

國立虎尾科技大學  
機械設計工程暨精密機械工程科  
專題製作報告

有限元素法在四足機器人設計上  
的應用

**Application of Finite Element  
Method to Quadruped Robot  
Design**

指導教授：嚴家銘老師  
班級：四設三乙  
學生：  
        楊子頡 (41023218)  
        楊建霖 (41023248)  
        詹侑儒 (41023251)  
        蔡宗瑋 (41023254)

中華民國 一一二年六月

國立虎尾科技大學  
機械設計工程暨精密機械工程科  
學生專題製作合格認可證明

專題製作修習學生： 四設三乙 41023218 陳岳檉  
四設三乙 41023248 蔡弦霖  
四設三乙 41023251 鄭立揚  
四設三乙 41023254 謝鴻元

專題製作題目：有限元素法在四足機器人設計上的應用  
經評量合格，特此證明

評審委員： \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

指導老師： \_\_\_\_\_

系主任： \_\_\_\_\_

中華民國 一一二年六月七日

## 摘要

本專題主要研究有限元素法 (FEM)，由於近代計算機快速的發展，數值計算、開發環境、生程式設計等，都有公司或個人創作者製作軟體進行分析、計算，藉由這些軟體我們將對四足機器人進行生成式設計並且觀察其受力情況。

以四足機器人為例，將結構以剛體狀況導入 CoppeliaSim 進行動作模擬後，求出最大反力分別帶入 Ansys 和 Solid Edge，並在此轉換為柔性結構，進行有限元素 (FEM) 分析，評估各柔性結構下分析的應力、應變等受力情況，對其做生成式設計以簡化模組，在保有強度的同時減輕重量造成最少的能源浪費。並嘗試透過網路展示 CoppeliaSim 機器人運動情況，證明其設計可行性。

關鍵字: 偏微分方程 (PDE)、有限元素分析 (PEM)、CoppeliaSim、Ansys、Solid Edge

## Abstract

The main focus of this project is on the Finite Element Method (FEM). With the rapid development of modern computers, numerical calculations, development environments, and software programming, various companies or individual creators have developed software for analysis and calculations. With the help of these software programs, we will perform generative design on a quadruped robot and observe its structural integrity under various load conditions.

Taking the quadruped robot as an example, we will import the structure as a rigid body into CoppeliaSim for motion simulation. After obtaining the maximum reaction forces, we will input them into Ansys and Solid Edge for further analysis. The rigid structure will then be converted into a flexible structure to perform Finite Element Method (FEM) analysis. We will evaluate the stress, strain, and other load conditions for each flexible structure to assess their performance. Through generative design, we aim to simplify the modules while maintaining their strength and minimizing energy waste caused by excessive weight. Additionally, we will attempt to showcase the motion of the robot in CoppeliaSim through online demonstrations to prove the feasibility of the design.

Keywords: partial differential equation (PDE), finite element analysis (PEM),  
CoppeliaSim, Ansys, Solid Edge.

## 誌 謝

本專題能完成有著許多人員的幫忙，大四學長他們不吝嗇地將往年的製作經驗傳授給我們，讓我們在製作的時候少走了許多錯路，還總是貼心找出重點提醒我們可以加以描述。再來是我們的指導教授嚴家銘教授，他提供了多方面的資訊，拋出問題並給予建議，擬定了我們小組有限元素法研究和學習方向，開會也時常提出建議以及未來發展，得以順利解決遇到的技術問題，同時也給了相當程度的自由，讓小組得以有彈性去尋探索及摸索，而本專題組員也充分地付出了許多，讓專題研究能順利完成，從中獲益良多，特此感謝。

## 目 錄

摘要 .....	i
Abstract .....	ii
誌謝 .....	iii
第一章 前言 .....	1
1.1 研究動機 .....	1
1.2 研究目的及方法 .....	2
1.3 專題說明 .....	3
1.4 文獻探討 .....	3
第二章 有限元素法 .....	4
2.1 基本概念 .....	5
2.1.1 邊界條件 .....	6
2.1.2 網格劃分基本原則 .....	6
2.2 計算及公式介紹 .....	8
2.2.1 變形分析 .....	8
2.2.2 應力方程 .....	13
2.3 分析步驟 .....	17
第三章 四足機器人 .....	18
3.1 應用範圍及作用 .....	18
3.2 連桿閉環機構 .....	19

3.3 硬體架構.....	20
3.4 運動軌跡.....	22
3.5 四連桿機構運動學模型 .....	23
3.5.1 順向運動學 .....	24
3.5.2 逆向運動學 .....	25
第四章 設計及模擬環境.....	27
4.1 Solid Edge 建模 .....	27
4.1.1 特徵建模.....	27
4.2 Geogebra 路徑模擬 .....	28
4.3 CoppeliaSim 運動模擬 .....	28
4.3.1 常用功能則 .....	28
4.3.2 RemoteAPI .....	29
4.4 Python 程式控制 .....	29
4.5 有限元素法.....	29
第五章 四足機器人運動模擬 .....	31
5.1 模型及環境設定 .....	31
5.2 Python 控制程式 .....	33
5.3 運動模擬.....	35
第六章 四足機器人有限元素分析 .....	37
6.1 有限元素分析 .....	37
6.2 Solid Edge 與 Ansys 分析比較.....	37

第七章 生成式設計 .....	40
7.1 生成式設計原理 .....	40
7.2 設計流程 .....	41
7.3 零件優化 .....	41
第八章 總結 .....	43
第九章 未來展望 .....	44
參考文獻 .....	45
附錄 .....	46
作者簡介 .....	48

## 圖 目 錄

圖 1.1 虛擬四足機器人 . . . . .	1
圖 1.2 研究架構 . . . . .	2
圖 2.1 有限元素法介紹 . . . . .	4
圖 2.2 基本概念 . . . . .	5
圖 2.3 較密網格 . . . . .	7
圖 2.4 較粗網格 . . . . .	7
圖 2.5 較密網格所得應力雲圖 . . . . .	7
圖 2.6 較粗網格所得應力雲圖 . . . . .	7
圖 2.7 有限元素法分析流程 . . . . .	17
圖 3.1 運動學推導流程 . . . . .	18
圖 3.2 三連桿閉環機構 . . . . .	19
圖 3.3 四連桿閉環機構 . . . . .	19
圖 3.4 四足機器人 . . . . .	20
圖 3.5 零件表 . . . . .	21
圖 3.6 Geogebra 運動軌跡 . . . . .	22
圖 3.7 步行機構分解圖 . . . . .	23
圖 3.8 步行機構 . . . . .	23
圖 3.9 馬達(一) . . . . .	23

圖 3.10 馬達(二) . . . . .	23
圖 3.11 順向運動學連桿圖 . . . . .	24
圖 4.1 CoppeliaSim 常用功能 . . . . .	28
圖 4.2 CoppeliaSim Logo . . . . .	29
圖 5.1 組裝步驟 . . . . .	31
圖 5.2 零件與轉軸參數設定 . . . . .	32
圖 5.3 各式步態圖 . . . . .	36
圖 5.4 模擬動作-1 . . . . .	36
圖 5.5 模擬動作-2 . . . . .	36
圖 5.6 模擬動作-3 . . . . .	36
圖 6.1 分析比對圖 . . . . .	38
圖 6.2 分析比對表 . . . . .	38
圖 7.1 生成式流程 . . . . .	40
圖 7.2 Leg1-1+1-5(生成) . . . . .	41
圖 7.3 Leg4(生成) . . . . .	41
圖 7.4 Leg1-1+1-5(輕量化) . . . . .	41
圖 7.5 Leg4(輕量化) . . . . .	41
圖 7.6 分析比對表(輕量化) . . . . .	42
圖 1 足端軌跡(直線) . . . . .	47
圖 2 足端軌跡(橢圓) . . . . .	47

圖 3 足端軌跡(圓形) . . . . .	47
圖 4 足端軌跡(弧線) . . . . .	47
圖 5 足端軌跡(不規則) . . . . .	47

## 表 目 錄

表 3.1 足端橢圓運動軌跡 . . . . .	26
表 3.2 足端直線運動軌跡 . . . . .	26
表 4.1 CoppeliaSim 常用功能 . . . . .	28
表 6.1 ABS 最大等效應力 (MPa) . . . . .	39
表 6.2 PLA 最大等效應力 (MPa) . . . . .	39
表 6.3 PLA 最小安全係數 . . . . .	39
表 7.1 leg1-1+1-5 分析比對 . . . . .	42
表 7.2 leg4 分析比對 . . . . .	42
表 1 文字編輯軟體比較表 . . . . .	46

# 第一章 前言

## 1.1 研究動機

材料分析軟體的應用在機械領域愈來越廣泛，能夠將繪製零件進行分析，但卻鮮少人知道分析是怎麼進行的，所以我們對四足機器人套用有限元素法，在其身上觀察有限元素法是如何計算出受力情況。

本專題研究方向將由四足機器人(圖 1.1)作為載體，目的將有限元素分析的公式套入其中計算，進行有限元素分析，利用偏微分方程解出受力情況，才能對零件進行挖空處理，達到輕量化的目的，透過此過程從了解到運動模擬和有限元素法分析等。

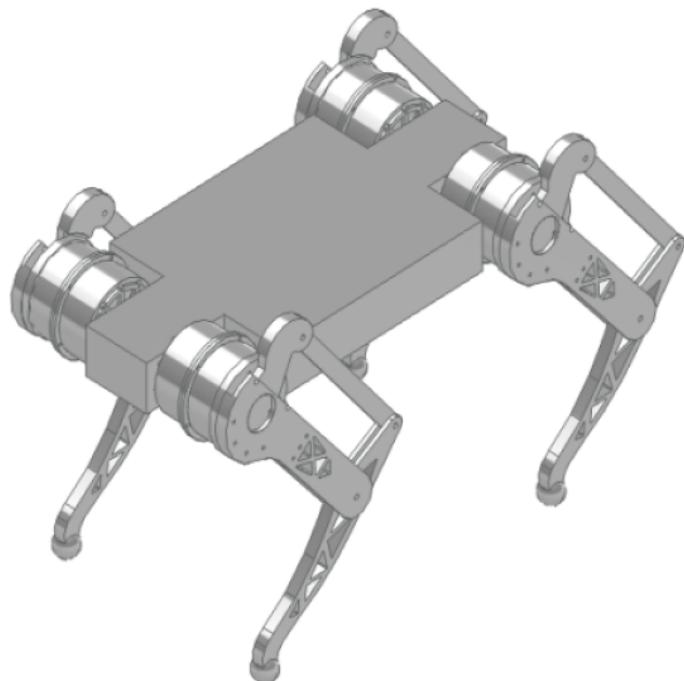


圖 1.1: 虛擬四足機器人

## 1.2 研究目的及方法

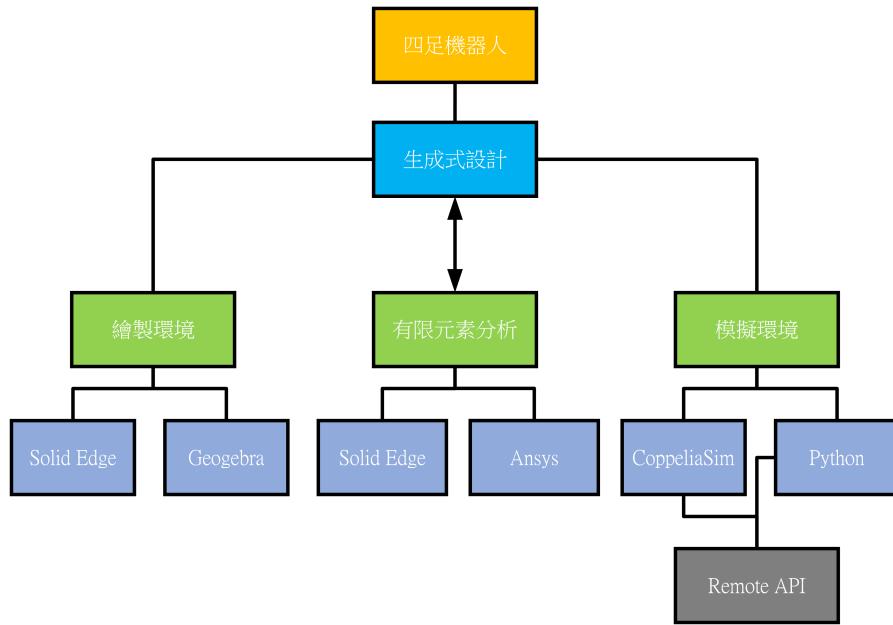


圖 1.2: 研究架構

本專題研究分為幾部分，其一繪製模型，進行路徑模擬，計算運動軌跡並調整設計，其二將模型導入虛擬環境進行運動模擬，找出運動姿態，其三為進行生成式設計，優化零件。

參考的四足機器人模型，將其利用繪製出模型並進行路徑分析，找出運動軌跡並用此調整連桿參數及推導運動學公式。

建立 CoppeliaSim 模擬環境，導入 3D 圖檔並組立進行結合，透過 Python 語言控制各步行機構作動及旋轉角度，以求得各零件最大受力情況，並結合 Remote API 對四足機器人進行遠端控制。

進行有限元素分析，透過上述過程即可得出受力狀況及 3D 模型，利用有限元素分析得知零件受力狀況，將可對其進行生成式設計，對零件非必要部分做挖空處理，減輕零件重量。

## 1.3 專題說明

此專題主要研究有限元素法在四足機器人上的應用，模型部分參考了四足機器人 [9] 及 Goegebra 路徑模擬，繪製出硬體架構，將其視為剛體代入 CoppeliaSim，由此可得知機器人在機構為剛體狀態下的受力情況。

對零件做有限元素分析，此狀態下的零件為柔性狀態會因為受力不同有變形情況，產生許多變量，像是位移、速度、加速度等，因此使用偏微分方程 (PDE) 對零件計算，進行離散化、代數方程導入、求解等步驟，此種方法稱為有限元素法。

比較兩軟體分析結果，進行生成式設計，進行四足機器人步行機構的輕量化處理，減輕零件重量並同時保有強度。

## 1.4 文獻探討

有限元素分析在設計領域運用得相當廣泛，在現今開發或製作幾乎成為必要的分析之一，對開發者而言，可以免去相當多的成本浪費，節省許多設計及修改時間，將目標模型直接進行分析得出受力情況，這些功能用來進行設計修正，也透過近來的 AI 機器學習的發展，誕生了生程式設計，給定參數就能利用 AI 迭代運算生成模型，不再受限於設計者的想像力。

近年來圍著機器人技術的發展，步行機器人的應用領域越來越廣，在軍用及工業等領域都可看見其身影，加上機械臂或其他工具，就可以勝任許多工作，漸漸替代傳統人力進行各式任務，進行高危或負重工作，因此我們將兩種結合，因為四足機器人在開發過程中通常會進行有限元素分析，主要用來做輕量化並找出最大負荷力，去除些許體積，在保有其性能的同時降低最多的能源消耗。

## 第二章 有限元素法

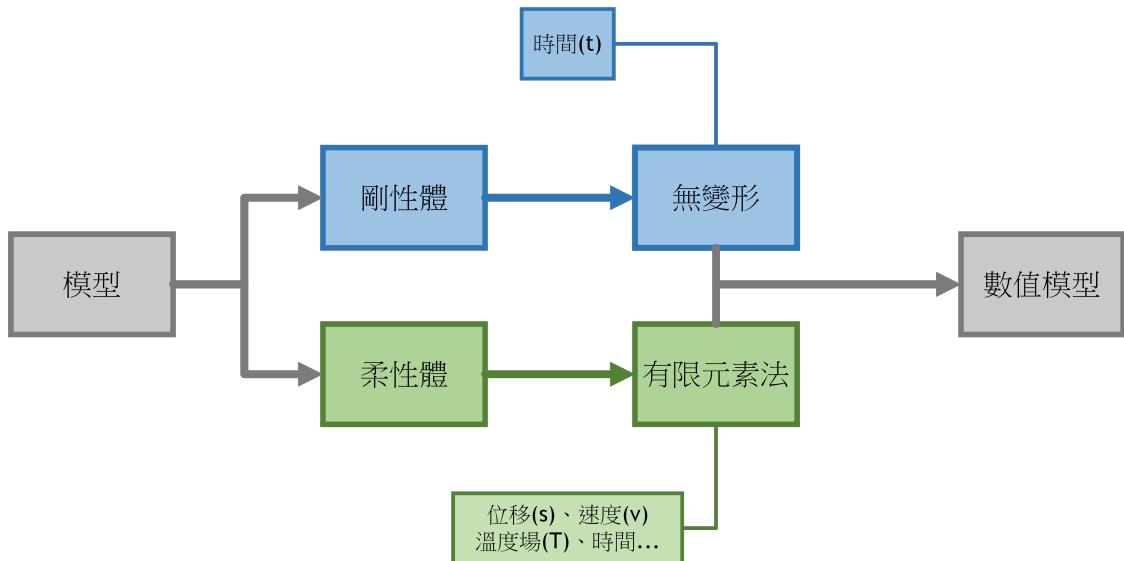


圖 2.1: 有限元素法介紹

時間及空間等問題常用偏微分方程 (PDE) 做數值求解，將根據不同的模型進行弱化、離散化等求解，此動作稱為有限元素法 (FEM)。

通過在模型上簡化連續變量的複雜性來實現近似求解，常用於複雜的工程結構或物理系統的行為。

正因為剛體是理想狀態，現實中機器人為柔性體，會因為受力情況的不同而產生多種變量，才需要利用偏微分方程對物體進行計算，此動作稱為有限元素法。

有對複雜模型進行分析及簡化的功能，所以在近代被廣泛的使用，在機械、建築等領域都可以看到其身影。

## 2.1 基本概念

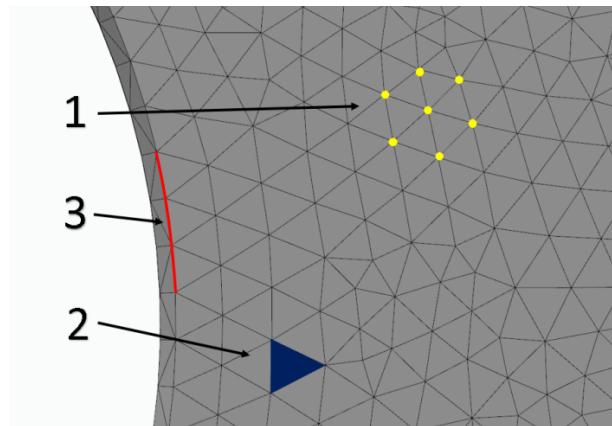


圖 2.2: 基本概念

1. 節點: 每個元素的角落或中心點，用於連接元素之間的邊界條件和解決方程，如(圖 2.2)上 1 指示。
2. 元素: 通常由三角形或者四邊形等形成的區域結構，如(圖 2.2)上 2 所示。
3. 邊界條件: 存在於物理系統邊界如(圖 2.2)上 3 所示的約束及負荷力，模擬實際情況下的條件約束和外界影響。
4. 自由度: 節點上變量的個數，例如位移的節點自由度為 3，表示單個節點擁有三個坐標方向的位移，又例如熱分析時節點自由度為 1，表示某個節點處的溫度。
5. 網格: 由數個元素經由節點連接所組成，表示在需分析的區域上。
6. 變形: 邊界條件的影響下的形變，為分析後計算每個元素的變形及變形之間的相互影響，用以預測整得系統變化。
7. 離散化: 將物理系統或結構等連續變量通過計算轉換為數格元素的過程，目的在於減化連續變量的複雜性，便於處理及分析。關於公式及步驟會因為模型或求解類型不同而有不一樣的計算方式。

8. 材料特性: 物理系統(模型)的材料性質, 不同的材料有著不一樣的參數(彈性模數、蒲松比、極限強度、降伏強度等)。

### 2.1.1 邊界條件

分為兩種邊界條件, 位移或施加力條件。

1. 位移邊界條件: 規定了結構或邊界上的位移及變形的特定值或關係。

- 固定邊界條件: 也稱為約束邊界條件, 令特定的某些節點或自由度的位移為零, 使其無法發生位移。
- 位移約束: 指定特定節點或自由度的位移值, 可以是定值或隨時間變化的函數。
- 斜率約束: 規定特定節點的自由度的位移斜率(導數), 用於描述特定邊界上的傾斜或旋轉。

2. 力邊界條件: 規定了結構或邊界上施加的外部力或力的分布。

- 負荷: 施加在結構上的集中力或分布力, 可以是靜態或動態負荷。
- 壓力: 施加在邊界上的或表面力, 可以是均勻或非均勻的。
- 動力學條件: 施加在結構上的動態加載。

### 2.1.2 網格劃分基本原則

1. 網格數量: 將決定計算精度及規模大小, 一般狀況中, 網格數量增加計算精度也會跟著提升, 但伴隨而來的是更大的計算量, 所以在制定網格大小時應權衡兩個因素。

2. 網格疏密: 在某些變化梯度較大的部位(應力集中處), 需要大密集的網格, 密集網格將更好反映數據變化, 反之變化梯度較小的部位則用較稀疏的網格, 而不同單元之間的連接則採用特殊的過渡單元或多點約束等方法連接, 才能更好的分配資源, 兼顧計算量和計算精度。

3. 網格質量: 網格形狀的合理性，質量的好壞將直接影響計算精度，質量較差的除了造成局部的計算精度偏差甚至會直接終止計算，因此在重要部位時應該確保其擁有高品質的表現，如果網格都是由等邊三角形、正方形、正四面體、立方六面體等組成，則求解精度可以非常接近實際值，但這種只存在於理想狀態下，實際運用卻很難做到。

- 元素質量評價指標

1. 單元的邊長比、面積比及體積比，理想的邊長比為 1，以正三角形、正四面體、正六面體為參考基準。
2. 扭曲度: 單元內部扭轉及面外的翹曲程度。
3. 疏密過渡: 應力梯度方向和橫向過渡情況，應力集中部分應較為密集，則反之。
4. 節點、元素排部: 合理的節點及元素有助於帶入方程式計算，可以提高求解效率，但須注意消除重複的節點及元素。

下列為網格疏密不同造成的分析差

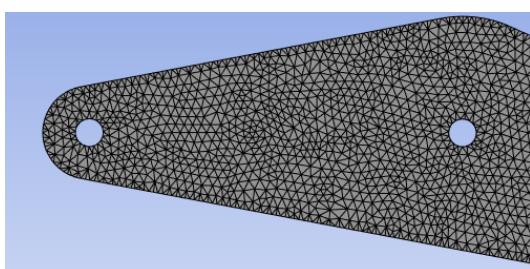


圖 2.3: 較密網格

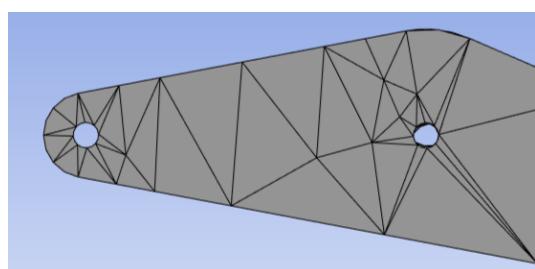


圖 2.4: 較粗網格

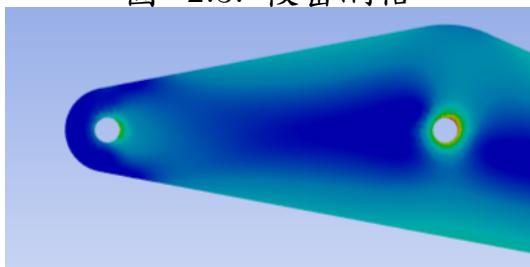


圖 2.5: 較密網格所得應力雲圖

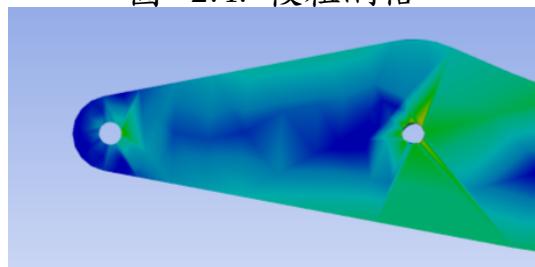


圖 2.6: 較粗網格所得應力雲圖

## 2.2 計算及公式介紹

此章節主要介紹常見的結構力學的有限元計算公式及方法順序，了解到平時由電腦計算的有限元素法及代數方程式，觀察固體結構上變形及應力是如何進行分析計算以及選用原因 (算式參考自 [1])。

### 2.2.1 變形分析

在有限元素分析中，通常使用拉格朗日公式，透過觀察材料的平移或旋轉來建立力學方程。在材料上設置隨意點 ( $X$ )，觀察點 ( $X$ ) 隨時間 ( $t$ ) 變化後的材料位移矢量  $u(X,t)$ ，轉換為空間坐標系  $x=X+u$  即可以得到一個拉格朗日公式，只要材料為柔性體就會產生局部變化，此現象稱為應變或伸長，下列將透過多種方式來描述材料變形過程。

- 變形梯度

變形梯度  $F$  定義為

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = I + \frac{\partial u}{\partial X}$$

其中,  $I$  是等同張量, 展開為矩陣形式為:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

上述矩陣包含材料局部旋轉和變形的完整解釋，其中還顯示許多訊息，例如：

由於  $dx=FdX$ ，未變形體  $dX$  中小線段是如何旋轉並拉伸，成為變形體  $dX$  中的線段，我們將  $F$  張量看做一個矩陣，第一列提供線段最開始沿  $X$  方向的大小和方向等信息。從數學角度來看， $F$  是從  $X$  改變到  $x$  的 Jacobi 矩陣，因此它的行列式  $J=\det(F)$  為局部體積比例因子，而不可壓

縮材料  $J = 1$ 。

極分解定理表明，任何二階張量都可以分解為純轉動和對稱張量的乘積，利用這一定理將剛體轉動與變形分開：

$$F = RU$$

這可以解釋為先發生變形（伸長張量  $U$ ），再進行剛性旋轉（旋轉矩陣  $R$ ）。如此一來，如果沒有旋轉，右伸長張量則為變形梯度，因此  $U$  的解釋與  $F$  類似。

同樣也可以將變形梯度分解為

$$F = VR$$

此過程中，會先發生剛體轉動，然後轉動的體發生變形，變形透過左伸長張量  $V$  描述。

這兩個伸長張量  $U$ 、 $V$  通過純轉動進行關聯，例如  $\mathbf{V} = \mathbf{FR}^T = \mathbf{RUR}^T$ 。事實上此處旋轉矩陣的轉置也是自身的逆  $(\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{RR}^T = \mathbf{I})$ 。

在實際操作中，極分解的計算成本通常較高，因此，人們會盡量避免這種類型的計算。但在理論思考方面，這個概念非常有用。我們可以在不確定旋轉矩陣的情況下，計算與旋轉無關的變形測量：

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{RU})^T \mathbf{RU} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{RU} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$$

張量  $C$  稱為右 Cauchy-Green 變形張量。

這個張量經常用於描述超彈性材料的本構特性等，僅由  $U$  張量構成，因此用於描述材料在旋轉“之前”的變形。

由此可知

$$\mathbf{FF}^T = \mathbf{VR}(\mathbf{VR})^T = \mathbf{VRR}^T\mathbf{V}^T = \mathbf{VV}^T = \mathbf{V}^2 = \mathbf{B}$$

張量  $\mathbf{B}$  稱為左 Cauchy-Green 變形張量。

$\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  都與旋轉無關，但它們描述的是兩個不同坐標系中的變形。

張量  $\mathbf{C}$  是描述材料坐標系中變形的材料張量， $\mathbf{B}$  是描述空間坐標系中變形的空間張量。

- 伸長率

從非正式意義上來說，伸長率可定義為當前長度與原始長度之比

$$\lambda = \frac{L}{L_0}$$

因此在未變形狀態下，伸長率為 1。一般情況下，人們更傾向於使用張量  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{C}$  的特徵值。 $\mathbf{U}$  的三個特徵值  $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$  稱為主伸長率，其對應的特徵向量在材料坐標系中給出三個正交方向。如果我們研究一個小立方體(正方體)，其中三條邊沿著這三個方向，則它將會發生變形，成為長方體，但所有邊仍保持直角相交。邊長變化由主伸長率表示。如此一來體積變化可以寫為主伸長率的乘積：

$$\frac{V}{V_0} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

張量  $\mathbf{C}$  的計算更加簡單，它的主方向與  $\mathbf{U}$  相同，但特徵值為  $\lambda_1^2$ 、 $\lambda_2^2$  和  $\lambda_3^2$ 。因此通常使用  $\mathbf{C}$  而非  $\mathbf{U}$  來計算主伸長率。

對於未變形材料(剛體) $\mathbf{C}=\mathbf{I}$ 。解釋了為什麼在實際中人們主要使用  $\mathbf{C}$  來描述較大伸縮性的材料。

左 Cauchy-Green 變形張量  $\mathbf{B}$  也具有主伸長率作為特徵值。但由于  $\mathbf{V}$  描述剛體轉動之後的伸長率，因此主方向依照空間方向來確定。

- 應變張量

要得到基于零的變形測量值，需要從  $\mathbf{C}$  中減去等同張量，從而得到格林-拉格朗日應變張量  $\mathbf{E}$  定義為

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

該張量也描述材料在發生任何轉動之前產生的變形，但在未變形狀態下的所有分項均為零，其分項可以寫為

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

其中假設對重複指標求和。

格林-拉格朗日應變張量的對角元素如下

$$E_{XX} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right)$$

非對角元素的示例為

$$E_{XY} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right)$$

當應變和剛體轉動幅度都很小時，格林-拉格朗日應變張量中的二次項可以忽略不計，由此可得到工程應變張量

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

其分量如下

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial u}{\partial X}$$

和

$$\varepsilon_{XY} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right)$$

該應變張量的對角項稱為法向應變或正應變，用於描述沿每個坐標軸的延伸。非對角項是應變張量的剪切分量，用於描述線段之間夾角的變化。這裡的術語很容易被混淆，因為在工程領域，由於  $\gamma_{ij}$  直接測量角度的變化（以弧度表示），所以人們習慣使用“剪切應變”一詞來描述物理量  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ 。剪切應變產生等體積變形；即變形不引起體積改變。

對於小應變相對體積變化通過正應變之和求得：

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \text{trace}(\varepsilon)$$

- 真實應變

有時，我們會使用真實應變這個術語。在真實應變的單軸定義中，應變增量定義為

$$d\varepsilon = \frac{dL}{L}$$

真實應變的定義基於當前長度，因此在積分後可以得到

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln(\lambda)$$

這就是真實應變也稱為對數應變的原因。

- 應變協調性

由於應變張量由位移的導數構成，因此並非所有應變場均適用。位移矢量只有三個分量，這意味著，除非各個應變分量都滿足特定的協調性標準，否則它們的積分無法給出唯一的一組位移。工程應變必須滿足以下方程：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial X_k \partial X_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial X_i \partial X_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial X_j \partial X_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial X_i \partial X_k} = 0$$

由於應變張量的對稱性，這 81 個方程中只有 6 個是非平凡方程。

如下所示：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

## 2.2.2 應力方程

- 動量平衡

作用在變形區域上的表面力可以表示為

$$d\mathbf{F}_s = \mathbf{t}_n da = \mathbf{T}_N dA$$

其中  $\mathbf{t}_n$  稱為牽引力，而  $\mathbf{T}_N$  通常稱為標稱牽引力，原因是它將實際變形狀態下的作用力與未變形區域關聯起來。

此外，我們還可以基於法向量將牽引分量寫為以下線性展開式：

$$T_i = P_{iJ} N_J$$

在此處和下文中，假設對重複指標求和。空間分量和材料分量分別使用小寫和大寫字母。這種表示有時稱為柯西定律或柯西公式，僅適用於  $P_{iJ}$  為特定二階張量的分量的情況。對於任意未變形的材料體積  $V_0$ ，動量守恆可以用以下積分形式表示：

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{v} dV = \int_{V_0} \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial V_0} \mathbf{T} dA$$

其中  $\mathbf{f}_V$  表示體積力

速度場根據位移場  $\mathbf{u}$  計算為

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, t)$$

根據高斯定理，使用柯西公式可以將表面積分轉換為體積積分：

$$\int_{\partial V_0} T_i dA = \int_{\partial V_0} P_{iJ} N_J dA = \int_{V_0} \frac{\partial P_{iJ}}{\partial X_J} dV$$

因此可以得到動量平衡方程的微分形式如下所示：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_{V,i} + \frac{\partial P_{i,J}}{\partial X_J}$$

或者使用張量符號得到：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f}_V + \nabla_X \cdot \mathbf{P}^T$$

張量  $\mathbf{P}$  稱為第一類 Piola-Kirchhoff 應力張量，它將空間方向的作用力與原始未變形構型中的區域關聯起來。因此他的分量指標涉及不同的構型。有時這種數學對象稱為兩點張量。

在實際的變形構型中，可以對牽引向量  $\mathbf{t}_n$  和材料體積應用類似的方法，可用下式表示：

$$\mathbf{t}_n = \sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i$$

張量  $\sigma$  稱為柯西應力張量或真實應力張量，原因是它表示與實際變形區域相關的實際構型中的力。由其空間分量表示。

由於柯西應力張量和第一類 Piola-Kirchhoff 應力張量對同一個表面力有著不同的表示

$$\mathbf{P} \mathbf{N} dA = \sigma \mathbf{n} da$$

要確定這兩種應力測量方式之間的關係，我們可以使用 Nanson 公式計算變形引起的面積變化，表示為

$$\mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA$$

其中， $\mathbf{F}$  為變形梯度張量，由此可得

$$J = \det(\mathbf{F}) = dV/dV_0$$

體積因子  $J$  可以給出變形引起的體積變化。因此，應力張量可通過下式與之關聯

$$\mathbf{P} = J \sigma \mathbf{F}^{-T}$$

通過引入一個稱為基爾霍夫應力張量（定義為  $\tau = J\sigma$ ）的張量，可以進一步簡化這個公式及類似公式。基爾霍夫應力張量是一個幾乎沒有實際用途的物理量，但卻具有理論上的便利性。

- 機械能平衡

將動量方程的微分形式乘以速度向量，並基於材料對其進行積分，

可以得到以下方程：

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_V \sigma : \mathbf{L} dV = \int_V \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} dA$$

這個方程給出了機械能平衡的積分形式，也稱為纂定理。速度的空間梯度為  $\mathbf{L} = \nabla_x \mathbf{V}$ ，其中的運算符表示對兩個指標求和變形分析頁面對速度梯度的特性進行了詳細論述。

方程右側的兩個積分項分別表示體積力和表面力的功率輸入，它們分別是這些力在每單位時間內對材料所做的功。左側的項分別為動能變化率以及為體提供的應力功率。對於彈性材料，應力功率是應變能密度變化率。通過使用以下關係式：

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{L} &= J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T : \mathbf{L} = \\ &= J^{-1} \mathbf{P} : (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) = J^{-1} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \end{aligned}$$

應力功率可以表示為以下等價形式：

$$\int_V \sigma : \mathbf{L} dV = \int_{V_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV_0$$

因此第一類 Piola-Kirchhoff 應力張量和變形梯度形成了能量共軛對。這種共軛對也可以稱為功率共軛或功共軛應力和應變測度。

速度梯度可以分解為對稱和反對稱部分，分別稱為應變率張量 ( $\mathbf{L}_d$ ) 和自旋張量 ( $\mathbf{L}_w$ )。由於柯西應力張量是對稱的  $\sigma : \mathbf{L} = \sigma : \mathbf{L}_d$ ，因此與柯西應力形成功率共軛的應變測量是應變率張量。後者也可以寫為

$$\mathbf{L}_d = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}$$

其中

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

為格林-拉格朗日應變張量。由此應力功率積分可以改寫為：

$$\int_V \sigma : \mathbf{L}_d dV = \int_{V_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV_0$$

其中

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$$

稱為第二類 Piola-Kirchhoff 應力張量，這是一個對稱張量，與格林-拉格朗日應變形成能量共軛。

第一類和第二類 Piola-Kirchhoff 應力張量通過下式相關：

$$\mathbf{P} = \mathbf{FS} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})\mathbf{S}$$

基於此公式，我們可以將動量平衡方程改寫為：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{F}_V + \nabla_X \cdot [(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})\mathbf{S}]$$

再結合以下形式的本構關係

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$$

可以形成位移向量的封閉方程組。

- 旋轉平面上的應力分量

對於承受軸向載荷的桿，我們很容易將應力  $\sigma_x$  看作一個標量，並認為這個桿上只存在正應力。全應力張量為

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在 x 軸與桿的方向一致的坐標系中表示該應力張量的分量，而在任何其他坐標系中，則同時存在正應力和剪切應力。我們設想一個不與桿軸垂直的概念內表面，就能看出這一點。在這個表面上，實際上存在法向 ( $\sigma$ ) 應力和剪切 ( $\tau$ ) 應力。

這種應力狀態通常稱為單軸應力；不過，只有在特定的坐標系中，它才能用單個正應力分量表示。

## 2.3 分析步驟

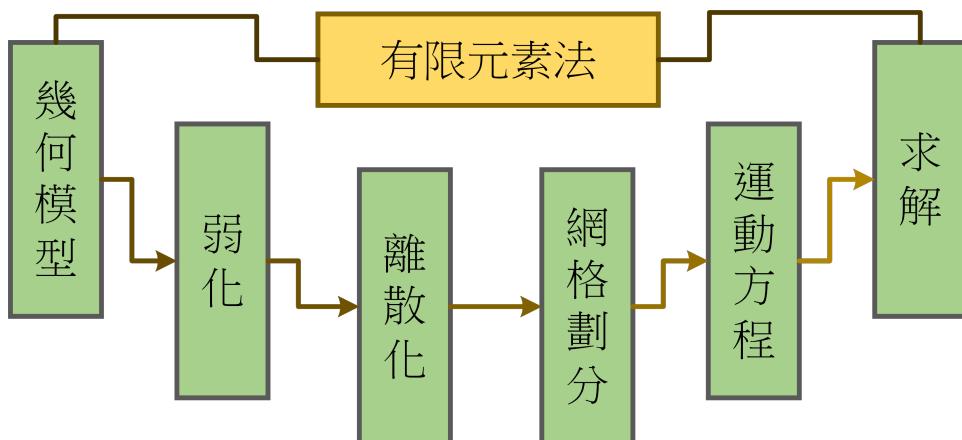


圖 2.7: 有限元素法分析流程

- 幾何模型: 透過繪圖軟體將模型畫出，將模型以數據方式在電腦裡呈現二維或三維的外觀，便於軟體將其代入且計算。
- 離散化及元素劃分: 將物理系統或結構等連續變量通過計算轉換為數格元素的過程，對於複雜的連續變量，需先進行弱化的動作，才能進行離散化將其轉變為各個元素，此動作由分析軟體內部公式計算。
- 導入函數並組成代數方程: 模型或問題不同，力學性質及物理方程相應的關係式(應力、應變、變形、熱傳等)也會跟著變化，因此需要根據對應的問題分別導入不同的函數，需在軟體內設定問題，讓其可以對特定問題進行求解，此動作為設計者提問，軟體負責計算。
- 求解方程: 在經過有限元素法分析後，將會在每個表面得知各元素的受力情況，設計者可以根據此數據了解到模型的受力狀態或位移及負載等相關訊息，以利於後續的設計或生產。

### 第三章 四足機器人



圖 3.1: 運動學推導流程

本章節將對四足機器人進行介紹並利用虛擬環境進行模擬運動情況，透過仿真環境找出四足機器人的最大反力並利用運動學公式計算行走姿態路徑。

#### 3.1 應用範圍及作用

四足機器人為一種模仿動物運動的機器人，分別由四組步行機構及本體組成，利用電子元件驅動機械臂進行運動，可用以替代人力執行任務，同時為人們帶來許多樂趣及益處，可大致上分為以下幾種類型：

1. 軍事：四足機器人有良好的機械性能，搭配著電子控制系統，可以輕鬆在各地形中運輸物品及人員，感測器的回饋、馬達的行程及出力大小，在戰場中穿梭及運輸補給品，或是在搜救行動當作先鋒隊，都不是問題，可以減低人員受傷的危險。
2. 工業：替代傳統人力，保持高效運作，減少作業人員在高風險環境中造成職業傷害，也減少工業中的資源浪費。
3. 民生：可以執行各種控制指令，可以體驗仿生機器人的操作特性和樂趣，也可以幫助幫運重物，也能依照需求進行各式改裝及編程，讓四足機器人可以達到所需的功能。

隨著電腦的普及，各式各樣的編程軟體如雨後春筍般誕生，計算機語言也更好上手，讓更多使用者可以輕而易舉的使用，也有許多人在網路公開分享開源的程式及經驗可以參考及學習，配合現在 AI 的發展，四足機器人應用範圍越加的廣泛，正因為如此我們才以四足機器人為主題，研究由誕生至成品將會有哪些步驟及考量。

## 3.2 連桿閉環機構

在步行結構設計之初，通常透過模仿生物，來創造不同的機械模型，不同型態的機械模型都有其各自特性，對於連接機構的運動控制，一般來說，腿部的機械結構不能過於複雜，過多的機械零件需要較精細的控制元件及設計，對於控制運動軌跡及製作成本來說較不益，以下為 Goegebra 所繪製連桿機構講述：

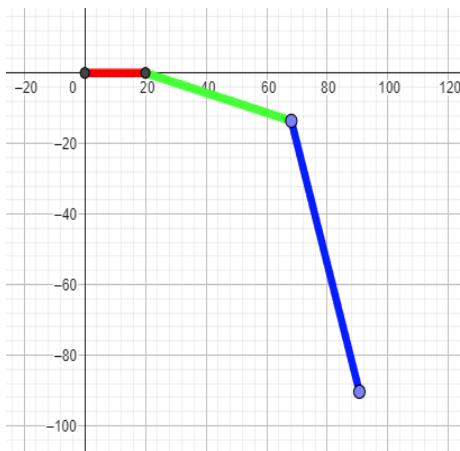


圖 3.2: 三連桿閉環機構

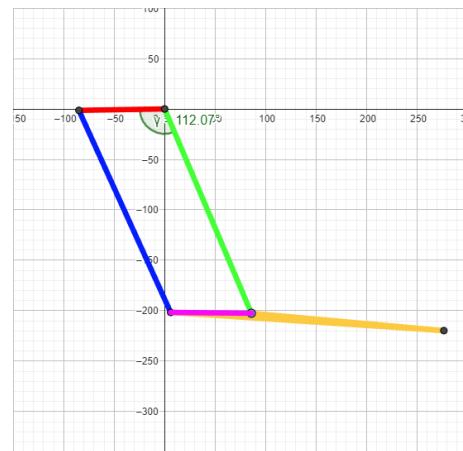


圖 3.3: 四連桿閉環機構

### 1. 三連桿閉環機構:

此三連桿閉環機構(圖 3.2)為三個連桿及三顆馬達組成，此機構以一個關節連接本體，結構較為緊湊、簡單，通過三連桿關節的旋轉角度控制整體機構做動及末端點位置，具有靈活性高、反應快速、定位精度高等優點。

## 2. 四連桿閉環機構:

此四連桿閉環機構(圖 3.3)為四個連桿及兩顆馬達組成，組成一個不規則四邊形，兩個馬達分別驅動 Leg1-5(綠)及 Leg2(紅)桿件搖擺，互相搭配後讓連桿有大幅度的運動，此機構較為複雜，需要較精細的控制以實現穩定的運動，有著能承受較大負載的優勢，對於運動穩定性也有著良好的表現，為此專題步行裝置所參考的機構。

### 3.3 硬體架構

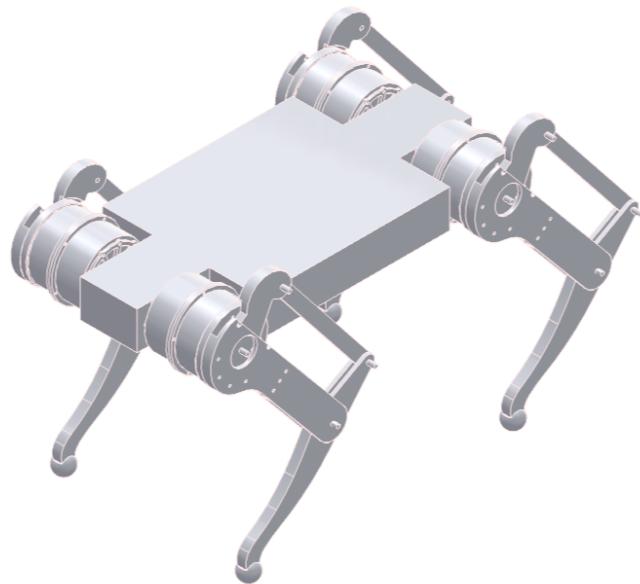


圖 3.4: 四足機器人

(圖 3.4) 所示為本次專題研究的有限元素法分析對象，四足機器人的站立姿態，由四組步行機構及一個本體和馬達及連接板組成硬體結構，因為本專題研究的機器人需要有高負重及高穩定性，所以使用上述所講的四連桿閉環機構。

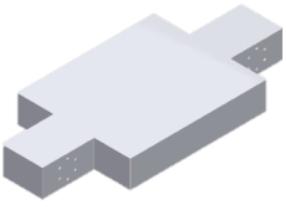
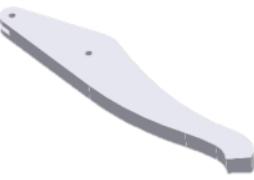
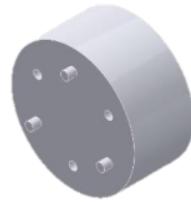
		
本體	連接件	連接件-2
		
Leg1-1	Leg1-5	Leg2
		
Leg3	Leg4	Leg6
		
馬達底座		馬達軸

圖 3.5: 零件表

### 3.4 運動軌跡

Leg1-5 的長度為半徑建立圓形，且給定數值滑桿 (一) 控制 Leg1-5 末端點並限制其角度；Leg2 的長度為半徑生成 Leg2 末端點，且給定數值滑桿 (2) 控制 Leg2 末端點並限制其角度。

將兩點設定為搖擺運動，以 Leg2 末端點為圓心繪製半徑長為 Leg3 的圓形，再於 Leg1-5 末端點以 L3' 為半徑畫圓，即可找出兩圓交點並連接，再用 Leg1-5 末端點及 Leg3 末端點為圓心，兩點和目標點距離為半徑畫圓，兩圓交點部分即為目標點，由此可得模擬路徑範圍如下圖所示：



圖 3.6: Geogebra 運動軌跡

### 3.5 四連桿機構運動學模型

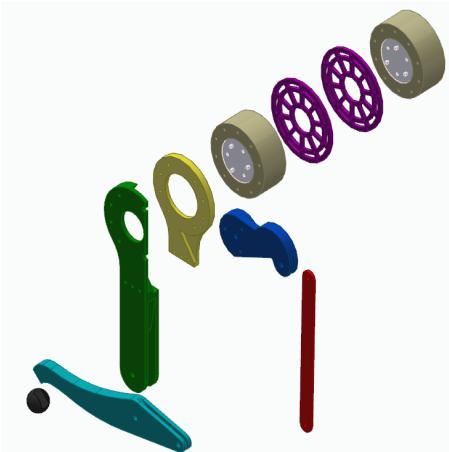


圖 3.7: 步行機構分解圖

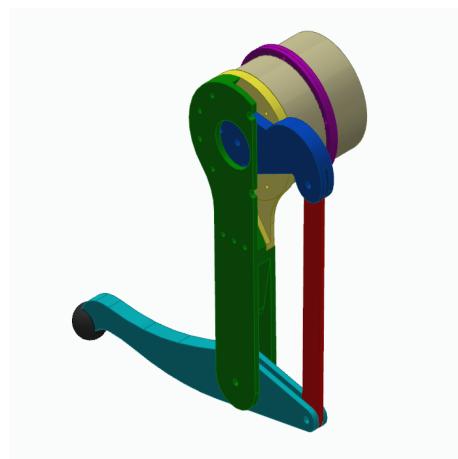


圖 3.8: 步行機構



圖 3.9: 馬達 (一)



圖 3.10: 馬達 (二)

A 部分: 由馬達 (一) 所控制的結構為零件 Leg1-1(黃) 和 Leg1-5(綠)；

B 部分: 由馬達 (二) 所驅動的結構為零件 Leg2(藍)。

連桿 Leg3(紅)B 部份所控制，被動對 Leg4(青) 施以推力及拉力，因此 Leg4(青) 中間受 A 部分連桿約束後將會控制 Leg6(橡膠套) 做動。

此順向運動學將對步行機構 (圖 3.7) 至 (圖 3.8) 進行計算馬達旋轉角，推導順逆向運動學，由於四組步行機構為相同模型，因此只要提出其中一組計算即可。

### 3.5.1 順向運動學

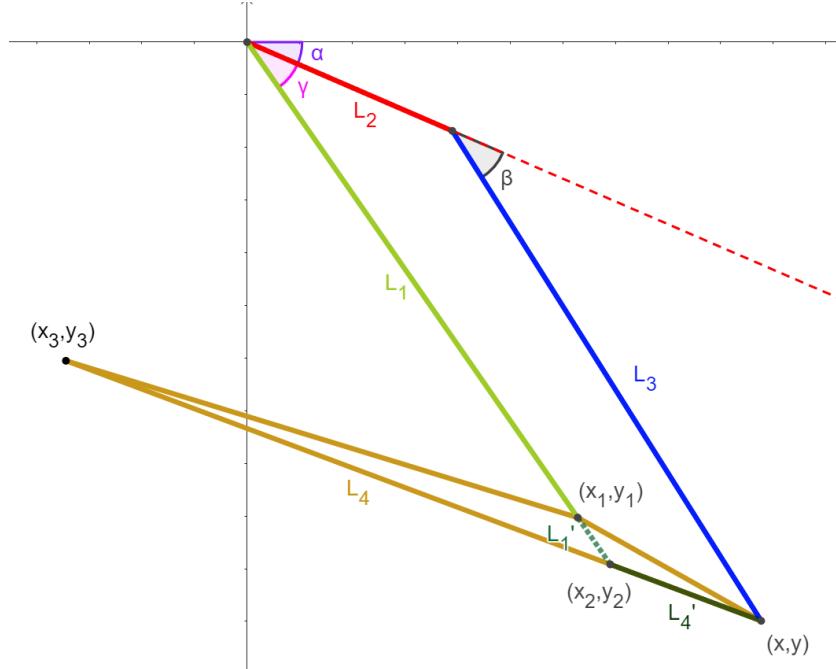


圖 3.11: 順向運動學連桿圖

可見 A 部分為二連桿機構組成，因此使用三角函數即可分別計算出末端點的相對座標位置，可以繪出連桿圖及列出算式如下：

$(x, y)$  座標

$$x = L_2 \cos \alpha + L_3 \cos (\alpha + \beta)$$

$$y = L_2 \sin \alpha + L_3 \sin (\alpha + \beta)$$

B 部份則為單支連桿組成，套入三角函數的計算方式如下：

$$x_1 = L_1 \cos (\alpha + \gamma)$$

$$y_1 = L_1 \sin (\alpha + \gamma)$$

求出 A 部分  $(x, y)$  座標連接到末端點  $(x_3, y_3)$ ，再以內分點公式求出

$L_1$  延伸至  $L_4$  之交點：

$L_4$ : 為  $(x_3, y_3)$  至  $(x, y)$  長度

$L_4'$ : 為  $(x_2, y_2)$  至  $(x, y)$  長度

$$x_2 = \frac{(L_1 + L'_1) x_1}{L_1}$$
$$y_2 = \frac{(L_1 + L'_1) y_1}{L_1}$$

找出點  $(x, y)$  及點  $(x_2, y_2)$  用內分點公式求出末段點與地面交點：

$$x_3 = \frac{L_4 x_2 - (L_4 - L'_4) x}{L'_4}$$
$$y_3 = \frac{L_4 y_2 - (L_4 - L'_4) y}{L'_4}$$

由此公式得出目標末端點相對至基座連結關節座標，以利於控制

### 3.5.2 逆向運動學

與順向運動學不同是，此種求解方法需要先定義末端位置和姿態，通過觀察機械系統的末端位置推導，計算出各關節的運動及整體姿態，通常以非線性方程組問題表示，其中每個方程都可代表著一個機械臂關節的末端位置及角度，因此需要使用數值方法去求解，本專題透過電腦計算，利用模擬求出座標點。

作用於機器人在空間中精準控制末端姿態，在機器臂控制、機器人視覺和機器人運動學等領域有著許多應用的地方。

下方表格為我們在 GeoGebra 取得的橢圓及直線足端路徑座標點及角度，可以利用查表找出步行機構足端到達該座標點所需的旋轉角度。我們將列出其中兩種軌跡，其餘路徑（圖 5）皆可製作成此種表格。

表 3.1: 足端橢圓運動軌跡

代號	A	B	C	D	E	F
$x_3$	52.03	2.10	-67.03	-142.53	-64.46	4.92
$y_3$	-217.45	-219.07	-226.33	-252.41	-291.39	-297.92
$\alpha$	31.90°	18.30°	3.88°	0.10°	18.42°	31.75°
$\beta$	55.46°	54.19°	59.07°	76.24°	79.24°	79.07°
$\gamma$	53.84°	52.54°	57.52°	74.89°	77.91°	77.74°
代號	G	H	I	J	K	
$x_3$	104.82	174.02	254.19	199.84	121.16	
$y_3$	-297.58	-290.62	-253.76	-229.59	-219.50	
$\alpha$	53.50°	69.72°	88.44°	73.03°	51.61°	
$\beta$	85.54°	94.88°	104.12°	81.39°	63.49°	
$\gamma$	84.23°	93.57°	102.78°	80.07°	62.01°	

表 3.2: 足端直線運動軌跡

代號	A	B	C	D	E
$x_3$	-200	-160	-120	-80	-40
$y_3$	-300	-300	-300	-300	-300
$\alpha$	10.03°	11°	13.75°	18.21°	24.07°
$\beta$	104.75°	95.42°	88.49°	83.64°	80.76°
$\gamma$	103.44°	94.11°	87.18°	82.33°	79.44°
代號	F	G	H	I	J
$x_3$	0	40	80	120	160
$y_3$	-300	-300	-300	-300	-300
$\alpha$	31.18°	39.26°	48.07°	57.39°	67.15°
$\beta$	79.8°	80.76°	83.64°	88.49°	95.42°
$\gamma$	78.48°	79.44°	82.33°	87.18°	94.11°

## 第四章 設計及模擬環境

### 4.1 Solid Edge 建模

Solid Edge 由西門子 PLM 開發的三維特徵造型實體軟體，設計者可以通過輸入參數以生成 3D 模型或是分析模型等動作，在 2017 年，Solid Edge 也引進創成式設計功能，能夠依照多次疊代運算產生最終的優化結果。

用 Solid Edge 作為分析軟體有幾特點及因素，其一，分別有兩種建模方式，對於繪製模型或修改都有極高的便利性；其二，可以直接對繪製零件進行有限元分析及創成式設計且直接打印 3D 模型，不需經過其他軟體。

#### 4.1.1 特徵建模

為兩種 Solid Edge 的建模方式，可以根據繪製情況選取，在不同的情況下可隨時過渡到同步建模或過渡到順序建模

1. 順序建模：根據歷程記錄，返回到特徵建立過程的任何步驟，以編輯順序特徵。
2. 同步建模：定義特徵形狀的面的集合，未保留同步特徵的建立方式歷程記錄。

順序建模環境中，顯示順序和同步特徵。同步建模環境中，順序建模特徵顯示為透明。

## 4.2 Geogebra 路徑模擬

誕生於 2002 年奧地利薩爾茨堡，其名稱由 Geometry(幾何) 和 Algebra(代數) 的混合詞，為一款動態幾何代數軟體，其特點為建立幾何物件，並保持其中連結關係，可以快速進行模擬計算並製作簡單動畫，作為教學演示軟體。

## 4.3 CoppeliaSim 運動模擬

有著良好的模擬環境，在帶入模型之後，可以更加直觀的觀察到步行機構的運動軌跡，利用 Python 或是 Lua 程式，嵌入式腳本、插件、Remote API 客戶端，能對零件進行控制，每個轉軸、連桿、控制器等都可以在裡面持續調整且設定，對尺寸及建模進行運動優化、調整提供了許多便利性，也節省使用實體模型模擬的費用。

### 4.3.1 常用功能則

以下為 CoppeliaSim 簡單介紹

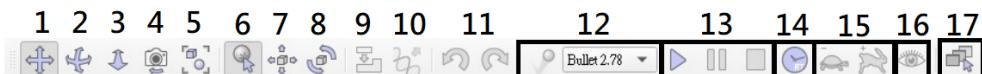


圖 4.1: CoppeliaSim 常用功能

表 4.1: CoppeliaSim 常用功能

代號	功能說明	代號	功能說明
1	畫面平移	10	複製所有設定
2	畫面旋轉	11	回復/取消回復
3	畫面縮放	12	物理引擎選擇
4	畫面視角	13	開始/暫停/停止模擬
5	畫面縮放至適當大小	14	即時模擬切換
6	選取物件	15	模擬速度增減
7	移動物件	16	視覺化
8	旋轉物件	17	場景選擇
9	加入/移出樹狀結構		



圖 4.2: CoppeliaSim Logo

### 4.3.2 RemoteAPI

RemoteAPI(Remote Application Programming Interface) 為 CoppeliaSim API 框架之一，開發者可以使用自己熟悉的語言來編寫遠程通信的代碼，此框架允許應用程式在不同環境中通信及交互，使開發者可以訪問遠程計算資源及服務，實現分部式系統及協同處理、集成應用等功能。

## 4.4 Python 程式控制

Python 為創始人 Guido van Rossum(吉多·范羅蘇姆) 在 1989 年決心開發的指令解釋碼模式已成為 ABC 語言的繼承者，並打算用其替代 Unix shell 和 C 語言來進行系統管理。

為一開源並可擴充的語言，Python 提供了豐富的 API 及工具，提供使用者能輕鬆使用的環境，其設計理念為 < 優雅 >< 明確 >< 簡單 >。

在很多作業系統中，Python 被整合在其中為標準的系統元件，因此可在多個作業系統中運行，能直接執行程式碼並即時查看成果，在網路開發、數值分析、自動化測試等，其廣泛的應用領域和靈活性，成為許多開發者及科學家的首選語言。

## 4.5 有限元素法

- 關於有限元素分析，其中一個選擇了 Solid Edge，原因在於模型是由 Solid Edge 建模的，繪製草圖完畢能夠直接對零件進行分析，不用在

不同軟體中來回切換，透過新建的研究並定義材料或新增材質，設定負載位置，即可方便的對模型進行分析。

2. Ansys ANSYS Inc. 成立於 1970 年，主要是工程模擬軟體和技術的研發，目的為減少設計周期及降低設計成本，在有限元分析、流體力學計算、設計優化等領域都有發展，有豐富的工具及靈敏度和擴展性，被工程師及設計師廣泛的使用。

以上兩個軟體都能對零件進行生成式設計，即在有限元素法分析過後，軟體經過多次的迭代運算在模型上新增或除料，對比之前工程師需要經過長久計算，現在可運用 AI 運算大幅減少設計及時間成本，得益於近幾年電腦快速的發展，複雜的運算及設計都可以透過迭代系統來自動創造設計，不再受限於設計師的想法或經驗，快速產生多個模型提供挑選。

## 第五章 四足機器人運動模擬

將模型以剛體狀態導入 CoppeliaSim 模擬，在設定環境及轉軸後，利用 Python 進行控制。透過上述動作即可以找出作動角度範圍，用以推導運動方程及最大受力角度、使其運動軌跡和姿態符合設計需求，此步驟所解將用於有限元素分析。運用 RemoteAPI 將模型透過網際方式進行模擬，可用於遠端模擬並控制，可作為教學及演示用途。

### 5.1 模型及環境設定

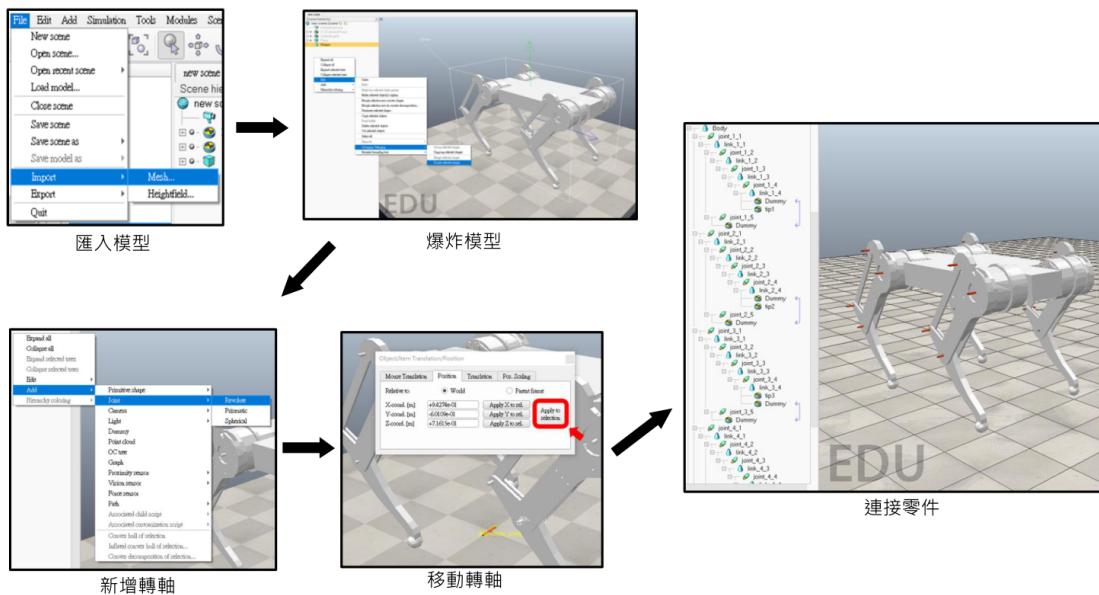


圖 5.1: 組裝步驟

在此代入所設計的四足機器人，在每個旋轉關節插入轉軸並設定，修改零件的重量等參數，並設定環境參數給予物理引擎，令模型能夠以最為真實的情況進行模擬。

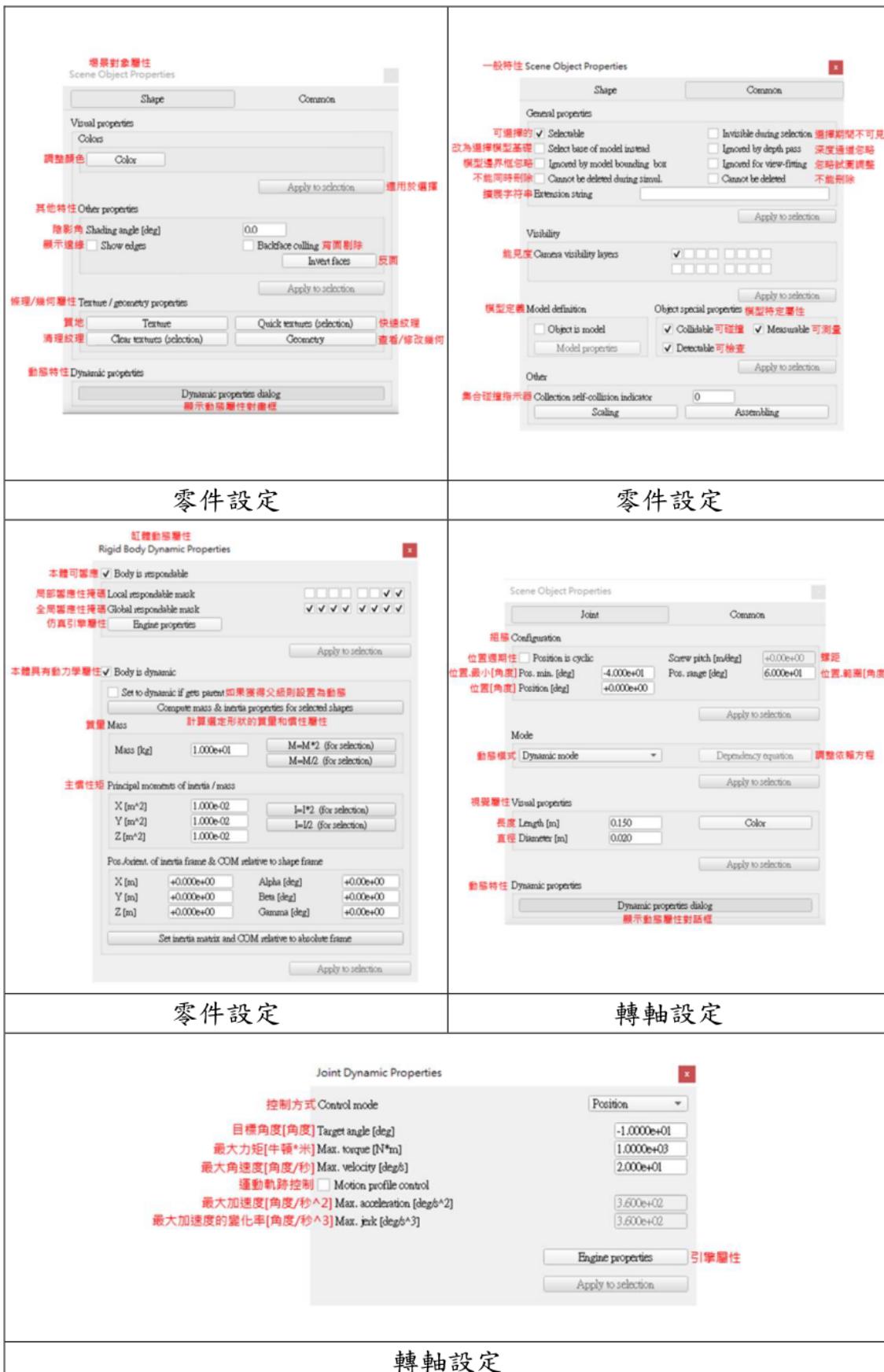


圖 5.2: 零件與轉軸參數設定

## 5.2 Python 控制程式

運動模擬主要以 Python 程式碼進行控制，優點有遠端控制模擬、馬達角度控制，以更好控制末端點位置。

進行運動模擬控制時，我們在軟體中設定角度控制轉軸做動、調用並定義需要控制的轉軸及函數，設置無限迴圈檢測目標按鍵為正確位置，再將先前定義的函數寫入迴圈，以上步驟完成後，即可控制每隻轉軸角度達成理想動作。

程式 5.1: 模塊導入

---

```
from zmqRemoteApi import RemoteAPIClient
import keyboard
import time
# 利用 zmqRemoteApi 中的 RemoteAPIClient 連結場景
client = RemoteAPIClient('localhost', 23000)
```

---

- API 模塊: 遠端通訊客戶端介面
- keyboard 模塊: 檢測鍵盤輸入
- time 模塊: 暫停當前程式一段時間
- client: 導入遠端場景的地址和端口

以較為直覺且直觀的鍵盤進行控制，使用者可以依據自己的想法控制機器人做動

程式 5.2: 啓動模擬

---

```
print('Program\s\tarted')
sim = client.getObject('sim')
sim.startSimulation()
print('Simulation\s\tarted')
```

---

1. 輸出訊息表示程式開始運行
2. 與場景的連接

3. 啟動了場景中的模擬

4. 輸出一個訊息表示模擬已經開始運行。

### 程式 5.3: 轉軸設定

```
#調用需要控制的轉軸
joint_1_1 = sim.getObject('/joint_1_1')
joint_1_2 = sim.getObject('/joint_1_2')
joint_2_1 = sim.getObject('/joint_2_1')
joint_2_2 = sim.getObject('/joint_2_2')
joint_3_1 = sim.getObject('/joint_3_1')
joint_3_2 = sim.getObject('/joint_3_2')
joint_4_1 = sim.getObject('/joint_4_1')
joint_4_2 = sim.getObject('/joint_4_2')
```

調用需要控制的轉軸，代表場景中的不同關節，進一步用於操作和控制這些關節物件的行為。

### 程式 5.4: 轉軸函數

```
#定義控制轉軸函數
def setJointPosition(target_angle1, target_angle2,
                      target_angle3, target_angle4, target_angle5,
                      target_angle6, target_angle7, target_angle8):
    sim.setJointTargetPosition(joint_1_1,
                               target_angle1 * 3.14159 / 180)
    sim.setJointTargetPosition(joint_1_2,
                               target_angle2 * 3.14159 / 180)
    sim.setJointTargetPosition(joint_2_1,
                               target_angle3 * 3.14159 / 180)
    sim.setJointTargetPosition(joint_2_2,
                               target_angle4 * 3.14159 / 180)
    sim.setJointTargetPosition(joint_3_1,
                               target_angle5 * 3.14159 / 180)
    sim.setJointTargetPosition(joint_3_2,
                               target_angle6 * 3.14159 / 180)
    sim.setJointTargetPosition(joint_4_1,
                               target_angle7 * 3.14159 / 180)
    sim.setJointTargetPosition(joint_4_2,
                               target_angle8 * 3.14159 / 180)
```

用於設定場景中關節的目標位置，目標角度設定為對應關節的目標位置，以便控制場景中的關節物件達到指定的角度位置。

### 程式 5.5: 鍵盤控制及角度設定

```
#使用鍵盤移動模型
while True:
    if keyboard.is_pressed('q'):
        setJointPosition(20,20,-30,0,20,10,-30,0)
        time.sleep(0.5)
        setJointPosition(-30,0,20,10,-30,0,20,20)
        time.sleep(1)
    elif keyboard.is_pressed('w'):
        setJointPosition(-30,0,20,10,-30,0,20,5)
        time.sleep(0.5)
        setJointPosition(20,5,-30,10,20,10,-30,10)
        time.sleep(1)
    else:
        setJointPosition(-10,0,-10,0,-10,0,-10,0)
```

設定各關節目標位置並利用按鍵偵測確定選用哪條函式。

## 5.3 運動模擬

我們可以將四足機器人運動模式分為以下三種，分別為：

1. 爬行 (Crawl): 此動作較簡單且容易控制，作用在於機器人需緩慢移動或是穩定度需求高的情況下，由其中單腳前伸其餘進行關節旋轉，在小位移量的情況下實現行走功能。
2. 小跑 (Trot): 此作用型態為 FR+RL 或 FL+RR 做動，進行移動時有著兩動兩不動的準則，在不動的部分做關節的旋轉運動，令四足機器人在快速移動下還能對身體保持平衡，在大位移量的情況下實現行走功能。
3. 跳躍 (Bound): 由前兩足進行快速彈跳位移，使機器狗的關節進行快速調整以支撐身體姿態，分為 FL+FR 及 RL+RR 兩組，在躍障或其他特殊行為中使用。

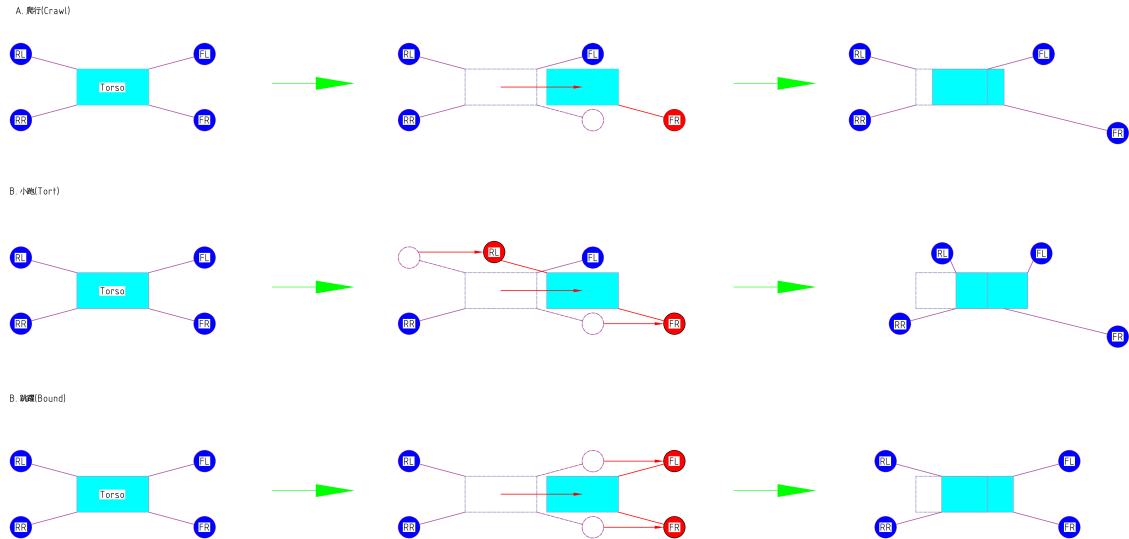


圖 5.3: 各式步態圖

下列圖片為機器人在小跑時的模擬圖片：

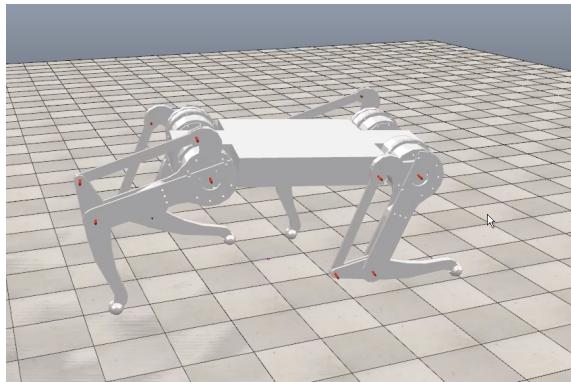


圖 5.4: 模擬動作-1

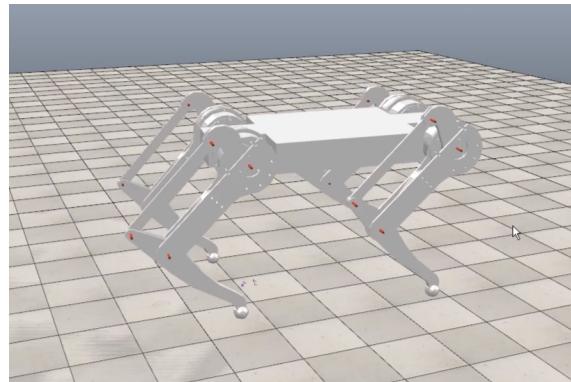


圖 5.5: 模擬動作-2

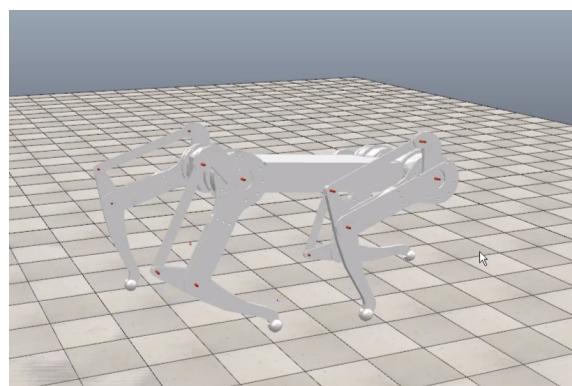


圖 5.6: 模擬動作-3

## 第六章 四足機器人有限元素分析

此章節利用了有限元素分析四足機器人，單組步行機構為承受五倍自身重量 (630N)，材質則選用了常見的 ABS 材料；分析環境選擇 Solid Edge 及 Ansys 同時進行，以利於對比資料並查看兩軟體區別。

### 6.1 有限元素分析

下列為個部位進行有限元素分析的步驟介紹

1. 開啟 Solid Edge 設計模型並執行分析功能新增研究內容 / 另存為 IGES(.igs) 檔案用以匯入 Ansys。
2. 材料選擇 3D 列印機常用的 ABS 材質，在未來有能夠快速地打印產出模型。
3. 依照原先設計者的參數設定負載為 630N，為自身 5 倍體重。
4. 通過有限元素法觀察各部位受力狀態。
5. 觀察求解後參數是否符合要求或是需要修改。

以上步驟為有限元素法在兩個軟體中通過電腦計算在四足機器人上的應用，用兩個軟體分析目的為比較之間的算法差異，以利於後續分析調整。

### 6.2 Solid Edge 與 Ansys 分析比較

將零件同時丟進 Ansys、Solid Edge 進行分析，並比對結果，雖然兩個分析軟體都設定相同的參數，但可能因為軟體的各項因素導致最終結果有所差異，像是軟體使用的模擬方法、網格生成、材料參數、數值設定等因素。

1. 分析方式：使用的數值模擬方法和算法可能因為不同的數學模型和近似方法有所差異。

2. 網格生成: 使用不同的網格生成算法，導致在相同設定下生成不同的網格。
3. 材料參數: 即使設定相同的材料，兩個軟體的數據庫所使用的材料特性和邊界條件等參數也可能有所差異。
4. 數值設定: 即使設定相同的參數，兩個軟體可能使用不同的預設值或建議值也會造成差異。

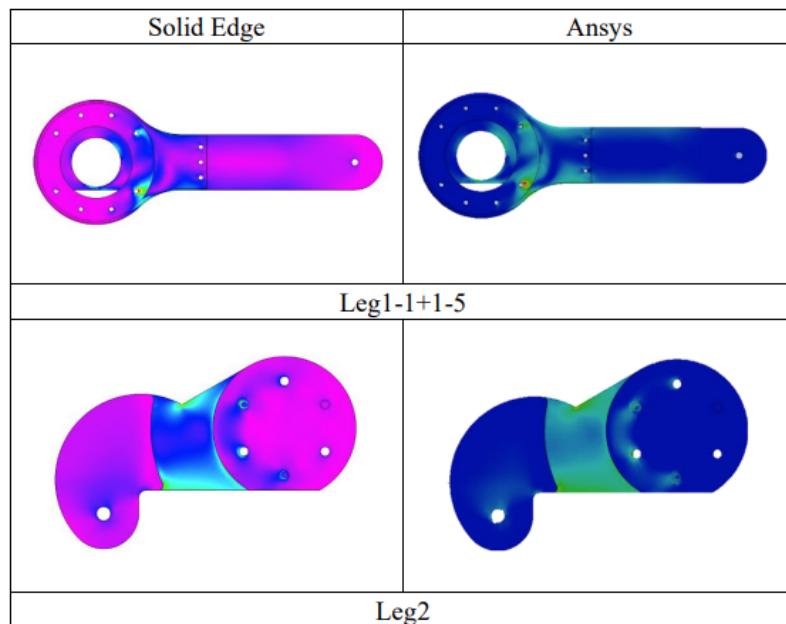


圖 6.1: 分析比對圖

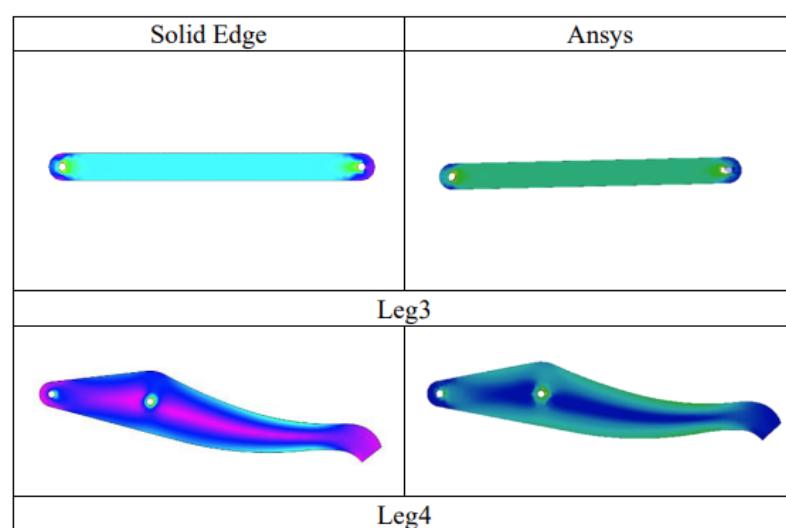


圖 6.2: 分析比對表

表 6.1: ABS 最大等效應力 (MPa)

	Leg1-1+1-5	Leg2	Leg3	Leg4
Solid Edge	68.5	28.9	15.8	57.6
Ansys	60.7	29.2	16.1	56.7

得到分析結果後，發現 ABS 材料在承受五倍自身體重 (630N) 時，會導致零件最小安全係數未大於等於 1，為了符合實際應用，所以將材料換成強度更高的 PLA 進行分析。

表 6.2: PLA 最大等效應力 (MPa)

	Leg1-1+1-5	Leg2	Leg3	Leg4
Solid Edge	69.6	30.8	15.9	61.2
Ansys	61.2	30.0	15.8	60.5

表 6.3: PLA 最小安全係數

	Leg1-1+1-5	Leg2	Leg3	Leg4
Solid Edge	0.9	2.11	4.09	1.06
Ansys	1.1	2.17	4.1	1.1

## 第七章 生成式設計

運用電腦輔助系統的創造工具，利用軟體設計出所需的 3D 模型，輸入的參數或製作、預期要求，將成品利用電腦算法，強大的運算會模擬許多所有可能性及排列，並產生多個解決方案。

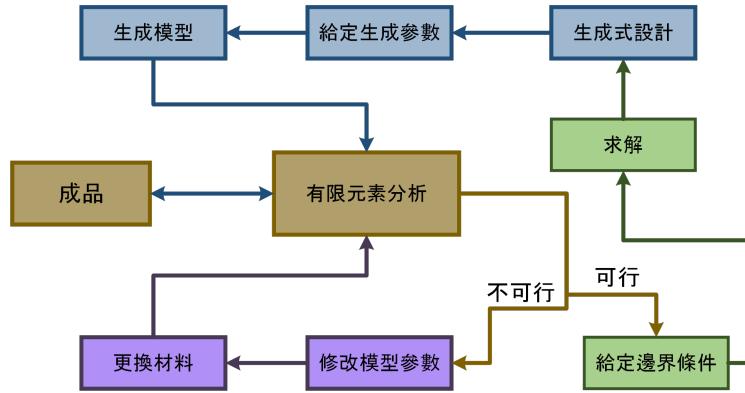


圖 7.1: 生成式流程

主要依靠人工智能和機器學習來模仿自然界的進化設計方法，創造出許多種可能性，利用 AI 運算生成整合並優化零件，創造出可能從未發現的幾何圖形，將產品創新優化，讓零件在輕盈的狀況下還保有堅韌程度，最大程度減低所需要耗費的人力、時間成本，讓成品可以快速並有效的產出。

### 7.1 生成式設計原理

生成式設計是一個迭代設計過程，透過軟體多次的分析與設計，生成符合製作條件的模型設計。生成式設計是一種電腦輔助設計的方法，利用軟體的 AI 智能算法，將設計者輸入的模型設計條件進行多次生成，並尋找出最佳設計。生成式設計的主要功用為優化零件，不只能夠設計出更輕量化的零件，並且也能使各項性質提升，像是強度更強、更耐用、散熱快等。

## 7.2 設計流程

- 確定設計目標: 確定設計問題的範圍和目標
- 新增條件約束: 定義出用來生成設計方案的規則和條件，包括製造條件約束和幾何條件約束。
- 執行生成: 完成以上步驟，進行 AI 生成設計。
- 優化生成結果: 得到生成設計方案後，進行評估和優化，並對設計方案進行手動調整或修改，以便滿足特定的要求。

## 7.3 零件優化

為了將零件輕量化，並維持其原本的零件強度，我們透過 Solid Edge 軟體將零件進行生成式設計，經過軟體的 AI 迭代算法以及多次修改設計參數，最後選擇最符合實際的設計。



圖 7.3: Leg4(生成)

圖 7.2: Leg1-1+1-5(生成)

得到設計結果後，將原本的零件參考生成後的模型進行修改與挖空，這樣既保留所需的零件特徵，也達到了輕量化的目的，並使其外觀更加美觀。

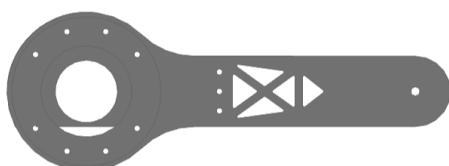


圖 7.5: Leg4(輕量化)

圖 7.4: Leg1-1+1-5(輕量化)

將零件輕量化後，必須確認這樣的修改方式是否與初始零件的數值相同或更加強壯，因此我們將初始零件和輕量化零件進行分析比對，以查證輕量化方式是否有誤。

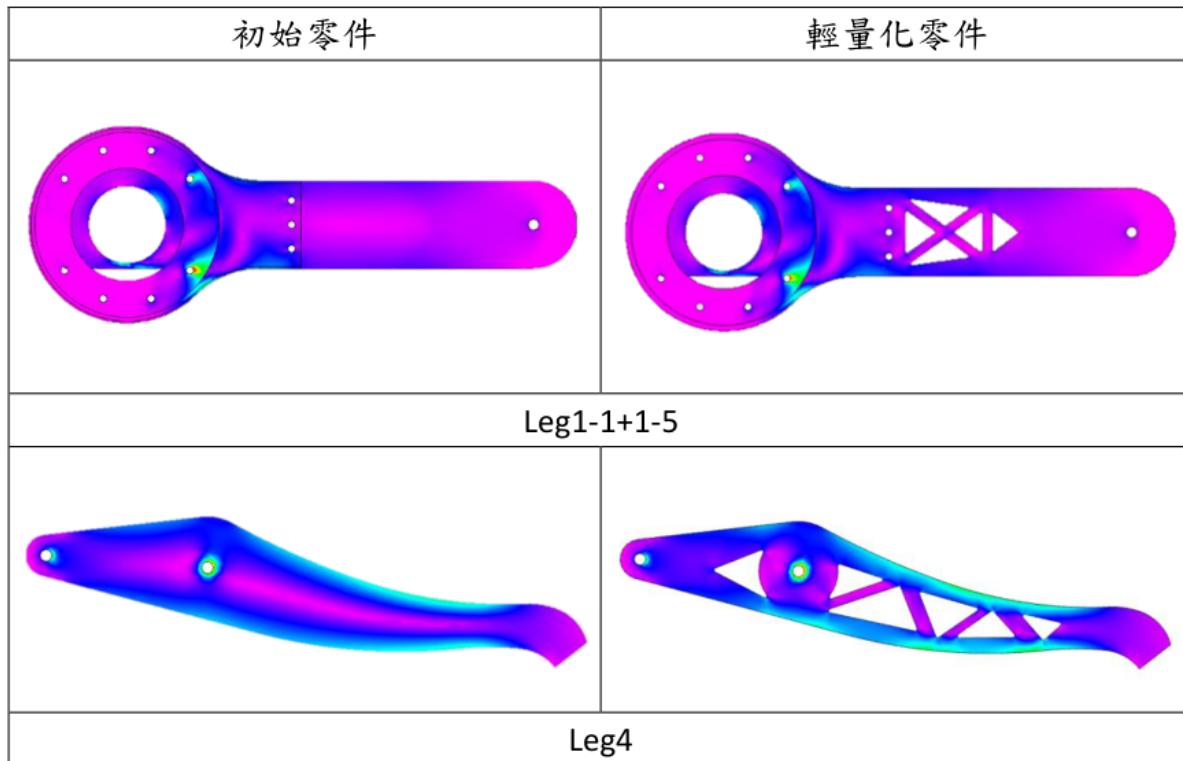


圖 7.6: 分析比對表 (輕量化)

表 7.1: leg1-1+1-5 分析比對

	最大應力 (MPa)	最小安全係數
初始零件	69.4	0.937
輕量化零件	69.9	0.929

表 7.2: leg4 分析比對

	最大應力 (MPa)	最小安全係數
初始零件	61.2	1.06
輕量化零件	60	1.08

## 第八章 總結

本專題主要研究有限元素法的應用方式，探討了分析過程和應用方式，因為現實生活中不存在理想狀態下的剛體，每件物品、每個零件都是由柔性體所組合而成，隨著時間或外力的影響下會產生許多變量，而有限元素法則是以偏微分方程為基礎組成的分析法，主要用來對多種變量進行求解，以求出柔性體的受力狀況，有限元素法能對複雜模型分析的緣故，在近代被廣泛的應用在各種領域中，在建築或機械等地方都可以看見其身影。

四足機器人為一種模仿動物運動的機器人，可以幫助人類執行許多任務，而此設計中有著穩定性及負載的需求，所以步行裝置選用了四連桿為基礎架構，我們將四連桿機構帶入 GeoGebra 進行路徑分析，可以得到此機構的順逆向運動學，放入 CoppeliaSim 的擬真環境並運用了 Python 的作為控制程式，找到了最大的受力位置及角度。為了分析結果的準確性，我們帶入了兩種分析軟體進行比較，查看了分析結果並探討造成差異的原因，在之中發現了原先的 ABS 材料無法承受所預定的安全係數，因此在幾經尋找過後將全部零件材質換成了硬度較高的 PLA，使四足機器人在日常做動時較不易損壞。

經過了上述的動作，我們已經驗證了 5 倍自身重量下步行機構依然可以正常做動，為了近一步增加其性能，我們將零件做生成式設計的步驟，透過軟體的迭代設計過程，對零件做輕量化處理且再次進行有限元素分析，卻保在四足機器人在減重後還保有一定強度。

有限元素法及生成式設計的誕生，讓設計者可以在設計開發中找出接近真實的受力情況，大幅的減少了來回修正模型的時間，也不受限於設計者的想像，可以產生許多結果供以選擇。

## 第九章 未來展望

軟體方面，此四足機器人的控制還可以更加深入得研究，對於控制元件的選用及電路的規劃，由於時間受限無法有著詳細介紹及實驗，要讓機器人可以實現在現實世界中，其中的問題還需要未來更為詳細得研究，有著計算單元、馬達控制、回饋單元、電池容量、效能平衡等，將其完善後加上目前的有限元分析，機器狗才能在現實中有著可預期並可控制的動作。

製成模板，以此專題分析為模板，將四足機器人各重要設計參數設定為可修改的，將一系列的設計道模擬再到分析製成一連串的程式，令後續使用者修改後就可以馬上進行分析，可以快速地透過模板生成可用的機器人。

模組化設計，將各部件例如步行機構或本體或電子元件等製成模組，使用者可以依照需求索取模組，可以對機器人進行修改，新增機械手臂或是捨棄步行機構換成履帶行走等，在經過設計者的開發有的多種可能性。

## 參 考 文 獻

- [1] <https://cn.comsol.com/multiphysics/fea-software?parent=finite-element-method-042-62-22>
- [2] <https://www.guyuehome.com/37628>
- [3] <https://hdl.handle.net/11296/b8emug>
- [4] <https://forums.autodesk.com/autodesk/attachments/autodesk/915/18197/2/一种四足步行机器人结构设计与分析.pdf>
- [5] <https://www.mdpi.com/2218-6581/12/1/28>
- [6] <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/有限元素法>
- [7] <https://wiki.mbalib.com/zh-tw/有限单元法>
- [8] <https://github.com/chaitravi-ce/Eklavya-QuadrupedMotionSimulation>
- [9] <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/9/3762>

## 附錄

### LaTeX

LaTex 為一種程式語言，支援標準庫 (Standard Libraries) 和外部程式庫 (External Libraries)，不過與一般程式語言不同的是，它可以直接表述 Tex 排版結構，類似於 PHP 之於 HTML 的概念。但是直接撰寫 LaTex 仍較複雜，因此可以藉由 Markdown 這種輕量的標註式語言先行完成文章，再交由 LaTex 排版。此專題報告採用編輯軟體為 LaTeX，綜合對比 Word 編輯方法，LaTeX 較為精準正確、更改、製作公式等，以便符合規範、製作。

表 1: 文字編輯軟體比較表

	相容性	直觀性	文件排版	數學公式	微調細部
LaTeX	√		√	√	√
Word		√			√

- 特點:

1. 相容性：以 Word 為例會有版本差異，使用較高版本編輯的文件可能無法以較低的版本開啟，且不同作業系統也有些許差異；相比 LaTeX 可以利用不同編譯器進行編譯，且為免費軟體也可移植至可攜系統內，可以搭配 Github 協同編譯。
2. 文件排版：許多規範都會要求使用特定版型，使用文字編譯環境較能準確符合規定之版型，且能夠大範圍的自定義排定所需格式，並能不受之後更改而整體格式變形。
3. 數學公式呈現：LaTeX 可以直接利用本身多元的模組套件加入、編輯數學公式，在數學推導過程能夠快速的輸入自己需要的內容即可。
4. 細部調整：在大型論文、報告中有多項文字、圖片、表格，需要調整細部時，要在好幾頁中找尋，而 LaTeX 可以分段章節進行編譯，再進行合併處理大章節。

# 足端軌跡

利用 GeoGebra 軟體求得各種足端軌跡所需的轉軸角度。

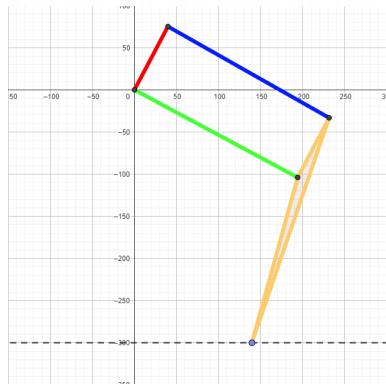


圖 1: 足端軌跡 (直線)

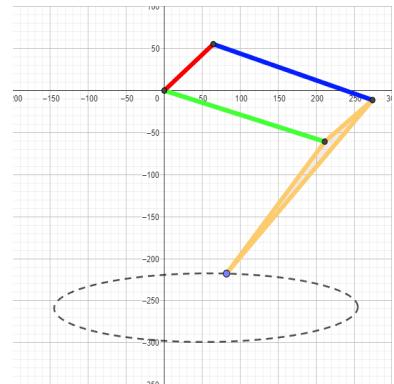


圖 2: 足端軌跡 (橢圓)

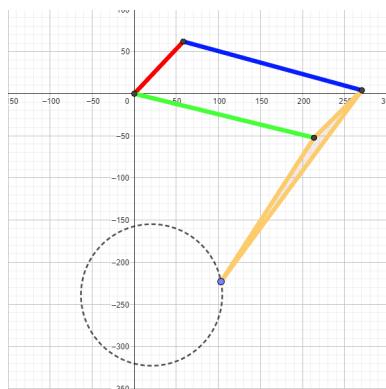


圖 3: 足端軌跡 (圓形)

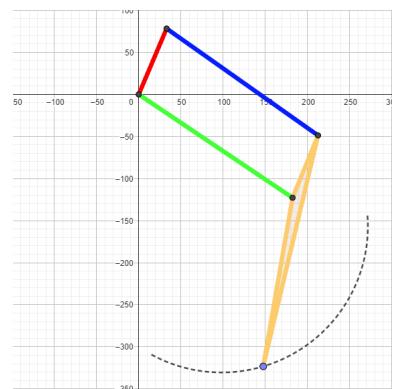


圖 4: 足端軌跡 (弧線)

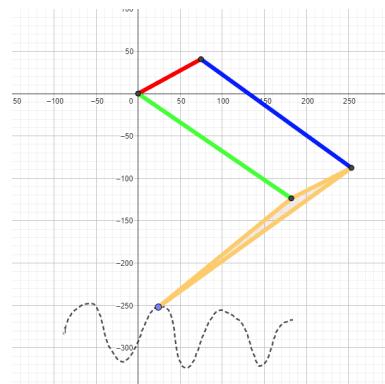


圖 5: 足端軌跡 (不規則)

## 作者簡介



姓名 : 陳岳檉  
學號 : 41023218  
就讀學校 : 國立虎尾科技大學 機械設計工程系  
經歷 : 國立彰化師範大學附屬高級工業職業學校  
機電科



姓名 : 蔡弦霖  
學號 : 41023248  
就讀學校 : 國立虎尾科技大學 機械設計工程系  
經歷 : 國立秀水高級工業職業學校  
製圖科



姓名 : 鄭立揚  
學號 : 41023251  
就讀學校 : 國立虎尾科技大學 機械設計工程系  
經歷 : 新北市立新莊高級中學



姓名 : 謝鴻元  
學號 : 41023254  
就讀學校 : 國立虎尾科技大學 機械設計工程系  
經歷 : 國立秀水高級工業職業學校  
製圖科

【05】

分類編號：112-4-CAE-3006、3004-1  
有限元素法 一百一十二級