq d_2 < d_3 < \cdots < d_{n-1}$

其中 k 是转折点索引。作者分两种情形进行讨论: 首先, 我们将证明: 若 $p_1 \neq p_2$, 则对任意 $i = 2, \dots, n-2$, 不可能有 $p_i \neq p_{i+1}$, 从而得出

$$p_1 > p_2 = \cdots = p_{n-1}.$$

其次, 我们将证明: 若 $p_1 = p_2$, 则必有

$$p_2 = \cdots = p_{n-1}.$$

双目标凸组合最优结构——正式证明

情形 1: $p_1 \neq p_2$

假设 $p_1 \neq p_2$, 则由互补松弛条件可知 $\nu_1 = 0$, 因此

$$d_1 = \lambda, \quad d_2 = \lambda - \nu_2.$$

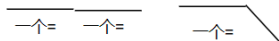
我们将进一步后续不可能出现 $p_i \neq p_{i+1}$ 。

情形 1a: 假如 $p_2 \neq p_3$

$p_2 \neq p_3$, 则必有 $\nu_2 = 0$, 于是

$$d_1 = \lambda, \quad d_2 = \lambda, \quad d_3 = \lambda - \nu_3.$$

这表明斜率变化点为 $k = 1$ 。然而这导致矛盾: 由于 $\nu_3 \geq 0$, 有 $d_3 = \lambda - \nu_3 \leq \lambda = d_2$, 而根据引理 4 中与 $d_1 = d_2$ 相容的唯一结构, 序列应在谷底之后严格递增, 即应有 $d_2 < d_3$ 。矛盾。



因此, 若 $p_1 \neq p_2$, 则必有 $p_2 = p_3$ 。

双目标凸组合最优结构——正式证明

情形 1b: 存在 $i \geq 3$ 使得 $p_i \neq p_{i+1}$

设最小的满足 $p_i \neq p_{i+1}$ 的索引 $i \geq 3$, 即

$$p_1 \neq p_2 = p_3 = \cdots = p_i \neq p_{i+1}.$$

此时 $\nu_i = 0$, KKT 条件给出:

$$d_1 = \lambda,$$

$$d_2 = \lambda - \nu_2,$$

$$d_3 = \lambda + \nu_2 - \nu_3,$$

$$\vdots$$

$$d_i = \lambda + \nu_{i-1},$$

$$d_{i+1} = \lambda - \nu_{i+1}.$$

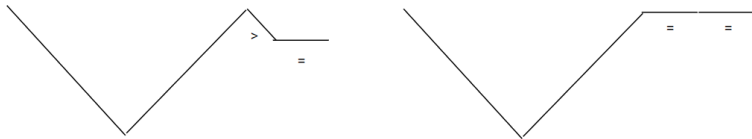
若 $\nu_{i-1} > 0$ 且 $\nu_{i+1} > 0$, 则序列 d_j 先增后减, 违反拟凸性, 矛盾。故 ν_{i-1} 与 ν_{i+1} 中至少一个为零。下一页我们对此再度进行分类讨论。

双目标凸组合最优结构——正式证明

若 $\nu_{i+1} = 0$ ，则为避免先增后减，必须也有 $\nu_{i-1} = 0$ 。此时

$$d_1 = \lambda, d_2 = \lambda - \nu_2, \dots, d_{i-1} = \lambda + \nu_{i-2}, d_i = d_{i+1} = \lambda.$$

但这就意味着序列从 $d_1 = \lambda$ 开始，先下降再上升回到 λ ，与引理 4 要求矛盾（因为 $d_{i-1} = \lambda + \nu_{i-2} \geq \lambda = d_i$ ）。



若 $\nu_{i-1} = 0$ ，则

$$d_i = \lambda, d_{i+1} = \lambda - \nu_{i+1} \leq \lambda.$$

此时斜率变化点必须严格小于 i ，即序列应在某 $k < i$ 处达到谷底并开始递增。但 $d_i = \lambda = d_1$ 且 $d_{i+1} \leq \lambda$ ，意味着序列在 i 之后并未递增，矛盾（形状也类似上图右边）。

双目标凸组合最优结构——正式证明

情形 2: $p_1 = p_2$

类似地, 我们考虑两种子情形: (i) 存在某个 $i \in \{3, \dots, n-2\}$ 使得 $p_i \neq p_{i+1}$; (ii) $p_2 \neq p_3$ 。设 $i \geq 2$ 是第一个满足 $p_i \neq p_{i+1}$ 的索引 (即 $\nu_i = 0$)。

情形 2a: $p_1 = p_2 > \dots > p_i = p_{i+1}$, 其中 $i \in \{3, \dots, n-2\}$

同样给出 KKT 条件:

$$d_1 = \lambda - \nu_1,$$

$$d_2 = \lambda + \nu_1 - \nu_2,$$

$$d_3 = \lambda + \nu_2 - \nu_3,$$

$$\vdots$$

$$d_{i-1} = \lambda + \nu_{i-2} - \nu_{i-1},$$

$$d_i = \lambda + \nu_{i-1},$$

$$d_{i+1} = \lambda - \nu_{i+1}.$$

为了满足拟凸性, ν_{i-1} 与 ν_{i+1} 不能同时为正 (否则序列先增后减)。若 $\nu_{i-1} = 0$, 则 $d_{i-1} = \lambda + \nu_{i-2} \geq \lambda = d_i$, 但 $d_1 = \lambda - \nu_1 \leq \lambda$, 简单画图讨论知没有任何一个图能够满足引理 4 的结果, 故矛盾。若 $\nu_{i+1} = 0$, 则需 $d_i = d_{i+1}$, 即 $\nu_{i-1} = 0$, 同样也存在矛盾。

双目标凸组合最优结构——正式证明

情形 2b: $p_1 = p_2 > p_3$

此时 $\nu_2 = 0$, KKT 条件为:

$$d_1 = \lambda - \nu_1,$$

$$d_2 = \lambda + \nu_1,$$

$$d_3 = \lambda - \nu_3,$$

$$d_4 = \lambda + \nu_3 - \nu_4.$$

若 $\nu_1 > 0$, 则 $d_1 < d_2 \geq d_3$, 违反拟凸性。故必有 $\nu_1 = 0$, 从而

$$d_1 = d_2 = \lambda, \quad d_3 = \lambda - \nu_3 \leq \lambda.$$

然而这种情况也是违背引理 4 的几种可能的。因此, 若 $p_1 = p_2$, 则必有

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} \geq p_n = 0.$$

综合两种情形, 唯一可能的最优解结构为以下两种之一:

$$\begin{cases} p_1 > p_2 = \cdots = p_{n-1} \geq p_n = 0, \\ \text{或} \\ p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} \geq p_n = 0. \end{cases}$$

- 1 故事介绍 & 模型设定
- 2 均衡分析
- 3 目标函数化简
- 4 单一目标最优结构
- 5 双目标凸组合最优结构
- 6 总结

总结

文章还有一部分作者的推论以及众多的 lemma 是我没有展开，但是对该建模下问题的求解已经十分清晰，下面我援引文章的一个表格作为总结。

Setting	β	Techniques	Optimal Policy
$\alpha = 1$ (User welfare)	Any	Schur-convex	HARDMAX
$\alpha = 0$ (Platform quality)	< 1	Schur-convexity	HARDMAX
	$= 1$	Neutral (linear)	Any
	> 1	Schur-concavity	UNIFORMBUTLAST
$\alpha \in (0, 1)$ (Mixed)	Any	Variation diminishing	$p_1 \geq p_2 = \dots = p_{n-1} \geq p_n = 0$

论文链接

Thanks!