译者的话

由于译者水平所限，译文中的错误在所难免，当您感觉译文有疑问时，请您参考原文（切记）。如果您发现译文中有错误并且您愿意告诉我的话，我将非常感激您，当然，这种感激是无偿的，因为我并不富有，而且本书的译文也是免费提供的，不收取任何费用，主要目的是为了交流和学习。谢谢您对本书（译文）的关注，也谢谢您能通过本书来学习不等式及其证明方法。我的邮箱地址是：szl6208@163.com，如果您有任何意见或建议，请把您的高见发到上面的邮箱。

2011 年春节

前言

你手中正捧着一本有关初级不等式的新书，我们听到你问：“又是一本不等式的书？”，用作者的话说，你也许是对的。

现今大量的不等式和不等式技巧出现在各种书籍和竞赛内容中。尝试学习和掌握全部的不等式以及不等式技巧是不可能的，也是没有必要的。本书的主要目的是帮助你理解不等式是如何处理的，以及你如何当场建立自己的方法，而不仅仅记忆那些你已经学会的知识。为了获得和掌握一个实用的不等式，你首先要全面掌握不等式的基本知识。本书第一部分（1-8 章）的内容是为解决第二部分练习而打下的基础。自己通过努力解决问题是至关重要的，因为只有通过练习，才能加深理解，尤其是第二部分我们提供的问题；关于这一点，本书的目的并不只是展现新颖的解题方法，而是诸多的问题和方法给你最好的练习。

当然，有许多关于不等式方面的书，你或许已经厌倦它们，但我们要告诉你本书不是你想象的那样。你只需阅读本书开始部分的 Nesbitt 不等式的证明，就会明白我们的真正意图。

现在你再读本书，你就会相信我们，你将在本书中找到新的和老的不等式的新颖的证明，仅此一点就是你阅读本书甚至只是为了看看快速浏览一下的最好的理由。

你将会发现第一个对经典不等式作出奉献的章节：从 AM-GM 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式的派生不等式的使用到 Chebyshev 不等式和重排不等式。你会

发现这里有和经典主题相关的最重要和最精彩的内容：对称不等式，凸函数不等式，甚至你很少知道的平衡系数法，作者也将陆续添加。

你可能认为作出一个严肃的评论很简单。不过，我要强调的是，这些评论在任何一本不等式的书中都很重要。为什么呢？因为他们创造了至少不等式领域的一半以上，更进一步地说，在深层次真正理解他们并不是一件容易的事。这也是本书的第一部分的目标，也是这本书的首要目标。

每一个主题都是通过多种而大量的例子描述出来的，这些例子来自多个渠道，尤其是世界范围内的数学内容、最近出版的书籍，或者互联网的专门区域。这使得本书生动活泼，可以使世界各地的学生和老师在线阅读。

作者看似非常专注于创造新的不等式，这点可以在整本书中表现出来；但更多的是在第二章或者本书的结尾部分。证明的每一个步骤都以易于思考的方式加以解决，这也来自于作者对于不等式的深入的理解，也是作者渴望传递给读者的。许多练习为有兴趣的以及专业解题的人们而准备的，作者建议我们，首先找出自己的解决方法，再来查阅作者的解法。

我们以作者的话来作为结束语：

“不要让问题压倒你，即使是令人印象深刻的问题。学习以上最先提到的五个基本不等式的应用，再加上 Abel 恒等式、对称不等式及其派生的方法，放松对待 AM-GM 不等式（不等式的基石）。”

Mircea Lascu, Marian Tetiva

致谢（略）

缩写和记号

缩写

IMO	国际数学奥林匹克
TST	IMO 选拔考试
APMO	亚洲太平洋地区数学奥林匹克
MO	国家数学奥林匹克
MYM	数学和越南青年杂志
VMEO	竞赛网站 www.diendantoanhoc.net
LHS，RHS	左边，右边
WLOG	不失一般性

记号

$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{N}^*$	自然数集，0 除外
$\mathbb{Z}$	整数集

$\mathbb{Z}^+$ 正整数集

$\mathbb{Q}$ 有理数集

$\mathbb{R}$ 实数集

$\mathbb{R}^+$ 正实数集

目录

第一部分

基本不等式

第一章 AM-GM 不等式

1.1 AM-GM 不等式及应用

定理 1 （AM-GM 不等式）对所有正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，下列不等式成立

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立。

证明：当 $n=2$ 时，不等式显然成立。如果不等式对 n 个正实数成立，那么它对 2n 个正实数也成立。这是由于

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}\ge n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+n\sqrt[n]{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{2n}}\ge 2n\sqrt[2n]{a_1a_2\cdots a_{2n}},$$

因此不等式对 n 是 2 的指数幂形式个正实数是成立的。假设不等式对 n 成立，我们设

$$a_n=\frac{s}{n-1};s=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1},$$

依据归纳假设，我们有

$$s+\frac{s}{n-1}\ge n\sqrt[n-1]{\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{n-1}}\Rightarrow s\ge(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$$

因此，如果不等式对 n 个正实数成立，那么它对 $n-1$ 个正实数成立，由归纳法（Cauchy 归纳）可知，不等式对每一个自然数 n 都是成立的。当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立。

AM-GM 不等式作为一个著名的、应用广泛的定理，在证明不等式方面也是不可缺少的。下面通过一些有名的不等式来研究它的强大的应用。

案例 1（Nesbitt 不等式）

（a）证明对所有非负实数 a,b,c， $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

（b）证明对所有非负实数 a,b,c,d， $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2$

证明：（a）考虑下列表达式

$$S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b};$$

$$M=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b};$$

$$N=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b};$$

我们有 $M+N=3$，根据 AM-GM 不等式，我们得到

$$M+S=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\ge 3;$$

$$N+S=\frac{a+c}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}\ge 3;$$

所以 $M+N+2S\ge 6$，即有 $2S\ge 3\Rightarrow S\ge\frac{3}{2}$

（b）考虑下列表达式

$$S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b};$$

$$M=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b};$$

$$N=\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}+\frac{b}{a+b};$$

则 $M+N=4$。根据 AM-GM 不等式，我们有

$$M+S=S=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+d}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}\ge 4;$$

$$N+S=\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{a+c}{d+a}+\frac{b+d}{a+b}=\frac{a+c}{b+c}+\frac{a+c}{d+a}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{b+d}{a+b}$$

$$\ge\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}=4;$$

因此，$M+N+2S\ge 8$，即 $2S\ge 4\Rightarrow S\ge 2$。当且仅当 $a=b=c=d$ 或 $a=c,b=d=0$ 或

$a=c=0,b=d$

案例 2（加权 AM-GM 不等式）

假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，如果 n 个非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的和为 1，则

$$a_1x_1+a_2x_3+\cdots+a_nx_n\ge a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_n^{x_n}$$

证明：这个不等式的证明和经典 AM-GM 不等式的证明是类似的。

在 $n=2$ 的情形，我们必须详细的证明（因为不等式中出现了实数指数）。我们先来证明，如果 $x,y\ge 0, x+y=1$ 以及 $a,b>0$，则

$$ax+by\ge a^xb^y$$

证明这个不等式的最简单的方法是考虑 x, y 是有理数的情况，至于实数我们可以采用极限的方法来进行。如果 x, y 是有理数，设 $x=\frac{m}{m+n}, y=\frac{n}{m+n}$ $(m,n\in N)$，根据 AM-GM 不等式，我们有

$$ma+nb \geq (m+n)a^{\frac{m}{m+n}}b^{\frac{n}{m+n}} \Rightarrow ax+by \geq a^x b^y$$

如果 x, y 是实数，则存在两个有理数序列 $\{r_n\},\{s_n\}$ $(n\geq 0, n\in N)$，使得

$r_n \to x, s_n \to y, r_n+s_n=1$。于是

$$ar_n+bs_n \geq a^{r_n}b^{s_n} \quad \text{或者}\ ar_n+b(1-r_n) \geq a^{r_n}b^{1-r_n}$$

取极限，令 $n\to+\infty$，我们有 $ax+by\geq a^x b^y$

尽管 AM-GM 不等式非常简单，但它在数学竞赛中的不等式证明方面扮演着重要的角色。下面的一些例子来帮助你熟悉这个重要的不等式。

例 1.1.1 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=3$，证明：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$

证明：注意到恒等式 $2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

则该不等式等价于

$$\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}\sqrt{a}\geq 9$$

由 AM-GM 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}\sqrt{a}=\sum_{cyc}(a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a})\geq 3\sum_{cyc}a=9$$

所以，不等式成立。

例 1.1.2 设 $x,y,z>0$ 且 $xyz=1$，证明：$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$

【IMO Shortlist 1998】

证明：利用 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geq\frac{3x}{4}$$

因此

$$\sum_{cyc}\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{4}\sum_{cyc}(1+x)\geq\sum_{cyc}\frac{3x}{4}\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\geq\frac{1}{4}\sum_{cyc}(2x-1)\geq\frac{3}{4}$$

当 $x=y=z=1$ 时，等号成立。

例 1.1.3 设 $x,y,z>0$，证明：$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$ （APMO 1998）

证明：不等式整理之后等价于

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

由 AM-GM 不等式，我们有

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=\left(\frac{2x}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{2y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{2z}{x}+\frac{x}{y}\right)\geq\frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

即 $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$

例 1.1.4 设 $a,b,c,d>0$，证明：$16(abc+bcd+cda+dab)\leq(a+b+c+d)^3$

证明：应用 AM-GM 不等式，我们得到

$$16(abc+bcd+cda+dab)=16ab(c+d)+16cd(a+b)$$

$$\leq 4(a+b)^2(c+d)+4(c+d)^2(a+b)=4(a+b+c+d)(a+b)(c+d)$$

$$\leq(a+b+c+d)^3$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时，成立等号。

例 1.1.5 设 a,b,c 是周长为 3 的三角形的三边长，证明

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}\geq\frac{9}{ab+bc+ca}$$ （Pham Kim Hung）

证明：设 $x=\sqrt{b+c-a},y=\sqrt{c+a-b},z=\sqrt{a+b-c}$，我们有 $x^2+y^2+z^2=3$。

不等式变为

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

又设 $m=xy,n=yz,p=zx$，则上述不等式等价于

$$(m+n+p)(m^2+n^2+p^2+9)\geq 36\sqrt{mnp}$$

由 AM-GM 不等式，我们有

$$m+n+p\geq 3\sqrt[3]{mnp}$$

$$m^2+n^2+p^2+9=m^2+n^2+p^2+1+\cdots+1\geq 12\sqrt[12]{m^2\cdot n^2\cdot p^2\cdot 1\cdots 1}=12\sqrt[6]{mnp}$$

两式相乘即得

$$(m+n+p)(m^2+n^2+p^2+9)\geq 36\sqrt{mnp}$$

所以，原不等式成立。

例 1.1.6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，且满足 $a_i\in[0,i]\, i\in\{1,2,\cdots,n\}$，证明：

$$2^n a_1(a_1+a_2)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n)\geq(n+1)a_1^2a_2^2\cdots a_n^2$$ 【Phan Thanh Nam】

证明：根据 AM-GM 不等式，我们有

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=1\cdot\left(\frac{a_1}{1}\right)+2\cdot\left(\frac{a_2}{2}\right)+\cdots+k\cdot\left(\frac{a_k}{k}\right)$$

$$\geq\frac{k(k+1)}{2}\left(\frac{a_1}{1}\right)^{\frac{2}{k(k+1)}}\cdot\left(\frac{a_2}{2}\right)^{\frac{4}{k(k+1)}}\cdots\left(\frac{a_k}{k}\right)^{\frac{2k}{k(k+1)}},$$

将上述不等式对于 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，相乘，我们有

$$\prod_{k=1}^{n}(a_1+a_2+\cdots+a_k)\geq\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i}{i}\right)^{\frac{2i}{k(k+1)}}\right)=\frac{n!(n+1)!}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{i}\right)^{c_i}$$

这里的指数 c_i 由下式确定

$$c_i=2i\left[\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=2i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right)\leq 2$$

这是由于 $a_i \le i \quad i\in\{1,2,\cdots,n\}, \left(\frac{a_i}{i}\right)^{c_i} \ge \left(\frac{a_i}{i}\right)^2$。因此

$$a_1(a_1+a_2)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n) \ge \frac{n!(n+1)!}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{i}\right)^2 = \frac{n+1}{2^n}a_1^2a_2^2\cdots a_n^2$$

当且仅当 $a_i = i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，成立等号。

例 1.1.7 设 a,b,c 是正实数，证明：$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}$

【USA MO 1998】

证明：注意到 $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$，所以

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc} \le \frac{abc}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{a+b+c}$$

类似地可得另外两个不等式，并将它们相加，我们有

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc}+\frac{abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{abc}{c^3+a^3+abc} \le 1$$

所以，原不等式成立。

注意：IMO Shortlist 1996 类似的问题

设 x,y,z 是和为 1 的三个正数，证明：$\frac{xy}{x^5+xy+y^5}+\frac{yz}{y^5+yz+z^5}+\frac{zx}{z^5+zx+x^5} \le 1$

例 1.1.8 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，且满足 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}=1$，证明：

$$x_1x_2\cdots x_n \ge (n-1)^n$$

证明：所给条件变形为 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_{n-1}}=\frac{x_n}{1+x_n}$

应用 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{x_n}{1+x_n} \ge \frac{n-1}{\sqrt[n-1]{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n-1})}}$$

类似地可得其他 $n-1$ 个不等式，并将它们相乘，即得所证不等式。

例 1.1.9 设 x,y,z 是正数，且满足 $x^5+y^5+z^5=3$，证明：$\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^4}{z^3}+\frac{z^4}{x^3}\ge 3$

证明：注意到

$$\left(x^5+y^5+z^5\right)^2=x^{10}+2x^5y^5+y^{10}+2y^5z^5+z^{10}+2z^5x^5=9$$

从这个形式，我们利用 AM-GM 不等式，可得

$$10\cdot\frac{x^4}{y^3}+6x^5y^5+3x^{10}=\underbrace{\frac{x^4}{y^3}+\cdots+\frac{x^4}{y^3}}_{10}+\underbrace{x^5y^5+\cdots+x^5y^5}_{6}+x^{10}+x^{10}+x^{10}\ge 19x^{\frac{100}{19}}$$

类似地，可得

$$10\cdot\frac{y^4}{z^3}+6y^5z^5+3y^{10}\ge 19y^{\frac{100}{19}}$$

$$10\cdot\frac{z^4}{x^3}+6z^5x^5+3z^{10}\ge 19z^{\frac{100}{19}}$$

将上述三个不等式相加，我们有

$$10\left(\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^4}{z^3}+\frac{z^4}{x^3}\right)+3\left(x^5+y^5+z^5\right)^2\ge 19\left(x^{\frac{100}{19}}+y^{\frac{100}{19}}+z^{\frac{100}{19}}\right)$$

于是，只需证明下列不等式

$$x^{\frac{100}{19}}+y^{\frac{100}{19}}+z^{\frac{100}{19}}\ge x^5+y^5+z^5$$

而这是成立的。事实上，

$$(x^5+y^5+z^5)+19\sum_{cyc}x^{\frac{100}{19}}=3+19\sum_{cyc}x^{\frac{100}{19}}=\sum_{cyc}(1+19x^{\frac{100}{19}})\ge 20\sum_{cyc}x^5$$

例 1.1.10 设 $a,b,c>0,\quad abc=1$，证明：$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}}\ge 3$（Mathlinks Contest）

证明：由 AM-GM 不等式，我们有

$$LHS\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{c+1}}}=3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)}}$$

于是，我们只需证明

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge(a+1)(b+1)(c+1)\qquad (*)$$

由于 $abc=1$，所以（*）等价于

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge a+b+c+ab+bc+ca$$

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$2LHS+\sum_{cyc}ab=\sum_{cyc}(a^2b+a^2b+a^2c+a^2c+bc)\ge 5\sum_{cyc}a$$

$$2LHS+\sum_{cyc}a=\sum_{cyc}(a^2b+a^2b+b^2a+b^2a+c)\ge 5\sum_{cyc}ab$$

由此

$$4LHS+2\sum_{cyc}ab+\sum_{cyc}a\ge 5\sum_{cyc}ab+4\sum_{cyc}ab\Rightarrow 4LHS\ge 4\sum_{cyc}a+4\sum_{cyc}ab=4RHS$$

所以，原不等式成立。当且仅当 $a=b=c=1$，等号成立。

例 1.1.11 设 a,b,c 是某三角形的三边长，证明：

$$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c\le a^ab^bc^c$$

证明：由加权 AM-GM 不等式，我们有

$$\left(\frac{a+b-c}{a}\right)^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot\left(\frac{b+c-a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot\left(\frac{c+a-b}{c}\right)^{\frac{c}{a+b+c}}$$

$$\le\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{a+b-c}{a}+\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{b+c-a}{b}+\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{c+a-b}{c}=1$$

整理即得

$$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c\le a^ab^bc^c$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，成立等号。

例 1.1.12 设 $a,b,c\ge 0,\quad a+b+c=2$，证明：$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 2$

证明：由恒等式

$$(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)=ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)+abc(a+b+c)$$

我们有

$$(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)\ge ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)$$

$$\ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2b^2\right)\qquad (*)$$

利用 AM-GM 不等式，以及 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2=4$，我们有

$$2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)\le\left(\frac{2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)}{2}\right)^2\le 4$$

即

$$(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)\le 2 \qquad \text{（**）}$$

由（*）（**）即得

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 2$$

当且仅当 $a=b=1,c=0$ 或其排列时，等号成立。

例 1.1.13 设 $a,b,c,d>0$，证明：$\dfrac{1}{a^2+ab}+\dfrac{1}{b^2+bc}+\dfrac{1}{c^2+cd}+\dfrac{1}{d^2+da}\ge\dfrac{4}{ac+bd}$

证明：注意到

$$\frac{ac+bd}{a^2+ab}=\frac{a^2+ab+ac+bd}{a^2+ab}-1=\frac{a(a+c)+b(d+a)}{a(a+b)}-1=\frac{a+c}{a+b}+\frac{b(d+a)}{a(a+b)}-1$$

根据 AM-GM 不等式，我们得到

$$(ac+bd)\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+ab}=\sum_{cyc}\frac{a+c}{a+b}+\sum_{cyc}\frac{b(d+a)}{a(a+b)}-4\ge\sum_{cyc}\frac{a+c}{a+b}$$

此外，

$$\sum_{cyc}\frac{a+c}{a+b}=(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)$$

$$\ge\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}=4$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时，等号成立。

例 1.1.14 设 $a,b,c,d,e\ge 0$，且 $a+b+c+d+e=5$，证明：

$$abc+bcd+cde+dea+eab\le 5$$

证明：不失一般性，我们设 $e=\min(a,b,c,d,e)$。

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$abc+bcd+cde+dea+eab=e(a+c)(b+d)+bc(a+d-e)$$

$$\le e\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c+a+d-e}{3}\right)^3=\frac{e(5-e)^2}{4}+\frac{(5-2e)^3}{27}$$

因此，只需证明

$$\frac{e(5-e)^2}{4}+\frac{(5-2e)^3}{27}\le 5$$

这是成立的，可由$(e-1)^2(e+8)\ge 0$推出。

例 1.1.15 设$a,b,c,d>0$，证明：

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2\ge\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2+b^2}+\frac{9}{a^2+b^2+c^2}+\frac{16}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$ （Pham Kim Hung）

证明：我们来证明

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\sum_{sym}\frac{2}{ab}\ge\frac{4}{a^2+b^2}+\frac{9}{a^2+b^2+c^2}+\frac{16}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

由 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{2}{ab}\ge\frac{4}{a^2+b^2};$$

$$\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}\ge\frac{8}{ac+bc}\ge\frac{8}{a^2+b^2+c^2};$$

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{4}{b^2+c^2}\ge\frac{1}{b^2+c^2+a^2};$$

$$\frac{2}{ad}+\frac{2}{bd}+\frac{2}{cd}\ge\frac{18}{ad+bd+cd}\ge\frac{16}{a^2+b^2+c^2+d^2};$$

将上述不等式相加，即得所要证明的不等式。

注意：（1）使用类似的方法，我们可以证明 5 个变量的类似的不等式。为此，我们有

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=\left(a^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(b^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(c^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(d^2+\frac{e^2}{4}\right)\ge ae+be+ce+de$$

（2）本题不等式加强为

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2\ge\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2+b^2}+\frac{12}{a^2+b^2+c^2}+\frac{18}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

（3）猜想

设$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，证明或否定

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^2\ge\frac{1}{a_1^2}+\frac{4}{a_1^2+a_2^2}+\cdots+\frac{n^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

例 1.1.16 求下列不等式对所有实数a,b,c都成立的最小的 M 值。

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \le M(a^2+b^2+c^2)^2 \qquad \text{（IMO 2006）}$$

解：记$x=a-b, y=b-c, z=c-a, s=a+b+c$，则不等式可以写成如下形式

$$9\left|sxyz\right| \le M(s^2+x^2+y^2+z^2)^2$$

其中s,x,y,z是任意实数，且满足$x+y+z=0$。

事实上，s 是一个独立变量，首先我们来考察xyz和$x^2+y^2+z^2$之间的关系，由于$x+y+z=0$，很显然，x,y,z中有两个变量的符号相同，不妨设为 x、y，因此假定$x,y\ge 0$（$x,y\le 0$类似可证）。由 AM-GM 不等式，我们有

$$\left|sxyz\right| = \left|sxy(x+y)\right| \le |s|\cdot\frac{(x+y)^3}{4} \qquad （1）$$

等号，当$x=y$时成立。设$t=x+y$，再次应用 AM-GM 不等式，我们有

$$2s^2t^6 = 2s^2\cdot t^2\cdot t^2\cdot t^2 \le \frac{(2s^2+3t^2)^4}{4^4}$$

于是，

$$4\sqrt{2}\,|s|t^3 \le \left(s^2+\frac{3}{2}t^2\right)^2 \le \left(s^2+x^2+y^2+z^2\right)^2 \qquad （2）$$

结合（1）（2），我们得到

$$\left|sxyz\right| \le \frac{1}{16\sqrt{2}}\left(s^2+x^2+y^2+z^2\right)^2$$

这就意味着$M\ge\frac{9\sqrt{2}}{32}$。为证明$M=\frac{9\sqrt{2}}{32}$是最好的常数，我们必须求出(s,x,y,z)，即(a,b,c)，经简单的计算，得到等号成立的值为$(a,b,c)=\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}},1,1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

使用 AM-GM 不等式的重要的原则是选择合适的系数满足等号成立的条件。例如，

在例子 1.1.2 中，使用下列形式的 AM-GM 不等式是错误的（因为等号不成立）

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+(y+1)+(z+1)\geq 3x$$

对于每个问题，为 AM-GM 不等式给出一个固定的形式是很困难的。这取决于你的智慧，但是寻找等号成立的条件是可以帮助我们做到这一点的。例如，在上面的问题中，猜测到等号成立的条件是 $x=y=z=1$，为了使各个项相等，我们就选择系数 $\frac{1}{8}$。

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y+1}{8}+\frac{z+1}{8}\geq\frac{3x}{4}$$

变量相等使等号成立的这样的问题，在使用 AM-GM 不等式之前是很容易确定的。对非对称问题，这个方法需要有一定的灵活性（参见例子 1.1.13,1.1.14 和 1.1.16）。有时你需要建立方程组并求出等号成立的条件（这个方法称为“平衡系数法”，这部分内容将在第六章中讨论）

1.2 Cauchy 求反技术

在本节中，我们将 AM-GM 不等式关联到一个特别的技术，称为 Cauchy 求反技术。出乎意料的简单，而且十分有效，是这一技术的特殊优势。下面的例子体现了这种优势。

例1.2.1 设 $a,b,c>0,\quad a+b+c=3$，证明：$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}$ （Bulgaria TST 2003）

证明：事实上，直接对分母使用 AM-GM 不等式是不行的，因为不等式改变了方向。

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\leq\frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a}\geq\frac{3}{2}\ ?!$$

但是，我们可以以另外的形式使用 AM-GM 不等式

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

这样，不等式变成

$$\sum_{cyc}\frac{a}{1+b^2}\geq\sum_{cyc}a-\frac{1}{2}\sum_{cyc}ab\geq\frac{3}{2},$$

这是由于$3\left(\sum_{cyc} ab\right) \le \left(\sum_{cyc} a\right)^2 = 9$。

当且仅当$a=b=c=1$时等号成立。

注意：使用类似的方法可以证明下列结果

★设a,b,c,d是正实数，且$a+b+c+d=4$，证明：$\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+d^2}+\dfrac{d}{1+a^2}\ge 2$

这个解法似乎象变魔术，AM-GM 不等式应用的两个类似的方法，带来了两个不同的解法，一个是错误的，另一个是正确的。这种神奇出现在哪里呢？这不足为奇，这一切来自一个分式的不同的表示形式。

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}$$

使用分式$\dfrac{ab^2}{1+b^2}$前面的减号，我们可以对分母$1+b^2$使用 AM-GM 不等式而不改变不等式的方向。改变一个表达式的符号到另一个表达式，然后估计第二个表达式，这是这种技术的关键所在。

例1.2.2 设$a,b,c,d>0,\quad a+b+c+d=4$，证明：$\dfrac{a}{1+b^2c}+\dfrac{b}{1+c^2d}+\dfrac{c}{1+d^2a}+\dfrac{d}{1+a^2b}\ge 2$

【Pham Kim Hung】

证明：根据 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{a}{1+b^2c}=a-\frac{ab^2c}{1+b^2c}\ge a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}=a-\frac{b\sqrt{a\cdot ac}}{2}\ge a-\frac{b(a+ac)}{4}$$

依据这个估计式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a}{1+b^2c}\ge\sum_{cyc}a-\frac{1}{4}\sum_{cyc}ab-\frac{1}{4}\sum_{cyc}abc$$

再次使用 AM-GM 不等式，很容易得到

$$\sum_{cyc} ab \le \frac{1}{4}\left(\sum_{cyc} a\right)^2 = 4;\quad \sum_{cyc} abc \le \frac{1}{14}\left(\sum_{cyc} a\right)^3 = 4$$

因此

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b} \ge a+b+c+d-2=2$$

例1.2.3 设 $a,b,c>0$，证明：$\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+d^2}+\dfrac{d^3}{d^2+a^2} \ge \dfrac{a+b+c+d}{2}$

证明：我们有下列估计式

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = a-\frac{ab^2}{a^2+b^2} \ge a-\frac{ab^2}{2ab} = a-\frac{b}{2}$$

注意：本题关于4个变量的类似结果

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2d^3}+\frac{d^4}{d^3+2a^4} \ge \frac{a+b+c+d}{3}$$

例1.2.4 设 $a,b,c>0,\quad a+b+c=3$，证明：$\dfrac{a^2}{a+2b^2}+\dfrac{b^2}{b+2c^2}+\dfrac{c^2}{c+2a^2} \ge 1$

证明：根据 AM-GM 不等式我们有列下估计式

$$\frac{a^2}{a+2b^2} = a-\frac{2ab^2}{a+2b^2} \ge a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a-\frac{2(ab)^{\frac{2}{3}}}{3},$$

这就意味着

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+2b^2}\geq\sum_{cyc}a-\frac{2}{3}\sum_{cyc}(ab)^{\frac{2}{3}}$$

于是，只需证明

$$(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\leq 3$$

由 AM-GM 不等式，我们即得结果，因为

$$\left(\sum_{cyc}a\right)^2=\frac{2}{3}\left(\sum_{cyc}a\right)^2+\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}a\right)^2\geq 2\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}ab=\sum_{cyc}(a+a+ab)\geq 3\sum_{cyc}(ab)^{\frac{2}{3}}$$

注意：当我们把条件 $a+b+c=3$ 改成 $ab+bc+ca=3$ 或者 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$ 时，不等式依然成立（第二个条件的情形稍微有些困难），这些问题留给读者，这里不给出解答。

例1.2.5 设 $a,b,c>0,\quad a+b+c=3$，证明：$\dfrac{a^2}{a+2b^3}+\dfrac{b^2}{b+2c^3}+\dfrac{c^2}{c+2a^3}\geq 1$

证明：使用例1.2.4同样的技术，我们只需证明

$$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\leq 3$$

根据 AM-GM 不等式，我们有，

$$3\sum_{cyc}a\geq\sum_{cyc}a+2\sum_{cyc}ab=\sum_{cyc}(a+ac+ac)\geq 3\sum_{cyc}a\sqrt[3]{c^2}$$

等号，当且仅当 $a=b=c=1$ 时成立。

例1.2.6 设 $a,b,c>0,\quad a+b+c=3$，证明：$\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\geq 3$

证明：我们使用下列估计式

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{b^2(a+1)}{b^2+1}\ge a+1-\frac{b^2(a+1)}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2}$$

关于a,b,c类似的结果相加，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a+1}{b^2+1}\ge 3+\frac{1}{2}\sum_{cyc}a-\frac{1}{2}\sum_{cyc}ab\ge 3$$

注意：下面是四变量的类似的问题

◆设$a,b,c,d>0,\quad a+b+c+d=3$，证明：$\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{d^2+1}+\dfrac{d+1}{a^2+1}\ge 4$

◆设$a,b,c,d>0,\quad a+b+c+d=3$，证明：$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}+\dfrac{1}{d^2+1}\ge 2$

例1.2.7 设$a,b,c>0,\quad a+b+c=3$，证明：$\dfrac{1}{1+2b^2c}+\dfrac{1}{1+2c^2a}+\dfrac{1}{1+2a^2b}\ge 1$

证明：我们使用下列估计式

$$\frac{1}{1+2b^2c}=1-\frac{2b^2c}{1+2b^2c}\ge 1-\frac{2\sqrt[3]{b^2c}}{3}\ge 1-\frac{2(2b+c)}{9}$$

例1.2.8 设$a,b,c,d\ge 0,\quad a+b+c+d=4$，证明：

$$\frac{1+ab}{1+b^2c^2}+\frac{1+bc}{1+c^2d^2}+\frac{1+cd}{1+d^2a^2}+\frac{1+da}{1+a^2b^2}\ge 4$$ （Pham Kim Hung）

证明：应用 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{1+ab}{1+b^2c^2}=(1+ab)-\frac{(1+ab)b^2c^2}{1+b^2c^2}\ge 1+ab-\frac{1}{2}(1+ab)bc$$

类似的结果相加，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1+ab}{1+b^2c^2}\ge 4+\sum_{cyc}ab-\frac{1}{2}\sum_{cyc}bc(1+ab)=4+\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}ab^2c\right)$$

于是，只需证明

$$ab+bc+cd+da\le ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b$$

应用类似的结果：$xy+yz+zt+tx\le\frac{1}{4}(x+y+z+t)^2$，我们得到

$$(ab+bc+cd+da)^2\le 4(ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b)\text{；}$$

$$16=(a+b+c+d)^2\ge 4(ab+bc+cd+da)\text{；}$$

将上述不等式相乘，即得结果。等号成立的条件是：$a=b=c=d=1$或者$a=c=0$（b,d任意）或者$b=d=0$（a,c任意）。

例1.2.9 设$a,b,c>0,\quad a^2+b^2+c^2=3$，证明：$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\ge 1$

（Pham Kim Hung）

证明：很据 AM-GM 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3+2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^3+1+1}\ge\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a^3}{3a}=1$$

第二章 **Cauchy - Schwarz** 和 **Holder** 不等式

2.1 Cauchy-Schwarz 不等式和应用

定理2（Cauchy - Schwarz 不等式）设$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是两个实数列，我们有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

等号成立的条件是当且仅当$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$对应成比例（即存在实数 k 满足$a_i=kb_i \quad i=1,2,\cdots,n$）

证明：我将给出这个定理的流行的证法。

第一个证明（使用二次型）考察下列函数

$$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2$$

整理得

$$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

因为$f(x)\geq 0\ \forall x\in R$，所以判别式$\Delta_f\leq 0$ 即

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

如果方程$f(x)=0$至少有一个根，等号成立，即$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$对应成比例。

第二个证明（使用恒等式）下列恒等式称为 Cauchy-Schwarz 展开式。由它可以立即得到 Cauchy-Schwarz 不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2=\sum_{i,j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

第三个证明（使用 AM-GM 不等式）这个证明是用来证明 Holder 不等式的。注意到，根据 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\frac{b_i^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\geq\frac{2\left|a_ib_i\right|}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)}}$$

令 $i=1,2,\cdots,n$，将上述不等式相加，即得。

哪个是基本不等式？通常的回答是 AM-GM 不等式。最原始的基本不等式是什么？

我倾向于 Cauchy-Schwarz 不等式。为什么？因为 Cauchy-Schwarz 不等式在证明对称不等式尤其是三变量的不等式，它经常会给出漂亮的解答。下面的推论将给出它的大量应用。

推论 1、（Schwarz 不等式）对任意两个实数列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$b_i>0\ \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们有

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

证明：直接从 Cauchy-Schwarz 不等式得到。

推论2、对任意两个实数列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，我们总有

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}$$

证明：由一个简单的归纳，只需证明该问题在 $n=2$ 的情况。在这种情况下，不等式变为

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

两边平方，并消去公共项，就变成了 Cauchy-Schwarz 不等式

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

当然，等号成立的条件是当且仅当$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$对应成比例。

推论3、对任意一个实数列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，我们有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\le n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

证明：对下列两个序列使用 Cauchy-Schwarz 不等式，即得

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n),(1,1,\cdots,1)$$

如果使用 AM-GM 不等式是为了减少相等的项（在相等情况的分析中），那么 Cauchy-Schwarz 不等式使用起来更灵活方便。下列问题是必须的，因为其中包含了许多准确和有效使用 Cauchy-Schwarz 不等式的方法。

例2.1.1 设$a,b,c\ge 0$，证明：$\dfrac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\dfrac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\dfrac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\ge 0$

（Pham Kim Hung）

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\le 3$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\le\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}$$

于是，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\le\sum_{cyc}\frac{a^2}{c^2+a^2}+\sum_{cyc}\frac{b^2}{b^2+c^2}=3$$

等号成立，当且仅当$a=b=c$和$a=b,c=0$或它们的排列。

例2.1.2 假设$x,y,z\ge 1$且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$，证明：$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

[Iran MO 1998]

证明：由题设，我们有

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3-2=1$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}x=\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\sum_{cyc}\frac{x-1}{x}\right)\ge\left(\sum_{cyc}\sqrt{x-1}\right)^2$$

即

$$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

例2.1.3 设$a,b,c>0$，证明：$\frac{a^3}{a^3+b^3+abc}+\frac{b^3}{b^3+c^3+abc}+\frac{c^3}{c^3+a^3+abc}\ge 1$

[Nguyen Van Thach]

证明：设 $x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}$，则我们有

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+abc}=\frac{1}{1+x^3+\frac{x}{z}}=\frac{1}{1+x^3+x^2z}=\frac{yz}{yz+x^2+xz}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{yz}{yz+x^2+xz}\geq\frac{(xy+yz+zx)^2}{yz(yz+x^2+xz)+zx(zx+y^2+yx)+xy(xy+z^2+zy)}$$

所以，只需证明

$$(xy+yz+zx)^2\geq\sum_{cyc}yz(yz+x^2+xz)\Leftrightarrow\sum_{cyc}x^2y^2\geq\sum_{cyc}x^2yz$$

这时显然成立的。等号仅当 $x=y=z$ 或 $a=b=c$ 时成立。

例2.1.4 设 a,b,c 是三个任意实数，记

$x=\sqrt{b^2-bc+c^2},y=\sqrt{c^2-ca+a^2},z=\sqrt{a^2-ab+b^2}$ 证明：

$xy+yz+zx\geq a^2+b^2+c^2$ （Nguyen Anh Tuan，VMEO 2006）

证明：将 x,y 改写成如下形式

$$x=\sqrt{\frac{3c^2}{4}+\left(b-\frac{c}{2}\right)^2},\quad y=\sqrt{\frac{3c^2}{4}+\left(a-\frac{c}{2}\right)^2}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$xy\geq\frac{3c^2}{4}+\frac{1}{4}(2b-c)(2a-c)$$

于是，有

$$\sum_{cyc} xy \ge \frac{3}{4}\sum_{cyc} c^2 + \frac{1}{4}\sum_{cyc}(2b-c)(2a-c) = \sum_{cyc} a^2$$

注意：由相同的方法，我们可以证明下列类似的结果

★设 a,b,c 是三个任意实数，记 $x=\sqrt{b^2+bc+c^2}, y=\sqrt{c^2+ca+a^2}, z=\sqrt{a^2+ab+b^2}$

证明： $xy+yz+zx \ge (a+b+c)^2$

例2.1.5 设 $a,b,c,d \ge 0$，证明：[Pham Kim Hung]

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{a^2+c^2+d^2}+\frac{c}{a^2+b^2+d^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{4}{a+b+c+d}$$

证明：根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\left(\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{a^2+c^2+d^2}+\frac{c}{a^2+b^2+d^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\right)(a+b+c+d)$$

$$\ge \left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+d^2}}+\sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}\right)^2$$

于是，只需证明

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}} \ge 2$$

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2+d^2}{a^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2+d^2}{a^2}+1\right) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2a^2}$$

我们得到

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}} \geq \sum_{cyc}\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}=2$$

等号成立的条件：四个数(a,b,c,d)中，有两个相等，其余为0。

注意：使用相同的方法，我们可以证明本题的一般情况

★设$a_1,a_2,\cdots,a_n \geq 0$，证明：

$$\frac{a_1}{a_2^2+\cdots+a_n^2}+\frac{a_2}{a_1^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2} \geq \frac{4}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

例2.1.6 证明：对所有正实数a,b,c,d,e,f，我们总有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b} \geq 3$$（六变量的 Nesbitt 不等式）

证明：根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{ab+ac} \geq \frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{ab+bc+cd+de+ef+fa+ac+ce+ea+bd+df+fb}$$

记上式右边的分母为 S，当然

$$2S=(a+b+c+d+e+f)^2-(a+d)^2-(b+e)^2-(c+f)^2$$

再次应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$(1+1+1)\left[(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2\right] \geq (a+b+c+d+e+f)^2$$

因此，$2S \le \frac{2}{3}(a+b+c+d+e+f)^2$，从而，原不等式成立。

例2.1.7 两个实数列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$满足

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$$

证明下列不等式

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2 \le 2\left|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n-1\right|$$ [Korea MO 2002]

证明：使用 Cauchy-Schwarz 不等式，由条件$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$，可得

$$1 \ge a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \ge -1$$

根据 Cauchy-Schwarz 展开式，我们有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2=\sum_{i,j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 \ge (a_1b_2-a_2b_1)^2$$

即$\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right) \ge (a_1b_2-a_2b_1)^2$

总之 $(a_1b_2-a_2b_1)^2 \le 2\left|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n-1\right|$

例2.1.8 设$a,b,c>0$，且$a+b+c=3$，证明：

$$\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}+\sqrt{b+\sqrt{c^2+a^2}}+\sqrt{c+\sqrt{a^2+b^2}} \ge 3\sqrt{\sqrt{2}+1}$$（Phan Hong Son）

证明：不等式两边平方，得

$$\sum_{cyc}\sqrt{b^2+c^2}+2\sum_{cyc}\sqrt{\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)\left(b+\sqrt{c^2+a^2}\right)}\ge 9\sqrt{2}+6$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\sqrt{\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)\left(b+\sqrt{c^2+a^2}\right)}\ge\sum_{cyc}\sqrt{\left(a+\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)\left(b+\frac{c+a}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\sqrt{\left[\left(\sqrt{2}-1\right)a+3\right]\left[\left(\sqrt{2}-1\right)b+3\right]}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\left[\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{ab}+3\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{cyc}\sqrt{ab}+\frac{9}{\sqrt{2}}$$

因此，只需证明

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+b^2}+\left(2-\sqrt{2}\right)\sum_{cyc}\sqrt{ab}\ge 6$$

这最后的不等式可以直接由下面的结论得到：

设 $x,y\ge 0$，则 $\sqrt{x^4+y^4}+(2-\sqrt{2})xy\ge x^2+y^2$

实际上，上面的不等式等价于

$$x^4+y^4\ge\left(x^2+y^2-(2-\sqrt{2})xy\right)^2\Leftrightarrow 2(2-\sqrt{2})xy(x-y)^2\ge 0$$

这显然是成立的。等号成立的条件是 $a=b=c=1$

例 2.1.9 设$a,b,c>0$，且$abc=1$，证明：$\dfrac{1}{a^2+a+1}+\dfrac{1}{b^2+b+1}+\dfrac{1}{c^2+c+1}\ge 1$

证明：由题设，存在三个正实数x,y,z，满足

$$a=\frac{yz}{x^2},b=\frac{xz}{y^2},c=\frac{xy}{z^2}$$

这样，不等式变成

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\ge 1$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$LHS\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

于是，只需证明

$$(x^2+y^2+z^2)^2\ge x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

而该不等式等价于

$$\sum_{cyc}x^2y^2\ge xyz\sum_{cyc}x\Leftrightarrow\sum_{cyc}z^2(x-y)^2\ge 0$$

等号成立的条件是 $x=y=z$ 或$a=b=c$

例 2.1.10 设a,b,c是三角形的三边长，证明：$\dfrac{a}{3a-b+c}+\dfrac{b}{3b-c+a}+\dfrac{c}{3c-a+b}\ge 1$

[Samin Riasa]

证明：$4\sum_{cyc}\dfrac{a}{3a-b+c}=\sum_{cyc}\dfrac{4a}{3a-b+c}=3+\sum_{cyc}\dfrac{a+b-c}{3a-b+c}\ge 3+\dfrac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}(a+b-c)(3a-b+c)}=4$

等号当$a=b=c$时成立。

例 2.1.11 设$a,b,c>0$，且满足条件$a\le b\le c,\quad a+b+c=3$，证明

$$\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{5a^2+3b^2+1}+\sqrt{7a^2+5b^2+3c^2+1}\le 9$$ （Pham Kim Hung）

证明：根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\left(\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{5a^2+3b^2+1}+\sqrt{7a^2+5b^2+3c^2+1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{6(3a^2+1)}+\frac{1}{\sqrt{4}}\sqrt{4(5a^2+3b^2+1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3(7a^2+5b^2+3c^2+1)}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(6(3a^2+1)+4(5a^2+3b^2+1)+3(7a^2+5b^2+3c^2+1)\right)^2$$

于是，只需证明

$$59a^2+27b^2+9c^2\ge 95$$

注意到 $a\le b\le c$，我们有

$$ab+bc+ca\ge 2ab+b^2\ge 2a^2+b^2$$

或

$$5a^2+3b^2+c^2\le(a+b+c)^2=9\Rightarrow 59a^2+27b^2+9c^2\le 95$$

这是因为$a\le 1$。等号仅当$a=b=c$时成立。

例 2.1.12 设$a,b,c>0$，且$a+b+c=1$，证明：

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\le\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}\quad\text{（Japan TST 2004）}$$

证明：不等式变形如下

$$\frac{3}{2}+\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\le\sum_{cyc}\frac{a}{b}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}\right)\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ac}{b(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式。我们有

$$\sum_{cyc}\frac{ac}{b(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{a^2c^2}{abc(a+c)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

等号仅当$a=b=c$时成立。

例 2.1.13（i）证明对所有非负实数x,y,z

$$6(x+y-z)(x^2+y^2+z^2)+27xyz\le 10(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$$

（ii）证明对所有的实数x,y,z，有

$$6(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\le 27xyz+10(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\qquad\text{（Tran Nam Dung）}$$

证明：（i）对于这一部分，必须小心处理等号成立条件$x=y=2z$或其排列。这就要求

我们对原式进行估计。事实上，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$10\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}-6\left(x+y-z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(10\sqrt{x^2+y^2+z^2}-6(x+y-z)\right)$$

$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{10}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(2^2+2^2+1^2\right)}-6(x+y-z)\right)$$

$$\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{10(2x+2y+z)}{3}-6(x+y-z)\right)=\frac{10(x^2+y^2+z^2)(2x+2y+28z)}{3}$$

于是，根据加权 AM-GM 不等式，我们有

$$x^2+y^2+z^2=4\cdot\frac{x^2}{4}+4\cdot\frac{y^2}{4}+z^2\ge 9\sqrt[9]{\frac{x^8y^8z^2}{4^8}}$$

$$2x+2y+28z=2x+2y+7\cdot 4z\ge 9\sqrt[9]{(2x)(2y)(4z)^7}=9\sqrt[9]{4^8xyz^7}$$

因此，

$$10(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-6(x+y-z)(x^2+y^2+z^2)\ge 27xyz$$

（ii）如果 $x=y=z=0$，不等式是显然成立的，其它情况，不失一般性，我们假设 $x^2+y^2+z^2=9$，则不等式变成

$$2(x+y+z)\le xyz+10$$

设 $|x|\le|y|\le|z|$，根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\left[2(x+y+z)-xyz\right]^2=\left[2(x+y)+(2-xy)z\right]^2\le\left[(x+y)^2+z^2\right]\left[2^2+(2-xy)^2\right]$$

$$=(9+2xy)(8-4xy+x^2y^2)=72-20xy+x^2y^2+2x^3y^3=100+(xy+2)^2(xy-7)$$

由于 $|x|\le|y|\le|z|,\ z^2\ge 3\Rightarrow 2xy\le x^2+y^2\le 6\Rightarrow xy-7<0$。这样便有

$$\left[2(x+y+z)-xyz\right]^2\le 100\Rightarrow 2(x+y+z)\le 10+xyz$$

等号成立条件是 $(x,y,z)=(-k,2k,2k)\quad k\in R$ 或其排列。

例 2.1.14 设a,b,c,d是四个正实数，且满足$r^4=abcd$，证明下列不等式：

$$\frac{ab+1}{a+1}+\frac{bc+1}{b+c}+\frac{cd+1}{c+1}+\frac{da+1}{d+1}\ge\frac{4(1+r^2)}{1+r}$$ （Vasile Cirtoaje,Crux）

证明：由题设条件，存在四个正实数x,y,z,t满足

$$a=\frac{ry}{x},b=\frac{rz}{y},c=\frac{rt}{z},d=\frac{rx}{t}$$

则不等式变为如下形式

$$\sum_{cyc}\frac{\frac{r^2z}{x}+1}{\frac{ry}{x}+1}\ge\frac{4(r^2+1)}{r+1}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{r^2z+x}{ry+x}\ge\frac{4(r^2+1)}{r+1}$$

我们必须证明 $A+(r^2-1)B\ge\dfrac{4(r^2+1)}{r+1}$，这里

$$A=\sum_{cyc}\frac{x+z}{ry+x};\quad B=\sum_{cyc}\frac{z}{ry+x}$$

由 AM-GM 不等式，我们有

$$4r\sum_{cyc}xy+8(xz+yt)=\left[4(r-1)(x+z)(y+t)\right]+4\left[(x+z)(y+t)+2(xz+yt)\right]$$

$$\le(r-1)\left(\sum_{cyc}x\right)^2+2\left(\sum_{cyc}x\right)^2=(r+1)\left(\sum_{cyc}x\right)^2$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，并注意到$r\ge1$，我们有

$$A=(x+z)\left(\frac{1}{ry+x}+\frac{1}{rt+z}\right)+(y+t)\left(\frac{1}{rx+y}+\frac{1}{rz+t}\right)\ge\frac{4(x+z)}{x+z+ry+rt}+\frac{4(y+t)}{y+t+rx+rz}$$

$$\ge\frac{4(x+y+z+t)^2}{(x+z)^2+(y+t)^2+2r(x+z)(y+t)}\ge\frac{8}{r+1}$$

$$B\ge\frac{(x+y+z+t)^2}{z(ry+x)+t(rz+y)+x(rt+z)+y(rx+t)}\ge\frac{(x+y+z+t)^2}{r(xy+yz+zt+tx)+2(xz+yt)}\ge\frac{4}{r+1}$$

这样，即证明了不等式。等号成立条件$a=b=c=d=r$

例 2.1.15 设$a,b,c\ge 0$，证明：$\dfrac{a^2}{a^2+2(a+b)^2}+\dfrac{b^2}{b^2+2(b+c)^2}+\dfrac{c^2}{c^2+2(c+a)^2}\ge\dfrac{1}{3}$

（Pham Kim Hung）

证明：我们设$x=\dfrac{b}{a},y=\dfrac{c}{b},z=\dfrac{a}{c}$。则不等式变成

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+2(x+1)^2}\ge\frac{1}{3}$$

因为$xyz=1$，则存在三个正实数m,n,p满足

$$x=\frac{np}{m^2},y=\frac{mp}{n^2},z=\frac{mn}{p^2}$$

因此，只需证明

$$\sum_{cyc}\frac{m^4}{m^4+2(m^2+np)^2}\ge\frac{1}{3}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$LHS\ge\frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{m^4+n^4+p^4+2(m^2+np)^2+2(n^2+mp)^2+2(p^2+mn)^2}$$

于是，我们只需证明

$$3\left(\sum_{cyc}m^2\right)^2-\sum_{cyc}m^4-2\sum_{cyc}(m^2+np)^2=\sum_{cyc}m^2(n-p)^2\ge 0$$，这是显然成立的。

证毕。等号当$a=b=c$成立。

例 2.1.16 设$a,b,c\ge 0$，证明：$\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}\ge\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)$

（Pham Kim Hung）

证明：应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+c^2}\right)\left(\sum_{cyc}a(b^2+c^2)\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$$

于是只需证明

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}\ge\frac{4}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc}$$

设 $S=\sum_{cyc}a^2, P=\sum_{cyc}ab, Q=\sum_{cyc}ab(a+b)$，则上面的不等式变成

$$\frac{5(S+2P)}{Q}\geq\frac{4(S+3P)}{Q+2abc}\Leftrightarrow SQ+10abcS+20abcP\geq 2PQ$$

很明显，我们有

$$PQ=\sum_{sym}a^2b^2(a+b)+2abc(S+P)$$

$$SQ\geq\sum_{sym}ab(a+b)(a^2+b^2)\geq 2\sum_{sym}a^2b^2(a+b)$$

等号当 $a=b, c=0$ 及其排列，证毕。

和使用 AM-GM 不等式一样，使用 Cauchy-Schwarz 不等式也没有一个固定的方法。它取决于问题的类型以及你使用这个不等式的灵活程度。事实上，Holder 不等式作为一个典型的扩展，虽然在不等式界不知何故被忽视了，在比较方面几乎都使用 AM-GM 或 Cauchy-Schwarz 不等式，但是它的应用和 Cauchy-Schwarz 不等式是一致的，本书将强调这个不等式的重要性。我把 Holder 不等式放在 Cauchy-Schwarz 不等式这节中，是因为它是 Cauchy-Schwarz 不等式的一个自然推广并且与 Cauchy-Schwarz 不等式在应用方面并没有什么两样。

2.2 Holder 不等式

定理 3 （Holder 不等式）对于 m 个正数序列

$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),\cdots,(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$，我们有

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)\geq\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=}^{m}a_{ij}}\right)^m$$

等号成立，当且仅当 m 个序列对应成比例。Cauchy-Schwarz 不等式是 Holder 不等式关于 m=2 的一个直接推论。

推论 1、设 a,b,c,x,y,z,t,u,v 是正实数。我们有

$$(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(t^3+u^3+v^3)\geq(axt+byu+czv)^3$$

证明：这是 Holder 不等式（$m=n=3$）的直接推论。我选择 Holder 不等式这个特殊情形，是因为它可以例举 Holder 不等式证明的细节。

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$3=\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\sum_{cyc}\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\sum_{cyc}\frac{m^3}{m^3+n^3+p^3}$$

$$\geq \sum_{cyc} \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(m^3+n^3+p^3)}}$$

即

$$axm+byn+czp \leq \sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(m^3+n^3+p^3)}$$

推论 2、设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^n$$

证明：应用 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}}$$

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}}$$

两个不等式相加即得。

为什么我们有时会忘记 Holder 不等式？尽管它应用广泛，它表达式复杂（有 m 个序列，每个序列有 n 个项），使得我们首次使用时感到混乱。如果你一直犹豫的话，那么本书将让你信服 Holder 不等式真实有效并容易使用。你不必担心使用它！通常，许多困难的问题使用 Holder 不等式将变得非常简单。

例 2.2.1 设 a, b, c 是正实数，证明：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$

[IMO 2001]

证明：对三个序列（每个序列有三个项实际上是推论 1）应用 Holder 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)\left(\sum_{cyc}a(a^2+8bc)\right) \geq \left(a+b+c\right)^3$$

于是只需证明

$$\left(a+b+c\right)^3 \geq \sum_{cyc} a(a^2+8bc)$$

或等价于

$$c(a-b)^2+a(b-c)^2+b(c-a)^2 \geq 0$$

例 2.2.2 设 $a, b, c > 0$，且 $abc = 1$，证明：

$$\frac{a}{\sqrt{7+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{7+c+a}}+\frac{c}{\sqrt{7+a+b}}\ge 1$$

$$\frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{7+c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{7+a^2+b^2}}\ge 1$$

使用相同的方法，确定下列不等式的真假。

$$\frac{a}{\sqrt{7+b^3+c^3}}+\frac{b}{\sqrt{7+c^3+a^3}}+\frac{c}{\sqrt{7+a^3+b^3}}\ge 1$$（Pham Kim Hung）

证明：对第一个不等式使用 Holder 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{7+b+c}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{7+b+c}}\right)\left(\sum_{cyc}a(7+b+c)\right)\ge\left(a+b+c\right)^3$$

于是，只需证明

$$\left(a+b+c\right)^3\ge 7(a+b+c)+2(ab+bc+ca)$$

因为 $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$，所以

$$\left(a+b+c\right)^3\ge 7(a+b+c)+\frac{2}{3}(a+b+c)^2\ge 7(a+b+c)+2(ab+bc+ca)$$

对第二个不等式，应用 Holder 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}}\right)\left(\sum_{cyc}a(7+b^2+c^2)\right)\ge\left(a+b+c\right)^3$$

另一方面

$$\sum_{cyc}a(7+b^2+c^2)=7(a+b+c)+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

$$\le 7(a+b+c)+\frac{1}{3}(a+b+c)^3-3\le\left(a+b+c\right)^3$$

等号成立的条件 $a=b=c=1$（两个不等式）

第三个不等式，不成立。事实上，我们只要选择 $a\to 0$ 和 $b=c\to+\infty$，或者

$a=10^{-4},b=c=100$

例 2.2.3 设 a,b,c 是正实数，$k\ge 1$ 是自然数，证明

$$\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k}\ge\frac{a^k}{b^{k-1}}+\frac{b^k}{c^{k-1}}+\frac{c^k}{a^{k-1}}$$

证明：根据 Holder 不等式，我们有

$$\left(\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k}\right)^{k-1}(a+b+c)\ge\left(\frac{a^k}{b^{k-1}}+\frac{b^k}{c^{k-1}}+\frac{c^k}{a^{k-1}}\right)^k$$

于是只需证明

$$\frac{a^k}{b^{k-1}}+\frac{b^k}{c^{k-1}}+\frac{c^k}{a^{k-1}}\ge a+b+c$$

这可由 Holder 不等式，得到

$$\left(\frac{a^k}{b^{k-1}}+\frac{b^k}{c^{k-1}}+\frac{c^k}{a^{k-1}}\right)(a+b+c)^{k-1}\ge(a+b+c)^k$$

等号当 $a=b=c$ 时成立。注意，这个问题对每一个自然数 $k\ge1$ 都是成立的，因此它对实数 $k\ge1$ 也是成立的。

例 2.2.4 设 $a,b,c>0$，证明：$\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\ge(a+b+c)^3$

[Titu Andreescu,USA MO 2002]

证明：根据 Holder 不等式，我们有

$$\prod_{cyc}\left(a^5-a^2+3\right)=\prod_{cyc}\left(a^3+2+(a^3-1)(a^2-1)\right)\ge\prod_{cyc}(a^3+2)$$

$$=\left(a^3+1+1\right)\left(b^3+1+1\right)\left(c^3+1+1\right)\ge(a+b+c)^3$$

例 2.2.5 设 $a,b,c>0$，且满足 $ab+bc+ca=3$，证明：$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\ge8$

[Michael Rozenberg]

证明：不等式可直接由 Holder 不等式得到

$$\left(a^2b^2+a^2+b^2+1\right)\left(b^2+c^2+b^2c^2+1\right)\left(a^2+a^2c^2+c^2+1\right)\ge(1+ab+bc+ca)^4$$

例 2.2.6 设 $a,b,c>0$，且 $a+b+c=1$，证明：$\dfrac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\dfrac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\dfrac{c}{\sqrt[3]{c+2a}}\ge1$

[Pham Kim Hung]

证明：这个不等式可直接由 Holder 不等式得到

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}\right)\left(\sum_{cyc}a(a+2b)\right)\ge\left(\sum_{cyc}a\right)^4=1$$

因为

$$\sum_{cyc}a(a+2b)=(a+b+c)^2=1$$

例 2.2.7 设$a,b,c>0$，证明：

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\ge(ab+bc+ca)\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$（Pham Kim Hung）

证明：注意到下列表达式是相等的

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

$$b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^2(b+c)$$

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

根据 Holder 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}a^2(b+c)\right)^3\ge\left(\sum_{cyc}ab\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^3$$

所以，不等式成立，等号当$a=b=c$时成立。

例 2.2.8 设$a,b,c,d>0$，且$abcd=1$，证明

$$4^4(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1)\ge\left(a+b+c+d+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^4$$（Gabriel Dospinescu）

证明：由 Holder 不等式，我们有

$$(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1)\ge(a+bcd)^4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^4$$

$$\Rightarrow\sqrt[4]{(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1)}\ge a+\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt[4]{(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1)}\ge\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}\frac{1}{a}$$

等号当$a=b=c=d=1$时成立

例 2.2.9 设$a,b,c>0$，证明：$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge(ab+bc+ca)^3$

证明：应用 Holder 不等式，我们有

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)=(ab+a^2+b^2)(a^2+ca+c^2)(b^2+c^2+bc)$$

$$\ge(ab+bc+ca)^3$$

如果一个不等式可以用 Holder 不等式来解决，那么它也可以由 AM-GM 来解决，

为什么呢？因为 Holder 不等式的证明，仅使用了 AM-GM 不等式。例如，在例 2.2.1 中，我们可以直接使用 AM-GM 不等式，方法如下

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{a(b^2+8ac)}{(a+b+c)^3}\ge\frac{3a}{a+b+c}$$

类似地可以建立其它两个不等式，并将这些不等式相加，即得所要结果。

但是，AM-GM 不等式与 Cauchy-Schwarz 不等式和 Holder 不等式之间有什么区别呢？尽管 Cauchy-Schwarz 不等式和 Holder 不等式都是利用 AM-GM 不等式证明的，但它们的应用是非常广泛的。它们可使通过 AM-GM 不等式长长复杂的解法便得简短直观。让我们看看下列例子来体验这种优势。

例 2.2.10 设 $a,b,c>0$，且满足 $3\max(a^2,b^2,c^2)\le 2(a^2+b^2+c^2)$，证明

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\ge\sqrt{3}$$

证明：由 Holder 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}\right)\left(\sum_{cyc}a(2b^2+2c^2-a^2)\right)\ge(a+b+c)^3$$

于是只需证明

$$(a+b+c)^3\ge 3\sum_{cyc}a(2b^2+2c^2-a^2)$$

上述不等式等价于

$$3\left(abc-\prod_{cyc}(a-b+c)\right)+2\left(\sum_{cyc}a^3-3abc\right)\ge 0$$

这是显然成立（第一项大于 0 的简单证明是做替换 $a-b+c=x$ 等等）。等号当 $a=b=c$ 时成立。

用 AM-GM 不等式怎么能解决这个问题呢？当然，会有不少困难。

$$\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\sum_{cyc}\frac{3\sqrt{3}a(2b^2+2c^2-a^2)}{(a+b+c)^3}$$

$$\ge 3\sum_{cyc}\frac{\sqrt{3}a}{a+b+c}=3\sqrt{3}$$

现在为了使用 AM-GM 不等式，我们不要忘记把 $3\sqrt{3}$ 乘到分数

$$\frac{a(2b^2+2c^2-a^2)}{(a+b+c)^3}$$

为了使

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}=\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}=\frac{3\sqrt{3}a(2b^2+2c^2-a^2)}{(a+b+c)^3}$$

在这种情况下有 $a=b=c$。为什么 Holder 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式有更多的优势呢？因为 AM-GM 不等式的相等条件是相等属性，而 Holder 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式的相等条件是比例属性。这种特性使得 Holder 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式在许多场合很容易使用。此外，Holder 不等式在证明涉及根式问题非常有效（例如，可以帮助我们破除根式）。

第三章 Chebyshev 不等式

3.1 Chebyshev 不等式及应用

定理 4（Chebyshev 不等式）设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是两个增加的实数列，则

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

证明：直接展开表达式，我们有

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\sum_{i,j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\ge 0$$

注意：使用相同的方法，我们可以得到，如果序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是增加的而序列 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是减少的，则

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\le\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

对于对称问题，我们可以重新排列变量的次序以满足 Chebyshev 不等式的条件。一般地，由 Chebyshev 不等式解决的问题比用其它不等式来的更简洁些。让我们考察下列简单的例子。

例 3.1.1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$，证明

$$a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+\cdots+a_n^{n+1}\ge a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n$$

证明：为了用 AM-GM 不等式来解决这个问题，我们必须经过两个步骤：首先，证明

$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} + n \ge (n+1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n$，然后再证明 $\sum_{i=1}^{n} a_i^n \ge n$。用 Cauchy-Schwarz 不等式来解决这个问题，我们必须使用归纳的方法。无论如何，这个问题使用 Chebyshev 不等式可以立即解决。注意到序列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $(a_1^n, a_2^n, \cdots, a_n^n)$ 可以重新排列以满足都是增加的。

好，我们继续学习 Chebyshev 不等式的某些应用。

例 3.1.2 设 $a,b,c,d > 0$，且 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$，证明：

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c} \ge \frac{4}{3}$$

证明：注意到，如果 (a,b,c,d) 是增加的次序，则

$$\frac{1}{b+c+d} \ge \frac{1}{c+d+a} \ge \frac{1}{d+a+b} \ge \frac{1}{a+b+c}$$

因此。由 Chebyshev 不等式，我们有

$$4LHS \ge \left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{b+c+d}\right) \ge \frac{16(a^2+b^2+c^2+d^2)}{3(a+b+c+d)} \ge \frac{4\sqrt{4(a^2+b^2+c^2+d^2)}}{3}$$

即

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c} \ge \frac{4}{3}$$

例 3.1.3 设 $a,b,c > 1$，且满足条件 $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$，证明

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \le 1$$（Poru Loh,Crux）

证明：注意到，如果 $a \ge b \ge c$，则我们有

$$\frac{a-2}{a+1} \ge \frac{b-2}{b+1} \ge \frac{c-2}{c+1};\quad \frac{a+2}{a-1} \le \frac{b+2}{b-1} \le \frac{c+2}{c-1},$$

由 Chebyshev 不等式，我们有

$$3\left(\sum_{cyc}\frac{a^2-4}{a^2-1}\right) \le \left(\sum_{cyc}\frac{a-2}{a+1}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a+2}{a-1}\right)$$

由题设，表达式左边等于 0，因此

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1} \ge 0$$

等号当 $a=b=c=2$ 时成立。

例 3.1.4 设$a,b,c,d,e\ge 0$，且$\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}=1$，证明：

$$\frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2}\le 1$$

证明：由题设条件，有$\sum_{cyc}\frac{1-a}{4+a}=0$，我们必须证明

$$\sum_{cyc}\frac{1}{4+a}\ge\sum_{cyc}\frac{a}{4+a}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{1-a}{4+a}\cdot\frac{1}{4+a^2}\ge 0$$

假定$a\ge b\ge c\ge d\ge e$，则

$$\frac{1-a}{4+a}\le\frac{1-b}{4+b}\le\frac{1-c}{4+c}\le\frac{1-d}{4+d}\le\frac{1-e}{4+e};$$

$$\frac{1}{4+a^2}\le\frac{1}{4+b^2}\le\frac{1}{4+c^2}\le\frac{1}{4+d^2}\le\frac{1}{4+e^2}$$

对上面的单调序列应用 Chebyshev 不等式，即得所要结果。
等号当$a=b=c=d=e=1$成立。

例 3.1.5 设$a,b,c,d>0$，且满足$a+b+c+d=4$，证明：

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2}\le\frac{1}{3}$$ （Pham Kim Hung）

证明：不等式变形如下

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{11+a^2}-\frac{1}{12}\right)\ge 0$$

或等价于

$$\sum_{cyc}(1-a)\cdot\frac{a+1}{a^2+11}\ge 0$$

注意到，如果(a,b,c,d)是增加次序，则

$$\frac{a+1}{a^2+11}\ge\frac{b+1}{b^2+11}\ge\frac{c+1}{c^2+11}\ge\frac{d+1}{d^2+11}$$

由 Chebyshev 不等式，立即得到所要结果。

例 3.1.6 设$a,b,c>0$，且$a+b+c=3$，证明：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$$ （Vasile Cirtoaje,Romania TST 2006）

证明：不等式变形如下

$$\sum_{cyc} a^2b^2 \ge a^2b^2c^2 \sum_{cyc} a^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2b^2(1+c+c^2+c^3)(1-c) \ge 0$$

注意到，如果$ab<2$及$a \ge b$，则

$$a^2(1+b+b^2+b^2) \ge b^2(1+a+a^2+a^3)$$

实际上，这个不等式等价于 $(a+b+ab-a^2b^2)(a-b) \ge 0$，这是显然成立的，因为$ab \le 2$。

由此我们可以得到，如果ab,bc,ca都小于 2，则由 Chebyshev 不等式，有

$$\sum_{cyc} a^2b^2(1+c+c^2+c^2)(1-c) \ge \left(\sum_{sym} a^2b^2(1+c+c^2+c^3)\right)\left(\sum_{sym}(1-c)\right) = 0$$

其它情况，假设$ab \ge 2$，显然，$a+b \ge 2\sqrt{2}$，于是 $c \le 3-2\sqrt{2}$ 及$c^2 < \frac{1}{9}$。即

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} > 9 > a^2+b^2+c^2$$

证毕。等号当$a=b=c=1$成立。

在下面，我将介绍 Chebyshev 应用的一个特别的方法，这种方法应用广泛非常有效，通常称之为“**Chebyshev 联合技术**”。

3.2 Chebyshev 联合技术

让我们来分析下列不等式。

例 3.2.1 设$a,b,c,d>0$，且满足$a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$，证明不等式

$$2(a+b+c+d) \ge \sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+3}+\sqrt{d^2+3}$$ （Pham Kim Hung）

证明：粗略地看一下这个不等式你会犹豫。变量a,b,c,d之间的关系很难进行变形;此外，这个不等式中还包含有平方根，用什么办法来处理这种情况呢？真是出奇，一个简单的方法就是使用 Chebyshev 不等式，来揭开这神秘的面纱。让我们来探索这个方法。

由假设，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a} = \sum_{cyc} a \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(a-\frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2-1}{a}\right) = 0$$

不等式变形如下

$$\sum_{cyc}\left(2a-\sqrt{a^2+3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2-1}{2a+\sqrt{a^2+3}} \ge 0$$

往下如何进行？想法是对下面的序列使用 Chebyshev 不等式

$$(a^2-1,b^2-1,c^2-1,d^2-1);\left(\frac{1}{2a+\sqrt{a^2+3}},\frac{1}{2b+\sqrt{b^2+3}},\frac{1}{2c+\sqrt{c^2+3}},\frac{1}{2d+\sqrt{d^2+3}}\right)$$

但是，这个想法失败了，因为第一个序列是增加的，而第二个序列是降低的，使用 Chebyshev 不等式，就会改变不等式号的方向。希望不要是这样的，注意到 $\sum_{cyc}\left(\frac{a^2-1}{a}\right)=0$，我们将改变不等式为如下形式

$$\sum_{cyc}\frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{a}{2a+\sqrt{a^2+3}}\ge 0$$

假设 $a\ge b\ge c\ge d$，使用恒等式 $\frac{a}{2a+\sqrt{a^2+3}}=\frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}}$，我们查看

$$\left(\frac{a^2-1}{a},\frac{b^2-1}{b},\frac{c^2-1}{c},\frac{d^2-1}{d}\right)$$

和

$$\left(\frac{a}{2a+\sqrt{a^2+3}},\frac{b}{2b+\sqrt{b^2+3}},\frac{c}{2c+\sqrt{c^2+3}},\frac{d}{2d+\sqrt{d^2+3}}\right)$$

这两个增加的序列。于是，有 Chebyshev 不等式，我们得到

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^2-1}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{2a+\sqrt{a^2+3}}\right)\ge\frac{1}{4}\left(\sum_{cyc}\frac{a^2-1}{a}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{2a+\sqrt{a^2+3}}\right)=0$$

证毕，等号当 $a=b=c=d=1$ 时成立。

这个简单证法的关键在哪里？这就是通过题设条件以及符合 Chebyshev 不等式的条件的次序的适当的系数，来拆分分式的分子和分母。根据这个方法，我们构建了如下一般的方法

假设我们需要证明的不等式（作为分数和的形式来表示）

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}\ge 0$$

在这里 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数， $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是正实数。

一般地，每一个不等式都可以转化为这样的形式，如果一些分数具有一个负的分母，我们将用-1 来乘它的分子和分母。这样一来，我们将找到一个新的正数序列

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 满足序列

$$(a_1x_1, a_2x_2, \cdots, a_nx_n)$$

是增加的，但序列

$$(a_1y_1, a_2y_2, \cdots, a_ny_n)$$

是降低的。应用 Chebhshev 不等式之后，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i} \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{cyc}a_ix_i\right)\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a_iy_i}\right)$$

于是，只需证明

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \geq 0$$

这个方法为什么这么优越？因为它摆脱了不等式中的分式。甚至适当的选择可以使得 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i = 0$，可以帮助快速完成证明。事实上，许多问题可以采用这种方法来解决。现在，让我们进一步考察下列例子：

例 3.2.2 设 $a,b,c>0$，且满足 $a+b+c=3$，证明：$\frac{1}{c^2+a+b}+\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{c^2+c+a} \leq 1$

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{c^2-c+3}-\frac{1}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a(a-1)}{a^2-a+3} \geq 0$$

或

$$\sum_{cyc}\frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}} \geq 0$$

根据 Chebyshev 不等式及假设条件 $a+b+c=3$，只需证明，如果 $a \geq b$，则 $a-1+\frac{3}{a} \leq b-1+\frac{3}{b}$ 或者 $(a-b)(ab-3) \leq 0$，这是显然成立的。因为 $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{9}{4} < 3$。

等号当 $a=b=c=1$ 时成立。

例 3.2.3 设 $a,b,c>0$，$0 \leq k < 2$，证明：

$$\frac{a^2-bc}{b^2+c^2+ka^2}+\frac{b^2-ca}{c^2+a^2+kb^2}+\frac{c^2-ab}{a^2+b^2+kc^2}\geq 0$$（Pham Kim Hung）

证明：尽管这个问题可以使用例 2.1.1 相同的方法解决，在此我们使用 Chebyshev 不等式给出一个简单的解法。注意到，如果$a\geq b$，则对任意正实数 c，我们有

$(a^2-bc)(b+c)\geq(b^2-ca)(c+a)$ 及

$$(b^2+c^2+ka^2)(b+c)-(c^2+a^2+kb^2)(c+a)=(b-a)\left(\sum_{cyc}a^2-(k-1)\sum_{cyc}bc\right)\leq 0$$

有了这些结果，我们将不等式写成如下形式

$$\sum_{cyc}\frac{(a^2-bc)(b+c)}{(b+c)(b^2+c^2+ka^2)}\geq 0$$

由 Chebyshev 不等式，这是成立的，因为$\sum_{cyc}(a^2-bc)(b+c)=0$

例 3.2.4 设$a,b,c>0$，证明：

$$\sqrt{a^2+8bc}+\sqrt{b^2+8ca}+\sqrt{c^2+8ab}\leq 3(a+b+c)$$

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\left(3a-\sqrt{a^2+8bc}\right)\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2-bc}{3a+\sqrt{a^2+8bc}}\geq 0$$

或

$$\sum_{cyc}\frac{(a^2-bc)(b+c)}{\left(3a+\sqrt{a^2+8bc}\right)(b+c)}\geq 0$$

根据 Chebyshev 不等式，只需证明：如果$a\geq b$，则

$$(b+c)(3a+\sqrt{a^2+8bc})\leq(c+a)(3b+\sqrt{b^2+8ca})$$

$$\Leftrightarrow(b+c)\sqrt{a^2+8bc}-(c+a)\sqrt{b^2+8ca}\leq 3c(b-a)$$

我们使用分子有理化，有

$$(b+c)\sqrt{a^2+8bc}-(c+a)\sqrt{b^2+8ca}=\frac{(b+c)^2(a^2+8bc)-(c+a)^2(b^2+8ca)}{(b+c)\sqrt{a^2+8bc}+(c+a)\sqrt{b^2+8ca}}$$

$$=\frac{c(b-a)\left[8a^2+8b^2+8c^2+15c(a+b)+6ab\right]}{(b+c)\sqrt{a^2+8bc}+(c+a)\sqrt{b^2+8ca}}$$

于是只需证明

$$8a^2+8b^2+8c^2+15c(a+b)+6ab\ge(b+c)\sqrt{a^2+8bc}+(c+a)\sqrt{b^2+8ca}$$

这由 AM-GM 不等式立即可得，因为

$$RHS\le\frac{3}{2}\left[(b+c)^2+(a^2+8bc)+(c+a)^2+(b^2+8ca)\right]$$

$$=3(a^2+b^2+c^2+5bc+5ac)\le LHS$$

注意：这里有一个类似的例子

★设 $a,b,c>0$，证明：

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}}+\frac{b^2-ca}{\sqrt{7b^2+2c^2+2a^2}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{7c^2+2a^2+2b^2}}\ge 0$$

例 3.2.5 设 $a,b,c,d>0$，且 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$，证明：

$$\frac{1}{5-a}+\frac{1}{5-b}+\frac{1}{5-c}+\frac{1}{5-d}\le 1$$（Pham Kim Hung）

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{5-a}-\frac{1}{4}\right)\le 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a-1}{5-a}\le 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(a-1)(a+1)}{(5-a)(a+1)}\le 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2-1}{4a-a^2+5}\le 0$$

注意到 $\sum_{cyc}(a^2-1)=0$，所以，由 Chebyshev 不等式，只需证明，如果 $a\ge b$，则 $4a-a^2+5\ge 4b-b^2+5$。这个条件就是 $a+b\le 4$，这是显然的，因为 $a^2+b^2\le 4$。等号当 $a=b=c=d=1$ 时成立。

例 3.2.6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，证明下列不等式

$$\frac{1}{n^2+a_1^2-1}+\frac{1}{n^2+a_2^2-1}+\cdots+\frac{1}{n^2+a_n^2-1}\ge\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$（Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，我们假设 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$。题设条件等价于

$$\frac{1-a_1^2}{a_1}+\frac{1-a_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{1-a_n^2}{a_n}=0 \quad (*)$$

记 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i$， $k=n^2-1$，根据（*），不等式可以改写成

$$\frac{1-a_1}{k+a_1^2}+\frac{1-a_2}{k+a_2^2}+\cdots+\frac{1-a_n}{k+a_n^2}\geq\frac{n-S}{S}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1-a_i^2}{a_i}\left[\frac{a_i}{(1+a_i)(k+a_i^2)}-\frac{a_i}{(1+a_i)S}\right]\geq 0$$

对于每一个 $i\neq j,i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们记

$$S_{ij}=\left[\frac{a_i}{(1+a_i)(k+a_i^2)}-\frac{a_i}{(1+a_i)S}\right]-\left[\frac{a_j}{(1+a_j)(k+a_j^2)}-\frac{a_j}{(1+a_j)S}\right]$$

$$=\frac{a_j-a_i}{(1+a_i)(1+a_j)}\left[\frac{a_ia_j(a_i+a_j+1)-k}{(a_i^2+k)(a_j^2+k)}+\frac{1}{S}\right]$$

如果 $S_{ij}\leq 0\,(1\leq i<j\leq n,i,j\in N)$，则由 Chebyshev 不等式，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1-a_i^2}{a_i}\left[\frac{a_i}{(1+a_i)(k+a_i^2)}-\frac{a_i}{(1+a_i)S}\right]\geq$$

$$\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1-a_i^2}{a_i}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{(1+a_i)(k+a_i^2)}-\frac{a_i}{(1+a_i)S}\right)\right]=0$$

否则，假设存在两个下标 $i<j$ 满足 $S_{ij}\geq 0$，或者

$$\frac{a_ia_j(a_i+a_j+1)-k}{(a_i^2+k)(a_j^2+k)}+\frac{1}{S}\leq 0$$

这个条件就意味着

$$\frac{1}{S}\leq\frac{k-a_ia_j(a_i+a_j+1)}{(a_i^2+k)(a_j^2+k)}\leq\frac{1}{k+a_i^2}+\frac{1}{k+a_j^2}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k+a_i^2}$$

证毕，等号当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时成立。

为什么 Chebyshev 联合技术从 Chebyshevy 应用的其他方法脱颖而出？这可能是它应用广泛的缘故。你认为这个令人惊讶吗？当然不是。事实上，这是个自然的方法。我相信你已经使用过它，只是没有一个共同的名称而已。从现在开始，你不会刻意凭

直观的感觉和突然的想象使用 Chebyshev 联合技术。有时候，用合适的系数乘以分子和分母可以更快地达到目的，例如上面的问题。但有时并不能如愿。构造一个好的系数需要大量的精力，因此找到它们思想变得非常重要。为此，让我们看看下面的例子。

例 3.2.7 设 $a,b,c>0$，且 $a+b+c=3$，证明：$\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca}\le\frac{3}{8}$

证明：设 $x=bc, y=ca, z=ab$，则不等式变成为

$$\sum_{cyc}\frac{1}{9-x}\le\frac{3}{8}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{1-x}{9-x}\ge 0$$

假设 a_x,a_y,a_z 时我们要寻找的系数，我们将不等式变形为

$$\sum_{cyc}a_x(1-x)\cdot\frac{1}{a_x(9-x)}\ge 0$$

数列 (a_x,a_y,a_z) 必须满足两个条件：首先两个序列 $(a_x(1-x),a_y(1-y),a_z(1-z))$ 和

$(a_x(9-x),a_y(9-y),a_z(9-z))$，一个是增加的，另一个是减少的（1）；

第二，$\sum_{cyc}a_x(1-x)\ge 0$ （2）

让我们来做某些测试。我们首先选择 $a_x=1+x, a_y=1+y, a_z=1+z$。此时，条件（1）已经满足，条件（2）不满足。因为

$$\sum_{cyc}a_x(1-x)=3-\sum_{cyc}x^2\le 0$$

然后，我们选择 $a_x=8+x, a_y=8+y, a_z=8+z$。这时，条件（2）满足了（你可以很容易验证），但条件（1）并不总是为真。幸运的是，一切都很好，如果我们选择 $a_x=6+x, a_y=6+y, a_z=6+z$。在这种情况下，它们是很显然的。如果 $x\ge y\ge z$，则

$a_x(1-x)\ge a_y(1-y)\ge a_z(1-z)$ 和 $a_x(9-x)\le a_y(9-y)\le a_z(9-z)$。于是，只需证明

$$\sum_{cyc}a_x(1-x)\ge 0\Leftrightarrow 5\left(\sum_{cyc}ab\right)+\left(\sum_{cyc}ab\right)^2\le 18+6abc$$

由 AM-GM 不等式，我们有

$$\prod_{cyc}(3-2a)=\prod_{cyc}(a+b-c)\le abc$$

这个不等式可以变形为到 $9+3abc\ge 4\sum_{cyc}ab$。在上面的不等式中，替换成 $3abc\ge 4\sum_{cyc}ab-9$，有

$$5\left(\sum_{cyc}ab\right)+\left(\sum_{cyc}ab\right)^2\le 8\sum_{cyc}ab\Leftrightarrow\sum_{cyc}ab\le 3$$

这时显然成立的，因为 $a+b+c=3$。等号当 $a=b=c=1$ 时成立。

例 3.2.8 设 $a,b,c>0$，且 $a^4+b^4+c^4=3$，证明：$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1$

(Moldova TST 2005)

证明：设 $x=ab, y=ca, z=bc$，则不等式等价于

$$\frac{1-x}{4-x}+\frac{1-y}{4-y}+\frac{1-z}{4-z}\ge 0\Leftrightarrow\frac{1-x^2}{4+3x-x^2}+\frac{1-y^2}{4+3y-y^2}+\frac{1-z^2}{4+3z-z^2}\ge 0$$

注意到 $a^4+b^4+c^4=3$，于是 $x^2+y^2+z^2\le 3$，因此，如果 $x\ge y\ge z$，则

$$1-x^2\le 1-y^2\le 1-z^2;\quad 4+3x-x^2\ge 4+3y-y^2\ge 4+3z-z^2$$

所以由 Chebyshev 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1-x^2}{4+3x-x^2}\ge\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}(1-x^2)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{4+3x-x^2}\right)\ge 0$$

因为 $\sum_{cyc}x\le 3$ 和 $\sum_{cyc}x^2\le 3$。等号当 $a=b=c=1$ 时成立。

例 3.2.9 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，证明：

$$\frac{1}{n-1+a_1^2}+\frac{1}{n-1+a_2^2}+\cdots+\frac{1}{n-1+a_n^2}\le 1$$（Pham Kim Hung）

证明：不等式改写成如下形式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n-1+a_i^2}-\frac{1}{n}\right)\le 0$$

或等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-1}{n-1+a_i^2}\geq 0$$

假定$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$，根据题设，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-1}{a_i}=0$$

此外，注意到

$$\frac{a_i}{n-1+a_i^2}-\frac{a_j}{n-1+a_j^2}=\frac{(n-1-a_ia_j)(a_i-a_j)}{(n-1+a_i^2)(n-1+a_j^2)}$$

于是，此时$a_ia_j\leq n-1\ i\neq j$，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-1}{n-1+a_i^2}\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n-1+a_i^2}\right)=0$$

只需证明$a_1a_2\geq n-1$的情况。对于$n\geq 3$，Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\frac{a_1^2}{n-1+a_1^2}+\frac{a_2^2}{n-1+a_2^2}\geq\frac{(a_1+a_2)^2}{2(n-1)+a_1^2+a_2^2}\geq 1\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{n-1+a_i^2}\geq 1\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+a_i^2}\leq 1$$

对于$n=1$和$n=2$，不等式变成一个等式。对于$n\geq 3$，等号当且仅当$a_1=\cdots=a_n=1$时成立。

第四章 不等式与凸函数

凸函数是一个重要的概念，在数学的多个领域扮演者重要的角色。尽管凸函数总是涉及高深的理论，但本书将试着给你这类函数的更多的可以很容易地被一个高中学生所接受的在不等式方面最常用功能的基础知识。本节包括两部分：Jensen 不等式和边界不等式。

4.1 凸函数和 Jensen 不等式

定义1、假设 f 是定义在$[a,b]\subset R$上的单变量函数。f 称为$[a,b]$上的凸函数，当且仅当对任意 $x,y\in[a,b]$ 以及 $0\le t\le 1$，总有

$$tf(x)+(1-t)f(y)\ge f(tx+(1-t)y)$$

定理5、如果 $f(x)$ 是定义在$[a,b]\subset R$上的实函数，对任意 $x\in[a,b]$，$f''(x)\ge 0$，则 $f(x)$ 是$[a,b]$上的凸函数。

证明：我们将证明对任意 $x,y\in[a,b]$ 以及 $0\le t\le 1$，总有

$$tf(x)+(1-t)f(y)\ge f(tx+(1-t)y)$$

事实上，假设t和 y 是常数，定义

$$g(x)=tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y)$$

对 x 求导数，

$$g'(x)=tf'(x)-tf'(tx+(1-t)y)$$

注意到 $f''(x)\ge 0\ (x\in[a,b])$，则 $f'(x)$ 是$[a,b]$上的增函数。于是，当 $x\ge y$ 时，$g'(x)\ge 0$；

当 $x \le y$ 时，$g'(x) \le 0$；总之，我们有 $g(x) \ge g(y) = 0$

定理6、（Jensen 不等式）设 f 是 $[a,b] \subset R$ 上的凸函数，对所有 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$，我们有

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \ge nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

如果你从来没有读过任何有关凸函数的材料，或者你从来没有见过凸函数的定义，那么下面的引理是非常实用的（尽管它可以直接由 Jensen 不等式得到）

引理1、假设一个实函数 $f:[a,b] \to R$ 满足条件

$$f(x) + f(y) \ge 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \forall x, y \in [a,b],$$

则对所有 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$，下列不等式成立

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \ge nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

证明：我们用 Cauchy 归纳法来证明这个引理。由假设，当 $n = 2$ 时，不等式是成立的，因此不等式对 n 是 2 的指数形式是成立的。所以只需证明，如果不等式对 $n = k+1\,(k \in N, k \ge 2)$ 成立，则对 $n = k$ 也成立。事实上，设不等式对 $n = k+1$ 成立。记 $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k,\ x_{k+1} = \dfrac{x}{k}$。由归纳假设，我们有

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) + f\left(\frac{x}{k}\right) \ge (k+1)f\left(\frac{x + \frac{x}{k}}{k+1}\right) = (k+1)f\left(\frac{x}{k}\right)$$

证毕

上面的结果我们可以直接从 Jensen 不等式得到，因为根据定义，每一个凸函数 f 满足（$t=\frac{1}{2}$）

$$f(x)+f(y)\geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

显然，如果我们改变条件 $f(x)+f(y)\geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad \forall x,y\in[a,b]$ 到 $f(x)+f(y)\leq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad \forall x,y\in[a,b]$，则不等式将改变方向

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

引理2、假设实函数 $f:[a,b]\to R^+$ 满足条件

$$f(x)+f(y)\geq 2f(\sqrt{xy})\quad \forall x,y\in[a,b],$$

则对所有 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，下列不等式成立

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\geq nf\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)$$

这个引理的证明与引理1是完全类似的，因此在此不再给出证明。注意到这个引理的应用是相当广泛的，它当然是 AM-GM 不等式的一般情况。

定理7、（加权 Jensen 不等式）假设 $f(x)$ 时定义在 $[a,b]\subset R$ 上的实函数，实数

$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，对所有非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\ge 0,\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，则下列不等式成立

$$a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)\ge f\left(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right)$$

Jensen 不等式是该定理当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{1}{n}$ 时的一个特例。

让我们考虑该定理的更基本的后续版本。

引理3、假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\ge 0,\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ 以及 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$。$f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实函数，则不等式

$$a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)\ge f\left(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right)$$

对每一个正整数 n 以及每一个实数 $x_i,a_i,i=1,2,\cdots,n$ 都成立，当且仅当它在 $n=2$ 时成立。

为了证明引理3以及加权 Jensen 不等式，我们可以采用和引理1同样的方法来证明。引理1、2和3最大优势是允许使用凸函数方法，即使你不知道有关凸函数的任何事情。下面的推论是显然的。

推论3、

（a）如果我们把算术平均表达式换成 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任何其它平均，例如几何平均或者调和平均，那么引理1的结论仍然是成立的。

（b）如果不等式对于两个数改变了方向，那么对于 n 个数不等式也改变方向。

Jensen 不等式是一个经典不等式。在下一章中我们将继续讨论和这个不等式相关联的 Karamata 不等式，这是一个更强的不等式。现在，我们来讨论 Jensen 不等式的某些应用。

例4.1.1 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，且 $x_1x_2\cdots x_n\ge 1$，证明：

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\le\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$ （IMO Shortlist）

证明：根据引理2，只需证明

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}\quad \forall a,b\ge 1$$

我们整理由 $(a-b)^2(1-ab)\le 0$，这是很明显的。

例4.1.2 设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，证明：

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n}\ge\frac{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)}{(n-a_1-a_2\cdots-a_n)^n}$$

证明：不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln a_i-\ln(1-a_i)\right]\ge n\ln\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)-n\ln\left(n-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

注意到函数 $f(x)=\ln x-\ln(1-x)$，它的二阶导数

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\ge 0\ (x\in\left(\frac{1}{2},1\right])$$

因此 $f(x)$ 是凸函数，由 Jensen 不等式，即得所需结果。

和其它基本不等式，如 AM-GM 不等式、Cauchy-Schwarz 不等式或者 Chebyshev 不

等式相比较，很明显，Jensen 不等式局限在一个单独的世界。Jensen 不等式很少用，是因为人们一直认为它对困难的问题力不从心。然而，这是一个不等式未开垦的领域，Jensen 不等式变得非常有效，经常给我们带来意想不到的解决方案。

例4.1.3 设 $a,b,c>0$，证明：$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$（IMO 2001）

证明：尽管这个问题用 Holder 不等式已经解决，但是，由 Jensen 不等式给出的证明依然非常漂亮。不失一般性，我们假设 $a+b+c=1$。因为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 是凸函数，由 Jensen 不等式我们得到：

$$af(a^2+8bc)+bf(b^2+8ca)+cf(c^2+8ab)\geq f(M)$$

在这里 $M=\sum_{cyc}a(a^2+8bc)=24abc+\sum_{cyc}a^3$。于是只需证明 $f(M)\geq 1$ 或者 $M\leq 1$ 或者

$$24abc+\sum_{cyc}a^3\leq\left(\sum_{cyc}a\right)^3\Leftrightarrow\sum_{cyc}c(a-b)^2\geq 0$$

最后一个不等式时显然的。当 $a=b=c$ 等号成立

例4.1.4 设 $a,b,c,d>0$，且 $a+b+c+d=4$，证明：

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{d^2+d}+\frac{d}{a^2+a}\geq\frac{8}{(a+c)(b+d)}$$

证明：记 $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$，则 $f(x)\,(x>0)$ 是一个凸函数。根据 Jensen 不等式，我们有

$$\frac{a}{4}\cdot f(b)+\frac{b}{4}\cdot f(c)+\frac{c}{4}\cdot f(d)+\frac{d}{4}\cdot f(a)\geq f\left(\frac{ab+bc+cd+da}{4}\right)$$

于是，不等式可以改写成如下形式

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+b}\ge\frac{64}{(ab+bc+cd+da)^2+4(ab+bc+cd+da)}$$

因此，只需证明

$$\frac{64}{(ab+bc+cd+da)^2+4(ab+bc+cd+da)}\ge\frac{8}{ab+bc+cd+da}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+cd+da\le 4\Leftrightarrow(a-b+c-d)^2\ge 0$$

等号当$a=b=c=d=1$成立。

例4.1.5 设$a,b,c>0$，证明：$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$ （Vasile Cirtoaje）

证明：注意到 $f(x)=\sqrt{x}$ 是凸函数。根据 Jensen 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b}}=\sum_{cyc}\frac{a+c}{2(a+b+c)}\cdot\sqrt{\frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)^2}}$$

$$\le\sqrt{\sum_{cyc}\frac{a+c}{2(a+b+c)}\cdot\frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)^2}}=\sqrt{\sum_{cyc}\frac{2a(a+b+c)}{(a+c)(b+c)}}$$

于是，只需证明

$$\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)}{(a+c)(b+c)}\le\frac{9}{4}$$

展开之后，不等式变成

$$8\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a\right)\geq 9\prod_{cyc}(a+b)\Leftrightarrow\sum_{cyc}c(a-b)^2\geq 0$$

例4.1.6 设$a,b,c\geq 0$，证明：$\dfrac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}\geq 1$

[Pham Kim hung, Vo Quoc Ba Can]

证明：我们可以假设$a+b+c=1$。因为$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$是凸函数，根据 Jensen 不等式，有

$$af(4b^2+bc+4c^2)+bf(4c^2+ca+4a^2)+cf(4a^2+ab+4b^2)\geq f(M)$$

这里

$$M=a(4b^2+bc+4c^2)+b(4c^2+ca+4a^2)+c(4a^2+ab+4b^2)=4\sum_{cyc}ab(a+b)+3abc$$

于是只需证明 $f(M)\geq 1$或者$M\leq 1$。这是很明显的。因为

$$1-M=\left(\sum_{cyc}a\right)^3-4\sum_{cyc}ab(a+b)-3abc=\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}ab(a+b)+3abc$$

$$=\prod_{cyc}abc-\prod_{cyc}(a+b-c)\geq 0$$

等号成立的条件是$a=b=c$和$a=0,b=c$及其排列。

例4.1.7 设$a,b,c>0$，证明：$\sqrt{\dfrac{a}{4a+4b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{4b+4c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{4c+4a+b}}\leq 1$

[Pham Kim Hung]

证明：注意到函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 是凸函数，所以由 Jensen 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}}=\sum_{cyc}\frac{(4a+4b+c)}{9(a+b+c)}\cdot\sqrt{\frac{81a(a+b+c)^2}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)^2}}$$

$$\le\sqrt{\sum_{cyc}\frac{(4a+4b+c)}{9(a+b+c)}\cdot\frac{81a(a+b+c)^2}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)^2}}=\sqrt{\sum_{cyc}\frac{9a(a+b+c)}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)}}$$

不失一般性，我们假设 $a+b+c=1$。于是，只需证明

$$\sum_{cyc}\frac{9a(a+b+c)}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)}\le 1$$

或等价于

$$9\left(\sum_{cyc}a^2+8\sum_{cyc}ab\right)\le\prod_{cyc}(4-3a)\Leftrightarrow 18\sum_{cyc}ab+27abc\le 7$$

这是显然成立的。因为 $\sum_{cyc}ab\le\frac{1}{3}$ 以及 $abc\le\frac{1}{27}$

例4.1.8 设 $a,b,c>0$ 且满足 $a^2+b^2+c^2=3$，证明：

$$\sqrt{\frac{a}{a^2+b^2+1}}+\sqrt{\frac{b}{b^2+c^2+1}}+\sqrt{\frac{c}{c^2+a^2+1}}\le\sqrt{3}$$ （Pham Kim Hung）

证明：对凸函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 应用 Jensen 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a^2+b^2+1}}=\sum_{cyc}\frac{c^2+a^2+1}{3(a^2+b^2+c^2)}\cdot\sqrt{\frac{9a(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+1)(c^2+a^2+1)}}$$

$$\le \sqrt{\sum_{cyc} \frac{c^2+a^2+1}{3(a^2+b^2+c^2)} \cdot \frac{9a(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+1)(c^2+a^2+1)}} = \sqrt{\sum_{cyc} \frac{3a(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+1)(c^2+a^2+1)}}$$

于是，只需证明

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(a^2+b^2+1)(c^2+a^2+1)} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a(a^2+b^2+1) \le \prod_{cyc}(4-a^2)$$

该不等式变形为

$$12\sum_{cyc} a - 3\sum_{cyc} a^3 \le 34 - a^2b^2c^2 - 2\sum_{cyc} a^4$$

由 AM-GM 不等式，我们有 $a^2b^2c^2 \le 1$，所以只需证明

$$\sum_{cyc}(2a^4-3a^3+12a-11) \le 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^2-1)\left(2a^2-3a+2+\frac{9}{a+1}\right) \le 0$$

因为这最后的不等式是对称的，所以我们可以假设 $a \ge b \ge c$。记

$$S_a = 2a^2-3a+2+\frac{9}{a+1}, S_b = 2b^2-3b+2+\frac{9}{b+1}, S_c = 2c^2-3c+2+\frac{9}{c+1}$$

如果 $b \le 1$，则 $a+b \le 1+\sqrt{2}$ 以及 $(a+1)(b+1) \le 2(1+\sqrt{2})$，这就意味着

$$S_a - S_b = 2(a+b)-3-\frac{9}{(a+1)(b+1)} \le 0$$

当然 $S_b - S_c \le 0$，因此我们得到 $S_a \le S_b \le S_c$， 由 Chebyshev 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}(a^2-1)S_a \le \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}(a^2-1)\right)\left(\sum_{cyc} S_a\right) = 0$$

如果$b\ge 1$，则我们也有$S_a-S_c\le 0$以及$S_b-S_c\le 0$（因为$c\le 1$）。这就意味着

$$\sum_{cyc}(a^2-1)S_a=(a^2-1)(S_a-S_c)+(b^2-1)(S_b-S_c)\le 0$$

等号成立条件为$a=b=c=1$

事实上，在一定程度上，加权 Jensen 不等式有许多的秘密。它现在仍然很少使用，但一旦使用，它总是展示一个美妙的方案。以上问题及其解答，希望能向你传输使用这个特殊方法的技巧，更多的还需要你自己去考虑。

下面我们将讨论应用凸函数处理不等式的新方式，我们将利用凸函数来处理变量限制在区间[a,b]上的不等式。

4.2 凸函数与变量限制在区间上的不等式

在某些不等式中，其中的变量被限制在特定的区间上。对于这一类问题，使用 Jensen 不等式来处理是十分强大、有效。因为它可以帮助我们确定变量等于或不等于边界，而获得一个表达式的最小值。

例4.2.1 设$a,b,c>0,\quad a,b\in[1,2]$，证明：$a^3+b^3+c^3\le 5abc$（MYM 2001）

证明：首先我们给出这个简单问题的一个基本解法。因为$a,b,c\in[1,2]$，如果$a\ge b\ge c$，则

$$a^3+2\le 5a\Leftrightarrow(a-2)(a^2+2a-1)\le 0\qquad(1)$$

$$5a+b^3\le 5ab+1\Leftrightarrow(b-1)(b^2+b+1-5a)\le 0\qquad(2)$$

$$5ab+c^3\le 5abc+1\Leftrightarrow(c-1)(c^2+c+1-5ab)\le 0\qquad(3)$$

上述估计式是正确的。因为

$$b^2+b+1\le a^2+a+1\le 2a+a+1\le 5a$$

$$c^2+c+1\le a^2+a+1\le 5a\le 5ab$$

将不等式（1）（2）（3）相加，即得到所需结果。等号成立条件是 $a=2,b=c=1$ 及其排列。

例4.2.2 设 $a,b,c>0,a,b,c\in[1,2]$，证明：$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 10$

（Olympiad 30-4,Vietnam）

证明：不等式变形为

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\le 7$$

不失一般性，我们可以假定 $a\ge b\ge c$，则

$$(a-b)(a-c)\ge 0\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{c}+1\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\\ \frac{c}{a}+1\ge\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\end{cases}$$

这就意味着

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\le\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2$$

我们得到

$$\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\le 2+2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)=7-\frac{(a-2c)(2a-c)}{ac}\le 7$$

因为 $2c\ge a\ge c$。等号成立条件是 $(a,b,c)=(2,2,1)$ 或 $(2,1,1)$ 或其排列。

注意：下面是本题的一般情况，它的证法和前面的问题是类似的。

◆设 $p<q$ 是正常数，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in[p,q]$，证明：

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}\right)\le n^2+\frac{k_n(p-q)^2}{4pq}$$

这里，如果 n 是奇数，$k_n=n^2$；如果 n 是偶数，$k_n=n^2-1$

前一个问题的关键是一个中间估计（估计是：如果 $a\ge b\ge c$，则 $(b-a)(b-c)\le 0$）。因为它们是基本和简单的，就是一个中学生也是可以接受的。但下面的不等式会怎样呢？前面的方法还能使用码？让我们看看。

例4.2.3 设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2005}\in[-1,1]$，求下列表达式的最小值

$$P=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{2004}x_{2005}+x_{2005}x_1$$

解：因为这个不等式是循环不等式而非对称，我们规定了变量的次序。如果依靠关系

$(x_i-1)(x_i+1)\le 0$，我们不会成功。

凭直觉，我们认为表达式在序列 $x_1,x_2,\cdots,x_{2005}$ 交替为1和−1时，将达到最大值。在这种情况下

$$P=1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+\cdots+(-1)\cdot 1+1\cdot 1=-2003$$

这个猜想的准确的证明，并不那么明显。尽管下面的解法很简单，但是，如果你没有凸函数方面的知识，这确实很难。

首先，我们注意到，如果 $x\in[p,q]$，则每个线性函数 $f(x)=ax+b$ 或者二次函数

$f(x)=ax^2+bx+c$ 有下列重要的特性

$$\max_{x\in[p,q]} f(x)=\max\{f(p),f(q)\}$$

$$\min_{x\in[p,q]} f(x)=\min\{f(p),f(q)\}$$

注意到 $P=P(x_1)$ 是 x_1 的线性函数，因此，根据线性函数的性质，当且仅当 $x_1\in\{-1,1\}$ 时，P 达到最小值。类似地，对于其它变量，我们得到，当且仅当 $x_k\in\{-1,1\}\quad(k=1,2,\cdots,2005)$ 时，P 达到最小值。在这种情况下，我们将证明 $P\geq -2003$。

事实上，一定至少有一个 $k\ (k\in N,1\leq k\leq 2005)$ 满足 $x_kx_{k+1}\geq 0$。这就意味着 $x_kx_{k+1}=1$，因此 $\sum_{k=1}^{2005}x_kx_{k+1}\geq -2003$

注意：使用类似的方法，我们可以解决这种类型的许多不等式问题

◆设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[-1,1]$，求下列表达式的最小值

$$P=x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\cdots+x_{n-1}x_nx_1+x_nx_1x_2$$

◆设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$，证明

$$P=x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+\cdots+x_n(1-x_1)\leq\left[\frac{n}{2}\right]$$

什么样的函数持有这种方法？当然，线性函数是一个例子，但也并非全部。下面的引理可以帮助确定了一大类这种函数。

引理4、设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义在 $[a,b]\times[a,b]\times\cdots\times[a,b]\subset R^n\ (a<b)$ 上的实函数，满足

对所有$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，如果我们固定$n-1$个变量x_j $(j\neq k)$，则$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_k)$是$x_k$的一个凸函数。$F$ 当且仅当$\alpha_i\in\{a,b\},\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$时，在点$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$达到最小值。

证明：事实上，我们只需证明，如果$f(x)$是定义在$[a,b]$上的凸函数，则对所有$x\in[a,b]$，我们有

$$f(x)\le\max\{f(a),f(b)\}$$

实质上，因为$\{ta+(1-t)b\mid t\in[0,1]\}=[a,b]$，对所有$x\in[a,b]$，存在一个数$t\in[0,1]$，满足$x=ta+(1-t)b$。根据凸函数的定义，我们有

$$f(x)\le tf(a)+(1-t)f(b)\le\max\{f(a),f(b)\}$$

使用这个引理，象例子4.2.3，我们只需验证多变量函数作为x_k的单变量函数的凹凸性即可。这里有一个例子。

例4.2.4 给定正实数$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，求下列表达式的最大值

$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\cdots+(x_1-x_n)^2+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2$$

[Mathematics and Youth Magazine]

证明：记上面的表达式为F。注意到F，表示为x_1的函数（我们已经固定其它变量），它等于

$$f(x_1)=(n-1)x_1^2-2\left(\sum_{i=2}^{n}x_i\right)x_1+c$$

在这里c是一个常数。很显然，f是一个凸函数（$f''(x)=2(n-1)\geq 0$）。根据上面的引理，我们得到，F 当且仅当$x_i\in\{a,b\}, i\in\{1,2,\cdots,n\}$时达到最大值。假设 k 个数$x_i$等于 a，$(n-k)$个数等于 b。在这种情况下，我们有

$$F=n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=nka^2+n(n-k)b^2-\left[ka+(n-k)b\right]^2=k(n-k)(a-b)^2$$

我们得到

$$\max(F)=\begin{cases}m^2(a-b)^2 & n=2m, m\in N\\ m(m+1)(a-b)^2 & n=2m+1, m\in N\end{cases}$$

例4.2.5 设$n\in N$，求下列表达式的最小值

$$f(x)=|1+x|+|2+x|+\cdots+|n+x|,\quad (x\in R)$$

解：记$I_1=[-1,+\infty), I_{n+1}=(-\infty,-n], I_k=[-k,-k+1], k\in\{2,3,\cdots,n\}$。如果$x\in I_1$，则

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(1+x)\geq\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{n(n-1)}{2}=f(-1)$$ 。如果$x\in I_n$，则

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1-x)\geq\sum_{i=1}^{n}(-i+n)=\frac{n(n-1)}{2}=f(-n)$$

假设$x\in I_k\ (1<k<n+1)$，则

$$f(x)=-\sum_{i=1}^{k-1}(i+x)+\sum_{i=k}^{n}(i+x)$$

是 x 的线性函数，因此

$$\min_{x\in I_k} f(x)=\min\{f(-k), f(-k+1)\}$$

组合前面的结果，我们有

$$\min_{x\in R} f(x)=\min\{f(-1), f(-2),\cdots, f(-n)\}$$

经过简单的计算，我们有

$$f(-k)=(1+2+\cdots+(k-1))+(1+2+\cdots+(n-k))=\frac{1}{2}\left[k^2+(n-k)^2+n\right]$$

这就意味着

$$\min_{x\in R} f(x)=\min_{1\le k\le n}\frac{k^2+(n-k)^2+n}{2}=\begin{cases} m(m+1) & n=2m(m\in N)\\ (m+1)^2 & n=2m+1(m\in N)\end{cases}$$

为什么这个方法有这么大的优势？因为它可以帮助我们立即找到答案。它不尝试中间估计，一切问题我们只需检测边界值。

有时，变量可能不仅被限制在一定的区间内，而且相互之间有关联。在这种情况下，下面的结果是很重要的。

引理5、假设 $f(x)$ 时定义在 $[a,b]\in R$ 上的实的凸函数，实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$ 且满足

$x_1+x_2+\cdots+x_n=s=constant\ (na\le s\le nb)$，考察下列表达式

$$F=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$

则 F 达到最大值，当且仅当序列 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中至少有 n-1个元素等于 a 或 b。

证明：注意到这个引理直接从它 n=2的情况可以得到。事实上，只需要证明：如果

$x, y \in [a,b]$ 且 $2a \le x+y \le 2b$，则

$$f(x)+f(y) \le \begin{cases} f(a)+f(s-a), s \le a+b \\ f(b)+f(s-b), s \ge a+b \end{cases}$$

实际上，假设 $s \le a+b$，则 $s-a \le b$。由于 $x \in [a, s-a]$，存在数 $t \in [0,1]$ 使得 $x = ta+(1-t)(s-a)$，$y=(1-t)a+t(s-a)$。由凸函数的定义我们有 $f(x) \le tf(a)+(1-t)f(s-a)$ 以及 $f(y) \le (1-t)f(a)+tf(s-a)$，两式相加，我们得到

$$f(x)+f(y) \le f(a)+f(s-a)$$

在 $s \ge a+b$ 的情况下，引理类似可证。

现在看看由这个引理导出的简单而熟悉的问题。

例4.2.6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in [0,2]$，且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n = n$，求下列表达式的最大值。

$$S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

解：对凸函数 $f(x)=x^2$ 应用上面的引理，我们得到，当且仅当 k 个数等于2，n-k-1个数等于0时，S 达到最大值。在这种情况下，我们有 $S = 4k+(n-2k)^2$。因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [0,2]$，我们必定有 $0 \le n-2k \le 2$。

如果 $n = 2m\ (m \in N)$，则 $n-2k \in [0,2]$，这就意味着 $\max S = 4m = 2n$

如果 $n = 2m+1\ (m \in N)$，则 $n-2k = 1$，这就意味着 $\max S = 4m+1 = 2n+1$

例4.2.7 设$a,b,c\in[0,2]$，且满足$a+b+c=5$，证明：$a^2+b^2+c^2\le 9$

证明：假设$a\le b\le c$，根据引理5，我们推断$a^2+b^2+c^2$当且仅当$a=0$或者$b=c=2$达到最大值。在第一种情况$a=0$是不可能的，因为$4\ge b+c=5$，引出矛盾。在第二种情况，我们有$a=1$，因此$\max\{a^2+b^2+c^2\}=1^2+2^2+2^2=9$

例4.2.8 设实数$a_1,a_2,\cdots,a_{2007}\in[-1,1]$，且满足$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$，证明：

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2007}^2\le 2006$$

证明：应用引理5，我们推断表达式$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2007}^2$当且仅当 k 个数等于1，n-k-1个数等于-1。k 必须是1003且后继的数必须是0，这样，我们推断

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2007}^2\le 2006$$

例 4.2.9 设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[-1,1]$，且满足 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=0$，求表达式 $x_1+x_2+\cdots+x_n$的最大值。（Tran Nam Dung）

解：我们记$a_i=x_i^3\quad i\in\{1,2,\cdots,\ n\}$，则$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$。注意到函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$当$x\ge 0$是凹函数，当$x\le 0$时，是凸函数。由引理5，很容易得到

$$f(x)+f(y)\le\begin{cases} f(-1)+f(x+y+1) & x,y\in[-1,0] \\ 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) & x,y\in[0,1] \end{cases} \qquad (1)$$

现在假设x_i中有两个数x,y满足$x<0<y$，则

$$f(x)+f(y)\le\begin{cases} f(-1)+f(x+y+1), & x+y\le 0 \\ f(0)+f(x+y), & x+y\ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

根据（1），我们推断如果$a_1,a_2,\cdots,a_k$是序列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$中的非负项，则

$$\sum_{i=1}^{k} f(a_i)\le (k-1)f(1)+f\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+k-1\right),$$

这就意味着，我们可以改变 k-1个非负数为-1使得和$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$更大。因此，如果$a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_n$是非负数，则

$$\sum_{j=k+1}^{n} f(a_j)\le (n-k)f\left(\frac{1}{n-k}\sum_{j=k+1}^{n}a_j\right)$$

这就意味着我们可以使用它们的算术平均值来代替所有非负实数而使$\sum_{i=k+1}^{n} f(a_i)$更大。

因此，我们可以使 k-1个非正数等于-1；总有一个非正数，假设这个数是a_k，由于$\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，必有一个非负数，不妨设为a_n。根据（2），由于$a_k\le 0\le a_n$，如果$a_k+a_n\le 0(a_k+a_n+1\ge 0)$，我们用$(-1,a_k+a_n+1)$来替换$(a_k,a_n)$。如果$a_k+a_n\ge 0$，我们就用$(0,a_k+a_n)$来替换$(a_k,a_n)$。经过这个步骤之后，新的序列有 k 个非正元素等于-1。因此

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\le g(k)=kf(-1)+(n-k)f\left(\frac{k}{n-k}\right)=\sqrt[3]{k(n-k)^2}-k$$

注意到导数 $g'(k)$ 只有一个根 $k=\dfrac{n}{9}$，因此我们得到表达式 $\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$ 或 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 的最大值是

$$\max\left\{\sqrt[3]{\left[\frac{n}{9}\right].\left(n-\left[\frac{n}{9}\right]\right)^2}-\left[\frac{n}{9}\right],\sqrt[3]{\left(\left[\frac{n}{9}\right]-1\right).\left(n-\left[\frac{n}{9}\right]-1\right)^2}--\left[\frac{n}{9}\right]-1\right\}$$

第五章 Abel 公式和重排不等式

5.1 Abel 公式

在下面，我们将讨论一个和数学竞赛中的许多问题密切相关的恒等式。这个恒等式在不等式方面有较好的效果。这就是所谓的 Abel 公式。

定理 8、（Abel 公式）假设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是两个实数列。记

$c_k=y_1+y_2+\cdots+y_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，则

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=(x_1-x_2)c_1+(x_2-x_3)c_2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)c_{n-1}+x_nc_n$$

证明：我们当然有

$$(x_1-x_2)c_1+(x_2-x_3)c_2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)c_{n-1}+x_nc_n$$

$$=c_1x_1+(c_2-c_1)x_2+\cdots+(c_n-c_{n-1})x_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

由这个定理，我们可以直接得到下列结果

例 5.1.1（Abel 不等式）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1\ge y_2\ge\cdots\ge y_n\ge 0$ 是实数。对于 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，

我们记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，假设 $M=\max\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 和 $m=\min\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$，则

$$my_1\le x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\le My_1$$

证明：因为不等式的两部分证明是类似的，我们只证明不等式的左半部分。设 $y_{n+1}=0$，由 Abel 公式

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i+1})S_i\ge\sum_{i=1}^{n}m(y_i-y_{i+1})=my_1$$

Abel 公式经常用于用其他方法很难解决有复杂条件的不等式问题。下面是一些例子。

例 5.1.2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_n\ge 0$ 是正数序列，且满足

$a_1a_2\cdots a_k\ge b_1b_2\cdots b_k\ \forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$，证明下列不等式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge b_1+b_2+\cdots+b_n$$

证明：由 Abel 公式，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}b_i\left(\frac{a_i}{b_i}-1\right)=(b_1-b_2)\left(\frac{a_1}{b_1}-1\right)+(b_2-b_3)\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-2\right)+\cdots$$

$$+(b_{n-1}-b_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{b_i}-n+1\right)+b_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}-n\right)\geq 0,$$

因为，由 AM-GM 不等式，对于所有 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，有

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_k}{b_k}\geq k\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\cdots a_k}{b_1b_2\cdots b_k}}\geq k\text{。}$$

例 5.1.3 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数序列，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k\geq\sqrt{k}\quad\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 证明下列不等式

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$ （USA MO 1994）

证明：不失一般性，假设 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$。对于 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，设 $b_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$，我们将首先证明

$$2\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq\sum_{i=1}^{n}x_ib_i$$

以及

$$2\sum_{i=1}^{n}x_ib_i\geq\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

由 Abel 公式，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(2x_i-b_i)=(x_1-x_2)(2x_1-b_1)+(x_2-x_3)(2x_1+2x_2-b_1-b_2)+\cdots$$

$$+(x_{n-1}-x_n)\left(2\sum_{i=1}^{n-1}x_i-\sum_{i=1}^{n-1}b_i\right)+x_n\left(2\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$$

由于 $x_k\geq x_{k+1}\quad\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$，所以我们只需证明 $2\sum_{i=1}^{n}x_i\geq\sum_{i=1}^{n}b_i$

由题设条件，只需证明

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}\le 2\sqrt{k}$$

然而，最后的不等式是显然成立的，因为

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}\le\sum_{i=1}^{k}\frac{2}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}}=2\sum_{i=1}^{k}\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)=2\sqrt{k}$$

这也可以由 Abel 公式，

$$\sum_{i=1}^{n}b_i(2x_i-b_i)=(b_1-b_2)(2x_1-b_1)+\cdots+(b_{n-1}-b_n)\left(2\sum_{i=1}^{n-1}x_i-\sum_{i=1}^{n-1}b_i\right)+$$

$$+b_n\left(2\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$$

$b_n\ge b_{k+1},\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$，所以所有项均为正。

例 5.1.4 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是实数，且满足

$$a_1\ge\frac{a_1+a_2}{2}\ge\cdots\ge\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$
$$b_1\ge\frac{b_1+b_2}{2}\ge\cdots\ge\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}。$$

证明下列不等式

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)$$

（改进的 Chebyshev 不等式）

证明：对于 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们记 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$， $b_{n+1}=0$，由 Abel 公式，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i+1})S_i=\sum_{i=1}^{n}i(b_i-b_{i+1})\left(\frac{S_i}{i}\right)$$

再次根据 Abel 公式，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\left(S_1-\frac{S_2}{2}\right)(b_1-b_2)+\left(\frac{S_2}{2}-\frac{S_3}{3}\right)(b_1+b_2-2b_3)+\cdots$$

$$+\left(\frac{S_{n-1}}{n-1}-\frac{S_n}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}b_i-(n-1)b_n\right)+\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$$

由题设，可得 $\frac{S_1}{1}\ge\frac{S_2}{2}\ge\cdots\ge\frac{S_n}{n}$，所以，只需证明

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \ge kb_{k+1}\ \forall k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$$

这可直接由题设条件得到

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_i \ge \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} b_i$$

例 5.1.5 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数，满足 $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge x_{n+1}=0$，证明下列不等式

$$\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\le\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_{i+1}}\right)$$（Romania MO and Singapore MO）

证明：记 $c_i=\sqrt{i}-\sqrt{i-1}, a_i=\sqrt{x_i}$，则不等式变成

$$\left(a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\right)^2\ge a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

假设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正数，且满足 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$ 以及 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$（序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 成比例）。我们只需证明

$$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\ge a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

由 Abel 公式，上面的不等式可以变形为

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(c_i-b_i)\ge 0\Leftrightarrow(a_1-a_2)(c_1-b_1)+(a_2-a_3)(c_1+c_2-b_1-b_2)+\cdots$$

$$+(a_{n-1}-a_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_i-\sum_{i=1}^{n-1}b_i\right)+a_n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\ge 0$$

这是成立的，因为对于 $k=1,2,\cdots,n$，我们有

$$\sum_{i=1}^{k}c_i-\sum_{i=1}^{k}b_i=\sqrt{k}-\sum_{i=1}^{k}b_i\ge\sqrt{k}-\sqrt{k\left(\sum_{i=1}^{k}b_i^2\right)}\ge 0$$

例 5.1.6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$ 是实数，且满足

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2\le b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2, k=1,2,\cdots,n$，证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n\le b_1+b_2+\cdots+b_n$

证明：我们用归纳法来证明这个问题。当$n=1$是显然的。假设问题对n 是成立的，我们将证明它对$n+1$也是成立的。实际上，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n+1}^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{n+1}^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n+1}b_{n+1}\right)^2$$

由假设$\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2\le\sum_{i=1}^{n+1}b_i^2$，所以$\sum_{i=1}^{n+1}b_i^2\ge\sum_{i=1}^{n+1}a_ib_i$。根据 Abel 公式，

$$0\le\sum_{i=1}^{n+1}b_i(b_i-a_i)=(b_1-b_2)(b_1-a_1)+(b_2-b_3)(b_1+b_2-a_1-a_2)+\cdots$$

$$+(b_n-b_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n}b_i-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+b_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1}b_i-\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)$$

在上面的和式中，每一个排除了最后一个非正数（因为$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们有$b_k\le b_{k+1}$

以及$\sum_{i=1}^{k}b_i\ge\sum_{i=1}^{k}a_i$，由归纳假设）。所以，我们必定有

$$b_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1}b_i-\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)\ge0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n+1}b_i\ge\sum_{i=1}^{n+1}a_i$$

注意：下列结果属于 Le Huu Dien Khue，是更强的结果，它可以直接由 Abel 公式得到（不用归纳法）

★设$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$是实数，且满足

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2\le b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2\ k=1,2,\cdots,n$，证明

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\ge\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}$$

例 5.1.7 设$-1<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$和$y_1<y_2<\cdots<y_n$是实数，且满足

$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1^{13}+x_2^{13}+\cdots+x_n^{13}$，证明

$x_1^{13}y_1+x_2^{13}y_2+\cdots+x_n^{13}y_n<x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$（Russia MO 2000)

证明：根据 Abel 公式，我们注意到

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i^{13}-x_i)=(y_1-y_2)(x_1^{13}-x_1)+(y_2-y_3)(x_1^{13}+x_2^{13}-x_1-x_2)+\cdots$$

$$+(y_{n-1}-y_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{13}-\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)+y_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{13}-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

因为 $y_k \le y_{k+1}\ k=1,2,\cdots,n$ ，于是我们只需证明

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{13} \ge \sum_{i=1}^{k} x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i(x_i^{12}-1) \ge 0$$

应用 Abel 公式，可得

$$\sum_{i=1}^{k} x_i(x_i^{12}-1)=(x_1-x_2)(x_1^{12}-1)+(x_2-x_3)(x_1^{12}+x_2^{12}-2)+\cdots$$

$$+(x_{k-1}-x_k)\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i^{12}-k+1\right)+x_k\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i^{12}-k\right)$$

注 意 到 $x_i \in[-1,1], k=1,2,\cdots,n$ ， 所 以 $\sum_{i=1}^{j} x_i^{12} \le j\ (j=1,2,\cdots,k)$ ， 然 而 ， 由 于 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k$，上面和式中的每一项除了最后一项是非负。如果 $x_k \le 0$，则得证。否则，假定 $x_k \ge 0$，则 $x_i \ge 0, i \ge k+1$。这就意味着（由假设）

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i^{13} \le \sum_{i=k+1}^{n} x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i^{13} \ge \sum_{i=1}^{k} x_i$$

上面的问题使用 Abel 公式来解决有点不同寻常。它的优势显示在序列不等式方面，而其它方法对此却无能为力。Abel 公式在证明一个重要的不等式也显示了其优势，这就是下面我们要讨论的排序不等式。

5.2 排序不等式

定理 9、（排序不等式）设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是两个增加的实数列。假定 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意一个排列，则

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \ge a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\cdots+a_nb_{i_n}$$

如果序列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是增加的，而序列$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是减少的，则上面的不等式改变方向。

证明：注意到$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$和$b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$，所以根据 Abel 公式，

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n}a_kb_{i_k}=\sum_{k=1}^{n}a_k(b_k-b_{i_k})=(a_1-a_2)(b_1-b_{i_1})+(a_2-a_3)(b_1+b_2-b_{i_1}-b_{i_2})+\cdots$$

$$+(a_{n-1}-a_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1}b_k-\sum_{k=1}^{n-1}b_{i_k}\right)+a_n\left(\sum_{k=1}^{n}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_{i_k}\right)\ge 0$$

因为对所有$k=1,2,\cdots,n$，我们有$\sum_{j=1}^{k}b_j\le\sum_{j=1}^{k}b_{i_j}$

当序列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是增加而$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$减少的情况的证明是类似的。

实际上，它可以帮助我们以单一的方式证明 AM-GM 不等式。

例 5.2.1 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正实数，证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

证明：不失一般性，假定$a_1a_2\cdots a_n=1$（规范化），设$a_1=\dfrac{x_1}{x_2},a_2=\dfrac{x_2}{x_3},\cdots,a_{n-1}=\dfrac{x_{n-1}}{x_n}$，

$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，则$a_n=\dfrac{x_n}{x_1}$。不等式变成

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\ge n$$

注意到如果序列$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是增加的，则序列$\left(\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\cdots,\dfrac{1}{x_n}\right)$是减少的。由排序不等式，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{x_{i+1}}\ge\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{x_i}=n$$

对于循环不等式，排序不等式似乎非常有效。有时排序不等式并不容易使用，因为它隐藏了变量的正常次序而变的杂乱无章。意识到在一个问题中使用排序不等式比使用其他不等式需要多一点的直观能力。希望下面的问题能增强这种能力。

例5.2.2 设a,b,c是三角形的三边长，证明

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$（IMO 1984）

证明：因为a,b,c是三角形的三条边，$a\ge b$意味着$a^2+bc\ge b^2+ca$，依据这个性质，我们推断，如果$a\ge b\ge c$，则$a^2+bc\ge b^2+ca\ge c^2+ab$；另外，$\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}\le\frac{1}{c}$。根据排序不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{a}\le\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{c}\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{bc}{a}\le\sum_{cyc}\frac{a^2}{c}\Rightarrow\sum_{cyc}a^2b^2\le\sum_{cyc}a^3b$$

这等价于我们所需的结果。等号成立条件是$a=b=c$

例5.2.3 设$a,b,c>0$，证明：$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c$

证明：对序列(a^2,b^2,c^2)和$\left(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right)$（如果$a\ge b\ge c$，则两序列是增加的）应用排序不等式，我们得到

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}\ge\sum_{cyc}\frac{b^2}{b+c}$$

这就意味着

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{b+c}\ge\sum_{cyc}\frac{b^2}{b+c}+\sum_{cyc}\frac{bc}{b+c}=\sum_{cyc}a$$

例5.2.4 设$a,b,c>0$，证明：

$$\frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$（Mathlink Contest）

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}\right)\ge\sum_{cyc}\frac{a}{a+c}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ac}{b(b+c)}\ge\sum_{cyc}\frac{a}{a+c}$$

考虑表达式$P=\sum_{cyc}\frac{ac}{b(b+c)},Q=\sum_{cyc}\frac{bc}{a(b+c)}$。由排序不等式，我们有

$$Q=\sum_{cyc}\frac{bc}{a}\cdot\frac{1}{b+c}\le\sum_{cyc}\frac{ac}{b}\cdot\frac{1}{b+c}=P$$

然而，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$PQ\ge\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a+c}\right)^2$$

因此（因为$P\ge Q$），我们有$P\ge\sum_{cyc}\frac{a}{a+c}$。

等号当且仅当$a=b=c$时成立。

注意：这个不等式可以用另外一个好方法来证明。事实上，注意到对所有的正数$a,b,c>0$，我们有

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}$$

不失一般性，假设$c=\min(a,b,c)$，不等式等价于

$$\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{(a+c)(b+c)}\right](a-b)^2+\left[\frac{1}{ac}-\frac{1}{(a+c)(a+b)}\right](a-c)(b-c)\ge 0$$

这是显然的，因为$c=\min(a,b,c)$

例5.2.5 设$a,b,c>0$，证明：

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\le\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b)\left[a(b+c)+bc\right]}{b+c}\le\left(a+b+c\right)^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}a(a+b)+\sum_{cyc}\frac{bc(a+b)}{b+c}\le(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{bc}{b+c}\right)\left(a+b\right)\le ab+bc+ca$$

这最后的不等式是成立的，由排序不等式，如果$x\ge y\ge z$，则

$$x+y\ge z+x\ge y+z;\quad \frac{xy}{x+y}\ge\frac{xz}{z+x}\ge\frac{yz}{y+z}$$

等号当$a=b=c$时成立。

例5.2.6 设$a,b,c,d\ge 0$且满足$a+b+c+d=4$，证明

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\le 4$$（Song Yoon Kim）

证明：假设(x,y,z,t)是(a,b,c,d)的一个排列，满足$x\ge y\ge z\ge t$，则$xyz\ge xyt\ge xzt\ge yzt$。

由排序不等式，我们推断

$$x\cdot xyz+y\cdot xyt+z\cdot xzt+t\cdot yzt\geq a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab$$

根据 AM-GM 不等式，我们也有

$$x\cdot xyz+y\cdot xyt+z\cdot xzt+t\cdot yzt=(xy+zt)(xz+yt)\leq\frac{1}{4}\left(xy+xz+yt+zt\right)^2\leq 4$$

因为 $xy+xz+yt+zt=(x+z)(y+t)\leq\frac{1}{4}\left(x+y+z+t\right)^2=4$。等号成立的条件是

$a=b=c=1$或者 $a=2,b=c=1,c=0$ 或其排列。

例5.2.7 设$a,b,c,d>0$，证明

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c+d}\right)^2+\left(\frac{c}{c+d+a}\right)^2+\left(\frac{d}{d+a+b}\right)^2\geq\frac{4}{9}$$ （Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，我们可以假设$a+b+c+d=1$。又设(x,y,z,t)是(a,b,c,d)的一个排列，满足$x\geq y\geq z\geq t$，则$\frac{1}{x+y+z}\geq\frac{1}{x+y+t}\geq\frac{1}{x+z+t}\geq\frac{1}{y+z+t}$。

由排序不等式，我们推断

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2\geq\frac{x^2}{(x+y+z)^2}+\frac{y^2}{(x+y+t)^2}+\frac{z^2}{(x+z+t)^2}+\frac{t^2}{(y+z+t)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{y^2}{(1-z)^2}+\frac{z^2}{(1-y)^2}+\frac{t^2}{(1-x)^2}$$

记 $m=x+t, n=xt, s=\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{t^2}{(1-x)^2}$，当然，我们仅需考虑 $s\le\frac{1}{2}$ 的情况。如果 $m=1$，则 $y=z=0$，结果是显然的。因为

$$\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{y^2}{(1-z)^2}+\frac{z^2}{(1-y)^2}+\frac{t^2}{(1-x)^2}=\frac{x^2}{x^2}+\frac{t^2}{t^2}=2$$

否则，我们有 $m<1, s\le\frac{1}{2}$。简短的计算之后，我们有

$$n^2(2-s)-2n(m-1)(2m-1-s)+(m-1)^2(m^2-s)=0$$

这个恒等式表明函数 $f(\alpha)=\alpha^2(2-s)-2\alpha(m-1)(2m-1-s)+(m-1)^2(m^2-s)$

至少有一个实数根。那就意味着

$$\Delta_f=(m-1)^2(2m-1-s)^2-(2-s)(m-1)^2(m^2-s)\ge 0$$

或等价于

$$s\ge\frac{-2m^2+4m-1}{(2-m)^2}$$

类似地，我们记 $p=y+z, t=\frac{y^2}{(1-z)^2}+\frac{z^2}{(1-y)^2}$。如果 $t\ge\frac{1}{2}$ 或 $p=1$，不等式是显然的。否则，

$$t\ge\frac{-2p^2+4p-1}{(2-p)^2}=\frac{1-2m^2}{(m+1)^2}$$

于是，剩下的需要证明

$$\frac{-2m^2+4m-1}{(2-m)^2}+\frac{1-2m^2}{(m+1)^2}\geq\frac{4}{9}\Leftrightarrow\frac{(2m-1)^2(11+10m-10m^2)}{(2-m)^2(m+1)^2}\geq 0$$

这是显然的，等号成立的条件是$a=b=c=d$

第六章 平衡系数法

在许多问题中，为使用经典不等式而对项进行分组并不是件容易的事情，尤其是非对称不等式。在这种情况下，相似项的系数通常并不相等，因此我们不仅要正确使用基本不等式，而且还要兼顾相等的情况以维护整个解决方案。应如何处理这个事情呢？通常，我们必须使用额外的变量来求解方程（组）以找出原始最终变量。这种方法称为平衡系数法。

为了弄清这一重要方法是如何工作的，让我们看看下面一个简单的例子。

例6.0.8 设$x,y,z>0$，且满足$xy+yz+zx=1$。证明：

$$10x^2+10y^2+z^2\geq 4$$

证明：在我们给出一个普遍和自然的解决方案之前，让我们先来看一个漂亮的、简短的、有点神奇的解决方案。由 AM-GM 不等式，我们有

$$2x^2+2y^2\geq 4xy,\quad 8x^2+\frac{1}{2}z^2\geq 4xz,\quad 8y^2+\frac{1}{2}z^2\geq 4yz$$

将这些不等式相加，我们有

$$10x^2+10y^2+z^2\geq 4(xy+yz+zx)=4$$

等号成立的条件

$$\begin{cases}x=y\\4x=z\\4y=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

这个解法的确需要试验。提出某些问题：为什么我们分解$10=2+8$？是幸运的还是偶然的？还是显然的？如果我们把10分解成其它方式，例如$10=3+7$或者$10=4+6$，我们还能得到最终的结果吗？事实上，其它每一种分解是无效的，分解成$10=2+8$不是靠运气。毫不奇怪，我们已经使用了隐藏在这个显而易见解决方案的平衡系数法。让我们继续运用这种方法的两个主要的手段：由 AM-GM 不等式平衡系数和由 Cauchy-Schwarz 不等式平衡系数。

6.1 由 AM-GM 不等式平衡系数

不管你多么熟悉平衡系数，系数混沌的非对称不等式总是引起不少困难。因此熟练地使用这种方法可以帮助避免许多计算。下列一般的证明将解释我们是如何得到例6.0.8的解法。

例6.1.1 设 k 是一个正实数。求下列表达式的最小值

$$k(x^2+y^2)+z^2$$

其中$x,y,z>0$，且满足$xy+yz+zx=1$

解：我们分解$k=l+(k-l)\ (0\le l\le k)$，并应用 AM-GM 不等式，得下列不等式

$$lx^2+ly^2\ge 2lxy$$

$$(k-l)x^2+\frac{1}{2}z^2\ge\sqrt{2(k-l)}xz$$

$$(k-l)y^2+\frac{1}{2}z^2\ge\sqrt{2(k-l)}yz$$

组合这些结果，我们得到

$$k(x^2+y^2)+z^2\ge 2lxy+\sqrt{2(k-l)}(xz+yz)$$

根据题设条件$xy+yz+zx=1$，所以，我们求出数l满足条件$2l=\sqrt{2(k-l)}$。简单的计

算，得 $l=\dfrac{-1+\sqrt{1+8k}}{4}$，这样，我们最终的结果为

$$k(x^2+y^2)+z^2 \ge \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

注意：下列更多的一般的问题，可以使用相同的方法解决。

★设 $x,y,z>0$，且满足 $xy+yz+zx=1$， k,l 是两个正常数。则下列表达式的最小值

$$kx^2+ly^2+z^2$$

是 $2t_0$，这里 t_0 是下列方程的唯一正根。

$$2t^3+(k+l+1)t-kl=0$$

采用相同的方法，我们将解决一些有关的中间变量的其他问题。

例6.1.2 设实数 x,y,z,t 满足条件 $xy+yz+zt+tx=1$，求下列表达式的最小值

$$5x^2+4y^2+5z^2+t^2$$

解：我们选择正数 $l<5$，并应用 AM-GM 不等式，有下列不等式

$$lx^2+2y^2 \ge 2\sqrt{2l}\,xy,$$

$$2y^2+lz^2 \ge 2\sqrt{2l}\,yz,$$

$$(5-l)z^2+\frac{1}{2}t^2 \ge \sqrt{2(5-l)}\,zt,$$

$$\frac{1}{2}t^2+(5-l)x^2 \ge \sqrt{2(5-l)}tx 。$$

将上述不等式相加，我们得到

$$5x^2+4y^2+5z^2+t^2 \ge 2\sqrt{2l}(xy+tz)+\sqrt{2(5-l)}(zt+tx)$$

条件 $xy+yz+zt+tx=1$，建议我们选择一个数 $l\ (0\le l\le 5)$，满足 $2\sqrt{2l}=\sqrt{2(5-l)}$，简单的计算，得到 $l=1$，因此表达式 $5x^2+4y^2+5z^2+t^2$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$ 。

注意：下列一般的问题可以采用相同的方法解决。

★假设 x,y,z,t 是任意实数。证明

$$x^2+ky^2+z^2+lt^2 \ge \sqrt{\frac{2kl}{k+l}}(xy+yz+zx+tx)$$

例6.1.3 设 $x,y,z>0$，且满足 $x+y+z=3$，求下列表达式的最小值

$$x^2+y^2+z^3 \qquad \text{（Pham Kim Hung）}$$

解：设 a 和 b 是两个正实数。由 AM-GM 不等式，我们有

$$x^2+a^2 \ge 2ax$$

$$y^2+a^2 \ge 2ay ,$$

$$z^3+b^3+b^3 \ge 3b^2z 。$$

组合这些不等式，得到 $x^2+y^2+z^3+2(a^2+b^3)\ge 2a(x+y)+3b^2z$， 等号成立的条件是

$x=y=a, z=b$。此时，我们必有 $2a+b=x+y+z=3$（*）。然而，为了使表达式

$2a(x+y)+3b^2z$ 表示为 $x+y+z$ 的形式，我们必有 $2a=3b^2$（**）。根据（*）（**），我们很容易求出

$$b=\frac{-1+\sqrt{37}}{6}, a=\frac{3-b}{2}=\frac{19-\sqrt{37}}{12}$$

因此，表达式 $x^2+y^2+z^3$ 的最小值就是 $6a-(2a^2+b^3)$，这里的 a,b 由上述式子决定。

通常，采用这种方法，处理困难的问题，我们必须构建较多的方程，并求解之。这个工作（解方程（组））可以很复杂，但不可避免。下面的例子将展示这种情况。

例6.1.4 设 a,b,c 是三个正常数，x,y,z 是三个正的变量，且满足 $ax+by+cz=xyz$，证明：如果存在一个唯一正数 d 满足 $\frac{2}{d}=\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}$，则表达式 $x+y+z$ 的最小值是

$$\sqrt{d(d+a)(d+b)(d+c)}$$

（Nguyen Quoc Khanh,VMEO 2006）

证明：为了避免复杂的条件 $ax+by+cz=xyz$，我们将求下列齐次表达式的最小值

$$\frac{(ax+by+cz)(x+y+z)^2}{xyz}$$

当然，如果上述表达式的最小值是 C，则表达式 $x+y+z$ 的最小值也等于 C。

假设 m,n,p,m_1,n_1,p_1 是任意正实数，且满足 $m+n+p=am_1+bn_1+cp_1=1$。由加权 AM-GM 不等式，我们有

$$x+y+z=m\left(\frac{x}{m}\right)+n\left(\frac{y}{n}\right)+p\left(\frac{z}{p}\right)\geq\frac{x^m y^n z^p}{m^m n^n p^p}$$

$$ax+by+cz=am_1\left(\frac{x}{m_1}\right)+bn_1\left(\frac{y}{n_1}\right)+cp_1\left(\frac{z}{p_1}\right)\geq\frac{x^{am_1}y^{bn_1}z^{cp_1}}{m_1^{am_1}n_1^{bn_1}p_1^{cp_1}}$$

$$\Rightarrow(ax+by+cz)(x+y+z)^2\geq\frac{x^{am_1+2m}y^{bn_1+2n}z^{cp_1+2p}}{m^{2m}n^{2n}p^{2p}m_1^{am_1}n_1^{bn_1}p_1^{cp_1}}$$

等号成立的条件是$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p},\frac{x}{m_1}=\frac{y}{n_1}=\frac{z}{p_1}$。此外，我们还需要的条件

$am_1+2m=bn_1+2n=cp_1+2p=1$。记$k=\frac{2m}{m_1}=\frac{2n}{n_1}=\frac{2p}{p_1}$，则

$$2am+2bn+2cp=k,\quad 2m\left(\frac{a}{k}+1\right)=2n\left(\frac{b}{k}+1\right)=2p\left(\frac{c}{k}+1\right)=1$$

这些条件组合起来，有

$$\frac{ak}{a+k}+\frac{bk}{b+k}+\frac{ck}{c+k}=k\Leftrightarrow\frac{1}{a+k}+\frac{1}{b+k}+\frac{1}{c+k}=\frac{2}{k}$$

因为d 是唯一的，我们必有$k=d$。经过简短的计算，我们得到

$$m^{2m}n^{2n}p^{2p}m_1^{am_1}n_1^{bn_1}p_1^{cp_1}=d^{-1}(d+a)^{-1}(d+b)^{-1}(d+c)^{-1}$$

即得我们所需结果。

注意：这个不等式是从 Vietnam TST 2001由 Tran Nam Dung 提出的下列问题产生的。

★设a,b,c是正实数，且满足$12\geq 21ab+2bc+8ca$，证明：

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq\frac{15}{2}$$

在某些情况下，求解方程组以求出中间变量并不是实际的计算。有时，它完全取决于你自己的直觉，因为解这些方程找到根是不可能的。但你可以猜测到这些根。这就是在下面的例子中我要强调的。

例6.1.5 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数，证明

$$x_1+\sqrt{x_1x_2}+\cdots+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq e(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

证明：假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，根据 AM-GM 不等式，我们有

$$\sqrt[k]{(a_1x_1)(a_2x_2)\cdots(a_kx_k)}\leq\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k}{k}$$

$$\Rightarrow\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}\leq\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot\frac{a_i}{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}}$$

对 $k=1,2,\cdots,n$ 构建类似的不等式，我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}\leq\sum_{k=1}^{n}a_kx_kr_k$$

这里 $r_k=\dfrac{1}{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}}+\dfrac{1}{(k+1)\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}}+\cdots+\dfrac{1}{n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$

最终，我们将确定数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，以满足对于 $k=1,2,\cdots,n$，有 $a_kr_k\leq e$。

r_k 的形式，建议我们选择 a_k 以使 $\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$ 得到简化。直观地说，我们选择 $a_1=1$，

$a_k = \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$，使用这些值我们有 $\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} = k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$。所以，对于所有 $k > 1$，我们有

$$a_k r_k = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\le \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \le e$$

对于 $k = 1$，我们有

$$a_1 r_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 2 < e$$

6.2 由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Holder 不等式平衡系数

Cauchy-Schwarz 不等式和 Holder 不等式与 AM-GM 不等式之间最大的区别是等号成立的条件。这个特性导致了这些不等式平衡系数的方式的不同。让我们考虑下面的例子以获得一个概述。

例6.2.1 设 x, y, z 是三个正实数，且满足 $x + y + z = 3$，求下列表达式的最小值

$$x^4 + 2y^4 + 3z^4$$

解：设 a, b, c 是三个正实数，且满足 $a + b + c = 3$。根据 Holder 不等式，我们得到

$$(x^4 + 2y^4 + 3z^4)(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3 \ge \left(a^3 x + 2b^3 y + 3c^3 z\right)^4 \qquad (*)$$

我们选择 a, b, c，满足 $a^3 = 2b^3 = 3c^3 = k^3$。则我们有

$$x^4+2y^4+2z^4 \ge \frac{k^{12}(x+y+z)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3} = \frac{(3k^3)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3} \qquad (**)$$

等号在（*）中成立的条件是$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$。由于$x+y+z=a+b+c=3$，我们得到

$a=x,b=y,c=z$，于是，$k=\frac{3}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$以及$a=k,b=\sqrt[3]{2}k,c=\sqrt[3]{3}k$。这样表达式

$x^4+2y^4+3z^4$的最小值由（**）给出。

注意：采用相同的方法可以求解下面的一般问题。

★设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正实数，且满足$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正的常数，对每一个正整数m，求下列表达式的最小值。

$$a_1x_1^m+a_2x_2^m+\cdots+a_nx_n^m$$

由 Holder 不等式，我们找到这个表达式的最小值是na^{m-1}，其中

$$a=\frac{n}{\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}}+\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}}$$

例6.2.2 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正实数，证明：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

证明：设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正实数（最后确定值）。根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{x_k^2}{a_k}\right)\ge(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2$$

$$\Rightarrow\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\le\frac{k}{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2}\left(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n}\right)$$

对于$k=1,2,\cdots,n$构建类似的不等式，并将它们相加，我们有

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\le\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}+\cdots+\frac{c_n}{a_n},$$

这里$c_k, k=1,2,\cdots,n$，由下式确定

$$c_k=\frac{kx_k^2}{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2}+\frac{(k+1)x_k^2}{(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})^2}+\cdots+\frac{nx_k^2}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}$$

我们必须找到x_k，以满足$c_k\le 2\ (1\le k\le n)$。我们选择$x_k=k$，则

$$c_k=k^2\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{j}{(1+2+\cdots+j)^2}\right)=4k^2\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j(j+1)^2}\right)\le 2k^2\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}\right)$$

$$=2k^2\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j^2}-\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{(j+1)^2}\right)=2k^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<2$$

证毕。

例6.2.3 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正实数，证明

$$x_1^2+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2\le 4\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)$$

证明：设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正实数（最后确定值）。根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\left(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{x_k^2}{a_k}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_k)\ge(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2$$

不等式可以改写成

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)^2\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k^2a_1}x_1^2+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k^2a_2}x_2^2+\cdots+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k^2a_k}x_k^2$$

对于$k=1,2,\cdots,n$，构建类似的不等式，并将它们相加，我们有

$$x_1^2+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2\le\gamma_1x_1^2+\gamma_2x_2^2+\cdots+\gamma_nx_n^2$$

这里每个系数γ_k由下式确定

$$\gamma_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k^2a_k}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{(k+1)^2a_k}+\cdots+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^2a_k}$$

如果序列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$满足$\gamma_k\le 4\,(k=1,2,\cdots,n)$，则证明完成。我们选择$a_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$，则$a_1+a_2+\cdots+a_k=\sqrt{k}$。在这种情况下，

$$\gamma_k=\frac{1}{a_k}\left(\frac{1}{k^{3/2}}+\frac{1}{(k+1)^{3/2}}+\cdots+\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

注意到$\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\sqrt{k-\frac{1}{2}}+\sqrt{k+\frac{1}{2}}\right)\le 2k^{3/2}$，所以

$$\frac{1}{k^{3/2}}\le\frac{\sqrt{k+\frac{1}{2}}-\sqrt{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}$$

我们得到

$$\gamma_k=\frac{1}{a_k}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j^{3/2}}\right)\le\frac{1}{a_k}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{\sqrt{j-\frac{1}{2}}}-\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}\right)\le\frac{2}{a_k\sqrt{k-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}}<4$$

注意：以下类似的结果作为一个练习。

★设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正实数，证明：

$$x_1^3+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^3\le\frac{27}{8}\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3\right)$$

例6.2.4 求对任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$， 下列不等式都成立的最小的 t。

$$x_1^2+\left(x_1+x_2\right)^2+\cdots+\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^2\le t\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)$$（MYM 2004）

解：设$c_1,c_2,\cdots,c_n$是正实数（在后面将选择）根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 \le S_k\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{c_i}\right) \qquad (*)$$

这里$S_1, S_2, \cdots, S_n$，由下式确定

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

根据（*），我们有（对$k = 1, 2, \cdots, n$，将所有结果相加）

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} \frac{S_j}{c_j}\right) x_i^2$$

我们选择系数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，满足

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{c_1} = \frac{S_2 + \cdots + S_n}{c_2} = \cdots = \frac{S_n}{c_n} = t$$

经过一番计算，我们有

$$c_i = \sin i\alpha - \sin(i-1)\alpha, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

这里 $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$，于是 $t = \dfrac{1}{4\sin^2 \dfrac{\pi}{2(2n+1)}}$，我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 \le t\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \frac{1}{4\sin^2 \dfrac{\pi}{2(2n+1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

第七章 导数及其应用

现在我们将讨论最重要的数学概念之一导数。导数概念的建立对数学的发展产生了巨大影响，你将会明白导数广泛而深入地影响当今的不等式领域。因此有必要让你理解并掌握这个概念，甚至成为一个专家。

7.1、单变量函数的导数

导数的主要目的是帮助检查单变量函数，利用导数可以找到一个单变量函数的最大值或最小值。这就是为何我们认为每一个单变量不等式或者是通过导数来解决或不可能得到解决的原因。

单变量函数的导数的应用并不局限于一个变量的不等式。事实上，导数可以帮助你解决许多多元不等式问题，请看下面的例子。

例7.1.1 如果 x 是一个正数，求表达式 x^x 的最小值。

解：考虑函数 $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$。其导数 $f'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)$。显然，

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$，如果 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$，则 $f(x)$ 是减少的；如果 $x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$，

则 $f(x)$ 是增加的。因此

$$\min_{x\in R} f(x)=f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$$

例7.1.2 设 a,b,c 是正实数，证明

$$\frac{a^3}{b^3+c^3}+\frac{b^3}{c^3+a^3}+\frac{c^3}{a^3+b^3}\ge\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

证明：我们来证明一个一般的问题。设实数 $s\ge t\ge 0$，则

$$\frac{a^s}{b^s+c^s}+\frac{b^s}{c^s+a^s}+\frac{c^s}{a^s+b^s}\ge\frac{a^t}{b^t+c^t}+\frac{b^t}{c^t+a^t}+\frac{c^t}{a^t+b^t}$$

于是，只需证明下列函数是增函数

$$f(x)=\frac{a^x}{b^x+c^x}+\frac{b^x}{c^x+a^x}+\frac{c^x}{a^x+b^x}$$

实际上，经过简短的计算，我们有

$$f'(x)=\sum_{cyc}\frac{a^x(b^x+c^x)\ln a-a^x(b^x\ln b-c^x\ln c)}{(b^x+c^x)^2}$$

$$=\sum_{cyc}\frac{a^xb^x(a^x-b^x)(\ln a-\ln b)(2c^x+a^x+b^x)}{(a^x+b^x)^2(b^x+c^x)^2}\geq 0$$

注意：用类似的方法可以解决下列一般问题

★设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，证明对所有实数 $s\geq t\geq 0$，我们有

$$\left(\frac{a_1}{1-a_1}\right)^s+\left(\frac{a_2}{1-a_2}\right)^s+\cdots+\left(\frac{a_n}{1-a_n}\right)^s\geq\left(\frac{a_1}{1-a_1}\right)^t+\left(\frac{a_2}{1-a_2}\right)^t+\cdots+\left(\frac{a_n}{1-a_n}\right)^t$$

例7.1.3 设 a,b,c,d 是正实数，证明

$$\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}\geq\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}$$

证明:考虑函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

这里

$$A=\sum_{sym}a,\ B=\sum_{sym}ab,\ C=\sum_{sym}abc,\ D=abcd$$

因为方程 $f(x)=0$ 有4个正实数根，我们有（由 Rolle 定理）方程 $f'(x)=0$ 有3个正实数根，记这些根分别为 $m,n,p>0$，则

$$f'(x)=4(x-m)(x-n)(x-p)=4x^3-4(m+n+p)x^2+4(mn+np+pm)x-4mnp$$

注意到，我们也有 $f'(x)=4x^3-3Ax^2+2Bx-C$，所以 $B=2(mn+np+pm), C=4mnp$

由 AM-GM 不等式，我们得到

$$\sqrt{\frac{B}{6}}=\sqrt{\frac{mn+np+pm}{3}}\ge\sqrt[3]{mnp}=\sqrt[3]{\frac{C}{4}}$$

注意：假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数，$d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是由下式定义的多项式

$$d_k=\frac{1}{C_n^k}\sum_{sym}x_1x_2\cdots x_k$$

采用相同的方法，我们可以证明下列结果。

◆（Newton 不等式）对所有正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$d_{k+1}d_{k-1}\le d_k^2$$

◆（Maclaurin 不等式）对所有正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$d_1\ge\sqrt{d_2}\ge\cdots\ge\sqrt[k]{d_k}\ge\cdots\ge\sqrt[n]{d_n}$$

例7.1.4 如果实数 a,b,c 满足条件 $a\le b\le c, a+b+c=6, ab+bc+ca=9$，证明:

$0 \le a \le 1 \le b \le 3 \le c \le 4$（British MO）

证明：记 $p = abc$，考察函数

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 6x^2 + 9x - p$$

我们有 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$。因此 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1,3$

因为 $f(x)$ 有三个根 $a \le b \le c$，我们有

$$1 \le b \le 3, \quad f(1)f(3) \le 0$$

注意到 $f(1) = f(4) = 4 - p$ 以及 $f(0) = f(3) = -p$，所以我们有 $0 \le p \le 4$。这就意味着

$f(1) = f(4) \ge 0$ 以及 $f(0) = f(3) \le 0$。如果 $f(0) = f(3) = 0$，则 $a = 0, b = c = 3$，所需结果是显然的。如果 $f(1) = f(4) = 0$，则 $a = b = 1, c = 4$，所需结果也是显然的。否则，我们必有 $f(0)f(1) < 0,\ f(1)f(3) < 0,\ f(3)f(4) < 0$，因此 $a \in (0,1), b \in (1,3), c \in (3,4)$

证毕

7.2 多元函数的导数

如果你觉得一元函数很容易了，如果你觉得它们的极值总是可以很容易使用导数找到，那么，让我们看看多个变量的函数。尽管多变量函数的极值更难找到，我们接触这些问题同样可以使用单变量函数。如果有一些条件限制的变量，尝试改变和消除这些条件，并作出新的表达形式，而使每一个变量是相互独立的，然后找一个单变量函数并求出函数的极值。让我们来看看下面的例子来说明该方法。

例7.2.1 设 a,b,c 是正实数，证明

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

证明：不失一般性，假设$a \ge b \ge c$。考虑 a 的函数：

$$f(a)=a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)$$

我们有

$$f'(a)=3a^2+3bc-2ab-b^2-2ac-c^2$$

注意到 $f''(a)=6a-2b-2c \ge 0$ 以及 $f''(b) \ge 0$，所以 $f'(a) \ge f'(b)=c(b-c) \ge 0$。

即 $f'(x) \ge f'(b) \ge 0, (x \in (b,a))$，因为 f'' 是线性函数，因此在(b, a)上为正。

这就意味着 $f(a) \ge f(b)=c(b-c)^2 \ge 0$，证毕。

例7.2.2 设a,b,c,d是正实数，且满足

$$2(ab+bc+cd+ac+bd)+abc+bcd+cda+dab=16$$

证明下列不等式

$$a+b+c+d \ge \frac{2}{3}\left(ab+bc+cd+da+ac+bd\right)$$ （Viennam MO 1996）

证明：基于例7.1.3类似的原因，我们推断存在三个正数x,y,z，满足下列条件

$$\sum_{sym} a=\frac{4}{3}\sum_{sym} x, \sum_{sym} ab=2\sum_{sym} xy, \sum_{sym} abc=4xyz$$

余下的只需证明，如果$xy+yz+zx+xyz=4$，则$x+y+z\ge xy+yz+zx$

当然，存在两个实数，比如说是x,y，两数都大于1或者都小于1。此时，有

$(x-1)(y-1)\ge 0\Rightarrow xy+1\ge x+y$。我们记$m=x+y,n=xy$，则$z=\dfrac{4-n}{m+n}$。如果$m\ge 4$，则$x+y+z\ge 4\ge xy+yz+zx$。否则，$m-1\le n\le \dfrac{m^2}{4}\le 4$，我们必须证明

$$m+\frac{4-n}{m+n}\ge \frac{(4-n)m}{m+n}+n\Leftrightarrow f(n)=-n^2+n(m-1)+m^2-4m+4\ge 0$$

注意到$f'(n)=-2n+m-1\le -n+m-1\le 0$，所以$f(n)$是减函数，因此

$$f(n)\ge f\left(\frac{m^2}{4}\right)=\frac{(16-m^2)(m-2)^2}{16}\ge 0$$

等号成立的条件是$a=b=c=d=1$。

例7.2.3 设$a,b,c\ge 0$，证明

$$a^3+b^3+c^3+9abc+4(a+b+c)\le 8(ab+bc+ca)$$（Le Trung Kien）

证明：我们记

$$f(b)=b^3+b(4+9ac-8a-8c)+a^3+c^3+4(a+c)-8ac$$

由 AM-GM 不等式，$(a^3+4a)+(c^3+4c)\ge 4a^2+4c^2\ge 8ac$，所以问题在$4+9ac\ge 8(a+c)$得证，等号成立的条件是$a=c=2,b=0$或者$a=b=c=0$。否则，设$x=a+c,y=ac$，则$8x\ge 9y+4$，注意到

$$f'(b)=3b^2-(8x-9y-4)$$，所以 $f'(b)=0\Leftrightarrow b=\sqrt{\dfrac{8x-9y-4}{3}}$

因此

$$f(b)\geq f\left(\sqrt{\frac{8x-9y-4}{3}}\right)=\frac{-2}{3\sqrt{3}}\left(8x-9y-4\right)^{3/2}+x^3+4x-3xy-8y=g(y)$$

因为 $y\leq\dfrac{x^2}{4}$ 和 $y\leq\dfrac{8x-4}{9}$（还有 $x\geq\dfrac{1}{2}$），得到 $y\leq\min\left(\dfrac{x^2}{4},\dfrac{8x-4}{9}\right)=t$

$$g'(y)=3\sqrt{3(8x-9y-4)}-(3x+8)\leq3\sqrt{3(8x-4)}-(3x+8)<0$$

所以 $g(y)$ 是严格递减的。因此 $g(y)\geq g(t)$。如果 $t=\dfrac{8x-4}{9}$，则 $g(t)=x^3+4x-3xt-8t\geq0$

（或者等价于 $a^3+c^3+4(a+c)-8ac\geq0$）。这只需考虑 $t=\dfrac{x^2}{4}$ 及 $g(t)\geq0$。记 $s=\dfrac{x}{2}$，则

不等式 $g\left(\dfrac{x^2}{4}\right)=g\left(s^2\right)\geq0$ 等价于

$$h(s)=2s^3-8s^2+8s-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(16s-9s^2-4\right)^{3/2}\geq0$$

因为 $h'(s)=6s^2-16s+8-(16-18s)\sqrt{\dfrac{16s-9s^2-4}{3}}$，如果 $h'(s)=0$，则我们必有

$\dfrac{8}{9}\leq s\leq\dfrac{8+\sqrt{28}}{9}$ 以及

$$3(2s^2-8s+4)^2=(9-8s)^2(16s-9s^2-4)\Leftrightarrow(s-1)(189s^3-485s^2+372s-76)=0$$

注意到方程$189s^3-485s^2+372s-76=0$在区间$\left[\frac{8}{9},\frac{8+\sqrt{28}}{9}\right]$有一个实根，所以，很容易得到$h(s)\ge h(1)=0$。等号成立的条件是$a=b=c=1$或者$a=b=c=0$或者$a=b=2,c=0$或其排列。

例7.2.4 假设正整数$n\ge 2$，且n个正实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足条件

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\le(n+\sqrt{10}-3)^2$$

证明：对于每一个三元组(x_i,x_j,x_k) $(1\le i<j<k\le n,i,j,k\in N)$，可以作为某个三角形的三边长。(Improved IMO 2004)

证明：只需证明下列结果 (可以直接解决该问题)

假设$x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n>0$，且满足$x_1>x_2+x_3$，则

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_n}\right)>\left(n+\sqrt{10}-3\right)^2$$

事实上，我们通过归纳法可以证明。对于n=3，不等式变成

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)>10\Leftrightarrow\sum_{cyc}x_1x_2(x_1+x_2)>7x_1x_2x_3$$

设$f(x_1)=\sum_{cyc}x_1x_2(x_1+x_2)-7x_1x_2x_3$，则

$$f'(x_1)=2x_1(x_2+x_3)+x_2^2+x_3^2-7x_2x_3>2(x_2+x_3)^2+x_2^2+x_3^2-7x_2x_3>0$$

这就意味着 $f(x_1)\ge f(x_2+x_3)=(x_2+x_3)^2(x_2-x_3)>0$。

对于 n+1个变量，我们必须证明 $(x_1+x_2+\cdots+x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_{n+1}}\right)>\left(n+\sqrt{10}-2\right)^2$

记 $A=\sum_{i=1}^{n}x_i, B=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$，则由归纳假设有 $AB>(n+\sqrt{10}-3)^2$。设 $x=x_{n+1}$，则

$\frac{A}{B}>x_n^2\ge x^2\Rightarrow\sqrt{\frac{A}{B}}>x$。记 $f(x)=(x+A)\left(\frac{1}{x}+B\right)=Bx+\frac{A}{x}+1+AB$

我们有 $f'(x)=B-\frac{A}{x^2}$，因此 $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{A}{B}}$，这样一来

$$f(x)\ge f\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right)=(1+\sqrt{AB})^2>(n+\sqrt{10}-2)^2$$

综上所述，由归纳原理，即完成证明。

例7.2.5 设 $a,b,c>0$，且满足 $12\ge 21ab+2bc+8ca$，证明：$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\le\frac{15}{2}$

（Tran Nam Dung, Vietnam TST 2001）

证明：虽然这个问题在前面已经通过平衡系数法得到证明，在此我们给出一个通过导数证明的方法。设 $x=\frac{1}{a}, y=\frac{2}{b}, z=\frac{3}{c}$，我们将证明一个等价的问题：

如果 $x,y,z>0$，且 $12xyz\ge 2x+8y+21z$，则 $P(x,y,z)=x+2y+3z\le\frac{15}{2}$。实际上，由题

设我们有 $z(12xy-21)\ge 2x+8y>0$，所以$12xy\ge 21$，或者 $x>\dfrac{7}{4y}, z\ge\dfrac{2x+8y}{12xy-21}$，

因此$P(x,y,z)\ge x+2y+\dfrac{2x+8y}{4xy-7}=f(x)$，我们有

$$f'(x)=\frac{16x^2y^2-56xy-32y^2+35}{(4xy-7)^2}$$

在区间$\left(\dfrac{7}{4y},+\infty\right)$内，方程 $f'(x)=0$有唯一的实根$x=x_0=\dfrac{7}{4y}+\dfrac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$。在点$x=x_0$处，$f'(x)$由负号变为正号，所以$f(x)$在$x_0$点达到最小值。因此

$f(x)\ge f(x_0)=2x_0-\dfrac{5}{4y}\Rightarrow P(x,y,z)\ge f(x)+2y\ge f(x_0)+2y=g(y)$，在此

$g(y)=2y+\dfrac{9}{4y}+\dfrac{1}{2y}\sqrt{32y^2+14}$。

经过简单的计算，我们有

$$g'(y)=0\Leftrightarrow(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14}-28=0$$

记$t=\sqrt{32y^2+14}$，则$t>0$。上面的方程变成$t^3-50t-112=0$，这个方程仅有一个正根

$t=8$，或者$y=y_0=\dfrac{5}{4}$，因此$g'\left(\dfrac{5}{4}\right)=0$。

在$y>0$的范围内，在点$y=y_0$，$g'(y)$从负号变为正号，因此$g(y)$在点y_0达到最小值。

所以 $g(y_0)=g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{15}{2}$，并且 $P(x,y,z)\ge g(y)\ge g(y_0)=\frac{15}{2}$。等号仅当 $y=\frac{5}{4},x=3,z=\frac{2}{3}$ 或者 $a=\frac{1}{3},b=\frac{4}{5},c=\frac{3}{2}$

例7.2.6 设 a,b,c 是三个正实数，且满足 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=16$，求下列表达式的最小值和最大值。

$$P=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$ （Pham Kim Hung）

解：首先我们来求最小值，为此假设 $a\ge b\ge c$，于是，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}-\sum_{cyc}\frac{b}{a}=\frac{(a-b)(a-c)(c-b)}{abc}\le 0$$

记 $x=\frac{a}{b}\ge 1,\ y=\frac{b}{c}\ge 1$，则题设条件变成 $x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy=13$

设 $x+y=s,\ xy=t$，则 $P=s+\frac{1}{t}$，且 $s+t+\frac{s}{t}+\frac{1}{t}=13\Rightarrow s=\frac{13t-t^2-1}{t+1}$，

因此 $P=f(t)=\frac{13t-t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t}$，则

$$f'(t)=\frac{(13-2t)(t+1)-(13t-t^2-1)}{(t+1)^2}-\frac{1}{t^2}=\frac{15}{(t+1)^2}-\frac{t^2+1}{t^2}$$

我们很容易得到 $f'(t)=0\Leftrightarrow (t^2+1)(t+1)^2=15t^2\Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{t}+1\right)^2=16\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=3$

其排列。

由于$t=ab\ge 1$，$f'(t)=0\Leftrightarrow t=t_0=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，另外，由假设$x,y\ge 1$，这样

$t+1-s=(x-1)(y-1)\ge 0$即$t+1\ge s$，所以

$\dfrac{13t-t^2-1}{t+1}\le t+1\Leftrightarrow 2t^2-11t+2\ge 0\Rightarrow t\ge\dfrac{11+\sqrt{105}}{4}>t_0$，这样$f(t)$就是一个严格递减函数。为了求出$f(t)$的最小值，只需要找到$t$的最大值。注意到$s^2\ge(x+y)^2\ge 4t$，所以我们有

$$(13t-t^2-1)^2\ge 4t(t+1)^2\Rightarrow\left(13-t-\frac{1}{t}\right)^2\ge 4\left(t+\frac{1}{t}+2\right)$$

$$\Rightarrow\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-30\left(t+\frac{1}{t}\right)+161\ge 0\Leftrightarrow\left(t+\frac{1}{t}-7\right)\left(t+\frac{1}{t}-23\right)\ge 0$$

此外，$t+\dfrac{1}{t}<23$（因为$1\le t\le 13$），所以，我们一定有$t+\dfrac{1}{t}\ge 7$或者

$t^2-7t+1\le 0\Leftrightarrow t\le\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$，

对于$t=\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$，我们有$s=2\sqrt{t}=\sqrt{14+6\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}$，因此

$\min f(t)=s+\dfrac{1}{t}=3+\sqrt{5}+\dfrac{2}{7+3\sqrt{5}}=\dfrac{13-\sqrt{5}}{2}$，等号成立的条件是$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\sqrt{t}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$或其排列。

类似地，使用相同的方法，我们有 $\max f(t)=\frac{13+\sqrt{5}}{2}$，等号成立的条件是 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 或其排列。

每个问题都有自己的特点。如果你能够捉摸到具体的特点，你就可以找到特定的方法来解决这些问题。例如，你熟悉使用平衡系数法来解决非对称循环的不等式，或者使用拆分，来解决对称的不等式问题。一般来讲，这些解决方案的技术是很难搞清楚。然而，导数是不同的。其实，虽然导数的解决方案，有些粗糙，需要长长的计算，但它们是非常自然的。这就是为什么导数在不等式领域甚至整个数学领域如此重要不可却少的原因。

第八章 关于对称不等式的注记

在完美的不等式世界，对称不等式似乎最重要、最令人感兴趣。这种类型的不等式也是世界各地数学竞赛的重要组成部分，因此本章有必要对此进行介绍。虽然有许多有关对称不等式的有趣的话题，但这些内容将在下一章中介绍。在本章中我们将要论三个基本问题：初等对称多项式、规范化技术和对称性分离。

8.1 入门

一般情况下，n 个变量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的对称不等式可以表示为如下形式：

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geq 0$$

这里对所有 $(1,2,\cdots,n)$ 的排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 都有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n})$。

由于对称性，我们可以重新排列变量的次序（这就意味着我们可以选择任意次序），我们可以用单变量的较小的表达式来估算一个混合表达式。

Schur 不等式是一个非常重要的对称不等式，但它有弱点，我们不进行讨论。

定理10、（Schur 不等式）设 $a,b,c\geq 0$，则

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

证明：由于对称性，我们可以假定$a\ge b\ge c$。设$x=a-b,y=b-c$，则不等式变成如下形式：

$$\sum_{cyc}a(a-b)(a-c)\ge 0\Leftrightarrow c(x+y)y-(c+y)xy+(c+x+y)x(x+y)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow c(x^2+xy+y^2)+x^2(x+2y)\ge 0$$

这是显然成立的。因为$c,x,y\ge 0$。等号成立的条件是$x=y=0$和$x=c=0$，即

$a=b=c$或$a=b,c=0$及其排列。

注意：这个不等式相当于下列已知的不等式

◆设$a,b,c\ge 0$，则$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$

当然，也许有人问下列不等式是真还是假

◆设$a,b,c>0$，证明或否定

$$a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2\ge a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)$$

不幸的是，这个不等式不成立。我们只需要选择$a\to 0,b=c$就可以验证它。

我们想，有没有一个正常数 k，使得

$$a^6+b^6+c^6+ka^2b^2c^2\ge a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)$$

但是，下面的不等式成立。

◆设 a,b,c 是三个实数，证明

$$a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2 \ge \frac{2}{3}\left[a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)\right]$$

证明：根据 AM-GM 不等式和 Schur 不等式，我们有

$$3\sum_{cyc}a^6+3a^2b^2c^2 \ge 2\sum_{cyc}a^6+\sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)=\sum_{cyc}(a^6+a^4b^2)+\sum_{cyc}(a^6+a^4c^2)\ge 2\sum_{cyc}a^5(b+c)$$

定理11、（一般的 Schur 不等式）设 $a,b,c \ge 0$，k 是正常数，则

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-a)(b-c)+c^k(c-a)(c-b)\ge 0$$

证明：当然，我们可以假定 $a \ge b \ge c$，此时，我们有

$$c^k(c-a)(c-b)\ge 0,$$

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-a)(b-c)=(a-b)\left[(a^{k+1}-b^{k+1})+c(a^k-b^k)\right]\ge 0$$

两不等式相加，即得结果。等号成立的条件是 $a=b=c$ 以及 $a=b,c=0$ 及其排列。

注意：使用类似的方法，我们可以证明不等式对于 $k \le 0$，也成立。另外，如果 k 是偶数，则不等式对于所有实数 a,b,c 也成立（不必是正数）。

例8.1.1 设 $a,b,c \ge 0$，且 $a+b+c=2$，证明：$a^4+b^4+c^4+abc \ge a^3+b^3+c^3$

证明：根据4次 Schur 不等式，我们有

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge (a^3+b^3+c^3)(a+b+c)$$

将$a+b+c=2$代入最后的不等式，即得所需的结果。等号成立的条件是

$a=b=c=\frac{2}{3}$或者$a=b=1,c=0$及其排列。

例8.1.2 设$a,b,c>0$，证明:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(b+c)(b^3+c^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(c+a)(c^3+a^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(a+b)(a^3+b^3)}}\ge\frac{3}{2}$$ （Pham Kim Hung）

证明: 由 Holder 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{(b+c)(b^3+c^3)}}\right)^2\left(\sum_{cyc}a^2(b+c)(b^3+c^3)\right)\ge\left(\sum_{cyc}a^2\right)^3$$

所以，只需证明

$$4\left(\sum_{cyc}a^2\right)^3\ge 9\sum_{cyc}a^2(b+c)(b^3+c^3)\Leftrightarrow$$

$$4\sum_{cyc}a^6+3\sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)+24a^2b^2c^2\ge 9abc\sum_{cyc}a^2(b+c)$$

根据3次 Schur 不等式$\sum_{cyc}a^2(b+c)\le\sum_{cyc}a^3+3abc$，所以只需证明

$$4\sum_{cyc}a^6+3\sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)\ge 9\sum_{cyc}a^4bc+3a^2b^2c^2$$

这是成立的。因为由 AM-GM 不等式

$$2\sum_{cyc}a^6=\sum_{cyc}(a^6+a^6)\ge\sum_{cyc}a^2b^2(a^2+b^2)=\sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)\ge 2\sum_{cyc}a^4bc\ge 6a^2b^2c^2$$

等号成立的条件是$a=b=c$

例8.1.3 设$a,b,c\ge 0$，证明:

$$\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^2}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{c^2}{2a^2-ab+2b^2}\ge 1 \text{（Vasile Cirtoaje）}$$

证明: 根据Cauchy-Schwarz不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(2b^2-bc+2c^2)+b^2(2c^2-ca+2a^2)+c^2(2a^2-ab+2b^2)}$$

于是，只需证明

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2\ge\sum_{cyc}a^2(2b^2-bc+2c^2)\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^4+abc\left(\sum_{cyc}a\right)\ge 2\sum_{cyc}a^2b^2$$

根据4次Schur不等式，我们有

$$\sum_{cyc}a^4+abc\left(\sum_{cyc}a\right)\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 2\sum_{cyc}a^2b^2$$

等号成立的条件是$a=b=c$或者$a=b,c=0$及其排列。

例8.1.4 设$a,b,c\ge 0$，证明: $\dfrac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\dfrac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\dfrac{c^3}{a^2-ab+b^2}\ge a+b+c$

证明: 应用Cauchy-Schwarz不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}=\sum_{cyc}\frac{a^4}{a(b^2-bc+c^2)}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{cyc}a(b^2-bc+c^2)}$$，于是只需证明

$$\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \ge \left(\sum_{cyc} a(b^2-bc+c^2)\right)\left(\sum_{cyc} a\right)$$或者

$$\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 \ge (a+b+c)\sum_{cyc} a^2(b+c) - 3abc\sum_{cyc} a$$或者

$$\sum_{cyc} a^4 + abc\sum_{cyc} a \ge \sum_{cyc} a^3(b+c)$$

这是一个4次的 Schur 不等式。等号成立的条件是$a=b=c$或者$a=b,c=0$及其排列。

例8.1.5 设$a,b,c\ge 0$，证明:

$$a^2\sqrt{b^2-bc+c^2}+b^2\sqrt{c^2-ca+a^2}+c^2\sqrt{a^2-ab+b^2} \le a^3+b^3+c^3$$

证明: 根据 AM-GM 不等式，我们有

$$\sum_{cyc} a^2\sqrt{b^2-bc+c^2} = \sum_{cyc} a\sqrt{a^2(b^2-bc+c^2)} \le \frac{1}{2}\sum_{cyc} a(a^2+b^2+c^2-bc)$$

于是，由3次 Schur 不等式，我们有

$$2\sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a(a^2+b^2+c^2-bc) = \sum_{cyc} a^3 + 3abc - \sum_{cyc} ab(a+b) \ge 0$$

等号成立的条件是$a=b=c$或者$a=b,c=0$及其排列。

例8.1.6 设$a,b,c\ge 0$，证明:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \ge a^2+b^2+c^2$$ （Vo Quoc Ba Can）

证明：应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{cyc}a\sqrt{b^2-bc+c^2}}$$

所以，只需证明

$$\sum_{cyc}a\sqrt{b^2-bc+c^2}\leq a^2+b^2+c^2$$

再次由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\left(\sum_{cyc}a\sqrt{b^2-bc+c^2}\right)^2\leq\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a(b^2-bc+c^2)\right)$$

因此，由 Schur 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2-\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a(b^2-bc+c^2)\right)=\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a-\sum_{cyc}a^3(b+c)\geq 0$$

等号成立的条件是 $a=b=c$ 或者 $a=b,c=0$ 及其排列。

8.2 初等对称多项式

假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数，我们定义其初等对称多项式如下

$$S_k=\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\quad k=1,2,\cdots n,\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$$

关于初等对称多项式的一个经典、重要的结果是：

◆ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的每一个对称多项式都可以用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式来表示。

这个定理的证明在这里不再给出，将其作为一个代数练习自己解决。根据这个定理，研究对称表达式可以变成研究初等对称多项式。然而，在这部分，我们只在应用初等对称多项式证明三变量不等式上面进行讨论。

例8.2.1 设 $a,b,c>0$，且 $a+b+c=2$，证明：$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc\le 1$（Pham Kim Hung）

证明：由于 $a+b+c=2$，因此不等式等价于

$$(ab+bc+ca)^2\le 1+3abc$$

记 $x=ab+bc+ca,\ y=abc$。如果 $x\le 1$，则不等式显然成立；否则，$x\ge 1$，由 AM-GM 不等式，我们有

$$\prod_{cyc}(a+b-c)\le abc\Rightarrow 8\prod_{cyc}(1-a)\le abc\Rightarrow 8+9y\ge 8x$$

于是，只需证明

$$x^2\le 1+\frac{1}{3}(8x-8)\Leftrightarrow 3x^2-8x+5\le 0\Leftrightarrow (x-1)(3x-5)\le 0$$

这是显然成立的。因为 $1\le x\le\frac{4}{3}<\frac{5}{3}$。等号成立的条件是 $a=b=1,c=0$ 及其排列。

例8.2.2 设 $a,b,c\ge 0$，且 $a^2+b^2+c^2=1$，证明：$a+b+c\le\sqrt{2}+\frac{9abc}{4}$

证明：我们记 $x=a+b+c,\ y=ab+bc+ca,\ z=abc$。由4次 Schur 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}a^3(b+c)\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2-2\left(\sum_{cyc}ab\right)^2+6abc\left(\sum_{cyc}a\right)\ge\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-2y^2+6xz\ge y\Leftrightarrow z\ge\frac{2y^2+y-1}{6x}\quad (*)$$

注意到 $x=\sqrt{1+2y}$，所以，如果 $y\le\frac{1}{2}$，则不等式显然成立（因为 $x\le\sqrt{2}$）。否则，根据（*），只需证明

$$\sqrt{1+2y}\le\sqrt{2}+\frac{9(2y^2+y-1)}{24\sqrt{1+2y}}\Leftrightarrow (2y-1)\frac{\sqrt{1+2y}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+2y}}\le\frac{9(2y-1)(y+1)}{24}$$

因为 $1\ge y\ge\frac{1}{2}$，因此，我们有

$$\frac{\sqrt{1+2y}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+2y}}\le\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<\frac{9}{16}\le\frac{9(y+1)}{24}$$

等号成立的条件是$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}},c=0$或其排列。

例8.2.3 设$a,b,c>0$，且满足$abc=1$，证明：

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$$（Bulgarian MO 1998）

证明：记$S=\sum_{cyc}a,\ P=\sum_{cyc}ab,\ Q=abc$，通过不太复杂的计算，我们有

$$LHS=\sum_{cyc}\frac{1}{S+1-a}=\frac{S^2+4S+3+P}{S^2+2S+PS+P},\quad RHS=\sum_{cyc}\frac{1}{2+a}=\frac{12+4S+P}{9+4S+2P}$$

所以，只需证明

$$\frac{S^2+4S+3+P}{S^2+2S+PS+P}\le\frac{12+4S+P}{9+4S+2P}$$，即$(3P-5)S^2+(S-1)P^2+6PS\ge 24S+3P+27$

因为$abc=1$，我们有$S,P\ge 3$，所以

$$LHS\ge 4S^2+2P^2+6PS\ge 12S+6(P-1)S+6S+2P^2\ge 24S+3P+(P^2+6S)\ge RHS$$

等号成立的条件是$S=P=3$或者$a=b=c=1$

例8.2.4 设$a,b,c>0$，证明：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\ge\frac{5}{3}$$（Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，我们假设$a+b+c=3$，记$x=ab+bc+ca,\ y=abc$，则我们有

$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}=\frac{y}{27+3y-9x},\quad \sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\frac{27+3y-6x}{3x-y}$$

我们只需证明

$$\frac{27+3y-6x}{3x-y}+\frac{y}{2(27+3y-9x)}\ge\frac{5}{3}$$

由 AM-GM 不等式，$\prod_{cyc}(3-2a)\le\prod_{cyc}a$，所以$9+3y\ge 4x$。此外，上面表达式的左边关于 y 的函数是严格增加的，所以只需证明

$$\frac{27+(4x-9)-6x}{3x-\frac{1}{3}(4x-9)}+\frac{(4x-9)}{6\left[27+(4x-9)-9x\right]}\ge\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{3(18-2x)}{9+5x}+\frac{4x-9}{6(18-5x)}\ge\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3(3-x)(153-50x)}{2(9+5x)(18-5x)}\ge 0$$

这是显然成立的，因为 $x\le 3$。等号成立的条件是 $x=3$ 或者 $a=b=c=1$

例8.2.5 设 a,b,c 是实数，且 $a+b+c=3$，证明：

$$(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2)\ge 9(ab+bc+ca)$$ （Pham Kim Hung）

证明：我们记 $x=a+b+c,\ y=ab+bc+ca,\ z=abc$，根据题设，有 $x=3$。因此不等式等价于

$$z^2+z+1+\sum_{sym}(a+a^2)+\sum_{sym}ab+\sum_{sym}a^2b^2+abc\left(\sum_{sym}a+\sum_{sym}ab\right)+\sum_{sym}a^2(b+c)\ge 9y$$

$$\Leftrightarrow z^2+z+1+x+(x^2-2y)+y+(y^2-2xz)+z(x+y)+xy-3z\ge 9y$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2-(z-1)(x-y)+(x-y)^2\ge 0$$

这最后的不等式是显然的。等号成立的条件是 $z=1,x=y$ 或者 $a=b=c=1$

例8.2.6 设 $a,b,c>0$，且 $abc=1$，证明：

$$\frac{1}{1+3a}+\frac{1}{1+3b}+\frac{1}{1+3c}+\frac{1}{1+a+b+c}\ge 1$$ （Pham Kim Hung）

证明：我们记 $x=a+b+c,\ y=ab+bc+ca$，则不等式可以改写成如下形式

$$\frac{3+6x+9y}{28+3x+9y}+\frac{1}{1+x}\ge 1\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}\ge\frac{25-3x}{28+3x+9y}\Leftrightarrow 3x^2-19x+9y+3\ge 0$$

记 $z=\sqrt{\frac{x}{3}}$，由于 $y^2=(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=9z^2$，于是 $y\ge 3z$。所以只需证明

$$27z^4-57z^2+27z+3\ge 0 \Leftrightarrow 3(z-1)(9z^3+9z^2-10z-1)\ge 0$$

这是显然成立的，因为 $z\ge 1$。等号成立的条件是 $a=b=c=1$

例8.2.7 设 $a,b,c\ge 0$，且 $a+b+c=1$，证明:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2+16abc}\ge 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$（Pham Kim Hung,MYM）

证明：记 $x=4(ab+bc+ca), y=8abc$，则我们有

$$a^2+b^2+c^2=1-\frac{x}{2};\quad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{x^2}{16}-\frac{y}{4}$$

于是，不等式等价于

$$2x\ge (4-2x+8y)(x^2-4y)\Leftrightarrow x(x-1)^2\ge 4y\left[(x-1)(x+2)-4y\right]$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)^2+16y^2\ge 4y(x-1)(x+2)$$

显然，$x\le \frac{4}{3}$。如果 $x\le 1$，则不等式显然成立；否则，假设 $x\ge 1$，由3次 Schur 不等式，很容易得到 $8(x-1)\le 9y$。考虑到 x 作为一个在区间 $\left[1,\frac{4}{3}\right]$ 上的参数，我们将证明 $f(y)\ge 0$，在此 $f(y)=16y^2-4y(x-1)(x+2)+x(x-1)^2$

实质上，注意到 $x\ge 1$，所以 $f(y)$ 是一个增函数，因为

$$f'(y)=32y-4(x-1)(x+2)\ge \frac{32\cdot 8(x-1)}{9}-4(x-1)(x+2)\ge \frac{256(x-1)}{9}-\frac{40(x-1)}{3}\ge 0$$

所以，只需证明 $f\left(\frac{8(x-1)}{9}\right)\ge 0$ 或者

$$16\left[\frac{8(x-1)}{9}\right]^2-4\left[\frac{8(x-1)}{9}\right](x-1)(x+2)+x(x-1)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1024}{81}-\frac{32}{9}(x+2)+x\ge 0 \Leftrightarrow \frac{448}{81}\ge\frac{23x}{9}$$

这是成立的，因为 $x\le\frac{4}{3}$。等号成立的条件是 $a=b=\frac{1}{2},c=0$ 及其排列。

注意：我们有一个类似的不等式如下

◆设 a,b,c 是周长为1的三角形的三条边长，证明

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+\frac{19}{8}abc}\le 8(a^2+b^2+c^2)$$

例8.2.8 设 $a,b,c\ge 0$，且 $a+b+c=2$，证明:

$$a^2+b^2+c^2\ge 2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+4a^2b^2c^2)$$（Pham Kim Hung）

证明: 设 $p=ab+bc+ca, q=abc$，则不等式可以写成如下形式

$$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\ge 2(ab+bc+ca)^3-6abc(a+b+c)(ab+bc+ca)+14a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 2-p\ge p^3-6pq+7q^2$$

设 $r=\max\left\{0,\frac{8p-8}{9}\right\}$，则根据 Schur 不等式有 $q\ge r$。考虑函数

$$f(q)=7q^2-6pq+p^3+p-2$$

因为 $f'(q)=14q-6p=14abc-3(a+b+c)(ab+bc+ca)<0$，我们有 $f(q)\le f(r)$。如果 $p\le 1$，则 $r=0$，我们有 $f(q)\le f(r)=p^3+p-2=(p-1)(p^2+p+2)\le 0$；

如果 $p\ge 1$，我们有 $r=\frac{8(p-1)}{9}$，则不等式 $f(r)\le 0$ 等价于

$$7\left[\frac{8(p-1)}{9}\right]^2-6p\left[\frac{8(p-1)}{9}\right]+(p-1)(p^2+p+2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{448(p-1)}{81}-\frac{16p}{3}+p^2+p+2\le 0 \Leftrightarrow p^2+\frac{37p}{81}-\frac{236}{81}\le 0$$

这最后的不等式是成立的，因为 $p\le\frac{4}{3}$。等号成立的条件是 $a=b=1,c=0$ 及其排列。

8.3 规范化技术

规范化是一个重要的技术，经常使用它来证明对称不等式。要理解这个技术，我们首先需要弄清齐次函数和非齐次函数的差异。

定义2 假设 f 是 n 个变量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的函数，我们说 f 是一个齐次函数当且仅当存在一个实数 k 满足

$$f(ta_1,ta_2,\cdots,ta_n)=t^k f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$$

几乎所有我们所看到的不等式是齐次的。在这种情况下，变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之间的条件，例如 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ 或者 $x_1x_2\cdots x_n=1$，没有意义。（因为我们可以使用任意的实数乘或除以每一个变量，而不影响整个问题）。有时，条件仅仅帮助我们简化问题，请看下面的例子。

例8.3.1 设a,b,c是三个实数，且满足$a^2+b^2+c^2=3$，证明下列不等式

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\le 6$$

证明：当然，该不等式是非齐次的。然而，条件$a^2+b^2+c^2=3$可以帮助我们把不等式改变成齐次化的不等式

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\le \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

整理，不等式等价于

$$2\sum_{cyc}a^4+4\sum_{cyc}a^2b^2\ge 3\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[a^4+b^4-3ab(a+b)+4a^2b^2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^4+3\sum_{cyc}ab(a-b)^2\ge 0$$

这是显然成立的。等号成立的条件是$a=b=c$，从而$a=b=c=1$

注意：考虑这个问题的一般形式如下

◆设$a_1,a_2,\cdots,a_n\ge 0$，且满足$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=n$，当 n 取何值时，下列不等式成立？

$$a_1^3(a_2+a_3+\ldots+a_n)+a_2^3(a_1+a_3+\cdots+a_n)+\cdots+a_n^3(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\le n(n-1)?$$

只有两个数满足这个条件：$n=3$和$n=4$。如果$n=4$，不等式为（将a_1,a_2,a_3,a_4改成

a,b,c,d）

$$4\sum_{cyc}a^3(b+c+d)\le 3(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^6+b^4-4a^3b-4b^3a+6a^2b^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^4 \geq 0$$

上面把非齐次不等式改变成齐次不等式，似乎非常直观。相反会怎么样呢？如果我们把一个齐次不等式改变成非齐次不等式是否不合理呢？是否有意义呢？为了回答这些问题，我们来看一个例子。

例8.3.2 设$a,b,c \geq 0$，证明：$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$

证明:不失一般性，假设$ab+bc+ca=3$。由 AM-GM 不等式，我们有$a+b+c\geq 3$以及$abc \leq 1$。因此

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=3(a+b+c)-abc\geq 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq 1 \leq \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$$

证毕。等号成立的条件是$a=b=c$

让我们来回顾一下这个解法。其独到的特点是第一步假设$ab+bc+ca=3$。为什么我们可以这样做呢？事实上，如果$a=b=c=0$，不等式是显然成立的。否则，设$a'=\frac{a}{t},b'=\frac{b}{t},c'=\frac{c}{t}\,(t>0)$。不等式对于$a,b,c$成立当且仅当它对$a',b',c'$成立。只要选择$t=\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$，则$a'b'+b'c'+c'a'=3$。由于不等式对于$a',b',c'$为真（已经证明），对$a,b,c$必定为真。

让我们分析分析其它情况。如果我们假定$a+b+c=3$或者$abc=1$而不是$ab+bc+ca=3$会发生什么呢？然而,它给我们带来的是复杂的计算甚至对证明没有任何作用。

我们使用的这个过程称为规范化。这个技巧被广泛应用于齐次不等式。因为这些不等式允许我们假定任何事情，例如$a+b+c=3,ab+bc+ca=3$等等。有时，通过规

范化技术可以使得解法相当简短，下面就是很好的例子。

例8.3.3设$a,b,c\ge 0$，证明:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$（USA MO 2003）

证明：使用表达式$a+b+c=3$规范化，我们得到不等式左边的形式如下:

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}$$

注意到

$$\frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}=\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}=1+\frac{8a+6}{(a-1)^2+2}\le 1+\frac{8a+6}{2}=4a+4$$

我们得到

$$\sum_{cyc}\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\le\frac{1}{3}\left(12+4\sum_{cyc}a\right)=8$$

例8.3.4 设$a,b,c\ge 0$，证明：$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$

（Japan MO 2002）

证明：不失一般性，我们假设$a+b+c=3$，则不等式变成

$$\sum_{cyc}\frac{(3-2a)^2}{a^2+(3-a)^2}\ge\frac{3}{5}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{2a^2-6a+9}\le\frac{3}{5}$$

只要注意到

$$\sum_{cyc}\left(\frac{5}{2a^2-6a+9}-1\right)=\sum_{cyc}\frac{2(a-1)(a-2)}{2a^2-6a+9}=\sum_{cyc}\left(\frac{-2(a-1)}{5}+\frac{(a-1)^2(2a+1)}{5(2a^2-6a+9)}\right)$$

$$\geq\sum_{cyc}\frac{-2(a-1)}{5}=0$$

例8.3.5 设 $a,b,c>0$，证明:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3}+\frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(c+a)^3}+\frac{(2c+a+b)^2}{4c^3+(a+b)^3}\leq\frac{12}{a+b+c}$$ （Pham Kim Hung）

证明: 假设 $a+b+c=3$。则不等式变成

$$\sum_{cyc}\frac{(3+a)^2}{4a^3+(3-a)^3}\leq 4$$

注意到

$$\frac{(3+a)^2}{4a^3+(3-a)^3}-\frac{4}{3}=\frac{(a-1)(-4a^2-15a+27)}{4a^3+(3-a)^3}=$$

$$(a-1)\left(\frac{2}{3}+\frac{(a-1)(-2a^2-12a-9)}{4a^3+(3-a)^3}\right)\leq\frac{2(a-1)}{3}$$

我们得到

$$\sum_{cyc}\frac{(3+a)^2}{4a^3+(3-a)^3}\leq\sum_{cyc}\left(\frac{4}{3}+\frac{2(a-1)}{3}\right)=4$$

例8.3.6 设 $a,b,c,d\geq 0$，证明

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{c^2+d^2+a^2}+\frac{c}{d^2+a^2+b^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

证明：不失一般性，假设$a^2+b^2+c^2+d^2=1$，则不等式变成

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}+\frac{d}{1-d^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

由 AM-GM 不等式，可得

$$2a^2(1-a^2)(1-a^2)\le\left(\frac{2}{3}\right)^3\Rightarrow a(1-a^2)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{a}{1-a^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

所以，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a}{1-a^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{cyc}a^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

等号成立的条件是$a=b=c,d=0$及其排列。

例8.3.7 设$a,b,c\ge0$，证明：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\ge2$$ （Pham Kim Hung）

证明：应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

使用$a+b+c=1$规范化，只需证明

$$\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{abc}\ge 2$$

这里 $x=ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$。如果 $x\le\frac{1}{4}$，则不等式显然成立。否则，由 Schur 不等式，我们有 $9abc\ge 4x-1\ge 0$，所以只需证明

$$\frac{1}{2x}+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt[3]{4x-1}\ge 2$$ 或者

$$3x^3(4x-1)\ge(4x-1)^3$$ 或者

$$(4x-1)(3x-1)(x^2-5x+1)\ge 0$$

这最后的不等式为真，因为 $\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{3}$（因此 $x^2-5x+1<0$）。等号成立的条件是

$a=b=c$ 或 $a=b,c=0$

例8.3.8 设 $a,b,c\ge 0$，证明：

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\ge\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$ （Iran TST 1996）

证明：我们使用 $ab+bc+ca=1$ 来规范化，则不等式变成

$$4\sum_{cyc}(a+b)^2(c+a)^2\ge 9(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$ 或者

$$4(1+a^2)^2+4(1+b^2)^2+4(1+c^2)^2\ge 9(a+b+c-abc)^2$$

记 $s=a+b+c$，则不等式变成如下形式

$$4(s^4-2s^2+1+4sabc)\ge 9(s-abc)^2$$

如果$s\ge 2$，则立即可得不等式成立，因为

$$LHS\ge 4(s^4-2s^2+1)=9s^2+(s^2-4)(4s^2-1)\ge 9s^2\ge 9(s-abc)^2=RHS$$

否则，假定$s\le 2$，根据 Schur 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}a^3(b+c)\Rightarrow 6abcs\ge(4-s^2)(s^2-1)$$

然而，$9abc\le(a+b+c)(ab+bc+ca)=s$，所以，我们有

$$LHS-RHS=(s^2-4)(4s^2-1)+34sabc-9a^2b^2c^2\ge(s^2-4)(4s^2-1)+33sabc$$

$$\ge(s^2-4)(4s^2-1)+\frac{11}{2}(4-s^2)(s^2-1)=\frac{3}{2}(4-s^2)(s^2-3)\ge 0$$

等号成立的条件是$a=b=c$或者$(a,b,c)=(1,1,0)$

例8.3.9 设$a,b,c,d>0$，证明:

$$\frac{abc}{(d+a)(d+b)(d+c)}+\frac{bcd}{(a+b)(a+c)(a+d)}+$$

$$\frac{cda}{(b+a)(b+c)(b+d)}+\frac{dab}{(c+a)(c+b)(c+d)}\ge\frac{1}{2}$$ （Nguyen Van Thach）

证明：记$x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c},t=\frac{1}{d}$，则不等式变成

$$\frac{x^3}{(x+y)(x+z)(x+t)}+\frac{y^3}{(y+x)(y+z)(y+t)}+\frac{z^3}{(z+x)(z+y)(z+t)}+\frac{t^3}{(t+x)(t+y)(t+z)}\geq\frac{1}{2}$$

不失一般性，假设$x+y+z+t=4$，由 AM-GM 不等式，我们有

$$(x+y)(x+z)(x+t)\leq\left(x+\frac{y+z+t}{3}\right)^3=\left(x+\frac{4-x}{3}\right)^3=\frac{8}{27}(x+2)^3$$

所以，我们只需证明

$$\frac{x^3}{(x+2)^3}+\frac{y^3}{(y+2)^3}+\frac{z^3}{(z+2)^3}+\frac{t^3}{(t+2)^3}\geq\frac{4}{27}$$

但，我们很容易得到

$$\frac{x^3}{(x+2)^3}-\frac{2x-1}{27}=\frac{2(x-1)^2(-x^2+6x+4)}{27(x+2)^2}\geq 0$$

因为$0\leq x\leq 4$。于是我们得到

$$\sum_{cyc}\frac{x^3}{(x+2)^3}\geq\sum_{cyc}\frac{2x-1}{27}=\frac{4}{27}$$

证毕。等号成立的条件$x=y=z=t=1$或$a=b=c=d$

8.4 对称分离

回顾规范化一节中的例 8.3.4。

如何得到下列不等式，解决问题的关键是什么？

$$\frac{1}{2a^2-6a+9}\le\frac{1}{5}-\frac{2(a-1)}{25}?$$

在这一部分，我们将解释如何使用“对称分离”。这个方法，在前面使用过。

这个方法可以帮助我们解决许多下列形式的不等式问题

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\ge 0$$

实际上，为了证明这样的不等式，我们将找到一个函数 $g(x)$，满足 $f(x)\ge g(x)$，而且

$$g(x_1)+g(x_2)+\ldots+g(x_n)\ge 0$$

让我们来考虑下面的例子

例 8.4.1 设 $a,b,c>0$，且满足 $abc=1$，证明：

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2}\ge 1$$ （Le Huu Dien Khue）

证明：我们设想找到一个实常数 k，满足

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\ge\frac{1}{3}+k\ln a$$

如果存在这样一个有效的常数 k，我们得到（注意到 $\ln a+\ln b+\ln c=0$）

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\ge 1+k\left(\sum_{cyc}\ln a\right)=1$$

记 $f(x)=\dfrac{1}{3x^2+(x-1)^2}-k\ln x-\dfrac{1}{3}$

注意到 $a=b=c=1$ 是等号成立的条件。我们预测这样的数 k 应该满足 $f'(1)=0$。由于

$$f'(x)=\frac{-8x+2}{(3x^2+(x-1)^2)^2}-\frac{k}{x},$$

于是，我们得到 $k=\dfrac{-2}{3}$。此时，

$$f'(x)=\frac{-8x+2}{(3x^2+(x-1)^2)^2}+\frac{2}{3x}=\frac{2(x-1)(16x^3-1)}{3x(3x^2+(x-1)^2)^2}$$

不幸的是，方程 $f'(x)=0$ 的根多余一个，所以不等式 $f(x)\geq 0$ 是错误的（实际上，如果我们令 $x\to 0$，则 $f(x)\to -\infty$）。无论如何，由 $f(x)$ 的导数，我们至少可以得到 $f(x)\geq f(1)=0$ $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$。所以，如果所有 a,b,c 都属于 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\geq\sum_{cyc}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln a\right)=1$$

如果 a,b,c 中的某些数小于 $\frac{1}{2}$？假设 $a\leq\frac{1}{2}$，则 $3a^2+(a-1)^2\leq 1$，问题变得很明显：

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\geq\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\geq 1$$

等号成立的条件是 $a=b=c=1$

构建估计式 $\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\geq\frac{1}{3}+k\ln a$ 是一个称为“对称分离”的技术。如果证明 $\sum_{cyc}f(x_i)\geq 0$ 很困难，我们可以从这个和中分离出较小的组件 $f(x_i)\geq g(x_i)$，然后证明 $\sum_{cyc}g(x_i)\geq 0$。当然，$g(x)$ 应该从给定数据的假设条件进行猜测：如果假设条件是 $x_1x_2\cdots x_n=1$，我们可以预见 $g(x)=k\ln x$（k 是常数）；如果假设条件是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$，我们可以预见 $g(x)=k(x-1)$；如果假设条件是 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n$，我们可以预见 $g(x)=k(x^2-1)$ 等等。注意这些预见取决于等号成立的情况（例如上面的 $g(x)$ 是基于 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 的情况）。

如何找到有效的常数 k？假设 $f(x)$ 可导而且当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时等号成立，那么它将由 $f'(1)=0$ 给出。

虽然在某些情况下，不等式 $f(x)\ge g(x)$ 对范围内所有的 x 不成立，但它可以在 x 的一个较大的范围内保持成立，而且使得左边易于处理，在例 8.4.1 当我们检测 $a\le\frac{1}{2}$ 的情况。

例 8.4.2 设 $a,b,c>0$，且 $abc=1$，证明:

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le 3$$ （Vu Dinh Quy）

证明：首先，我们将证明

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}+\ln x-1\ge 0\ (x\in(0,1.8])$$

实质上，我们有

$$f'(x)=\frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x^3-x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

方程 $x^3=x^2+1$ 在 $(0,2]$ 恰好有一个实根，所以很容易推断

$$\max_{0\le x\le 1.8} f(x)=\max\{f(1),f(1.8)\}=0$$

因此，如果 $a,b,c\le 1.8$，则不等式成立。否则，我们假定 $a\ge 1.8$。如果 $a\ge 2$，则我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}\le\frac{1}{2^2-2+1}+\frac{1}{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\le\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=3$$

所以只需考虑 $1.8\le a\le 2$ 的情况。不失一般性，假设 $b\ge c$，由于 $a\le 2$，我们必定有 $b\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$。如果 $a\ge 1.9$，则

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}\le\frac{1}{1.9^2-1.9+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1}+\frac{4}{3}<3$$

如果 $a\le 1.9$，则 $b\ge\frac{1}{\sqrt{1.9}}$，从而我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}\le\frac{1}{1.8^2-1.8+1}+\frac{1}{\frac{1}{1.9}-\frac{1}{\sqrt{1.9}+1}}+\frac{4}{3}<3$$

证毕。等号成立的条件是 $a=b=c=1$

注意：考虑例 2.1.9，我们可以用不同的方法来证明这个问题。

注意到

$$\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^4+a^2+1}=\sum_{cyc}\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{1}{a^2}\right)+1}\ge 1 \qquad (*)$$

所以

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+1}{a^2-a+1}=3+\sum_{cyc}\frac{a}{a^2-a+1}\le 4\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}+\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}\le 4$$

因为由（*）$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}\ge 1$，我们就有 $\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}\le 3$

例 8.4.3 设 $a,b,c,d,e,f>0$，且满足 $abcdef=1$，证明：

$$\frac{2a+1}{a^2+a+1}+\frac{2b+1}{b^2+b+1}+\frac{2c+1}{c^2+c+1}+\frac{2d+1}{d^2+d+1}+\frac{2e+1}{e^2+e+1}+\frac{2f+1}{f^2+f+1}\le 4$$（Pham Kim Hung）

证明：考虑下列函数

$$f(x)=\frac{1+2x}{1+x+x^2}+\frac{\ln x}{3}-1$$

当然，我们有

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+1}{(1+x+x^2)^2}+\frac{1}{3x}=\frac{(x-1)(x^3-3x^2-6x-1)}{3x(1+x+x^2)^2}$$

注意到方程 $x^3=3x^2+6x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 上，只有一个实根 x_0。因为 $4\le x_0\le 12$，我们有

$\max\limits_{0\le x\le 12}f(x)=\max\{f(1),f(12)\}=0$。

如果 $a,b,c,d,e,f\le 12$，则

$$\sum_{cyc}\frac{1+2a}{1+a+a^2}\le\sum_{cyc}\left(1+\frac{\ln a}{3}\right)=6$$

否则，假定$a\ge 12$，注意到

$$7(1+x+x^2)-6(1+2x)=7x^2-5x+1>0\ (x\in R)$$

我们得到

$$\sum_{cyc}\frac{1+2a}{1+a+a^2}\le\frac{1+2\cdot 12}{1+12+12^2}+\frac{5\cdot 7}{6}<6$$

证毕。等号成立的条件是$a=b=c=d=e=f=1$

例 8.4.4 设$a,b,c,d>0$，且$abcd=1$，证明：

$$\frac{1+a}{1+a^2}+\frac{1+b}{1+b^2}+\frac{1+c}{1+c^2}+\frac{1+d}{1+d^2}\le 4$$ （Vasile Cirtoaje）

证明：考虑下列函数

$$f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}+\frac{\ln x}{2}-1\ (x>0)$$

我们有

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x^3-x^2-3x-1)}{2x(1+x^2)^2}$$

由于方程$x^3=x^2+3x+1$恰有一个实根x_0，且$4\ge x_0>1$，容易得到

$$\max_{0\le x\le 4}f(x)=\max\{f(1),f(4)\}=0$$

如果$a,b,c,d\le 4$，则不等式成立，因为

$$\sum_{cyc}\frac{1+a}{1+a^2}\le\sum_{cyc}\left(1-\frac{\ln x}{2}\right)=4$$

否则，假设$a\ge 4$。由于$21(1+x^2)-17(1+x)=21x^2-17x+4>0$，于是

$$\sum_{cyc}\frac{1+a}{1+a^2}\ge\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{3\cdot 21}{17}=4$$

证毕。等号成立的条件是$a=b=c=d=1$

例 8.4.5 设$a,b,c,d,e,f>0$，且满足$abcdef=1$，证明：

$$\frac{a-1}{a^2+a+1}+\frac{b-1}{b^2+b+1}+\frac{c-1}{c^2+c+1}+\frac{d-1}{d^2+d+1}+\frac{e-1}{e^2+e+1}+\frac{f-1}{f^2+f+1}\le 0$$

（Pham Kim Hnug）

证明：考虑下列函数

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}-\frac{\ln x}{3}$$

注意到

$$f'(x)=\frac{(x-1)(-x^3-6x^2-3x+1)}{3x(x^2+x+1)^2}$$

方程$x^3+6x^2+3x=1$恰有一个实根x_0，且显然$x_0>\frac{1}{5}$，因此

$$\max_{1\ge x\ge\frac{1}{11}} f(x)=\max\{f(1),f\left(\frac{1}{11}\right)\}=0$$

如果$a,b,c,d,e,f\ge\frac{1}{11}$，则不等式成立，因为

$$\sum_{cyc}\frac{a-1}{a^2+a+1}\le\sum_{cyc}\frac{\ln a}{3}=0$$

现在假定$a\le\frac{1}{11}$，由于函数$g(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}$的导数$g'(x)=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+x+1)^2}$，我们有

$g(a)\le g\left(\frac{1}{11}\right)$，且$\max\limits_{x>0} g(x)=g(1+\sqrt{3})$，因此，我们有

$$g(a)+g(b)+g(c)+g(d)+g(e)+g(f)\le g\left(\frac{1}{11}\right)+5g\left(1+\sqrt{3}\right)<0$$

例 8.4.6 设$a,b,c,d,e,f,g>0$，且$a+b+c+d+e+f+g=7$，证明：

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)(d^2-d+1)(e^2-e+1)(f^2-f+1)(g^2-g+1)\ge 1$$

（Pham Kim Hung）

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\ln(a^2-a+1)\ge 0$$

考虑函数 $f(x)=\ln(x^2-x+1)-x+1$。我们有

$$f'(x)=\frac{(x-1)(2-x)}{x^2+x+1}$$

很容易得到

$$\min_{0\le x\le 2.75} f(x)=\min\{f(1),f(2.75)\}=0$$

如果 $a,b,c,d,e,f,g\le 2.75$，则我们有

$$\sum_{cyc}\ln(a^2-a+1)\ge\sum_{cyc}(1-a)=0$$

否则，假设 $a\ge 2.75$，因为 $x^2-x+1\ge\frac{3}{4}\,(x\in R)$，所以

$$\sum_{cyc}\ln(a^2-a+1)\ge\ln(2.75^2-2.75+1)+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)>0$$

证毕。等号成立的条件是 $a=b=c=d=e=f=1$

例 8.4.7 设 $a,b,c,d>0$，且 $a+b+c+d=4$，证明：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\ge a^2+b^2+c^2+d^2$$ （Pham Kim Hung）

证明：考虑下列函数

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2+4x-4\ (x>0)$$

我们有

$$f'(x)=\frac{-2}{x^3}-2x+4=\frac{-2(x-1)(x^3-x^2-x-1)}{x^3}$$

方程 $f'(x)=0$ 有两个正实数根，一个根是 1 另一个根小于 1。

$$\max_{0<x\le 2.4} f(x)=\max\{f(1),f(2.4)\}=0$$

如果 $a,b,c,d\le 2.4$，则不等式成立，因为

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2}-\sum_{cyc}a^2=\sum_{cyc}f(a)\ge 0$$

否则，我们可以假定 $a\ge 2.4\ge b\ge c\ge d$。因为 $b+c+d\le 1.6$，我们有

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\ge\frac{27}{(b+c+d)^2}>10$$

（1）第一种情况 $a\le 3$，由于 $1\le a\le 3$，所以

$$a^2+b^2+c^2+d^2\le a^2+(b+c+d)^2=a^2+(4-a)^2\le 3^2+1^1=10$$

（2）第二种情况。如果 $a\ge 3$，类似地，我们有

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\ge\frac{27}{(b+c+d)^2}\ge 27>16>a^2+b^2+c^2+d^2$$

因此，不等式在所有情况得到证明。等号成立的条件是 $a=b=c=d=1$

第九章 问题与解答

读完了前8章，体现了不等式的一个更高的水平。在这一章中，我们收集了世界各地的一些数学竞赛和作家创作的不等式有近100个。我希望这些问题将描绘一丰富多彩的画卷，让你可以欣赏它们的美丽。也许，彻底解决这100个问题将花费你大量的时间和精力，因此，你可以仅仅把它们看作是一个有趣的开发想象力的游戏，和它们一起玩，而不是“与它们合作“。如果你可以解决其中70个问题，那么你真的很出色。如果你能解决其中90个问题，那么你绝对优秀。如果你能解决全部问题，那么你一定是一个出色的不等式天才。把握你的时间。

1、设 $a,b,c\ge 0$，且满足 $a+b+c=3$，证明：

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\le 12$$ （Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，假设 $a\ge b\ge c$ 。当然，我们有

$$b^2-bc+c^2=b^2-c(b-c)\le b^2$$

$$c^2-ca+a^2=a^2-c(a-c)\le a^2$$

于是，只需证明

$$M=a^2b^2(a^2-ab+b^2)\le 12$$

记 $x=\dfrac{a-b}{2}\ge 0, s=\dfrac{a+b}{2}\le \dfrac{3}{2}$，则 M 可以写成如下形式

$$M=\left(s^2-x^2\right)^2\left(s^2+3x^2\right)$$

应用 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{3}{2}\left(s^2-x^2\right)\cdot\frac{3}{2}\left(s^2-x^2\right)\cdot\left(s^2+3x^2\right)\le\left(\frac{4}{3}s^2\right)^3\le 27\Rightarrow\frac{9}{4}M\le 27\Rightarrow M\le 12$$

等号成立的条件是 $a=2,b=1,c=0$ 及其排列。

注意：使用相同的方法，我们可以证明下列不等式

◆设 $a,b,c\ge 0$，证明

（a）$\dfrac{a^2}{b^2-bc+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2-ca+a^2}+\dfrac{c^2}{a^2-ab+b^2}\ge 2$

（b）$\dfrac{a}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\ge 2$

（c）$\dfrac{1}{b^2-bc+c^2}+\dfrac{1}{c^2-ca+a^2}+\dfrac{1}{a^2-ab+b^2}\ge\dfrac{6}{ab+bc+ca}$

◆设 $a,b,c\ge 0$，且满足 $a^2+b^2+c^2=2$，证明:

$$8(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\le 1$$

为了证明它,我们进行同样的过程。假设 $a\ge b\ge c$，则 $c^2-ca+a^2\le a^2$，$b^2-bc+c^2\le b^2$。于是不等式就变为两个变量 a, b 的简单形式，剩余的事情就很容易了。

2、设 $a,b,c>0$，证明:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\geq\frac{9}{1+abc}$$ （Walther Janous）

证明：由排序不等式，我们有

$$\frac{1}{a(1+a)}+\frac{1}{b(1+b)}+\frac{1}{c(1+c)}\geq\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}+\frac{1}{a(1+b)}$$

所以如果下列不等式成立的话，那么原不等式就成立。

$$\sum_{cyc}\frac{1}{b(1+c)}\geq\frac{3}{1+abc};\quad \sum_{cyc}\frac{1}{a(1+c)}\geq\frac{3}{1+abc}$$

我们只证第一个不等式（第二个不等式类似可证）。设 $a=\frac{ky}{x},b=\frac{kz}{y},c=\frac{kx}{z}$。因此不等式该写成如下形式

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\frac{kz}{y}+\frac{k^2x}{y}}\geq\frac{3}{1+k^3}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{y}{z+kx}\geq\frac{3k}{1+k^3}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{y}{z+kx}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(k+1)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{k+1}$$

所以只需证明

$$\frac{3}{k+1}\geq\frac{3k}{1+k^3}\Leftrightarrow(k-1)^2(k+1)\geq 0$$

这是显然的。等号成立的条件是 $x=y=z,k=1\Leftrightarrow a=b=c=1$

3、设 $a,b,c>0$，且满足 $a^2+b^2+c^2=3$，证明：

$$\frac{a}{a^2+2a+3}+\frac{b}{b^2+2b+3}+\frac{c}{c^2+2c+3}\le\frac{1}{2}$$（Pham Kim Hung）

证明：我们当然有 $a^2+1\ge 2a, b^2+1\ge 2b, c^2+1\ge 2c$，所以

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+2b+3}\ge\sum_{cyc}\frac{a}{2(a+b+1)}$$

于是，只需证明

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a+b+1}\le 1\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{b+1}{a+b+1}\ge 2$$

注意到 $a^2+b^2+c^2=3$，所以

$$\sum_{cyc}(b+1)(a+b+1)=3+3\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}ab+\sum_{cyc}a^2=\frac{1}{2}(a+b+c+3)^2$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{b+1}{a+b+1}\ge\frac{(a+b+c+3)^2}{(b+1)(a+b+1)+(c+1)(b+c+1)+(a+1)(c+a+1)}=2$$

等号成立的条件是 $a=b=c=1$

4、设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，且满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$，证明：

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\ge\frac{2}{1+x_1}+\frac{2}{1+x_2}+\cdots+\frac{2}{1+x_n}$$（Pham Kim Hung）

证明：由于$2-\frac{2}{1+x_i}=\frac{2x_i}{1+x_i}$，则不等式变成

$$\sum_{cyc} x_i+\sum_{cyc}\frac{2x_i}{1+x_i}\ge 2n$$

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$-2n+\sum_{cyc} x_i+\sum_{cyc}\frac{2x_i}{1+x_i}=-2n+\sum_{cyc}\left(\frac{x_i+1}{2}+\frac{2x_i}{1+x_i}\right)+\sum_{cyc}\frac{x_i-1}{2}$$

$$\ge -\frac{5n}{2}+\sum_{cyc}\sqrt{x_i}+\frac{1}{2}\sum_{cyc} x_i\ge\frac{-3n}{2}+2n\sqrt[2n]{\prod_{cyc} x_i}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\prod_{cyc} x_i}=0$$

等号成立的条件是$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$

5、证明对所有正实数$a,b,c\in[1,2]$，我们有

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$（Tran Nam Dung, Vient Nam TST 2006）

证明：代替条件$a,b,c\in[1,2]$，我们将证明一个条件为a,b,c为三角形三边长的更强的不等式。使用下列恒等式

$$\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)-9=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{ab};\quad 6\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\right)-3=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$$

该不等式等价于

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

这里S_a,S_b,S_c由下式定义

$$S_a=\frac{1}{bc}-\frac{3}{(a+b)(a+c)};\ S_b=\frac{1}{ca}-\frac{3}{(b+c)(b+a)};\ S_c=\frac{1}{ab}-\frac{3}{(c+a)(c+b)}$$

不失一般性，我们假设$a\ge b\ge c$，于是$S_a\ge S_b\ge S_c$。注意到

$$S_b+S_c=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{3}{b+c}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)\ge 0\Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{b+c}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)$$

因为$a\le b+c$，我们有

$$RHS\le\frac{3}{b+c}\left(\frac{b+c}{2b+c}+\frac{b+c}{2c+b}\right)=\frac{3}{2b+c}+\frac{3}{2c+b}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\left(\frac{3}{2b+c}+\frac{3}{2c+b}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{c}-\frac{9}{2c+b}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{b}-\frac{9}{2b+c}\right)\ge 0$$

于是，我们有$S_b+S_c\ge 0$，这就意味着$S_a\ge S_b\ge 0$，从而

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge(S_b+S_c)(a-b)^2\ge 0$$

等高成立的条件是$a=b=c$或者$a=2b=2c$及其排列。

6、设$a,b,c>0$，且满足$a+b+c=3$，证明：

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{2+a}{2+b}+\frac{2+b}{2+c}+\frac{2+c}{2+a}$$（Pham Kim Hung）

证明：（Cauchy 求反）由 AM-GM 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{2+a}{2+b}=\sum_{cyc}\frac{2+a}{2}-\sum_{cyc}\frac{b(2+a)}{2(2+b)}\ge\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}$$

于是，只需证明

$$\sum_{cyc}a^2+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2}\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}\ge 2\sum_{cyc}ab$$

设$x=\sqrt[3]{a},y=\sqrt[3]{b},z=\sqrt[3]{c}$。由 AM-GM 不等式以及 6 阶 Schur 不等式，我们立即可得结果：

$$\sum_{cyc}x^6+xyz\sum_{cyc}x^3\ge\sum_{cyc}x^5(y+z)=\sum_{cyc}xy(x^4+y^4)\ge 2\sum_{cyc}x^3y^3$$

等号成立条件是$a=b=c=1$

7、设$x,y,z\ge 0$，且$x+y+z=3$，证明：

$$\sqrt{\frac{x}{1+2yz}}+\sqrt{\frac{y}{1+2zx}}+\sqrt{\frac{z}{1+2xy}}\ge\sqrt{3}$$（Phan Thanh Viet）

证明：根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{x}{1+2yz}}=\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+2x^2yz}}$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+2x^2yz}+\sqrt{y}\sqrt{y^2+2y^2zx}+\sqrt{z}\sqrt{z^2+2z^2xy}}$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2+2xyz(x+y+z)\right]}}$$

所以只需证明

$$\left(\sum_{cyc}x\right)^3\geq 3\left(\sum_{cyc}x^2\right)+6xyz\left(\sum_{cyc}x\right)\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}x\right)^3\geq\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\sum_{cyc}x^2\right)+6xyz\left(\sum_{cyc}x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}x(y-z)^2\geq 0$$

这是显然成立的。等号成立的条件是$a=b=c=1$和$a=3,b=c=0$及其排列。

8、设$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，且满足$a_1a_2\cdots a_n=1$，证明：

$$\sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}+\ldots+\sqrt{1+a_n^2}\leq\sqrt{2}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)$$（Gabriel Dospinescu）

证明：由显然的不等式$\left(\sqrt{x}-1\right)^4\geq 0$，我们有

$$\frac{1+x^2}{2}\leq\left(x-\sqrt{x}+1\right)^2\Rightarrow\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}+\sqrt{x}\leq 1+x$$

根据这个结果，我们当然有

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+a_i^2}\leq\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}a_i+\sqrt{2}\left(n-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)\leq\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

因为 AM-GM 不等式将有$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\geq n$。等号成立的条件$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$

注意：我们可以使用对称分离来解决这个问题。实质上，我们考虑下列函数

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x$$

因为

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{x}=\frac{(x-1)\left[2x^3+x-1-2x^2\sqrt{2(1+x^2)}\right]}{x\left(\sqrt{2}x^2+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{2(1+x^2)}}$$

注意到$1+2x^2\sqrt{2(1+x^2)}\geq 1+2x^2(1+x)\geq 2x^3+x$，所以，我们有 $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$。很容易推断$\max\limits_{x>0} f(x)=f(1)=0$。因此

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+a_i^2}\leq\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}a_i-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln a_i=\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

9、设$a,b,c,k>0$，证明：

$$\frac{a+bk}{a+kc}+\frac{b+kc}{b+ka}+\frac{c+ka}{c+kb}\leq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$（Nguyen Vient Anh）

证明：我们记 $X=\dfrac{1+k\cdot\frac{a}{b}}{1+k},Y=\dfrac{1+k\cdot\frac{b}{c}}{1+k},Z=\dfrac{1+k\cdot\frac{c}{a}}{1+k}$

根据 Holder 不等式，我们有

$$\prod_{cyc}\left(1+\frac{ka}{b}\right)\geq(1+k)^3$$

或者等价于 $XYZ\geq 1$。现在不等式变成如下形式

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b}-\frac{c+ka}{c+kb}\right)\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{c(a-b)}{b(c+kb)}\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\frac{a}{b}-1}{1+\frac{kb}{c}}\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{1}{k}+1\right)(X-1)}{(k+1)Y}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}\geq\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}$$

根据 AM-GM 不等式这是成立的，因为

$$3\sum_{cyc}\frac{X}{Y}=\sum_{cyc}\left(\frac{X}{Y}+\frac{X}{Y}+\frac{Z}{X}\right)\geq 3\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{XZ}{Y^2}}=3\sum_{cyc}\frac{1}{Y}$$

等号成立的条件是$X+Y=Z=1$或者等价于$a=b=c$

10、设$a,b,c>0$，且满足$abc=1$，证明

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)}\geq\frac{1}{2}$$（Pham Kim Hung）

证明：由题设 $abc=1$，所以存在三个正实数 x,y,z 满足 $a=\frac{yz}{x^2},b=\frac{zx}{y^2},c=\frac{xy}{z^2}$。不等式变成

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{(x^2+yz)(2x^2+yz)}\geq\frac{1}{2}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$LHS\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+yz)(2x^2+yz)+(y^2+zx)(2y^2+zx)+(z^2+xy)(2z^2+xy)}$$

于是，只需证明

$$2(x^2+y^2+z^2)^2\geq\sum_{cyc}(x^2+yz)(2x^2+yz)\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}x^2y^2\geq 3\sum_{cyc}x^2yz\Leftrightarrow\sum_{cyc}x^2(y-z)^2\geq 0$$

这是显然成立的。等号成立的条件是 $x=y=z$ 或者 $a=b=c=1$

11、设 $a,b,c,d\geq 0$，且满足 $a+b+c+d=4$，证明

$$a^2+b^2+c^2+d^2-4\geq 4(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$$（Pham Kim Hung）

证明：应用 AM-GM 不等式，我们有

$$a^2+b^2+c^2+d^2-4=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2\geq 4\sqrt{|(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)|}$$

所以只需考虑不等式在条件 $a\geq b\geq 1\geq c\geq d$（为了 $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\geq 0$）的情况。

因为 $a+b\leq 4, c,d\leq 1$，则

$$(1-c)(1-d)\leq 1;\ (a-1)(b-1)\leq\frac{1}{4}(a+b-2)^2\leq 1;$$

因此，不等式成立，因为

$$\sqrt{|(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)|}\geq(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$$

等号成立的条件是 $a=b=c=d=1$ 或者 $a=b=2,c=d=0$ 及其排列。

12、设 x,y,z 是不同的实数，证明：

$$\frac{x^2}{(x-y)^2}+\frac{y^2}{(y-z)^2}+\frac{z^2}{(z-x)^2}\ge 1$$（Le Huu Dien Khue）

证明：我们有

$$\sum_{cyc}\left(1-\frac{x}{z}\right)^2\left(1-\frac{z}{y}\right)^2-\left(1-\frac{y}{x}\right)^2\left(1-\frac{z}{y}\right)^2\left(1-\frac{x}{z}\right)^2$$

$$=\sum_{cyc}\left(1-\frac{x}{z}-\frac{z}{y}+\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right)^2$$

$$=3+2\sum_{cyc}\frac{x^2}{z^2}+\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2}-4\sum_{cyc}\frac{x}{z}+4\sum_{cyc}\frac{x}{y}-2\sum_{cyc}\frac{x^2}{yz}-2\sum_{cyc}\frac{2yz}{x^2}-\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2}-\sum_{cyc}\frac{y^2}{x^2}$$

$$+2\left(\sum_{cyc}\frac{x}{y}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{y}{x}\right)-2\sum_{cyc}\frac{y}{x}-2\sum_{cyc}\frac{x}{y}=\sum_{cyc}\frac{x^2}{z^2}-6\sum_{cyc}\frac{x}{z}+2\sum_{cyc}\frac{x}{y}+9=\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}-3\right)^2\ge 0$$

我们有

$$\sum_{cyc}\left(1-\frac{x}{z}\right)^2\left(1-\frac{z}{y}\right)^2\ge\left(1-\frac{y}{x}\right)^2\left(1-\frac{z}{y}\right)^2\left(1-\frac{x}{z}\right)^2\Rightarrow$$

$$\sum_{cyc}x^2(z-x)^2(z-y)^2\ge(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2\Rightarrow\frac{x^2}{(x-y)^2}+\frac{y^2}{(y-z)^2}+\frac{z^2}{(z-x)^2}\ge 1$$

等号成立的条件是是三元组(x,y,z)满足关系$\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}=3$

13、设$a,b,c,d\ge 0$，且满足$a+b+c+d=3$，证明

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b)\le 4$$（Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，我们假定$b+d\le a+c$。我们有

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b)$$

$$=(a+c)(bc+da)+(b+d)(ab+cd)$$

$$=(a+c)[(a+c)(b+d)-(ab+cd)]+(b+d)(ab+cd)$$

$$=(a+c)^2(b+d)+(ab+cd)(b+d-a-c)\le(a+c)^2(b+d)$$

最后，由 AM-GM 不等式，有

$$2(a+c)^2(b+d)=(a+c)(a+c)(2b+2d)\le 8\Leftrightarrow (a+c)(b+d)^2\le 4$$

等号成立的条件是$a=1,b=2,c=d=0$及其排列。

14、设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是任意实数，证明：$\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_i+a_j\right|\ge n\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|$（Iran TST 2006）

证明：把序列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$分解成两个非负子序列

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}\cup\{-c_1,-c_2,\cdots,-c_n\},$$

满足$n=r+s, b_i\ge 0\ i\in\{1,2,\cdots,r\}, c_j>0\ \ j\in\{1,2,\cdots,s\}$。

设$R=\sum_{i=1}^{r}b_i, S=\sum_{j=1}^{s}c_j$，则不等式变成

$$2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left|b_i-c_j\right|+2r\sum_{i=1}^{r}b_i+2s\sum_{j=1}^{s}c_j\ge n\left(\sum_{i=1}^{r}b_i+\sum_{j=1}^{s}c_j\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left|b_i-c_j\right|\ge (s-r)(R-S)$$

不失一般性，假设$s\ge r$，当然，我们只需考虑$R\ge S$的情况。所以

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left|b_i-c_j\right|\ge\sum_{i=1}^{r}(sb_i-S)=sR-rS$$

我们只需证明

$$2(sR-rS)\ge(s-r)(R-S)\Leftrightarrow S(s-r)+r(R-S)+sR-rS\ge 0$$

这是显然成立的，因为$s\ge r, R\ge S$。等号当且仅当$\left|a_1\right|=\left|a_2\right|=\cdots=\left|a_n\right|$并且集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中的负项的个数和非负项的个数相等。

15、设$a,b,c\ge 0$，证明：

$$3(a+b+c)\ge 2(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab})$$（Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，我们假定$a\ge b\ge c$。因此

$$\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\le\sqrt{2(b^2+c^2)+2a(b+c)}$$

于是，我们只需证明

$$2\sqrt{2(b^2+c^2)+2a(b+c)}+2\sqrt{a^2+bc}\le 3(a+b+c)$$

设$s=\dfrac{b+c}{2}$，两边平方，不等式等价于

$$8(b^2+c^2+2as)\le 9(a+2s)^2+2(a^2+bc)-12(a+2s)\sqrt{a^2+bc}$$

$$\Leftrightarrow (a-2s)^2+20bc\ge 12(a+2s)\left(\sqrt{a^2+bc}-a\right)$$

显然，我们有

$$\sqrt{a^2+bc}-a=\frac{bc}{a+\sqrt{a^2+bc}}\le\frac{bc}{2a}$$

所以，只需证明

$$(a-2s)^2+20bc\ge\frac{6(a+2s)bc}{a}\Leftrightarrow (a-2s)^2+2bc+\frac{12(a-s)bc}{a}\ge 0$$

这是显然成立的，因为$a\ge s$。等号成立的条件是$a=b,c=0$或其排列。

16、设$a,b,c\ge 0$，证明：

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\ge\frac{10}{(a+b+c)^2}$$ （Vasile Cirtoaje,Nguyen Vient Anh）

证明：不失一般性，假设$c=\min(a,b,c)$，则

$$b^2+c^2\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2=x^2,$$

$$c^2+a^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2=y^2,$$

$$a^2+b^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2=x^2+y^2$$

于是，我们有

$$LHS \ge \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{x^2+y^2} \ge \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{(x+y)^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\ge \frac{6}{(x+y)^2}+\frac{(x+y)^2}{2(x^4+y^4)} \ge \frac{10}{(x+y)^2},$$

我们利用 Holder 不等式，有：$(x+y)(x+y)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \ge 8$。等号成立的条件是 $a=b,c=0$ 或其排列。

注意：这个解答可以帮助我们创建更多的一般的不等式。

◆设 $a_1,a_2,\cdots,a_n \ge 0$，求满足下列不等式的最大常数 k。

$$\frac{1}{a_2^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\frac{1}{a_1^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}+\cdots+\frac{1}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2} \ge \frac{k}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}$$

不失一般性，假设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$。记 $a=a_1+\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n}a_i, b=a_2+\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n}a_i$，显然

$a_1^2+\sum_{j=3}^{n}a_j^2 \le a^2; a_2^2+\sum_{j=3}^{n}a_j^2 \le b^2$，并且对所有 $k \in \{3,4,\cdots,n\}$，有

$$a_1^2+a_2^2+\sum_{j=1, j\ne k}^{n}a_j^2 \le a^2+b^2。$$

$a_3=a_4=\cdots=a_n=0$ 的情况使得上面的不等式成立等号。因此只需证明下列表达式对于正实数 a,b，满足 $a+b=1$，不等式成立即可。

$$A=\frac{n-2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

记 $x=a^2+b^2$ $(x \ge \frac{1}{2})$，则 $2ab=1-x$，因此

$$A=\frac{n-2}{x}+\frac{4x}{(1-x)^2}=f(x)$$

注意到 $x \ge \frac{1}{2}$，所以 $f'(x)=\frac{-n+2}{x^2}+\frac{4(1+x)}{(1-x)^3} \ge 0, n \le 14$。

所以，如果$n\in\{3,4,\cdots,14\}$，则我们有

$$f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=2n+4\Rightarrow k=2n+4$$

如果$n\le 15$，则方程$4x^2(1+x)-(n-2)(1-x)^3=0$恰有一个大于$\frac{1}{2}$的实根（因为$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$）。假设$x_0$是这个根，则

$$k=\min_{\frac{1}{2}\le x<1} f(x)=f(x_0)=\frac{n-2}{x_0}+\frac{4x_0}{(1-x_0)^2}。$$

使用类似的方法，我们可以证明下列问题

◆设$a,b,c,d>0$，证明

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3+c^3}+\frac{1}{a^3+d^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{b^3+d^3}+\frac{1}{c^3+d^3}\ge\frac{243}{2(a+b+c+d)^3}$$

17、设$a,b,c,d>0$，且满足$abcd=1$，证明:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)\ge(a+b+c+d)^2$$（Pham Kim Hung）

证明：由于$abcd=1$，则a,b,c,d中至少有两个数不小于 1 或者不大于 1。不失一般性，假设这两个数是b,d，则$(b-1)(d-1)\ge 0$，应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)=(1+a^2+b^2+a^2b^2)(c^2+1+d^2+c^2d^2)$$

$$\ge(c+a+bd+1)^2\ge(a+b+c+d)^2$$

等号成立的条件$a=b=c=d=1$

18、设$a,b,c>0$，且满足$a+b+c=1$，证明:

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}$$（Chinese MO 2006）

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc} a\cdot\sqrt{\frac{b}{a+c}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b}{(a+c)(a+b)^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$

使用加权 Jensen 不等式于凹函数 $f(x)=\sqrt{x}$，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b}{(a+c)(a+b)^2}} \le \sqrt{\sum_{cyc}\frac{2a^2b}{(a+b)(a+c)}}$$

于是，只需证明

$$\sum_{cyc}\frac{a^2b}{(a+b)(a+c)} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\sum_{cyc}a^2b(b+c) \le (a+b+c)\prod_{cyc}(a+b) \Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^2b^2 \le \sum_{cyc}a^3(b+c)$$

这是显然成立的。等号成立的条件是 $a=b=c=\frac{1}{3}$

19、设 $x,y,z\ge 0$，且满足 $x+y+z=1$，求下列表达式的最大值

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}+\frac{y-z}{\sqrt{y+z}}+\frac{z-x}{\sqrt{z+x}}$$ （Pham Kim Hung）

解：首先我们考虑 $\min(x,y,z)=0$ 的情况。不失一般性，假设 $z=0$，则 $x+y=1$，因此

$$\sum_{cyc}\frac{x-y}{\sqrt{x+y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{y}-\sqrt{x} = x-y+\sqrt{y}-\sqrt{x} = u(v-1)$$

其中 $u=\sqrt{x}-\sqrt{y}, v=\sqrt{x}+\sqrt{y}$， $u^2+v^2=2$

记 $u^2(v-1)^2=(2-v^2)(v-1)^2=f(v)$，我们有 $f'(v)=2(v-1)(2+v-2v^2)$

并且很容易得到 $\max\limits_{1\le v\le\sqrt{2}} f(v)=f\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)=\frac{71-17\sqrt{17}}{32}$

所以，当 $\min(x,y,z)=0$ 时，我们找到表达式的最大值是 $k=\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}$

这个结果也表明，如果 $\min(x,y,z)=0$，则

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}+\frac{y-z}{\sqrt{y+z}}+\frac{z-x}{\sqrt{z+x}} \le k\sqrt{x+y+z}$$ （*）

现在我们将证明（*）对于所有非负实数x,y,z（我们不需要条件$x+y+z=1$，因不等式是齐次的）都成立。记$c=\sqrt{x+y},b=\sqrt{x+z},a=\sqrt{y+z}$，则不等式变成如下形式

$$\frac{b^2-a^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b}\le\frac{k}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(b-c)(c-a)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cz}\right)\le\frac{k}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\quad(**)$$

不失一般性，假设$c=\max(a,b,c)$，如果$a\ge b$，则不等式显然成立；否则，假设$b\ge a$，由于$c^2\le b^2+a^2$，则存在一个唯一的实数$t\le a$，使得$a-t,b-t,c-t$构成一直角三角形的三条边，即$(a-t)^2+(b-t)^2=(c-t)^2$。显然，如果我们用$a-t,b-t,c-t$来替换a,b,c则（**）左边的表达式是增加的，而右边的表达式是减少的，所以我们只需考虑a,b,c是直角三角形三条边的情况，即$a^2+b^2=c^2$或者$z=0$。但$z=0$的情况，在上面我们已经讨论了。

20、设$x,y,z\in[-1,1]$，且满足$x+y+z=0$，证明：

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\ge3$$（Phan Thanh Nam）

证明：首先我们将证明，如果$ab\ge0$，则$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge1+\sqrt{1+a+b}$。

实质上，两边平方之后，不等式变成

$$2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge2+a+b+2\sqrt{1+a+b}\Leftrightarrow(1+a)(1+b)\ge1+a+b\Leftrightarrow ab\ge0$$

注意到$x+y^2,y+z^2,z+x^2$，至少有两个数具有相同的符号。不失一般性，我们假定$\left(x+y^2\right)\left(y+z^2\right)\ge0$，则我们有

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\ge1+\sqrt{1+x+y^2+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}$$

$$=1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1+z}\right)^2+x^2}\ge1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+\left(x+y\right)^2}$$

$$=1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2}$$

于是，只需证明

$$\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2\geq 4\Leftrightarrow 2z^2+2\sqrt{1+z^3}\geq 2\Leftrightarrow z^2(2-z)(z+1)\geq 0$$

这显然成立，因为$|z|\leq 1$。等号成立的条件是$x=y=z=0$

注意：使用类似的方法，我们可以证明四个实数的类似结果

◆设$x,y,z,t\in[-1,1]$，且满足$x+y+z+t=0$，证明：

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+t^2}+\sqrt{1+t+x^2}\geq 4$$

21、假设$a,b,c\ge 0$，且满足$ab+bc+ca=1$，证明：

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{2}$$（Berkeley Mathematics Circle）

证明：我们记$x=a+b+c,\ z=abc$，则不等式变成

$$2\sum_{cyc}(a+b)(a+c)\ge 5\prod_{cyc}(a+b)\Leftrightarrow 6+2\sum_{cyc}a^2\ge 5\left(a+b+c-abc\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2+5z\ge 0\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)+5z\ge 0$$

如果$x\ge 2$，则不等式显然成立。否则，假定$x<2$，由于

$$\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)=\left(2x-a\right)\left(2x-b\right)\left(2x-c\right)\le abc$$

我们得到 $9z\ge 4x-x^3$。于是，只需证明

$$\left(x-2\right)\left(2x-1\right)+5\frac{4x-x^3}{9}\ge 0\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left[18x-9-5x\left(2+x\right)\right]\ge 0$$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(-5x^2+8x-9\right)\ge 0$，这是成立的，因为$x\le 2$。等号成立的条件是$a=b=1,c=0$或其排列。

注意：我们有下列类似的漂亮的结果

◆设$a,b,c\ge 0$，且$ab+bc+ca=1$，证明

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c}\ge 3$$

证明：如果$a+b+c\le 2$，则由上面的结果可知，不等式成立。现在我们假定$a+b+c\ge 2$并且$a\ge b\ge c$，则

$$\frac{1}{a+b+c}+\sum_{cyc}\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{b+c}+\frac{ab+bc+ca}{c+a}+\frac{1}{a+b+c}$$

$$=\frac{1}{a+b}+a+b+\frac{c(1+ab)}{1+c^2}+\frac{1}{a+b+c}\ge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}+\left(a+b+c\right)$$

$$\ge\left(\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{4}\right)+\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{4}\right)+\frac{a+b+c}{2}\ge 1+1+1=3$$

等号成立的条件是$a=b=1,c=0$或其排列。

22、证明下列不等式

$$\left(\sqrt{2}\right)^n(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdots(a_n+a_1)\le(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)\cdots(a_n+a_1+a_2)$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$是任意正实数（Russia MO）

证明：根据下列不等式

$$(a_1+a_2+a_3)^2\ge(2a_1+a_2)(a_2+2a_3)$$

$$(2a_1+a_2)(2a_2+a_1)=2a_1^2+2a_2^2+5a_1a_2\ge 2(a_1+a_2)^2,$$

我们立即可以得出结果，因为

$$2^n\prod_{cyc}(a_1+a_2)^2\le\prod_{cyc}(2a_1+a_2)(2a_2+a_1)=\prod_{cyc}(2a_1+a_2)(a_2+2a_3)$$
$$\le\prod_{cyc}(a_1+a_2+a_3)^2$$

23、设$a,b,c\ge 0$，且$a+b+c=3$，证明：

$$\frac{ab+bc+ca}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{36}$$（Pham Kim Hung，MYM）

证明：不失一般性，我们假定$a\ge b\ge c$。记

$$f(a,b,c)=36(ab+bc+ca)-(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$$

我们将证明$f(a,b,c)\ge f(a,b+c,0)$。事实上，

$$a^3+b^3+c^3\le a^3+(b+c)^3;\ a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\le a^3(b+c)^3$$

$$\Rightarrow(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)\le\left[a^3+(b+c)^3\right]a^3(b+c)^3$$

另外$ab+bc+ca\ge a(b+c)$，于是我们有$f(a,b,c)\ge f(a,b+c,0)$。于是只需证明不等式在$c=0$的条件下成立。

$$36ab\ge a^3b^3(a^3+b^3)\Leftrightarrow 36\ge a^2b^2(a^3+b^3)$$

令$x=ab$，则不等式等价于

$$x^2(27-9x)\le 36\Leftrightarrow\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot(3-x)\le 1$$

由 AM-GM 不等式可知，这是成立的。等号成立的条件是

$c=0,a+b=3,ab=2\Leftrightarrow a=2,b=1,c=0$及其排列。

24、设实数 a,b,c,d 满足 $(1+)a^2(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)=16$，证明

$-3\le ab+bc+ca+da+ac+bd-abcd\le 5$（Titu Abdreescu and Gabriel Dospinescu）

证明：我们记 $S=ab+bc+ca+da+ac+bd-abcd$，则

$S-1=(1-ab)(cd-1)+(a+b)(c+d)$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$(S-1)^2\le\left[(1-ab)^2+(a+b)^2\right]\left[(1-cd)^2+(c+d)^2\right]$$

$$=(1+)a^2(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)=16$$

因此 $|S-1|\le 4\Leftrightarrow -3\le S\le 5$。等号成立的条件是 $(a,b,c,d)=(1,-1,1,-1),(1,1,1,1)$ 等等

25、设 a,b,c,d 是正实数，且满足 $abcd=1$，证明

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1$$（China TST 2004）

证明：首先注意到，对任何非负实数 x,y，我们有

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{1}{1+xy}$$

展开，上面的不等式等价于

$$(2+2x+2y+x^2+y^2)(1+xy)\ge(1+2x+x^2)(1+2y+y^2)$$

$$\Leftrightarrow xy(x^2+y^2)+1\ge 2xy+x^2y^2\Leftrightarrow(xy-1)^2+xy(x-y)^2\ge 0$$

设 $m=ab,n=cd\Rightarrow mn=1$，因此

$$\frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+n}=\frac{m+n+2}{(m+1)(n+1)}=1$$

使用上面两个结果，我们有

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge\frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+n}=1$$

等号成立的条件是 $a=b=c=d=1$

注意：（1）我们也可以使用 Cauchy-Schwarz 不等式来证明这个问题。实质上，存在四

个正实数s,t,u,v满足$a=\frac{stu}{v^3},b=\frac{tuv}{s^3},c=\frac{uvs}{t^3},d=\frac{vst}{u^3}$，则不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{v^6}{\left(v^3+stu\right)^2}\ge 1$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，只需证明

$$\left(\sum_{cyc}v^3\right)^2\ge\sum_{cyc}\left(v^3+stu\right)^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}v^3(s^3+t^3+u^3)\ge 2\sum_{cyc}v^3stu+\sum_{cyc}s^2t^2u^2$$

这最后的不等式是从下列结果得到的

$$\sum_{cyc}v^3(s^3+t^3+u^3)\ge 3\sum_{cyc}v^3stu\text{；}$$

$$\sum_{cyc}v^3(s^3+t^3+u^3)=\sum_{cyc}\left(s^3t^3+t^3u^3+u^3s^3\right)\ge 3\sum_{cyc}s^2t^2u^2$$

等号成立的条件是$s=t=u=v$或者$a=b=c=d=1$

（2）前面的证明方法启发我们创建了一个类似的结果

◆设$a_1,a_2,\cdots,a_9$是正实数，且满足$a_1a_2\cdots a_9=1$，证明:

$$\frac{1}{(2a_1+1)^2}+\frac{1}{(2a_2+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2a_9+1)^2}\ge 1$$

另外，这个问题的一般形式（使用相同的方法证明）如下

◆设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正实数，且满足$a_1a_2\cdots a_n=1$，对于$k=\sqrt{n}-1$，证明

$$\frac{1}{(ka_1+1)^2}+\frac{1}{(ka_2+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(ka_n+1)^2}\ge 1$$

26、设a,b,c是正实数，证明:

$$\frac{a+2b}{c+2b}+\frac{b+2c}{a+2c}+\frac{c+2a}{b+2a}\ge 3$$（Pham Kim Hung）

证明：通过展开，不等式等价于

$$\sum_{cyc}(a+2b)(a+2c)(b+2a)\ge 3\prod_{cyc}(c+2b)\Leftrightarrow 2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

结合三次 Schur 不等式和 AM-GM 不等式，得到

$$2\sum_{cyc}a^3+3abc-3\sum_{cyc}a^2b=3abc+\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}a^2\left(b+c\right)+\sum_{cyc}\left(a^3+ab^2-2a^2b\right)\ge 0$$

等号成立的条件是$a=b=c$

27、设a,b,c是正实数，证明

$$\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$$（Phan Thanh Viet）

证明：注意到

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=\frac{3abc}{a+b+c}+a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

因此，不等式可以写成如下的形式

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}-a^2+ab\right)\ge\frac{3abc}{a+b+c}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{3abc}{a+b+c}$$

根据Cauchy-Schwarz不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}=\sum_{cyc}\frac{b^2}{1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}}=\frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}$$

于是只需证明

$$\frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}\ge\frac{3abc}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$$这是显然成立的

等号成立的条件是$a=b=c$

28、证明对所有非负实数a,b,c

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge2(ab+bc+ca)$$（Darij Grinberg）

证明：我将给出上面不等式的四个证明方法。

（1）把不等式转化为a的二次函数

$$f(a)=a^2+2(bc-b-c)a+(b-c)^2+1$$

（i）如果$bc-b-c\ge0$，则不等式显然成立。

（ii）如果$bc-b-c\le0$，则$(b-1)(c-1)\le1$，注意到

判别式$\frac{1}{4}\Delta=(bc-b-c)^2-(b-c)^2-1=bc(b-2)(c-2)-1$

如果b和c都小于2，则由AM-GM不等式，我们有

$$b(2-b)\le1,c(2-c)\le1\Rightarrow\Delta\le0$$

否则，假设$b\geq 2$，则$c\leq 2$，显然$\Delta\leq 0$

（2）我们记$k=a+b+c$，根据不等式

$$abc\geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=(k-2a)(k-2b)(k-2c)$$

我们有

$$4(ab+bc+ca)-k^2\leq \frac{9abc}{k} \qquad (*)$$

于是，不等式等价于

$$(a+b+c)^2+2abc+1\geq 4(ab+bc+ca)\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)-k^2\leq 1+2abc$$

根据（*），我们只需证明

$$\left(\frac{9}{k}-1\right)abc\leq 1$$

如果$9\leq 2k$，则不等式显然成立。否则，由 AM-GM 不等式，我们有

$$\left(\frac{9}{k}-2\right)abc\leq \left(\frac{9}{k}-2\right)\frac{k^3}{27}=\frac{(9-2k)\cdot k\cdot k}{27}\leq 1$$这是显然成立的。

等号成立的条件是$a=b=c=1$

（3）由于$2abc+1\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$，于是只需证明

$$x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2\geq 2\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\right)$$

这里$a=x^3,b=y^3,c=z^3$。根据 Schur 不等式，我们有

$$3x^2y^2z^2+\sum_{cyc}x^6\geq \sum_{cyc}x^4\left(y^2+z^2\right)=\sum_{cyc}x^2y^2\left(x^2+y^2\right)\geq 2\sum_{cyc}x^3y^3$$

（4）不等式变形如下

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 2(a-1)(b-1)(c-1)$$

如果a,b,c都小于 1，则不等式显然成立。否则，假设$c\leq 1$，由 AM-GM 不等式，我们有

$$(a-1)^2+(b-1)^2\geq 2\left|(a-1)(b-1)\right|\geq 2\left|(a-1)(b-1)\right|(1-c)\geq 2(a-1)(b-1)(1-c)$$

注意：我们有下列类似的不等式

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq (1+a)(1+b)(1+c)$$

29、设a,b,c是正实数，且满足$a^2+b^2+c^2=3$，证明：

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3$$（Pham Kim Hung）

证明:（1）(我们使用 Cauchy-Schwarz 不等式）不等式等价于

$$\left(\frac{1}{2-a}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2-b}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2-c}-\frac{1}{2}\right)\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\ge 3$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^4}{2a^3-a^4}+\frac{b^4}{2b^3-b^4}+\frac{c^4}{2c^3-c^4}\ge 3$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$LHS\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}=\frac{9}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

由于$2\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}a^4\le\sum_{cyc}a^2=3$，所以不等式成立。

（2）(我们使用 Cauchy 求反技术）注意到$a\left(2-a\right)\le 1$，所以

$$\frac{1}{2-a}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2\left(2-a\right)}=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2a\left(2-a\right)}\ge\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}$$

于是

$$\sum_{cyc}\frac{1}{2-a}\ge\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}a^2=3$$

等号成立的条件是$a=b=c=1$

30、设a,b,c,d是非负实数，证明

$$\left(1+\frac{2a}{b+c}\right)\left(1+\frac{2b}{c+d}\right)\left(1+\frac{2c}{d+a}\right)\left(1+\frac{2d}{a+b}\right)\ge 9$$（Vasile Cirtoaje）

证明：不等式改写成其他形式

$$\left(1+\frac{a+c}{a+b}\right)\left(1+\frac{a+c}{c+d}\right)\left(1+\frac{b+d}{b+c}\right)\left(1+\frac{b+d}{a+d}\right)\ge 9$$

对所有正实数x,y，很容易看到

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge\left(1+\frac{2}{x+y}\right)^2$$

因此，我们有

$$\left(1+\frac{a+c}{a+b}\right)\left(1+\frac{a+c}{c+d}\right)\ge\left(1+\frac{2(a+c)}{a+b+c+d}\right)^2,$$

$$\left(1+\frac{b+d}{b+c}\right)\left(1+\frac{b+d}{a+d}\right)\ge\left(1+\frac{2(b+d)}{a+b+c+d}\right)^2$$

于是，只需证明

$$\left(1+\frac{2(a+c)}{a+b+c+d}\right)\left(1+\frac{2(b+d)}{a+b+c+d}\right)\ge 3$$

这是显然成立的。等号成立的条件是 $a=c=0,b=d$ 或者 $a=c,b=d=0$

注意：下面是一般结果

◆设 a,b,c,d,k 是非负实数，证明

$$\left(1+\frac{ka}{b+c}\right)\left(1+\frac{kb}{c+d}\right)\left(1+\frac{kc}{d+a}\right)\left(1+\frac{kd}{a+b}\right)\ge(k+1)^2$$

这个不等式可以由下面两个不等式得到:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\ge 2\ (*);\quad \sum_{cyc}\frac{ab}{(b+c)(c+d)}\ge 1\ (**);$$

注意到（*）是前面章节已经证明过的四变量 Nesbitt 不等式。为了证明（**），注意到（展开）它等价于

$$\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}a^3b+\sum_{cyc}abc^2\ge\sum_{cyc}a^2bc$$

这个不等式是成立的，因为

$$\sum_{cyc}a^3b+\sum_{cyc}abc^2\ge 2\sum_{cyc}a^2bc$$

我们有等号成立的条件是 $a=c,b=d=0$ 或者 $a=c=0,b=d$

31、设 a,b,c 是非负实数，证明

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$$ （Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，假设 $a\ge b\ge c$。记 $t=\sqrt{b^2+c^2}$ 以及

$$f(a,b,c)=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}-\frac{6}{ab+bc+ca}$$

我们有

$$f(a,b,c)-f(a,t,0)=\frac{c^2}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+t^2\right)}-\frac{c^2}{a^2\left(a^2+c^2\right)}+\frac{6}{a\sqrt{b^2+c^2}}-\frac{6}{ab+bc+ca}$$

$$\geq\frac{6a\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)}{a\sqrt{b^2+c^2}(ab+bc+ca)}-\frac{c^2}{a^2\left(a^2+c^2\right)}\geq\frac{6bc}{(b+c)\sqrt{b^2+c^2}(ab+bc+ca)}-\frac{c^2}{a^2\left(a^2+c^2\right)}$$

$$\geq\frac{6bc}{\sqrt{2}\left(b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)}-\frac{bc}{a^2\left(a^2+c^2\right)}\geq 0$$

因为

$$3\sqrt{2}a^2\left(a^2+c^2\right)\geq(ab+bc+ca)\left(b^2+c^2\right)$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$f(a,t,0)=\frac{9}{a^2+t^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{t^2}-\frac{6}{at}=\frac{9}{a^2+t^2}+\frac{a^2+t^2}{a^2t^2}-\frac{6}{at}\geq 0$$

因此，不等式成立。等号成立的条件是 $(a,b,c)=\left(\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},1,0\right)$

32、设 a,b,c,k 是正实数，且 $k\geq\frac{3}{2}$。证明

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\geq\frac{1}{2}\left(a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}\right)$$ （Vasile Cirtoaje and Pham Kim Hung）

证明：我将给出两个证明方法。

（1）（Cauchy 求反技术）不等式等价于

$$\sum_{cyc}\left(a^{k-1}-\frac{a^k}{a+b}\right)\leq\frac{1}{2}\sum_{cyc}a^{k-1}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^{k-1}b}{a+b}\leq\frac{1}{2}\sum_{cyc}a^{k-1}$$

注意到

$$\sum_{cyc}\frac{a^{k-1b}}{a+b}\leq\sum_{cyc}\frac{a^{k-1}b}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}a^{k-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}$$

于是只需证明

$$\sum_{cyc} a^{k-\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \le \sum_{cyc} a^{k-1}$$

根据 AM-GM 不等式，对$2k-2$个变量以及$k \ge \frac{3}{2}$，我们有

$$(2k-2)\sum_{cyc} a^{k-1} = \sum_{cyc}\left[(2k-3)a^{k-1}+b^{k-1}\right] \ge \sum_{cyc}(2k-2)a^{k-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}$$

（2）不等式等价于

$$\frac{a^{k-1}(a-b)}{a+b}+\frac{b^{k-1}(b-c)}{b+c}+\frac{c^{k-1}(c-a)}{c+a} \ge 0$$

注意到，对所有正实数a,b，我们有

$$\frac{a^{k-1}(a-b)}{a+b} \ge \frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{2(k-1)} \quad (*)$$

实质上，这可以由 AM-GM 不等式得到

$$(2k-3)a^k+b^k+ab^{k-1} \ge (2k-1)a^{k-1}b$$

根据（*），我们可以得到

$$\sum_{cyc}\frac{a^{k-1}(a-b)}{a+b} \ge \sum_{cyc}\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{2(k-1)} = 0$$

等号成立的条件是$a=b=c$

33、设a,b,c是非负实数，且满足$a+b+c=3$，证明

$$a\sqrt{1+b^3}+b\sqrt{1+c^3}+c\sqrt{1+a^3} \le 5 \text{（Pham Kim Hung）}$$

证明：由 AM-GM 不等式，我们有

$$\sum_{cyc} a\sqrt{1+b^3} = \sum_{cyc} a\sqrt{(1+b)(1-b+b^2)} \le \frac{1}{2}\sum_{cyc} a(1+b^2)$$

于是只需证明

$$ab^2+bc^2+ca^2 \le 4$$

不失一般性，我们假定b是a,b,c中的中间值。则

$a(b-a)(b-c)\le 0 \Leftrightarrow ab^2+a^2c\le abc+a^2b$，于是只需证明

$ab^2+bc^2+ca^2\le 4 \Leftrightarrow b\left(a^2+ac+c^2\right)\le 4$

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$b\left(a^2+ac+c^2\right)\le b(a+c)^2=4b\cdot\frac{a+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\le 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=4$$

等号成立的条件是 $a=1,b=2,c=0$ 及其排列。

34、设 a,b,c 是正实数，且满足 $a+b+c=1$，证明:

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{b}-1}}+\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{c}-1}}+\frac{c}{\sqrt{\frac{1}{a}-1}}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$$（Do Hoang Giang）

证明：不等式等价于

$$P=\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{(a+c)(a+b)}\cdot\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

不失一般性，假设 $a=\min(a,b,c)$，考虑下列情况

（i）如果 $a\le b\le c$，则有

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}\le\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\le\frac{bc}{(c+a)(a+b)};$$

$$\frac{a}{(a+c)(a+b)}\le\frac{b}{(a+b)(b+c)}\le\frac{c}{(b+c)(c+a)};$$

所以，根据排序不等式，我们有

$$P\le\sqrt{\frac{a^2b}{(a+b)(a+c)^2(b+c)}}+\sqrt{\frac{abc}{(a+b)^2(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{bc^2}{(c+a)^2(a+b)(b+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{abc}{(a+b)^2(b+c)^2}}+\frac{b}{(a+b)(b+c)}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$

$$\le\sqrt{3\left[\frac{abc}{(a+b)^2(b+c)^2}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{b}{(a+b)(b+c)}\right]}$$（因为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3(x+y+z)}$）

于是只需证明

$$\frac{abc}{(a+b)^2(b+c)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{(a+b)(b+c)}\ge\frac{9}{16}\Leftrightarrow(3ac-b)^2\ge0$$

（ii）如果$a\le c\le b$，我们有

$$\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\le\frac{ab}{(b+c)(c+a)}\le\frac{bc}{(c+a)(a+b)};$$

$$\frac{a}{(a+c)(a+b)}\le\frac{c}{(b+c)(c+a)}\le\frac{b}{(a+b)(b+c)};$$

所以，根据排序不等式，我们有

$$P\le\sqrt{\frac{a^2c}{(a+c)(a+b)^2(b+c)}}+\sqrt{\frac{abc}{(a+c)^2(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^2c}{(a+c)(a+b)^2(b+c)}}$$

$$\le\sqrt{3\left[\frac{abc}{(a+c)^2(b+c)^2}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{c}{(b+c)(c+a)}\right]}$$

于是只需证明

$$\frac{abc}{(a+c)^2(b+c)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{(b+c)(c+a)}\le\frac{9}{16}\Leftrightarrow(3ab-c)^2\ge0$$

等号成立的条件是$a=b=c=\frac{1}{3}$

35、设a,b,c是非负实数，且满足$a^2+b^2+c^2=1$。证明：$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\ge3$

证明:（这个问题将给出两个证法）

（1）如果左边的每一个分式都大于或等于1，则不等式显然成立。否则，我们假定

$$x=\frac{a}{a^3+bc}\le1\Rightarrow a\le a^3+bc$$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\ge\frac{4}{b^2+c^2+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}}=\frac{4}{1+y}$$

这里$y=\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a^2$。注意到关系$x\ge y$，不等式等价于

$$(a^3+bc)(b^2+c^2-abc)\le bc\Leftrightarrow a^3(1-a^2-abc)\le bc(a^2+abc)$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(1-a^2\right)\le bc\left(a^3+a+bc\right)$$

这是显然成立的，因为 $a\left(1-a^2\right)\le bc$ ，于是我们有

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\ge x+\frac{4}{1+x}=\left(x+1\right)+\frac{4}{x+1}-1\ge 3$$

等号成立的条件是 $a=1,b=c=0$ 及其排列。

（2）我们记 $x=\frac{bc}{a},y=\frac{ac}{b},z=\frac{ab}{c}$ ，所以，我们有 $xy+yz+zx=a^2+b^2+c^2=1$。于是只需证明

$$\frac{1}{x+yz}+\frac{1}{y+xz}+\frac{1}{z+xy}\ge 3$$

记 $s=x+y+z,p=xyz$ ，注意到

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x+yz}\ge\frac{9}{x+y+z+xy+yz+zx}=\frac{9}{s+1}$$

如果 $s\le 2$ ，则不等式显然成立。现在考虑 $s\ge 2$ 的情况。展开整理，不等式等价于

$$s+7sp\ge 2+3p^2+3ps^2\Leftrightarrow\left(s-2\right)\left(1-3sp\right)+p\left(s-3p\right)\ge 0$$

这是显然成立的，因为 $s\ge 2,1\ge 3sp,s\ge 3p$ 。

36、设 a,b,c 是非负实数，证明

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}}\ge 4$$（Pham Kim Hung）

证明：应用 Holder 不等式，我们有

$$\left(\sum_{cyc}\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}}\right)^2\left(\sum_{cyc}\left(b+c\right)\left(a^2+bc\right)\right)\ge 8\left(\sum_{cyc}a\right)^3$$

因此，只需证明

$$\left(a+b+c\right)^3\ge 4\sum_{cyc}a^2\left(b+c\right)\Leftrightarrow 6abc+\sum_{cyc}a^3\ge\sum_{cyc}a^2\left(b+c\right)$$

这是成立的，因为这可由三次 Schur 不等式得到

$$3abc+\sum_{cyc}a^3\ge\sum_{cyc}a^2\left(b+c\right)$$

等号成立的条件是$a=b,c=0$及其排列。

注意：使用相同的方法，我们可以证明下列不等式

◆设a,b,c是非负实数，且满足$a+b+c=2$，证明

$$\frac{a}{\sqrt{3+b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{3+c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{3+a^2+b^2}}\ge 1$$

37、设a,b,c是非负实数，且满足$a^2+b^2+c^2+abc=4$，证明：

$2+abc\ge ab+bc+ca\ge abc$（USA MO 2001）

证明：为证明右边的不等式，仅注意到a,b,c中至少有一个，比如说是a，不大于 1。

因此我们有$ab+bc+ca\ge bc\ge abc$。等号成立的条件是$(a,b,c)=(0,0,2)$及其排列。

为证明左边的不等式，注意到a,b,c中必有两个数，比如说a,b，或者不小于 1，或者不大于 1. 因此$b(a-1)(c-1)\ge 0\Leftrightarrow abc+b\ge ab+bc$。于是只需证明$2\ge ac+b$。

从假设条件我们有

$$a^2+c^2+b(ac+b)=4\Rightarrow 2ac+b(ac+b)\le 4\Rightarrow (b+2)(ac+b-2)\le 0$$

因此，$ac+b\le 2$。等号成立的条件是$a=b=c=1$

38、设a,b,c是非负实数，证明：

$$\sqrt{\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}}\ge 3$$（Vo Quoc Ba Can, Vu Dinh Quy）

证明：不失一般性，假设$a\ge b\ge c$。首先我们将证明

$$\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{c^2+a^2}}\ge\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$$

实质上，这个不等式等价于

$$\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{c^2+a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(a+b)(ab-c)^2}{ab(c^2+a^2)(b^2+c^2)}\ge 0$$

这是成立的，因为$a\ge b\ge c$。利用这个结果，我们有

$$\sqrt{\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}}\ge\sqrt{\frac{c^2+a^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}$$

$$\ge\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}$$

我们记 $x=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\ge 2$。如果 $x\ge 3$，则不等式显然成立。否则，假设 $x\le 3$，我们只需证明

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}=x+\sqrt{\frac{2}{x^2-2}}\ge 3$$

因为

$$\frac{2}{x^2-2}-(3-x)^2=\frac{(x-2)^2\left(-x^2+2x+5\right)}{x^2-3}\ge 0$$

等号成立的条件是 $a=b,c=0$ 及其排列。

39、设 a,b,c 是三个不同的正实数，证明:

$$\frac{1}{\left|a^2-b^2\right|}+\frac{1}{\left|b^2-c^2\right|}+\frac{1}{\left|c^2-a^2\right|}+\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{28}{(a+b+c)^2}$$ （Pham Kim Hung）

证明: 不失一般性，我们假设 $a>b>c$，注意到

$$\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2-c^2}+\frac{1}{c^2-a^2}+\frac{8}{a^2+b^2+c^2}-\left(\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{8}{a^2+b^2}\right)$$

$$=c^2\left[\frac{1}{a^2\left(a^2-c^2\right)}+\frac{1}{b^2\left(b^2-c^2\right)}-\frac{8}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2\right)}\right]$$

$$\ge c^2\left[\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}-\frac{8}{\left(a^2+b^2\right)^2}\right]\ge 0$$

右边的表达式是 c 的减函数，于是只需证明不等式在 $c=0$ 时成立即可。

$$\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{8}{a^2+b^2}\ge\frac{28}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{16ab}{a^2+b^2}+\frac{a+b}{a-b}\geq 18$$

因为不等式是齐次的，我们可以假设$a>b\geq 1$，于是不等式变成

$$2\left(a+\frac{1}{a}\right)+a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{16a}{a^2+1}+\frac{a-1}{a+1}\geq 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a-1)^4}{a}+\frac{\left(a^2-1\right)^2}{a^2}-\frac{8(a-1)^2}{a^2+1}+\frac{a-1}{a+1}\geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a-1)^4}{a\left(a^2+1\right)}+\frac{(a-1)^4(a+1)^2}{a^2\left(a^2+1\right)}+2(a-1)^2+\frac{a-1}{a+1}\geq 4$$

如果$a\leq\frac{5}{3}$，则$\frac{a-1}{a+1}\geq 4$，不等式显然成立。否则，我们有$a\geq\frac{4}{3}$。根据 AM-GM 不等式，我们有

$$2(a-1)^2+\frac{a+1}{a-1}=2(a-1)^2+\frac{a+1}{2(a-1)}+\frac{a+1}{2(a-1)}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)^2}{2}}\geq 4$$

等号不能达到。

40、求出对所有正实数a,b,c下列不等式都成立的最好的常数k。

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}+\frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 8+k$$ （Pham Kim Hung）

解：我们有

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}-8=\frac{c(a-b)^2+a(b-c)^2+b(c-a)^2}{abc}$$

$$1-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

所以我们只需求出正常数k满足条件

$$\sum_{sym}(a-b)^2\left[\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab}-k\right]\geq 0\Leftrightarrow\sum_{sym}(a-b)^2 S_c\geq 0$$ （*）

其中S_a,S_b,S_c由下列表达式定义

$$S_a = 2a\left(a^2+b^2+c^2\right)-kabc，$$

$$S_b = 2b\left(a^2+b^2+c^2\right)-kabc，$$

$$S_c = 2c\left(a^2+b^2+c^2\right)-kabc。$$

（i）必要条件。如果$b=c$，我们有$S_b=S_c$；因此如果（*）成立，我们必定有

$$S_b \ge 0 \Leftrightarrow 2\left(a^2+2b^2\right)\ge kab$$

由 AM-GM 不等式，我们找到最好的正常数k是$4\sqrt{2}$

（ii）充分条件：对于$k\le 4\sqrt{2}$，我们将证明不等式总是成立的。不失一般性，我们假定$a\ge b\ge c$，则$S_a\ge S_b\ge S_c$。当然，$S_a=2a\left(a^2+b^2+c^2\right)-kabc\ge 0$。设$x=\sqrt{bc}$，则

$$S_b+S_c=2(b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)-2kabc\ge 4x\left(a^2+2x^2\right)-2kax^2=4x\left(a-\sqrt{2}x\right)^2\ge 0$$

于是，我们有

$$\sum_{cyc}S_a(b-c)^2\ge\left(S_b+S_c\right)(a-b)^2\ge 0$$

结论：最好的正常数k值是$4\sqrt{2}$。如果$k=4\sqrt{2}$，等号成立的条件是$a=b=c$或者$a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$及其排列。如果$k<4\sqrt{2}$，等号成立的条件是$a=b=c$。

41、设a,b,c是正实数，且满足条件$a+b+c+abc=4$，证明：

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$$（Cezar Lupu）

证明：首先我们将证明$a+b+c\ge ab+bc+ca$。事实上，不失一般性，我们可以假定$c\ge b\ge a$。我们只需证明

$$a+b-ab\ge\frac{4-a-b}{ab+1}(a+b-1)\Leftrightarrow(a+b-2)^2\ge ab(a-1)(b-1)$$

应用 AM-GM 不等式，我们立即可得

$$(a+b-2)^2\ge 4\left|(a-1)(b-1)\right|\ge ab\left|(a-1)(b-1)\right|。$$

回到我们的问题，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$c\sqrt{a+b}+a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}\le\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

因此，

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{c\sqrt{a+b}+a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}}\ge(a+b+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)}}$$

$$\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$$

等号成立的条件是$a=b=c=1$

42、（i）证明对所有非负实数a,b,c，我们有

$$\sqrt{\frac{2a^2+bc}{a^2+2bc}}+\sqrt{\frac{2b^2+ca}{b^2+2ca}}+\sqrt{\frac{2c^2+ab}{c^2+2ab}}\ge2\sqrt{2}$$

（ii）使用相同的条件，证明

$$\sqrt{\frac{a^2+2bc}{2a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b^2+2ca}{2b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c^2+2ab}{2c^2+ab}}\ge2\sqrt{2}$$ （Pham Kim Hung）

证明:（i）因为不等式是齐次的，我们可以假定$abc=1$。不等式变成

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}+\sqrt{\frac{2y+1}{y+2}}+\sqrt{\frac{2z+1}{z+2}}\ge2\sqrt{2}$$

其中$x=a^3,y=b^3,z=c^3,xyz=1$。不失一般性，假设$x\ge y\ge z$。设$t=\sqrt{yz}$，则$t\le1$。首先，注意到

$$\frac{(2y+1)(2z+1)}{(y+2)(z+2)}=\frac{4yz+2(y+z)+1}{yz+2(y+z)+4}\ge\frac{4t^2+4t+1}{t^2+4t+4}=\frac{(2t+1)^2}{(t+2)^2}$$

因此，应用AM-GM不等式，我们得到

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}+\sqrt{\frac{2y+1}{y+2}}+\sqrt{\frac{2z+1}{z+2}}\ge\sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}+2\sqrt{\frac{2t+1}{t+2}}=\sqrt{\frac{2+t^2}{2t^2+1}}+2\sqrt{\frac{2t+1}{t+2}}$$

于是，只需证明对所有$t\le1$

$$\sqrt{(2+t^2)(2+t)}+2\sqrt{(2t+1)(2t^2+1)}\ge2\sqrt{2(2t^2+1)(t+2)}$$

两边平方，并整理，我们有

$$t^3+2t+4\sqrt{(2+t^2)(2+t)(1+2t)(1+2t^2)}\ge22t^2+8$$

由于$t\le 1, 2t\ge 2t^2$，于是只需证明

$$\sqrt{\left(2+t^2\right)(2+t)(1+2t)\left(1+2t^2\right)}\ge 5t^2+2$$

这是成立的，因为由 Cauchy-Schwarz 不等式有$t+t^3\ge 2t^2$和

$$\sqrt{\left(2+t^2\right)(2+t)(1+2t)\left(1+2t^2\right)}\ge\sqrt{\left(4+5t^2\right)\left(1+5t^2\right)}\ge 2+5t^2$$

（ii）这第二个不等式可以从第一个不等式得到：$bc=x^2, ca=y^2, ab=z^2$。

等号成立的条件是$a=0, b=c$及其排列。

43、设x,y,z是非负实数，且满足$x+y+z=1$，证明：

$$\sqrt{x+\frac{(y-z)^2}{12}}+\sqrt{y+\frac{(z-x)^2}{12}}+\sqrt{z+\frac{(x-y)^2}{12}}\le\sqrt{3}$$（Phan Thanh Nam, VMEO 2004）

证明：设$z=\min\{x,y,z\}$，首先我们将证明，如果$u=y-z, v=x-z, k=\frac{1}{12}$，则

$$\sqrt{x+ku^2}+\sqrt{y+kv^2}\le\sqrt{2(x+y)+k(u+v)^2}$$

事实上，这个不等式等价于

$$2\sqrt{\left(x+ku^2\right)\left(y+kv^2\right)}\le x+y+2kuv\Leftrightarrow 4\left(x+ku^2\right)\left(y+kv^2\right)\le(x+y+2kuv)^2$$

$$\Leftrightarrow(x-y)^2+4xkv(u-v)+4yku(v-u)\ge 0\Leftrightarrow(x-y)^2+4k(u-v)(xv-yu)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)^2\left[1-4k(x+y-z)\right]\ge 0,$$

这是显然成立的。由上面的结果，我们有

$$LHS\le\sqrt{2(x+y)+\frac{(x+y-2z)^2}{12}}+\sqrt{z+\frac{(x-y)^2}{12}}$$

$$=\sqrt{2(1-z)+\frac{(1-3z)^2}{12}}+\sqrt{z+\frac{(x-y)^2}{12}}\le\sqrt{2(1-z)+\frac{(1-3z)^2}{12}}+\sqrt{z+\frac{(1-3z)^2}{12}}$$

$$=\frac{|5-3z|}{\sqrt{12}}+\frac{|1+3z|}{\sqrt{12}}=\sqrt{3}$$

等号成立的条件是 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$

注意：使用相同的条件，我们可以证明

$$\sqrt{x+(y-z)^2}+\sqrt{y+(z-x)^2}+\sqrt{z+(x-y)^2}\ge\sqrt{3}$$

44、设 x,y,z 是非负实数，且满足 $xy+yz+zx=1$，证明

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}\ge 2+\frac{1}{\sqrt{2}}$$ （Le Trung Kien）

证明：不失一般性，我们设 $x=\max(x,y,z)$。记 $a=y+z>0$，则显然，$ax=1-yz<1$。

考虑函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}=\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\sqrt{\frac{2x+y+z+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{2x+a+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}}$$

我们有

$$f'(x)=\frac{yz-x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3\left(2x+a+2\sqrt{x^2+1}\right)}}\le 0$$

所以 $f(x)$ 是减函数。于是

$$f(x)\ge f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a}{a^2+1}}$$

$$=\left(\sqrt{a}-1\right)^2\left[\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{2\sqrt{a\left(a^2+1\right)}+\sqrt{2}\left(a^2+1\right)}\right]+2+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

因为 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{2\sqrt{a\left(a^2+1\right)}+\sqrt{2}\left(a^2+1\right)}>0$ 所以 $f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{a}\right)\ge 2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

等号成立的条件是 $x=y=1,z=0$ 及其排列。

45、设a,b,c是正实数，证明

$$\left(2+\frac{a}{b}\right)^2+\left(2+\frac{b}{c}\right)^2+\left(2+\frac{c}{a}\right)^2\ge\frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$ （Pham Kim Hung）

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2}+4\sum_{cyc}\frac{a}{b}\ge\frac{9(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}+6$$

考虑以下恒等式

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(c-a)(c-b)}{ac};$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,$$

不等式变成如下形式

$$(a-b)^2M+(c-a)(c-b)N\ge0$$

其中$M=\dfrac{4}{ab}+\dfrac{(a+b)^2}{a^2b^2}-\dfrac{9}{ab+bc+ca}$， $N=\dfrac{4}{ac}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{a^2c^2}-\dfrac{9}{ab+bc+ca}$

注意到，如果$a\ge b\ge c$，则

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}\le\sum_{cyc}\frac{b}{a};\quad\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2}\le\sum_{cyc}\frac{b^2}{a^2}$$ （*）

所以，我们只需考虑$a\ge b\ge c$的情况，因为$a\ge b\ge c$的情况（*）应用之后将减小其值

$$N\ge\frac{5}{ac}+\frac{b}{ac^2}-\frac{9}{ab+bc+ca}>0;$$

$$M+N\ge\frac{8}{ab}+\frac{5}{ac}-\frac{18}{ab+bc+ca}>0;$$

设$k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，考虑下列情况

（i）$a-b\le k(b-c)$的情况。则我们有$(a-b)^2\le(a-c)(b-c)$，所以

$$(a-b)^2M+(c-a)(c-b)N\ge(a-b)^2(M+N)\ge0$$

（ii）$a-b\ge k(b-c)$的情况。只需证明$M\ge0$或者

$$\left(a^2+b^2+6ab\right)\left(ab+bc+ca\right)\ge 9a^2b^2$$

因为$\left(k+1\right)b-a\le kc$以及$k+1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，我们有

$$ab-\left(a-b\right)^2=\left[\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)b}{2}-a\right]\left[a-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)b}{2}\right]\le kc\left[a+\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)b}{2}\right]\le 2c\left(a+b\right)$$

因此

$$\left(a^2+b^2+6ab\right)\left(ab+bc+ca\right)-9a^2b^2\ge ab\left[\left(a^2-b^2\right)^2-ab\right]+c\left(a+b\right)^3$$

$$>c\left(a+b\right)^3-4abc\left(a+b\right)=c\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge 0。$$

等号成立的条件是$a=b=c$。

注意：在数学和青年杂志（2007 年第四期），我提出了下面稍微简单的不等式。

◆设a,b,c是正实数，证明：$\left(1+\dfrac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\dfrac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\dfrac{2c}{a}\right)^2\ge\dfrac{9\left(a+b+c\right)^2}{ab+bc+ca}$

46、设a,b,c是非负实数，且满足$a^2+b^2+c^2=3$，证明：

$$\frac{1}{3-ab}+\frac{1}{3-bc}+\frac{1}{3-ca}+\frac{1}{3-a^2}+\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}\ge 3$$（Pham Kim Hung）

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\left(\frac{3}{3-ab}-1\right)+\sum_{cyc}\left(\frac{3}{3-c^2}-1\right)\ge 3\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ab}{3-ab}+\sum_{cyc}\frac{c^2}{3-c^2}\ge 3$$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$LHS\ge\frac{\left(\sum_{cyc}ab+\sum_{cyc}c^2\right)^2}{3\left(\sum_{cyc}ab+\sum_{cyc}c^2\right)-\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}c^4}$$

因此，只需证明

$$\left(\sum_{cyc}ab+3\right)^2\ge 3\left[3\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}(a^2)^2+\sum_{cyc}a^2b^2+3\sum_{cyc}a^2\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}ab\right)^2+6\left(\sum_{cyc}ab\right)+9\geq 9\left(\sum_{cyc}ab\right)+3\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}ab\right)\geq\sum_{cyc}a^2(b-c)^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(a^2+b^2-c^2\right)(a-b)^2\geq 0$$

因为$\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}ab=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2$，记$S_a=b^2+c^2-a^2,S_b=c^2+a^2-b^2,S_c=a^2+b^2-c^2$。

假设$a\geq b\geq c$，则$S_a\leq S_b\leq S_c$，$(a-c)^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2$。还有，$S_a\geq 0$。

否则$ba^2\geq b^2>\frac{3}{2}$，不真。我们有

$$\sum_{cyc}\left(a^2+b^2-c^2\right)(a-b)^2=\sum_{cyc}S_a(b-c)^2\geq(S_a+S_b)(b-c)^2+(S_c+S_b)(a-b)^2$$

$$=2a^2(a-b)^2+2c^2(b-c)^2\geq 0。$$

等号成立的条件是$a=b=c=1$或者$a=b=\sqrt{\frac{3}{2}},c=0$及其排列。

47、设a,b,c是三个正实数，证明

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}}+\frac{1}{b\sqrt{b+c}}+\frac{1}{c\sqrt{c+a}}\geq\frac{3}{\sqrt{2abc}}$$ （Phan Thanh Nam, VMEO 2005）

证明：设$x=\sqrt{\frac{2bc}{a(a+b)}},y=\sqrt{\frac{2ca}{b(b+c)}},z=\sqrt{\frac{2ab}{c(c+a)}}$。我们只需证明$x+y+z\geq 3$。不过，我们可以证明下面更强的不等式

$$3\leq xy+yz+zx=\frac{2c}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}+\frac{2a}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}+\frac{2b}{\sqrt{(c+a)(a+b)}}$$

记$u=\sqrt{b+c},v=\sqrt{c+a},w=\sqrt{a+b}$。我们有

$$yz=\frac{w^2+v^2-u^2}{uv},zx=\frac{u^2+w^2-v^2}{vw},xy=\frac{v^2+u^2-w^2}{wu}$$

则不等式变成

$$v\left(v^2+u^2-w^2\right)+w\left(w^2+v^2-u^2\right)+u\left(u^2+w^2-v^2\right)\geq 3uvw$$

$$\Leftrightarrow\left(u^3+v^3+w^3\right)+\left(u^2v+v^2w+w^2u\right)\geq\left(v^2u+w^2v+u^2w\right)+3uvw$$

但

$$\left(v^3+u^2v\right)+\left(w^3+v^2w\right)+\left(u^3+w^2u\right)\geq 2\left(v^2u+w^2v+u^2w\right)$$

$$v^2u+w^2v+u^2w\geq 3uvw$$

等号成立的条件是 $a=b=c$

48、如果实数 a,b,c,x,y,z 满足条件 $(a+b+c)(x+y+z)=3$;

$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=4$，证明: $ax+by+cz\geq 0$（Mathlinks Contest）

证明: 设 $\alpha=\sqrt[4]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}}$ 和 $a_1=\dfrac{a}{\alpha},b_1=\dfrac{b}{\alpha},c_1=\dfrac{c}{\alpha},x_1=x\alpha,y_1=y\alpha,z_1=z\alpha$，则我们有

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{\alpha^2}=\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}=2,$$

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)\alpha^2=\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}=2$$

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1=ax+by+cz$$

则不等式变成

$$\left(a_1+x_1\right)^2+\left(b_1+y_1\right)^2+\left(c_1+z_1\right)^2\geq 4$$

依据下列关系

$$\left(a_1+b_1+c_1\right)\left(x_1+y_1+z_1\right)=(a+b+c)(x+y+z)=3$$

我们立即得到结果，因为

$$\left(a_1+x_1\right)^2+\left(b_1+y_1\right)^2+\left(c_1+z_1\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(a_1+b_1+c_1+x_1+y_1+z_1\right)^2$$

$$\geq\frac{4}{3}\left(a_1+b_1+c_1\right)\left(x_1+y_1+z_1\right)=4$$

49、设 a,b,c,d 是非负实数，且满足 $a+b+c+d=4$，证明:

$$\sqrt{\frac{a+1}{ab+1}}+\sqrt{\frac{b+1}{bc+1}}+\sqrt{\frac{c+1}{cd+1}}+\sqrt{\frac{d+1}{da+1}}\ge 4$$ （Pham Kim Hung）

证明：根据 AM-GM 不等式，我们有

$$LHS\ge 4\sqrt[4]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{(ab+1)(bc+1)(cd+1)(da+1)}}$$

于是只需证明

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\ge(ab+1)(bc+1)(cd+1)(da+1)$$

展开后，不等式变成

$$abcd+\sum_{sym}abc+\sum_{sym}ab+\sum_{sym}a+1\ge(abcd)^2+abcd\sum_{cyc}ab+\sum_{cyc}ab^2c+\sum_{cyc}ab+1+2abcd$$

$$4+ac+bd+\sum_{sym}abc\ge(abcd)^2+abcd+abcd\sum_{cyc}ab+\sum_{cyc}ab^2c$$

由条件 $a+b+c+d=4$ 可知 $abcd\le 1$，因此

$$ac+bd\ge 2\sqrt{abcd}\ge 2abcd\ge 2(abcd)^2\Rightarrow ac+bd\ge abcd+(abcd)^2$$ （*）

根据不等式 $(x+y+z+t)^2\ge 4(xy+yz+zt+tx)$，我们得到

$$16=\left(\sum_{cyc}a\right)^2\ge 4\sum_{cyc}ab\Rightarrow\sum_{cyc}ab\le 4\Rightarrow 16\ge\left(\sum_{cyc}ab\right)^2\ge 4\sum_{cyc}ab^2c\Rightarrow 4\ge\sum_{cyc}ab^2c$$ （**）

另外，我们还有

$$\left(\sum_{cyc}abc\right)^2\ge 4abcd\sum_{cyc}ab\Rightarrow\sum_{cyc}abc\ge abcd\sum_{cyc}ab$$ （***）

利用（*）(**）和（***)，即得所证不等式。

50、设 a,b,c 是非负实数，证明：$\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{c}{\sqrt{c+a}}\ge\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2}}$

证明：设 $x=\sqrt{a},y=\sqrt{b},z=\sqrt{c}$，则不等式变成

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^2+x^2}}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2x^4}{x^2+y^2}+\sum_{cyc}\frac{4x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}}\ge(x+y+z)^2$$

注意到$\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}+\frac{y^4-z^4}{y^2+z^2}+\frac{z^4-x^4}{z^2+x^2}=0$，因此

$$\frac{2x^4}{x^2+y^2}+\frac{2y^4}{y^2+z^2}+\frac{2z^4}{z^2+x^2}=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}+\frac{y^4+z^4}{y^2+z^2}+\frac{z^4+x^4}{z^2+x^2}$$

此外，下列序列排序相反

$$\left(\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y^2z^2}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z^2x^2}{\sqrt{z^2+x^2}}\right);\quad \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}}\right)$$

所以，由排序不等式我们有

$$\sum_{cyc}\frac{4x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\geq\sum_{cyc}\frac{4x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{4x^2y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)}}\geq\sum_{sym}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}$$

于是只需证明

$$\sum_{cyc}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}+\sum_{cyc}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}\geq\left(x+y+z\right)^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x^2+y^2}{2}+\sum_{cyc}\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\geq 2\sum_{cyc}xy$$

这是显然成立的。等号成立的条件是$x=y=z$或者$a=b=c$

51、设a,b,c是实数，证明：$\sqrt[3]{2a^2-bc}+\sqrt[3]{2b^2-ca}+\sqrt[3]{2c^2-ab}\ge 0$

证明：首先注意到，不等式只需考虑a,b,c是非负实数即可。考虑恒等式

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

因此，$(x+y+z)(x^3+y^3+z^3-3xyz)\ge 0$，所以，我们可以吧不等式改写成

$$\sqrt[3]{2a^2-bc}+\sqrt[3]{2b^2-ca}+\sqrt[3]{2c^2-ab}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}bc\ge 3\sqrt[3]{(2a^2-bc)(2b^2-ca)(2c^2-ab)} \qquad (*)$$

不失一般性，假设$a\ge b\ge c$。注意到不等式当$\sqrt[3]{2b^2-ca}\ge 0,\sqrt[3]{2c^2-ab}\ge 0$，是显然成立的。如果$(2b^2-ca)(2c^2-ab)\le 0$，由于（*），不等式也是显然的。所以我们可以假设$2b^2-ca\le 0,2c^2-ab\le 0$

（i）$a\ge 2(b+c)$的情况。我们有

$$2a^2-bc\ge 4(ab-2c^2+ac-2b^2)\Rightarrow \sqrt[3]{2a^2-bc}\ge -\sqrt[3]{2b^2-ca}-\sqrt[3]{2c^2-ab}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2a^2-bc}+\sqrt[3]{2b^2-ca}+\sqrt[3]{2c^2-ab}\ge 0$$

这里使用了不等式$\sqrt[3]{4(x+y)}\ge \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$

（ii）如果$a<2(b+c)$，不失一般性，设$abc=1$。我们只需证明

$$2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\ge 3\sqrt[3]{(2a^3-1)(1-2b^3)(1-2c^3)}$$

记

$$f(a,b,c)=2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)-3\sqrt[3]{(2a^3-1)(1-2b^3)(1-2c^3)}$$

我们当然有$f(a,b,c)\ge f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$，因为

$$2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\ge 2(a^2+2bc)-(2a\sqrt{bc}+bc);$$

$$(1-2b^3)(1-2c^3)\le\left(1-2\sqrt{b^3c^3}\right)^2;$$

于是只需在 $b=c$ 的情况下证明原不等式成立，即

$$\sqrt[3]{2a^2-b^2} \ge 2\sqrt[3]{ab-2b^2} \Leftrightarrow 2a^2+15b^2 \ge 9ab$$

由 AM-GM 不等式，这是显然成立的。等号成立的条件是 $a=b=c=0$

注意：下列更强的不等式。

◆设 a,b,c 是实数，$k=\dfrac{1+\sqrt{513}}{16}$，证明：$\sqrt[3]{ka^2-bc}+\sqrt[3]{kb^2-ca}+\sqrt[3]{kc^2-ab} \ge 0$

为了证明之，我们使用上面证明的相同的技术。同样的，我们只需考虑情况：

$a \ge b \ge c, abc=1, kb^3 \le 1, kc^3 \le 1$。设

$$f(a,b,c)=k(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)-3\sqrt[3]{(ka^3-1)(kb^3-1)(kc^3-1)}$$

如果 $a \le k\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$，我们很容易证明不等式成立，因为，在这种情况下，我们有

$f(a,b,c) \ge f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$。只需考虑 $a \ge k\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$ 的情况。记

$$g(a)=ka^2-bc+4(kb^2+kc^2-ab-ac)$$

我们有

$$g'(a)=2ka-4k(b+c) \ge 2k^2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-4(b+c) \ge 0$$

所以

$$g(a) \ge g\left(k\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\right)$$

记 $x=\sqrt{b}, y=\sqrt{c}$，则不等式 $g\left(k\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\right) \ge 0$ 等价于

$$k^3(x+y)^4-x^2y^2+4k(x^4+y^4)-4k(x+y)^2(x^2+y^2) \ge 0 \text{或者}$$

$$k^3(x^4+y^4)+(4k^3-8k)(x^3y+xy^3)+(6k^3-8k-1)x^2y^2 \ge 0$$

这最后的不等式显然成立，因为其所有的系数都是非负的。所以

$$g(a)=ka^2-bc+4(kb^2+kc^2-ab-ac) \ge 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{ka^2-bc} \ge \sqrt[3]{4(ab+ac-kb^2-kc^2)} \ge \sqrt[3]{ab-kc^2}+\sqrt[3]{ac-kb^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{ka^2-bc}+\sqrt[3]{kb^2-ca}+\sqrt[3]{kc^2-ab} \ge 0\text{。}$$

等号成立的条件是$(a,b,c)=\left(\sqrt{\dfrac{8k-1}{k}},1,1\right)$

52、证明下列不等式对所有实数a,b,c都成立。

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$$（Vasile Cirtoaje）

证明：我将给出四个证明方法。

（1）注意到

$$4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)\right]$$

$$=\left[\left(a^3+b^3+c^3\right)-5\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+4\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\right]^2$$

$$+3\left[\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)-2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+6abc\right]^2\ge 0$$

（2）不失一般性，假设$a=\min(a,b,c)$。设$b=a+x,c=a+y\ (x,y\ge 0)$，展开表达式，我们有

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=$$

$$\left(x^2+y^2-xy\right)a^2+\left(x^3+y^3+4xy^2-5x^2y\right)a+x^4+y^4+2x^2y^2-3x^3y$$

考虑关于a的二次函数，则

$$\Delta=\left(x^3+y^3+4xy^2-5x^2y\right)^2-4\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^4+y^4+2x^2y^2-3x^3y\right)$$

$$=-3\left(x^3-x^2y-2xy^2-y^3\right)^2\le 0$$

所以，不等式成立。

（3）由下列恒等式，立即可得

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-6\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\sum_{cyc}\left(a^2-2ab+bc-c^2+ca\right)^2$$

（4）由下列恒等式立即可得

$$6\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-12\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\sum_{cyc}\left(a^2-2b^2+c^2+3bc-3ca\right)^2$$

注意：使用这个结果，我们可以通过 Cauchy 求反技术证明下列不等式。

◆设正实数x,y,z满足$x+y+z=3$，证明：$\dfrac{x}{1+xy}+\dfrac{y}{1+yz}+\dfrac{z}{1+zx}\ge\dfrac{3}{2}$

事实上，为证明这个不等式，只需注意到

$$\frac{x}{1+xy}=x-\frac{x^2y}{1+xy}\geq x-\frac{x^2y}{2\sqrt{xy}}=x-\frac{1}{2}\sqrt{x^3y}$$

53、设a,b,c是三个实数，且满足条件$a^2+b^2+c^2=9$，证明:

$3\min(a,b,c)\leq 1+abc$（Virgil Nicula）

证明：不失一般性，我们假设$c\geq b\geq a$。考虑下列情况

（i）$a\leq 0$：设$d=-a,e=|b|$。我们将证明

$$-3d\leq 1-dce\Leftrightarrow d(ce-3)\leq 1$$

如果$ce\leq 3$，则不等式显然成立。否则，如果$ce>3$，则

$$d^2(ce-3)(ce-3)\leq\left(\frac{d^2+2ce-6}{3}\right)^3\leq\left(\frac{d^2+c^2+e^2-6}{3}\right)^3=1$$

不等式成立。等号成立的条件是$a=-1,b=c=2$及其排列。

（ii）$a\geq 0$：不等式等价于

$$a\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq 3+3abc$$

因为$2abc\geq a^3+ab^2$，我们只需证明

$$3+abc\geq ac^2\Leftrightarrow 3\geq ac(c-b)$$

$a\leq b$，所以$c\leq\sqrt{9-2a^2}$，因此

$$ac(c-b)\leq ac(c-a)\leq a\sqrt{9-2a^2}\left(\sqrt{9-2a^2}-a\right)$$

于是只需证明

$$a(9-2a^2)-a^2\sqrt{9-2a}\leq 3\Leftrightarrow f(a)=2a^6-9a^4-(3a-1)^2\leq 0$$

如果$\frac{1}{3}\leq a\leq 2$，则

$$f(a)=2a^4(a^2-1)-7a^4-(3a-1)^2\leq 0$$

如果$1\leq a\leq\sqrt{\frac{3}{2}}$，则

$$f(a)=\left(a^4+\frac{3}{2}\right)(2a^2-3)-6a^2(a^2-1)-6a\left(a-\frac{11}{12}\right)\le 0$$

如果$\sqrt{\frac{3}{2}}\le a\le\sqrt{3}$，则

$$f(a)=a^2(a^2-3)(2a^2-3)+(1-6a)\le 0$$

证毕。

注意：下列不等式是由Vasile Cirtoaje提出的，可以使用相同的方法证明。

◆设a,b,c是非负实数，且满足$a^2+b^2+c^2=3$，证明：$1+4abc\ge 5\min\{a,b,c\}$

54、设a,b,c,d是非负实数，且满足$a+b+c+d=4$，证明：

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)\ge(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)$$（Pham Kim Hung）

证明：注意到，当$x\ge 0$时，$(1+x^4)(1+x)\ge(1+x^3)(1+x^2)$，因此

$$\prod_{cyc}(1+a^4)\prod_{cyc}(1+a)\ge\prod_{cyc}(1+a^3)\prod_{cyc}(1+a^2)$$

于是只需证明

$$\prod_{cyc}(1+a^2)\ge\prod_{cyc}(1+a)\text{ 或者 }\sum_{cyc}\ln(1+a^2)\ge\sum_{cyc}\ln(1+a)$$

记$f(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1+x)-\frac{x-1}{2}$

它的导数为

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}=\frac{(x-1)(3-x^2)}{2(1+x)(1+x^2)}$$

所以$f(x)$在区间$[1,\sqrt{3}]$是增函数，在区间$[0,1]\cup[\sqrt{3},+\infty)$是减函数。于是

$$\min_{0\le x\le 2.2}f(x)=\min\{f(1),f(2.2)\}=0$$

如果a,b,c,d都小于2.2，则我们有

$$\sum_{cyc}f(a)\ge 0\Rightarrow\sum_{cyc}\ln(1+a^2)-\ln(1+a)\ge\sum_{cyc}\frac{a-1}{2}=0$$

否则，设 $a\ge 2.2$。因为函数 $g(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x}$ 在 R^+ 范围内，在点 $x=-1+\sqrt{2}$ 达到其最小值。

因此 $g(a)\ge g(2.2)$。我们有

$$g(a)\cdot g(b)\cdot g(c)\cdot g(d)\ge g(2.2)\cdot\left[g(-1+\sqrt{2})\right]^3\approx 1.03>1$$

等号成立的条件是 $a=b=c=d=1$。

55、求最好的常数 k（最小值）使得下列不等式对非负实数 a,b,c 满足条件 $a+b+c=3$ 成立。

$$a^k+b^k+c^k\ge ab+bc+ca$$

（Genralization Of Russia MO 2000）

解：在第一章例 1.1.1，这个不等式在 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，已经证明了。因此对于 $k\ge\dfrac{1}{2}$，它是成立的。考虑不等式在 $k\le\dfrac{1}{2}$ 的情况。

引理：设 $a,b\ge 0,\quad a+b=2t\ge 1$，则我们有 $a^k+b^k-ab\ge\min\{(2t)^k,2t^k-t^2\}$

事实上，不失一般性，假设 $a\ge b$，则存在一个非负实数 x，满足 $a=t+x,b=t-x$。

考虑函数

$$f(x)=(t+x)^k+(t-x)^k-t^2+x^2$$

则

$$f'(x)=k(t+x)^{k-1}-k(t-x)^{k-1}+2x,$$
$$f''(x)=k(k-1)\left[(t+x)^{k-2}+(t-x)^{k-2}+2\right],$$
$$f'''(x)=k(k-1)(k-2)\left[(t+x)^{k-3}-(t-x)^{k-3}\right].$$

所以 $f'''(x)\le 0$，因此 $f''(x)$ 是单调函数，所以 $f'(x)$ 的根不多于两个。

因为 $f'(0)=0$ 而且

$$f''(0)=2k(k-1)t^{k-2}+2=2-2k(1-k)\ge 0,$$

所以 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 或 $x=t$ 达到最小值。

回到我们的问题，不失一般性，假设 $a \ge b \ge c$，并设 $a+b=2t \ge 1$，则

$$a^k+b^k+c^k-(ab+bc+ca) \ge \min\{(2t)^k, 2t^k-t^2\}-2ct+c^k$$

（i）如果 $(2t)^k \le 2t^k-t^2$，对 $2t, c$ 使用引理，我们得到

$$a^k+b^k+c^k-(ab+bc+ca) \ge (2t)^k+c^k-c\cdot 2t \ge \min\{(2t+c)^k, 2\left(t+\frac{c}{2}\right)^k-\left(t+\frac{c}{2}\right)^2\}$$

因为 $2t+c=3$，于是我们有

$$a^k+b^k+c^k-(ab+bc+ca) \ge \min\{3^k, 2\cdot\frac{3^k}{2^k}-\frac{9}{4}\}$$

（ii）如果 $(2t)^k \ge 2t^k-t^2$。我们将证明 $g(t) \ge 0$。其中

$$g(t)=2t^k+(3-2t)^k-2t(3-2t)+t^2=2t^k+(3-2t)^k-6t+3t^2$$

注意到

$$\begin{aligned}
&g'(t)=2kt^{k-1}-2k(3-2t)^{k-1}-6+6t,\\
&g''(t)=2k(k-1)\left[t^{k-2}-2(3-2t)^{k-2}\right]+6,\\
&g'''(t)=2k(k-1)(k-2)\left[t^{k-3}-4(3-2t)^{k-3}\right].
\end{aligned}$$

因为 $g'''(t)$ 当 $t \ge 1$ 时，没有实根，因此我们有 $g'(t)$ 的实根不超过两个。于是，我们有

$$\min_{1\le t\le \frac{3}{2}} g(t)=\min\left(g(1), g\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\min\left(0, 2\cdot\frac{3^k}{2^k}-\frac{9}{4}\right)$$

根据这些结果，我们有，对所有正实数 k，有

$$a^k+b^k+c^k-(ab+bc+ca) \ge \min\left(0, 2\cdot\frac{3^k}{2^k}-\frac{9}{4}\right)$$

因此最好的常数 k 是

$$2\cdot\frac{3^k}{2^k}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow k=\frac{2\ln 3-3\ln 2}{\ln 3-\ln 2} \approx 0.2905$$

在此情况下，等号成立的条件是 $a=b=c=1$ 或者 $a=b=\frac{3}{2}, c=0$ 及其排列。

56、设a,b,c是正实数，证明：$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}$ （Vo Quoc Ba Can）

证明：注意到，如果$a\geq b\geq c$，则

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)=\frac{(a-b)(a-c)(c-b)}{abc}\leq 0$$

所以，只需考虑情况$a\geq b\geq c$。两边平方，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2}+\sum_{cyc}\frac{2b}{a}\geq\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

另外，使用下列恒等式

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}-3=\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(a-b)(a-c)}{ac}$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}-3=\frac{(b-c)^2(b+c)}{b^2c^2}+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2b^2}$$

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=(b-c)^2+(a-b)(a-c)$$

则不等式等价于

$$(b-c)^2M+(a-b)(a-c)N\geq 0$$

其中$M=\frac{2}{bc}+\frac{(b+c)^2}{b^2c^2}-\frac{9}{ab+bc+ca}$;

$$N=\frac{2}{ac}+\frac{(a+b)(a+c)}{a^2b^2}-\frac{9}{ab+bc+ca};$$

如果$b-c\geq a-b$，则$2(b-c)^2\geq(a-b)(a-c)$。于是，我们有

$$M\geq\frac{6}{bc}-\frac{9}{ab+bc+ca}\geq 0,$$

$$M+2N\geq\frac{6}{bc}-\frac{18}{ab+bc+ca}\geq 0$$

因此，我们有

$$(b-c)^2M+(a-b)(a-c)N\geq\frac{1}{2}(a-b)(a-c)(M+2N)\geq 0。$$

否则，设$b-c\leq a-b$，则$2b\leq a+c$，当然，$M\geq 0$以及

$$N\geq\frac{2}{ac}+\frac{a+b+c}{ab^2}\geq\frac{2}{ac}+\frac{3}{ab}\geq\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{ac+ab}>\frac{9}{ab+bc+ca}$$

等号成立的条件是$a=b=c$。

注意：证明下列不等式有点困难。

◆设a,b,c是正实数，证明：$\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 12$

证明：注意到，如果$a\geq b\geq c$，则

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2},$$

所以，我们只需考虑不等式在$a\geq b\geq c$的情况。不等式等价于

$$(a-b)^2\left[\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\right]+(c-a)(c-b)\left[\frac{(c+a)(c+b)}{a^2c^2}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\right]\geq 12,$$

我们记

$$M=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2};\quad N=\frac{(c+a)(c+b)}{a^2c^2}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$$

首先我们将证明 $N\geq 0$，即

$$(c+a)(c+b)(a^2+b^2c^2)\geq 9c^2a^2$$

即 $2a^3-7a^2c+4c^2a+4c^3\geq 0\Leftrightarrow(a-c)^2(2a+c)\geq 0$

这是显然成立的。所以$N\geq 0$。接下来，我们分两种情况进行讨论

（i）$a-b\leq b-c$，则$(c-a)(c-b)\geq 2(a-b)^2$

如果我们能证明 $M+2N\geq\dfrac{(c+a)(c+b)}{a^2c^2}-\dfrac{10}{a^2+b^2+c^2}\geq 0$ ，则不等式成立。

事实上，不等式等价于

$$(c+a)(c+b)(a^2+b^2+c^2)\geq 10a^2c^2$$

因为$b\geq\dfrac{c+a}{2}$，我们有（使用 AM-GM 不等式）

$$(c+a)(c+b)(a^2+b^2+c^2)\geq(c+a)\left(c+\frac{a+c}{2}\right)\left(a^2+c^2+\frac{(a+c)^2}{4}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{ac}\cdot\sqrt{3ac}\cdot 3ac > 10ac$$

（ii）$a-b\geq b-c$. 在这种情况下，我们将证明 $M\geq 0$，即

$$(a+b)^2(a+b+c)^2\geq 9a^2b^2$$

如果 $a\geq 2b$，则不等式显然成立，因为 $a^2+b^2\geq\frac{5}{2}ab$。所以我们可以假设 $a\leq 2b$。因为 $c\geq 2b-a$，我们只需证明

$$(a+b)^2\left[a^2+b^2+(2b-a)^2\right]\geq 9a^2b^2$$

设 $x=\frac{b}{a}$，则我们有 $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$，不等式变成

$$(x+1)^2(5x^2-4x+2)\geq 9x^2$$

或者

$$f(x)=5x^4+6x^3-10x^2+2\geq 0$$

导数 $f'(x)=20x^3+18x^2-20x$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 只有一个根 $x_0=\frac{-9+\sqrt{481}}{40}$。所以

$\min\limits_{0.5\leq x\leq 1} f(x)=f(x_0)>0$，所以不等式成立。

57、设 a,b,c,d 是正实数，且满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$，证明:

$$\frac{1}{3-abc}+\frac{1}{3-bcd}+\frac{1}{3-cda}+\frac{1}{3-dab}\leq 2$$（Pham Kim Hung）

证明：设 $x=abc,y=bcd,z=acd,t=bcd$，则不等式变成

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3-x}\leq 2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{1-x}{3-x}\geq 0$$

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$x+y=ab(c+d)\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sqrt{2(c^2+d^2)}\leq\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<\frac{9}{4}$$

不失一般性，假设 $x\leq y\leq z\leq t$，首先，我们考虑 $x+y\leq\frac{1}{4}$ 的情况。易见 $t=bcd\leq\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

且$z\le 1$。因为$\frac{1}{3-x}$是增加的凸函数，我们有

$$\frac{1}{3-x}+\frac{1}{3-y}+\frac{1}{3-z}+\frac{1}{3-t}\le\frac{1}{3-1/4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3-1}+\frac{1}{3-\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}<2$$

现在考虑情况$x+y\ge\frac{1}{4}$。因为

$$(1-x)(4x+3)-(1-y)(4y+3)=(x-y)(1-4x-4y)\ge 0$$

$$(3-x)(4x+3)-(3-y)(4y+3)=(x-y)(9-4x-4y)\le 0$$

根据 Chebyshev 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1-x}{3-x}=\sum_{cyc}\frac{(1-x)(4x+3)}{(3-x)(4x+3)}\ge\frac{1}{4}\left(\sum_{cyc}(1-x)(4x+3)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{(3-x)(4x+3)}\right)$$

于是只需证明$\sum_{cyc}(1-x)(4x+3)\ge 0$或者$S=12+\sum_{cyc}x-4\sum_{cyc}x^2\ge 0$

因为$\sum_{cyc}a^2=4$，根据 AM-GM 不等式，我们有$abcd\le 1$以及$\sum_{cyc}\frac{1}{a}\ge 4$。所以

$$x+y+z+t=abcd\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)\ge 4abcd\ge 4a^2b^2c^2d^2\quad(*)$$

设$m=a^2,n=b^2,p=c^2,q=d^2$，则$\sum_{cyc}m=4$。根据（*），我们有

$$S\ge 12+4mbpq-4\sum_{cyc}mnp$$

因为$x\le y\le z\le t$，则$m\le n\le p\le q$。设$r=\frac{1}{3}(n+p+q)$，则由 AM-GM 不等式，我们有

$np+pq+qn\le 3r^2$，并且$npq\le t^3$。因为$m\le 1$，我们有

$$S=12-4npq(1-m)-4m(np+pq+qm)\ge 12-4r^3(1-m)+4m\cdot 3r^2$$

在上面的不等式中，用$4-3r$替换m，我们有

$$S\ge 4-4(4-3r)r^2-4r^3(3r-3)=12(r-1)^2(-r^2+2r+1)\ge 0。$$

不等式证毕，等号成立的条件是$a=b=c=d=1$

58、设n个正实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足条件$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}=\frac{n}{2}$，证明：

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{x_i+x_j}\geq\frac{n^2}{2}$$ （Titu Andreescu,Gabriel Dospinescu）

证明：对于$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们记$a_i=\frac{1-x_i}{1+x_i}$。则$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$以及$a_i\in[-1,1]$。考虑表达式

$$S=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{x_i+x_j}\Rightarrow 2S=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{(1+a_i)(1+a_j)}{1-a_ia_j}。$$

我们有

$$P=\sum_{i,j=1}^{n}(1+a_i)(1+a_j)(1-a_ia_j)=n^2-\sum_{i,j=1}^{n}a_i^2a_j^2\leq n^2$$

根据Cauchy-Schwarz不等式，我们有

$$2S\cdot P\geq\left(\sum_{i,j=1,n}(1+a_i)(1+a_j)\right)^2=n^4$$

所以$S\geq\frac{n^2}{2}$，等号成立的条件是$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$

59、设a,b,c是非负实数，证明

$$\frac{ab}{a+4b+4c}+\frac{bc}{b+4c+4a}+\frac{ca}{c+4a+4b}\leq\frac{a+b+c}{9}$$ （Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，我们假设$a+b+c=3$，则不等式变成

$$\sum_{cyc}\frac{3ab}{a+4(3-a)}\leq 1\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ab}{4-a}\leq 1\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{b}{4-a}\leq 1\Leftrightarrow\sum_{cyc}b(4-b)(4-c)\leq\prod_{cyc}(4-a)$$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc\leq 4$$

对于最后的不等式，我们给出两个比较困难的证法。

（1）因为$a+b+c=3$，则不等式可以改写成

$$27(a^2b+b^2c+c^2a)+27abc\leq 4(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 27\sum_{cyc}a^2b+27abc\le 4\sum_{cyc}a^3+12\sum_{cyc}a^2b+12\sum_{cyc}ab^2+24abc$$

$$\Leftrightarrow 15\sum_{cyc}a^2b+3abc\le 4\sum_{cyc}a^3+12\sum_{cyc}ab^2$$

$$\Leftrightarrow 12\left(\sum_{cyc}a^2b-\sum_{cyc}ab^2\right)\le 4\left(\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}a^2b\right)+\left(-3abc+\sum_{cyc}a^3\right)$$

这个不等式可以写成

$$12(a-b)(a-c)(b-c)\le S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \quad (*)$$

这里S_a,S_b,S_c由下式定义

$$S_a=2b+c+\frac{1}{2}(a+b+c),\ S_b=2c+a+\frac{1}{2}(a+b+c),\ S_c=2a+b+\frac{1}{2}(a+b+c)$$

我们将证明不等式（*）对所有非负实数a,b,c（我们已经定义了条件$a+b+c=3$）成立。因为S_a,S_b,S_c是a,b,c的线性函数，如果用$a-t,b-t,c-t\ (t\le\min(a,b,c))$来替换$a,b,c$，则$a-b,b-c,c-a$不改变，（*）左边的表达式不变，而右边的表达式减少。所以只需证明不等式在$\min(a,b,c)=0$（例如$t=\min(a,b,c)$）条件下成立。此时不等式变成

$$a^2b\le 4$$

这是显然成立的，因为$2a+b=3$。

（2）不失一般性，假设b是集合$\{a,b,c\}$第二大的数。我们当然有

$$c(b-a)(b-c)\le 0\Leftrightarrow c(b^2-bc-ba+ac)\le 0\Leftrightarrow b^2c+c^2a\le bc(a+c)$$

于是。只需证明

$$bc(a+c)+a^2b+abc\le 4\Leftrightarrow b(a+c)^2\le 4$$

由 AM-GM 不等式，这是显然成立的。等号成立的条件是$a=2,b=1,c=0$及其排列。

60、假设n是一个大于 2 的整数。设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正实数，且满足$a_1a_2\cdots a_n=1$，证明:

$$\frac{a_1+3}{(a_1+1)^2}+\frac{a_2+3}{(a_2+1)^2}+\cdots+\frac{a_n+3}{(a_n+1)^2}\geq 3$$（United of Kingdom TST 2005）

证明：首先注意到，只需证明不等式在$n=3$的情况下成立即可，对于$n\geq 4$，我们只需从集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$选择三个较小的元素，比如说是a_1,a_2,a_3。因为$a_1a_2a_3\leq 1$，则存在一个正数k满足条件$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{a_2}=\frac{c}{a_3}=k\geq 1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+3}{(a_i+1)^2}\geq\frac{a_1+3}{(a_1+1)^2}+\frac{a_2+3}{(a_2+1)^2}+\frac{a_3+3}{(a_3+1)^2}\geq\sum_{cyc}\frac{a+3}{(a+1)^2}\geq 3$$

我们将证明，如果a,b,c是正实数，且满足$abc=1$，则

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\geq 3$$

设$a_1=\frac{2}{1+a},b_1=\frac{2}{1+b},c_1=\frac{2}{1+c}$，则不等式变成

$$a_1+b_1+c_1+a_1^2+b_1^2+c_1^2\geq 6$$

因为$abc=1$，我们有

$$\prod_{cyc}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{abc}{8}=\frac{1}{8}\Rightarrow\prod_{cyc}(2-a_1)=a_1b_1c_1$$

设$x=a_1-1,y=b_1-1,z=c_1-1$，则$x,y,z\in[-1,1]$，我们有

$$(x+1)(y+1)(z+1)=(1-x)(1-y)(1-z)\Rightarrow x+y+z+xyz=0$$

由 AM-GM 不等式，我们有$x^2+y^2+z^2\geq 3\left(xyz\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3xyz$，所以

$$a_1+b_1+c_1+a_1^2+b_1^2+c_1^2-6=\sum_{cyc}(a_1-1)(a_1+2)=\sum_{cyc}x(x+3)\geq 0$$

不等式成立，等号成立的条件是$a=b=c=1$

61、设a,b,c是非负实数，且满足$a+b+c=2$，证明：

$$\sqrt{a+b-2ab}+\sqrt{b+c-2bc}+\sqrt{c+a-2ca}\geq 2$$（Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，我们假设$a\ge b\ge c$。记$x=a+b-2ab,y=b+c-2bc,z=c+a-2ca$，则不等式等价于（平方之后）

$$2\sum_{cyc}\sqrt{xy}\ge 2\sum_{cyc}ab$$

注意到$2x=c(a+b)+(a-b)^2$，$2y=a(b+c)+(b-c)^2$，所以由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$2\sqrt{xy}\ge\sqrt{ca(a+b)(b+c)}+|(a-b)(b-c)|$$

再次应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sqrt{ca(a+b)(b+c)}=\sqrt{ca}\cdot\sqrt{(a+b)(b+c)}\ge\sqrt{ca}(\sqrt{ca}+b)=ca+b\sqrt{ca}$$

于是只需证明

$$\sum_{cyc}|(a-b)(b-c)|+\sum_{cyc}b\sqrt{ca}\ge\sum_{cyc}ca$$

$$\Leftrightarrow 2(a-c)^2+2(a-b)(b-c)\ge\sum_{cyc}b(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2.$$

记 $\sqrt{c}=m,\sqrt{a}-\sqrt{b}=\alpha\ge 0,\sqrt{b}-\sqrt{c}=\beta\ge 0$。则上面的不等式变成

$$2(\alpha+\beta+2m)^2(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta(2m+\beta)(2m+2\beta+\alpha)\ge$$

$$(m+\beta)^2(\alpha+\beta)^2+m^2\alpha^2+(m+\alpha+\beta)^2\beta^2$$

这最后的不等式，可以写成：$Mm^2+Nm+P\ge 0$，其中

$$M=8(\alpha+\beta)^2+8\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+\alpha^2+\beta^2\ge 0$$

$$N=8(\alpha+\beta)^3+4\alpha\beta(\alpha+3\beta)-2\beta(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)\beta^2\ge 0$$

$$P=2(\alpha+\beta)^4+2\alpha\beta^2(2\beta+\alpha)-2\beta^2(\alpha+\beta)^2\ge 0$$

证毕。等号成立的条件是$a=b=c=\dfrac{2}{3}$和$a=b=1,c=0$及其排列。

62、设a,b,c是非负实数，且满足$a^2+b^2+c^2=3$，证明：

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\le 1$$ （Vasile Cirtoaje）

证明：去分母，整理，不等式等价于

$$ab^2+bc^2+ca^2\le 2+abc$$

不失一般性，假设b是集合$\{a,b,c\}$中第二大的数，则

$$a(b-a)(b-c)\le 0\Leftrightarrow a^2b+abc\ge ab^2+ca^2$$

所以，只需证明

$$2\ge a^2b+bc^2\Leftrightarrow b(a^2+c^2)\le 2\Leftrightarrow b(3-b^2)\le 2\Leftrightarrow (b-1)^2(b+2)\ge 0$$

这是显然成立的。等号成立的条件是$a=b=c=1$或$a=0,b=1,c=\sqrt{2}$及其排列。

63、设a,b,c是非负实数，证明:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\ge 2$$（Pham kim Hung）

证明: 不等式等价于

$$\sum_{cyc}a(b+c)(b^2+ca)(c^2+ab)\ge 2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)+3abc\sum_{cyc}a^2(b+c)\ge 4a^2b^2c^2+2\sum_{cyc}a^3b^3+2abc\sum_{cyc}a^3$$（*）

根据恒等式

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=\sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)+2abc\sum_{cyc}a^2(b+c)-2\sum_{cyc}a^3b^3$$

$$-6a^2b^2c^2-2abc\sum_{cyc}a^3$$

不等式（*）可以写成

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2+2a^2b^2c^2+abc\sum_{cyc}a^2(b+c)\ge 0$$

这是显然成立的。等号成立的条件是$a=b,c=0$及其排列。

注意: 根据同样的恒等式，我们可以证明下列不等式（没有这个恒等式，这个问题是很困难的）。

◆设a,b,c是非负实数，证明:

$$\frac{a(b+c-a)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a-b)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b-c)}{c^2+ab}\ge 0$$

64、设a,b,c是三角形的三条边，证明:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{5}{2}$$

证明：使用下列恒等式

$$-3+\sum_{cyc}\frac{2a}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)},$$

$$2-\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2},$$

我们把不等式写成形式：$S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$，其中

$$S_a=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)},S_b=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(b+a)(b+c)},S_c=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(c+b)}$$

不失一般性，假设$a\ge b\ge c$，则显然$S_a\ge 0$，因为a,b,c是三角形的三条边，我们有

$a\le b+c$以及$\frac{a-c}{a-b}\ge\frac{b}{c}\ge\frac{a+b}{a+c}$。另外

$$S_b=\frac{a(b+c-a)+c(b-c)}{(a+b)(b+c)}\ge\frac{c(b-c)}{(a+b)(b+c)},$$

$$S_c=\frac{a(b+c-a)+b(c-b)}{(a+c)(c+b)}\ge\frac{b(c-b)}{(a+c)(c+b)},$$

于是，我们有

$$\sum_{cyc}S_a(b-c)^2\ge(a-b)^2\left(\frac{b^2}{c^2}S_b+S_c\right)\ge\frac{(a-b)^2}{c^2}\left[\frac{b^2c(b-c)}{(a+b)(b+c)}+\frac{c^2b(c-b)}{(a+c)(c+b)}\right]$$

$$=\frac{(a-b)^2(b-c)b}{(a+b)(b+c)}\left(\frac{b}{c}-\frac{a+b}{a+c}\right)\ge 0$$

等号成立的条件是$a=b=c$或者$a=b,c=0$及其排列。

65、设a,b,c是非负实数，证明：

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\frac{6}{a+b+c}$$ （Pham Kim Hung）

证明：（1）考虑到问题 15，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\frac{9}{\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}}\ge\frac{6}{a+b+c}$$

（2）应用 AM-GM 不等式，我们直接有

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\frac{3}{\sqrt[6]{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}}$$

于是只需证明，如果$a+b+c=2$，则$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\le 1$。不失一般性，我们设$a\ge b\ge c$，则

$$\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\ge a^2+bc;$$

$$\left(b^2+c^2+ab+ca\right)^2\ge 4(b^2+ca)(c^2+ab);$$

另外，

$$4\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b^2+c^2+ab+ac\right)-\left(a+b+c\right)^3$$

$$=-(a-b)^2(a+b)+(ac^2-3a^2c)+\left(c^3-bc^2-b^2c\right)\le 0$$

于是，我们有

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\le\frac{1}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\left(b^2+c^2+ab+ac\right)^2\le\frac{1}{64}\left(a+b+c\right)^6=1$$

等号成立的条件是$a=b,c=0$及其排列。

66、设a,b,c是正实数，证明：

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$ （Nguyen Vient Anh）

证明：不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}-\frac{1}{3}\sum_{cyc}a=\sum_{cyc}\frac{a(a^2+ab-2b^2)}{3(2a^2-ab+2b^2)}=\sum_{cyc}(a-b)\left[\frac{a(2a+b)}{3(2a^2-ab+2b^2)}-\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(2b-a)}{2a^2-ab+2b^2}$$

我们假设 $a=\max(a,b,c)$。如果 $\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}\in(0,2]$，则不等式显然成立。否则，我们考虑下列一些情况。

（i）$a\ge b\ge c$。如果 $a\ge 2b$，则

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\ge\frac{a}{2};\qquad \frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}\ge\frac{b}{3};$$

$$\Rightarrow\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\ge\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

否则，$b\ge 2c$，则

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\ge\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

（ii）如果 $a\ge c\ge b$，则 $0\le\frac{b}{c}\le 1, 0\le\frac{c}{a}\le 1$。我们假设 $a\ge 2b$，则

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\ge\frac{a}{2};\qquad (*)$$

我们将证明

$$\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}\ge\frac{b}{3}-\frac{c}{9}\qquad (**)$$

事实上，该不等式等价于

$$f(c)=2c^3-7c^2b+5cb^2+3b^3\ge 0$$

利用条件 $c\ge b$，$f'(c)=6c^2-14cb+5b^2$ 只有一个根 $c_0=\frac{7+\sqrt{19}}{16}b$，因此 $f(c)\ge f(c_0)\ge 0$。（**）得证。

类似地，我们将证明

$$\frac{a}{6}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\ge\frac{4c}{9}\qquad (***)$$

事实上，不等式等价于

$$6a^3-19a^2c+14ac^2+2c^3\ge 0,$$

由 AM-GM 不等式，这是成立的。不等式（*）（**）（***）相加，我们即得所证不等式。等号成立的条件是 $a=b=c$。

67、证明：对所有的正实数 a,b,c，$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$

证明：应用 Holder 不等式，我们有

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3$$

令 $x=a^2,y=b^2,z=c^2$，则只需证明

$$(x+y+z)^3\ge 3(xy+yz+zx)\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}\Leftrightarrow\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}\ge\frac{3\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2(xy+yz+zx)}\ge\frac{3\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]}{(x+y+z)\left[x+y+z+\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\right]}$$

这是显然成立的。等号成立的条件是 $x=y=z$ 或者等价于 $a=b=c$

注意：是用类似的方法，我们可以证明下列不等式。

◆设 a,b,c 是正实数，证明：

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{3}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$$

结果扩展到四个变量也是成立的，如下

◆设 a,b,c,d 是正实数，证明：

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}\ge 2\sqrt{2}\sqrt[4]{a^4+b^4+c^4+d^4}$$

68、设非负实数 a,b,c 满足条件 $a+b+c=3$。证明：

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\le 13+abc$$（Pham kim Hung）

证明：我们首先证明，如果 $a\ge b\ge c$，则

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\ge(a^2+b)(b^2+c)(c^2+a)$$

事实上，注意到

$$\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} ab^3 = (a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c)$$

$$\sum_{cyc} a^2b^3 - \sum_{cyc} a^3b^2 = (ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(a-c)$$

因此

$$\prod_{cyc}(a+b^2) - \prod_{cyc}(a^2+b) = (a-b)(b-c)(a-c)\left(\sum_{cyc} a - \sum_{cyc} ab\right) \geq 0$$

因为

$$\sum_{cyc} a - \sum_{cyc} ab = \frac{1}{3}\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\right] = \frac{1}{3}\sum_{cyc}(a-b)^2 \geq 0$$

根据这个结果，我们只需要考虑 $a \geq b \geq c$ 的情况。设

$$f(a,b,c) = (a+b^2)(b+c^2)(c+a^2) - abc = \sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} a^2b^3 + a^2b^2c^2.$$

我们将证明 $f(a,b,c) \leq f(a+c,b,0)$。事实上，

$$f(a,b,c) - f(a+c,b,0) = \sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} a^2b^3 + a^2b^2c^2 - (a+c)^3b - (a+c)^2b^3$$

$$= b^3c + c^3a + b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^2c^2 - 3a^2bc - 3ac^2b - 2acb^3 - c^2b^3$$

因为 $a \geq b \geq c$，我们有 $b^3c \leq acb^3, c^3a \leq ac^2b, b^2c^3 \leq c^2b^3$。最后

$$c^2a^3 + a^2b^2c^2 \leq 3a^2bc$$

这是成立的，因为

$$3a^2bc - c^2a^3 - a^2b^2c^2 \geq bca^2(3-a-bc) = bca^2(b+c-bc) \geq 0$$

这个不等式即是 $f(a,b,c) \leq f(a+c,b,0) = (a+c)^2b(a+c+b^2)$。于是只需证明，如果

$x, y \geq 0$，且 $x+y=3$ $(x=a+c, y=b)$，则 $x^2y(x+y^2) \leq 13$。

事实上，表达式左边转变为 x 的函数，变成

$$f(x) = (9+x^2-5x)(3x^2-x^3)$$

应用 AM-GM 不等式，我们有

$$f(x) \leq \frac{1}{4}(-x^3+4x^2-5x+9)^2,$$

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$-x^3+4x^2-5x+9=(x-1)^2(2-x)+7\le 7+\frac{4}{27}$$

所以，我们得到结果

$$f(x)\le\frac{1}{4}\left(7+\frac{4}{27}\right)^2<13$$

注意：使用相同的方法，我们可以证明下列更强的不等式

◆设非负实数 a,b,c 满足条件 $a+b+c=3$。证明：

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\le 13+abc(1-2abc)$$

◆设非负实数 a,b,c 满足条件 $a+b+c=3$。证明：

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\le 13$$

69、设 a,b,c 是正实数。证明：

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ac}\ge 6$$ （Peter Scholze,Darij Grinberg）

证明：我们有 $(a+b)^2-2(c^2+ab)=(a^2-c^2)+(b^2-c^2)$，因此

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ac}-6=\sum_{cyc}\frac{(a^2-b^2)+(a^2-c^2)}{a^2+bc}$$

$$=\sum_{cyc}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{a^2+bc}-\frac{1}{b^2+ac}\right)=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2S_c}{M}$$

其中 $M=(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$，并且 S_a,S_b,S_c 由下列表达式定义

$$S_a=(b+c)(b+c-a)(a^2+bc),$$

$$S_b=(c+a)(c+a-b)(b^2+ac),$$

$$S_c=(a+b)(a+b-c)(c^2+ab)$$

现在我们假设$a\ge b\ge c$。当然，$S_c\ge 0$以及$\frac{(a-c)^2}{(b-c)^2}\ge\frac{a^2}{b^2}$，所以，我们有

$$\sum_{cyc}S_a(b-c)^2\ge(a-c)^2S_b+(b-c)^2S_a=(c-b)^2\left[\frac{(a-c)^2}{(c-b)^2}S_b+S_a\right]$$

$$\ge\frac{(c-b)^2\left[a^2S_b+b^2S_a\right]}{b^2}$$

另一方面，

$$a^2S_b+b^2S_a=a^2(a+c)(a+c-b)(b^2+ac)+b^2(b+c)(b+c-a)(a^2+bc)$$

$$\ge a(a-b)\left[a^2(b^2+ac)-b^2(b^2+ac)\right]\ge 0。$$

等号成立的条件是$a=b=c$或者$a=b,c=0$及其排列。

70、求表达式$k=k(n)$的最大值，满足对于任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，下列不等式都成立。

$$x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\ge k(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$（Le Hong Quy）

证明：设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正实数，则

$$a_1y_1^2+\frac{1}{a_1}\cdot y_2^2+2y_1y_2\ge 0$$

$$a_2y_2^2+\frac{1}{a_2}\cdot y_3^2+2y_2y_3\ge 0$$

…………………

$$a_{n-1}y_{n-1}^2+\frac{1}{a_n}\cdot y_n^2+2y_{n-1}y_n\ge 0$$

将上述不等式相加，我们有

$$a_1y_1^2+\left(\frac{1}{a_1}+a_2\right)y_2^2+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-2}}+a_{n-1}\right)y_{n-1}^2+\frac{1}{a_{n-1}}\cdot y_n^2+2\sum_{i=1}^{n-1}y_iy_{i+1}\ge 0$$（*）

我们将选择n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，满足

$$a_1=\frac{1}{a_1}+a_2=\cdots=\frac{1}{a_{n-1}}-1$$

经过计算，我们找到$a_k=\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin(k\alpha)}$，其中$\alpha=\frac{2\pi}{2n+1}$。将它们代入（*），我们有

$$2\cos\alpha\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)+2\left(\sum_{k=1}^{n-1}y_ky_{k+1}\right)+y_n^2\ge 0\Leftrightarrow 2(1+\cos\alpha)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)\ge y_1^2+\sum_{k=1}^{n-1}(y_k-y_{k+1})^2$$

设 $y_k=x_1+x_2+\cdots+x_k \quad k\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们有

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left[x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\right]\ge x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$$

k 的最好的值（最大）是 $\dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{\pi}{2n+1}}$。

等号成立的条件是 $x_k=(-1)^k\left[\sin\frac{2k\pi}{2n+1}+\sin\frac{2(k-1)\pi}{2n+1}\right]$

注意：在例 6.2.4 中，我们证明了（使用 Cauchy-Schwarz 不等式）

$$x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\le\frac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi}{2(2n+1)}}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)$$

多么奇怪而有趣的巧合，同一个问题，一个求最大值，另一个求最小值，一个基于 AM-GM 不等式，而另一个基于Cauchy-Schwarz不等式，但结果在外观上是类似的，都有$\frac{2\pi}{2n+1}$。

71、设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是正实数，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=n$，证明:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}-n\ge\frac{8(n-1)(1-a_1a_2\cdots a_n)}{n^2}$$（Pham Kim Hung）

证明：我们用归纳法来证明这个不等式。如果$n=2$，则不等式变成

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-2\ge 2(1-a_1a_2)\Leftrightarrow(1-a_1a_2)^2\ge 0。$$

假设不等式对n成立，我们来证明，它对$n+1$也成立。假设$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le a_{n+1}$，对

于 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们记 $b_i=\frac{a_i}{t}$，其中 $t=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le 1$。对 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 应用归纳假设，我们有

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots\frac{1}{b_n}-n\ge c(1-b_1b_2\cdots b_n)\text{，}\quad c\le\frac{8(n-1)}{n^2}\text{。}$$

用 $\frac{a_i}{t}$ 来替换 b_i，我们有

$$-n+\sum_{i=1}^{n}\frac{t}{a_i}\ge c\left(1-\frac{1}{t^n}\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+\frac{c}{t^{n+1}}\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\ge\frac{n}{t}+\frac{c}{t}\quad(*)$$

对于 $n+1$ 个数，我们必须证明，如果 $k=\frac{8n}{(n+1)^2}$，则

$$-n-1+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{a_i}\ge k\left(1-\prod_{i=1}^{n+1}a_i\right)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+(ka_{n+1})\prod_{i=1}^{n}a_i+\frac{1}{a_{n+1}}\ge n+1+k$$

设 $c'=(ka_{n+1})t^{n+1}$。根据 AM-GM 不等式，我们有

$$a_{n+1}t^n\le\left(\frac{a_{n+1}+nt}{n+1}\right)^{n+1}=1\text{，}$$

因此，$c'\le kt\le k=\frac{8n}{(n+1)^2}\le\frac{8(n-1)}{n^2}$。另一方面，注意到（*）对 $c\le\frac{8(n-1)}{n^2}$ 成立。它对 $c=c'$ 也成立，所以我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+(ka_{n+1})\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\ge\frac{n}{t}+ka_{n+1}t^n$$

于是，只需证明

$$\frac{n}{t}+ka_{n+1}t^n+\frac{1}{a_{n+1}}\ge n+1+k$$

用 $n+1-nt$ 来替换 a_{n+1}，我们得到一个等价的不等式

$$\frac{n}{t}+\frac{1}{n+1-nt}-(n+1)\ge k(nt^{n+1}-(n+1)t^n+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{t(n+1-nt)} \ge \frac{8n}{(n+1)^2}(1+2t+\cdots+nt^{n-1})$$

这是显然成立的，因为 $t \le 1$ 以及 $t(n+1-nt) \le \dfrac{(n+1)^2}{4n}$

72、设非负实数 x,y,z 满足条件 $x+y+z=1$，证明：

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2} \ge 2$$ （Phan Thanh Nam）

证明：注意到，如果 a,b,c,d 是非负实数，且满足 $a+b=c+d, |a-b| = |c-d|$，则我们有

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \ge \sqrt{c}+\sqrt{d} \quad (*)$$

事实上，因为 $(a+b)^2-(a-b)^2 \ge (c+d)^2-(c-d)^2$，我们有 $ab \ge cd$。所以

$$a+b+2\sqrt{ab} \ge c+d+2\sqrt{cd}$$

根据（*），我们有

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2} \ge (x+y)+\sqrt{z+y^2}$$

我们有

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2} \ge (x+y)+\sqrt{z+y^2}+\sqrt{z+x^2}$$

$$\ge x+y+\sqrt{(\sqrt{z}+\sqrt{z})^2+(x+y)^2} = 1-z+\sqrt{4z+(1-z)^2} = 2$$

等号成立的条件的是 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ 或者 $x=1, y=z=0$ 及其排列。

73、设正实数 a,b,c 满足条件 $a+b+c=3$，证明：

$$\frac{1}{2+a^2b^2}+\frac{1}{2+b^2c^2}+\frac{1}{2+c^2a^2} \ge 1$$ （Pham Kim Hung）

证明：根据 AM-GM 不等式，我们有

$$\frac{1}{2+a^2b^2} = \frac{1}{2}-\frac{a^2b^2}{2(2+a^2b^2)} \ge \frac{1}{2}-\frac{a^2b^2}{6\sqrt[3]{a^2b^2}} = \frac{1}{2}-\frac{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}}{6}。$$

我们有

$$\sum_{cyc}\frac{1}{2+a^2b^2}\geq\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\sum_{cyc}a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}$$

于是，只需证明$\sum_{cyc}a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}\leq 3$。再次根据 AM-GM 不等式，我们有

$$3\sum_{cyc}a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}=3\sum_{cyc}ab\sqrt[3]{ab}\leq\sum_{cyc}ab(a+b+1)=4(ab+bc+ca)-3abc$$

使用不等式$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc$，我们有

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\leq abc\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)-3abc\leq 9$$

等号成立的条件是$a=b=c=1$。
注意：下列一般结果是由 Gabriel Dospinescu 和 Vasile Cirtoaje 提出的。

◆ 设正实数a,b,c满足条件$a+b+c=3$，求满足下列不等式的常数k的最大值。

$$(ab)^k+(bc)^k+(ca)^k\leq 3$$

让我们来检验一下这个问题。当$k\leq 0$，显然是错误的。如果$0<k\leq 1$，则显然是成立的。现在考虑$k\geq 2$的情况。假设$a\geq b\geq c$，我们有

$$(ab)^k+(bc)^k+(ca)^k\leq a^k(b+c)^k=a^k(3-a)^k\leq\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$$

如果$1\leq k\leq 2$，我们设$t=\dfrac{a+b}{2},u=\dfrac{a-b}{2}$，则$a=t+u,b=t-u$。记

$$f(u)=c^k\left[(t+u)^k+(t-u)^k+(t^2-u^2)^k\right]$$

则其导数为

$$f'(u)=kc^k(t^2-u^2)^{k-1}\left[\frac{1}{(t-u)^{k-1}}-\frac{1}{(t+u)^{k-1}}-\frac{2u}{c^k}\right]$$

对函数$g(x)=x^{1-k}$，应用 Lagrange 中值定理，我们得到，存在一个实数$t_0\in[t-u,t+u]$满足

$$\frac{1}{(t-u)^{k-1}}-\frac{1}{(t+u)^{k-1}}=\frac{2u(k-1)}{t_0^k}$$，其中$t_0\geq t-u\geq c,k\leq 2$。

所以，我们得到

$$\frac{1}{(t-u)^{k-1}}-\frac{1}{(t+u)^{k-1}}=\frac{2u(k-1)}{t_0^k}\le\frac{2u}{c^k}\Rightarrow f'(u)\le 0$$

所以 $f(u)\le f(0)$。余下的考虑 $a=b\ge 1\ge c$ 的情况。记

$$h(a)=2a^k(3-2a)^k+a^{2k},$$

则我们有

$$h'(a)=2ka^{k-1}(3-2a)^{k-1}\left[3-4a+\frac{a^k}{(3-2a)^{k-1}}\right]$$

使用条件 $0<a<\frac{3}{2}$，方程 $h'(a)=0$，有一个根 $a\ge\frac{3}{4}$，而且

$$k\ln a-(k-1)\ln(3-2a)=\ln(4a-3)。$$

我们记 $q(a)=k\ln a-(k-1)\ln(3-2a)-\ln(4a-3)$，则

$$aq'(a)=k+\frac{(k-1)a}{3-a}-\frac{4a}{4a-3}$$

注意到 $\frac{a}{3-a}$ 和 $\frac{-a}{4a-3}$ 都是 a 的增函数，所以方程 $aq'(a)=0$ 的根不多于一个，所以方程 $q(a)=0$ 不超过两个根，从而方程 $h'(a)=0$ 有不超过两个根。由于 $h'(1)=0$ 和 $q'(1)=k+2(k-1)-4=3k-6\le 0$，我们很容易得到

$$h(a)\le\max\left\{h(1),h\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$

所以，我们得到，对所有正实数 k，则

$$(ab)^k+(bc)^k+(ca)^k\le\max\left\{3,\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}\right\}$$

对每一个 k 等号都可以达到。所以，我们找到的常数 k 的最大值是 $\frac{\ln 3}{2(\ln 3-\ln 2)}$

74、考虑正实数常数 m,n ，满足 $3n^2>m^2$ 。实数 a,b,c 满足条件：

$a+b+c=m,a^2+b^2+c^2=n^2$ 。求表达式 P 的最大值和最小值。

$P=a^2b+b^2c+c^2a$ （Le Trung Kien,Vo Quoc Ba Can）

解：设 $a=x+\frac{m}{3},b=y+\frac{m}{3},c=z+\frac{m}{3}$ 。从给定的条件我们得到 $x+y+z=0$ 以及

$x^2+y^2+z^2=\frac{3n^2-m^2}{3}$ ，则表达式 P 变成

$$P=x^2y+y^2z+z^2x+\frac{m^3}{9}$$

注意到

$$\sum_{cyc}\left(3x\sqrt{\frac{2}{3n^2-m^2}}-\frac{18xy}{3n^2-m^2}-1\right)^2=3+\frac{18}{3n^2-m^2}\left(\sum_{cyc}x\right)^2+\frac{324}{(3n^2-m^2)^2}\sum_{cyc}x^2y^2$$

$$-6\sqrt{\frac{2}{3n^2-m^2}}\sum_{cyc}x-54\left(\frac{2}{3n^2-m^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{cyc}x^2y$$

$$=3+\frac{324}{(3n^2-m^2)^2}\sum_{cyc}x^2y^2-54\left(\frac{2}{3n^2-m^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{cyc}x^2y$$

因为 $x+y+z=0$ ，我们有 $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=-\frac{3n^2-m^2}{6}$ 。所以

$$\sum_{cyc}x^2y^2=\left(\sum_{cyc}xy\right)^2-2xyz\sum_{cyc}x=\left(\sum_{cyc}xy\right)^2=\frac{(3n^2-m^2)^2}{36}$$

我们有

$12-54\left(\frac{2}{3n^2-m^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{cyc}x^2y\geq 0$ 或者换句话说

$$\sum_{cyc}x^2y\leq\frac{2}{9}\left(\frac{3n^2-m^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

如果我们选择

$$x=\frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{2\pi}{9},\ y=\frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{4\pi}{9},\ z=\frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{8\pi}{9},$$

则

$$P=\frac{2}{9}\left(\frac{3n^2-m^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{m^3}{9}$$

所以 $\max P=\frac{2}{9}\left(\frac{3n^2-m^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{m^3}{9}$。

类似地，通过考察表达式 $\sum_{cyc}\left(3x\sqrt{\frac{2}{3n^2-m^2}}+\frac{18xy}{3n^2-m^2}+1\right)^2$，我们很容易得到

$$\min P=-\frac{2}{9}\left(\frac{3n^2-m^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{m^3}{9}$$

75、设正实数 a,b,c，满足条件 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=13$，求下列表达式的最大值和最小值。

$$P=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$（Pham Kim Hung）

解：记 $x=\sum_{cyc}\frac{a}{b};\ y=\sum_{cyc}\frac{b}{a};\ m=\sum_{cyc}\frac{a^2}{bc};\ n=\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2};$ 则我们有 $x+y=10$ 以及

$$x^3=3(m+n)+6+\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^3};\quad y^3=3(m+n)+6+\sum_{cyc}\frac{b^3}{a^3}$$

由上面的恒等式，我们有

$$x^3+y^3=(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+6(m+n)+9$$

我们还有

$$mn=3+\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^3}+\sum_{cyc}\frac{b^3}{a^3}=(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$$ 以及

$$xy=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)=3+m+n$$

于是，我们有

$$10^3-30(3+m+n)=mn+6(m+n)+9 \Leftrightarrow 10^3-99=mn+36(m+n)$$

所以 m,n 是下列二次方程的两个正根

$$f(t)=t^2-(xy-3)t+(1009-36xy)$$

令 $r=xy$，我们可以确定

$$2m=(xy-3)\pm\sqrt{(xy-3)^2-4(1009-36xy)}$$

考虑函数 $g(r)=r-3-\sqrt{r^2+138r-4027}\quad(0\le r\le 25)$。注意到

$$g'(r)=1-\frac{2r+138}{2\sqrt{r^2+138r-4027}}<0$$

所以，我们有 $11-2\sqrt{3}\le m\le 11+2\sqrt{3}$，等号成立的条件 $x-y=(a-b)(b-c)(c-a)=0$。

m 的最小值是 $11-2\sqrt{3}$，当 $a=b=(2+\sqrt{3})c$ 及其排列达到。m 的最大值是 $11+2\sqrt{3}$，

当 $a=b=(2-\sqrt{3})c$ 及其排列达到。

76、证明对所有的正实数 a,b,c,d,e，

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{d+e}{2}\cdot\frac{e+a}{2}\le\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{b+c+d}{3}\cdot\frac{c+d+e}{3}\cdot\frac{d+e+a}{3}\cdot\frac{e+a+b}{3}.$$

证明：我们首先证明，对任意 $a,b>0,\ a+b\le 1$

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\ge\left(\frac{2}{a+b}-1\right)^2 \quad (*)$$

事实上，这个结果可以表述成下列形式

$$\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\ge\frac{4}{(a+b)^2}-\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\frac{1}{ab}-\frac{4}{(a+b)^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)^2} \ge \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \Leftrightarrow (a-b)^2(1-a-b) \ge 0$$

回到原始问题。我们可以假设$a+b+c+d+e=1$，则有

$$\prod_{cyc}\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \prod_{cyc}\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \Leftrightarrow \prod_{cyc}\left(\frac{a+b+c}{d+e}\right) \ge \frac{3^5}{2^5} \Leftrightarrow \prod_{cyc}\left(\frac{1}{a+b}-1\right) \ge \frac{3^5}{2^5}$$

根据（*），我们有

$$\left(\frac{1}{d+e}-1\right)\left(\frac{1}{a+b}-1\right) \ge \left(\frac{2}{d+e+a+b}-1\right)^2 = \left(\frac{2}{1-c}-1\right)^2$$

这个结果表明

$$\prod_{cyc}\left(\frac{1}{a+b}-1\right) \ge \prod_{cyc}\left(\frac{2}{1-c}-1\right) = \prod_{cyc}\left(\frac{1+c}{1-c}\right)$$

函数 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 是一个凸函数，因为二阶导数

$f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2} \ge 0$。所以由 Jensen 不等式，我们有

$$\sum_{cyc} f(a) \ge 5f\left(\frac{1}{5}\right) = 5\ln\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \prod_{cyc}\left(\frac{1+c}{1-c}\right) \ge \frac{3^5}{2^5}。$$

等号成立的条件是$a=b=c=d=e$

注意：使用相同的方法，我们可以证明下列一般的结果。

◆设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 是正实数。对于每个 $k\in\{1,2,\cdots,2n+1\}$，我们定义 S_k,P_k 如下

$S_k=\dfrac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+n}}{n}$；　$P_k=\dfrac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+n+1}}{n+1}$；　$a_{k+2n+1}=a_k$。证明:

$$S_1\cdot S_2\cdots\cdot S_{2n+1} \le P_1\cdot P_2\cdots\cdot P_{2n+1}$$

77、设a,b,c是非负实数，证明：$\dfrac{a^4}{a^3+b^3}+\dfrac{b^4}{b^3+c^3}+\dfrac{c^4}{c^3+a^3} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$

证明：注意到

$$\frac{2a^4}{a^3+b^3}-a-\frac{3(a-b)}{2}=(a-b)\left[\frac{a(a^2+ab+b^2)}{a^3+b^3}-\frac{3}{2}\right]=\frac{2a^2+ab-b^2}{3(a^3+b^3)}(a-b)^2$$

所以不等式可以改写成

$$S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

其中 $S_a=\dfrac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3};S_b=\dfrac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3};S_c=\dfrac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3}$。

第一种情况：如果 $a\ge b\ge c$，则显然有 $S_b\ge 0$ 而且

$$S_b+2S_c=\frac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3}+\frac{2(3b^2+ab-a^2)}{a^3+b^3}\ge\frac{3a^2}{c^3+a^3}-\frac{2a^2}{a^3+b^3}\ge 0$$

$$a^2S_b+2b^2S_a=\frac{a^2(3a^2+ca-c^2)}{c^3+a^3}+\frac{2b^2(3c^2+bc-b^2)}{b^3+c^3}\ge\frac{3a^4}{c^3+a^3}-\frac{2b^4}{b^3+c^3}\ge 0$$

所以，我们有

$$2\sum_{cyc}S_a(b-c)^2\ge(S_b+2S_c)(a-b)^2+(b-c)^2\left(2S_a+\frac{a^2}{b^2}S_b\right)\ge 0$$

第二种情况：如果 $c\ge b\ge a$，则当然有 $S_a,S_c\ge 0$ 而且

$$S_a+2S_b=\frac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3}+\frac{2(3a^2+ca-c^2)}{c^3+a^3}\ge\frac{3c^2+bc}{b^3+c^3}-\frac{2c^2}{a^3+c^3}\ge 0\text{。}$$

$$S_c+2S_b=\frac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3}+\frac{2(3a^2+ca-c^2)}{c^3+a^3}\ge\frac{3b^2}{a^3+b^3}-\frac{2c^2}{c^3+a^3}\ge 0$$

我们有

$$2\sum_{cyc}S_a(b-c)^2\ge(S_a+2S_b)(b-c)^2+(2S_b+S_c)(a-b)^2\ge 0$$

等号成立的条件是 $a=b=c$。

78、设 $a,b,c>0$，证明：

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}}\ge\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{3}}$$ （Le Trung Kien）

证明：设 $x^2=a,y^2=b,z^2=c$，则不等式变成了

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}}+\frac{y^3}{\sqrt{y^4+y^2z^2+z^4}}+\frac{z^3}{\sqrt{z^4+z^2x^2+x^4}}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$$

两边平方，我们得到等价形式

$$\sum_{cyc}\frac{x^6}{x^4+x^2y^2+y^4}+\sum_{cyc}\frac{2x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\geq\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}x^2+2\sum_{cyc}xy\right)$$

注意到$\sum_{cyc}\frac{x^6-y^6}{x^4+x^2y^2+y^4}=0$，所以上面的不等式可以转化为

$$\sum_{cyc}\frac{6x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\geq\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(x^2+y^2+4xy-\frac{3(x^6+y^6)}{x^4+x^2y^2+y^4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{6x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\geq\sum_{cyc}\frac{6x^3y^3-(x-y)^4(x+y)^2}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

则，下列序列是单调相反的次序

$$\left(\frac{x^3y^3}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}},\frac{y^3z^3}{\sqrt{y^4+y^2z^2+z^4}},\frac{z^3x^3}{\sqrt{z^4+z^2x^2+x^4}}\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}},\frac{1}{\sqrt{y^4+y^2z^2+z^4}},\frac{1}{\sqrt{z^4+z^2x^2+x^4}}\right)。$$

所以，有排序不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\geq\sum_{sym}\frac{x^3y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

等号成立的条件是$a=b=c$

79、设$a,b,c\geq 0,\quad a+b+c=2$，证明：

$$\frac{ab}{1+c^2}+\frac{bc}{1+a^2}+\frac{ca}{1+b^2}\leq 1$$（Pham Kim Hung）

证明：我们记$x=ab+bc+ca,\ p=abc$。根据恒等式

$$A=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=4x^2(1-x)+4(9x-8)p-27p^2,$$

$$B=\sum_{cyc}a^2(a-b)(a-c)=12p+4(1-x)(4-x),$$

我们的不等式转化为

$$(1-x)(5-2x+x^2)+(6x-2)p-2p^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 6A+\frac{5}{2}(1+9x)B+(1-x)^2(365-147x)\ge 0$$

这是显然成立的，因为 $x\le\frac{4}{3}$。等号成立的条件 $a=b=c$

80、设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数，且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$，求表达式 S 的最小值。

$$S=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_1a_2\cdots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}\right)$$（Pham kim Hung）

解：考虑下列函数

$$F=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_1a_2\cdots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}\right)$$

我们有下列有趣的恒等式

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)-f(0,a_1+a_2,a_3,\cdots,a_n)=a_1a_2\left[a_3a_4\cdots a_n\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots\frac{1}{a_n}\right)-2\right]$$

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)-f(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,\cdots,a_n)=\frac{(a_1-a_2)^2}{4}\left[2-a_3a_4\cdots a_n\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots\frac{1}{a_n}\right)\right]$$

因此，至少以下不等式必须是成立的。

$F\ge f(0,a_1+a_2,a_3,\cdots,a_n)$（*）；

$F\ge f\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3\cdots,a_n\right)$（**）。

不失一般性，我们假设 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$。考虑变换式

$$(a_i,a_j)\to\left(\frac{a_i+a_j}{2},\frac{a_i+a_j}{2}\right)$$

如果 $\left(\prod_{k\ne i,j}a_k\right)\left(\sum_{k\ne i,j}\frac{1}{a_k}\right)<2$，则经过变换之后 F 将减少。如果经过这样的变换之后，对每一个 $\{i_1,i_2,\cdots,i_{n-2}\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$，我们有 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{n-2}}\left(\frac{1}{a_{i_1}}+\frac{1}{a_{i_2}}+\cdots+\frac{1}{a_{i_{n-2}}}\right)<2$，（**）可以断定 F 仅当 n 个变量相等时达到最小值。在这种情况下，我们有 $\min F=2n$。

否则，存在一个变换满足

$$\left(\prod_{k=1}^{n-2} a_{i_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{a_{i_k}}\right) \geq 2$$

根据（*），F 仅当集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中最小的元素等于 0 时，达到最小值。在这种情况下，我们有

$$F = g(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_1a_2\cdots a_{n-1}\text{。}$$

使用相同的方法，我们可以得到至少下列不等式成立。

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}) \geq g(0,a_1+a_2,a_3,\cdots,a_{n-1})$$

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}) \geq g\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,\cdots,a_{n-1}\right),$$

使用同样的函数 g，我们得到 $g(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$ 达到其最小值当且仅当集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$中的所有元素都相等或者 n-2 个元素相等而其他元素等于 0。这个事实表明

$$\min F = \min\left(2n,\frac{n^2}{n-2},\frac{n^2}{n-1}+\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\right)$$

注意：下面的结果可以推出上面问题的一个部分。

◆设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数，且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$，对于 $k\in R$，则由

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+ka_1a_2\cdots a_n \geq \min\left\{n+k,\frac{n^2}{n-1}\right\}$$

81、设正实数 x,y,z 满足条件 $2xyz=3x^2+4y^2+5z^2$，求表达式 $P=3x+2y+z$ 的最小值。

解：设 $a=3x,b=2y,c=z$，则我们有

$$a+b+c=3x+2y+z,\quad a^2+3b^2+15c^2=abc$$

根据加权 AM-GM 不等式，我们有

$$a+b+c \geq (2a)^{\frac{1}{2}}(3b)^{\frac{1}{3}}(6c)^{\frac{1}{6}}$$

$$a^2+3b^2+15c^2 \geq \left(4a^2\right)^{\frac{1}{4}}\left(9b^2\right)^{\frac{3}{9}}\left(36c^2\right)^{\frac{15}{36}} = \left(4a^2\right)^{\frac{1}{4}}\left(9b^2\right)^{\frac{1}{3}}\left(36c^2\right)^{\frac{5}{12}}$$

相乘上面的不等式，我们有

$$(a+b+c)(a^2+3b^2+15c^2)\geq 36abc \Rightarrow a+b+c\geq 36$$

所以 $3x+2y+z$ 的最小值是 36. 当 $x=y=z=6$ 时达到。

注意：我们考虑下列一般结果。

◆设 a,b,c,x,y,z 是正实数，且满足条件 $ax^2+by^2+cz^2=xyz$

（a）证明存在一个正实数 k 满足

$$\frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+a}}+\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+b}}+\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+c}}$$

（b）使用这个 k 值，证明

$$x+y+z\geq\frac{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+a}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+b}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+c}\right)}{\sqrt{k}}$$

证明:（a）这部分相当简单。考虑下列函数

$$f(k)=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+a}}+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+b}}+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+c}}-\frac{1}{2}$$

因为 $f(k)$ 是 k 的增函数，且 $f(0)=-\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{k\to\infty}f(k)=1$，由 $f(k)$ 的连续性，可知方程 $f(k)=0$ 有一个正根。

（b）我们设 m,n,p,m_1,n_1,p_1 是正实数，且满足 $m+n+p=1,\quad am_1+bn_1+cp_1=1$

由加权 AM-GM 不等式，我们有

$$x+y+z\geq\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{x}{n}\right)^n\left(\frac{x}{p}\right)^p,$$

$$ax^2+by^2+cz^2\geq\left(\frac{x^2}{m_1}\right)^{am_1}\left(\frac{y^2}{n_1}\right)^{bn_1}\left(\frac{z^2}{p_1}\right)^{cp_1}。$$

将上述不等式相乘，我们有

$$(x+y+z)(ax^2+by^2+cz^2)\geq\frac{x^{m+2am_1}y^{n+2bn_1}z^{p+2cp_1}}{m^m n^n p^p m_1^{m_1} n_1^{n_1} p_1^{p_1}}$$

我们将选择六个数 m,n,p,m_1,n_1,p_1，验证下列条件

$$m+2am_1=n+2bn_1=p+2cp_1=1$$

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p},\quad \frac{x^2}{m_1}=\frac{y^2}{n_1}=\frac{z^2}{p_1}$$

这第二个条件等价于存在一个实数 l，满足

$$\frac{m^2}{m_1}=\frac{n^2}{n_1}=\frac{p^2}{p_1}=8l$$

替换这些关系到第一个条件，我们有

$$\frac{a}{4l}=m_2^2-m_2,\frac{b}{4l}=n_2^2-n_2,\frac{c}{4l}=p_2^2-p_2$$

其中 $m_2=\frac{1}{m},n_2=\frac{1}{n},p_2=\frac{1}{p}$，所以我们有，

$$1=\frac{1}{m_2}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{p_2}=\frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{l}+\sqrt{l+a}}+\frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{l}+\sqrt{l+b}}+\frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{l}+\sqrt{l+c}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{l}}=\frac{1}{\sqrt{l}+\sqrt{l+a}}+\frac{1}{\sqrt{l}+\sqrt{l+b}}+\frac{1}{\sqrt{l}+\sqrt{l+c}}$$

根据 k 的定义，我们必定有 $l=k$，所以，我们有

$$x+y+z\ge m^{-m}n^{-n}p^{-p}m_1^{-am_1}n_1^{-bn_1}p_1^{-cp_1}=\frac{8l}{mnp}=8lm_2n_2p_2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+a}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+b}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+c}\right)$$

等号成立的条件是 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{mnp}{am^2+bn^2+cp^2}$

◆这个问题可以表示为另外的形式。

设 a,b,c,x,y,z 是正实数且满足 $ax^2+by^2+cz^2=xyz$。

（a）证明：存在一个正实数 φ 满足：$\frac{2}{1+\sqrt{1+\varphi a}}+\frac{2}{1+\sqrt{1+\varphi b}}+\frac{2}{1+\sqrt{1+\varphi c}}=1$

（b）对于同样的φ值，证明：$x+y+z\ge\dfrac{\left(1+\sqrt{1+\varphi a}\right)\left(1+\sqrt{1+\varphi b}\right)\left(1+\sqrt{1+\varphi c}\right)}{\varphi}$

◆虽然不能否认，这个一般的问题在创建特定的不等式方面（对a,b,c特定的值）是很有用的，但我们认为原始问题，并不是基于一般问题，是偶然创建的，由于它有有趣的系数 2,3,4,5,3,2,1 以及表达式当所有变量a,b,c都等于 6 时达到最小值的特性，是令人印象深刻的。

82、设a,b,c是非负实数，证明：

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$（Pham Kim Hung）

证明：首先我们假设$a\ge b\ge c$。注意到

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+c^2+ab+ac}}$$

于是只需证明

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+c^2+ab+ac}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

令$M=ab+bc+ca,\quad N=b^2+c^2+ab+ac$，则

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{M}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N}}=\frac{2\sqrt{2}(b^2-bc+c^2)}{\sqrt{MN}(\sqrt{M}+\sqrt{N})}$$

当然，$N\ge M;N\ge 2(b^2-bc+c^2),M=ab+bc+ca\ge b\sqrt{a^2+bc}$。所以

$$\frac{2\sqrt{2}(b^2-bc+c^2)}{\sqrt{MN}(\sqrt{M}+\sqrt{N})}\le\frac{2\sqrt{2}(b^2-bc+c^2)}{\sqrt{MN}\cdot 2\sqrt{N}}=\frac{\sqrt{2}(b^2-bc+c^2)}{M\sqrt{N}}$$

$$\le\frac{\sqrt{2}(b^2-bc+c^2)}{b\sqrt{a^2+bc}\cdot\sqrt{2(b^2-bc+c^2)}}=\frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{b\sqrt{a^2+bc}}\le\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}$$

证毕。无等号成立的情况。

83、设a,b,c,d是正实数，且$a+b+c+d=4$，证明：

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le 1$$ （Vasile Cirtoaje）

证明：设 $x=abc, y=bcd, z=cda, t=dab$。我们只需证明

$$\sum_{cyc}\frac{1}{5-x}\le 1 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1-x}{5-x}\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(1-x)(x+2)}{(5-x)(x+2)}\ge 0$$

由 AM-GM 不等式，容易证明 $x+y=bc(a+d)\le \frac{64}{27}<3$。所以，如果 $x\ge y$，则

$(1-x)(2+x)\le(1-y)(2+y), (5-x)(2+x)\ge(5-y)(2+y)$。

根据 Chebyshev 不等式，我们有

$$4\sum_{cyc}\frac{(1-x)(x+2)}{(5-x)(x+2)}\ge\left(\sum_{cyc}(1-x)(2+x)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{(5-x)(x+2)}\right)$$

于是，只需证明

$$\sum_{cyc}(1-x)(2+x)=8-\sum_{cyc}abc-\sum_{cyc}a^2b^2c^2\ge 0$$

（1）我们设 $p=a+b, q=ab, r=c+d, s=cd$。则 $p+r=4$，于是，只需证明

$$A=sp+qr+s^2(p^2-2q)+q^2(r^2-2s)\le 8$$

记 $A=f(q)=q^2(r^2-2s)+q(r-2s^2)+sp+s^2p^2$

因为 $f(q)$是 q 的一个凸函数，我们有

$$f(q)\le\max\left\{f(0), f\left(\frac{p^2}{4}\right)\right\}$$

类似地，如果我们考虑 A 作为 s 的函数，或 $A=g(s)$，我们有

$$g(s)\le\max\left\{g(0), g\left(\frac{r^2}{4}\right)\right\}$$

这两个结果组合起来，表明当且仅当 a,b,c,d 中的一个数等于 0（情况 I）或者

$a=b, c=d$（情况 II）. 情况 I 很容易得到证明。在情况 II，不等式变成

$$a^2c+c^2a+a^4c^2+c^4a^2\le 4$$

令 $\beta=ac$，则 $\beta\le 1$，而且

$$a^2c+c^2a+a^4c^2+c^4a^2=2ac+a^2c^2(4-2ac)=-2\beta^3+4\beta^2+2\beta=4+(4-2\beta)(\beta^2-1)\le 4$$

等号成立的条件是 $a=b=c=d=1$

（2）不失一般性，假设 $a\ge b\ge c\ge d$。令 $m=\dfrac{a+c}{2},u=\dfrac{a-c}{2},t=m^2,v=u^2$，则我们有

$$f(a,b,c,d)=\sum_{cyc}abc+\sum_{cyc}a^2b^2c^2=g(v)$$

其中 $g(v)=(t-v)(b+d)+2bd\sqrt{t}+(t-v)^2(b^2+d^2)+2b^2d^2(t+v)$

因为 $t-v=ac\ge bd$，于是我们有

$$g'(v)=-(b+d)-2(t-v)(b^2+d^2)+2b^2d^2\le 0$$

这就意味着 $f(a,b,c,d)\le f\left(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d\right)$。现在我们重复前两个变量 $\sqrt{ac},b$ 的过程，然后第一个和第三个，重复上述过程，并取极限，我们有

$$f(a,b,c,d)\le f(\alpha,\alpha,\alpha,4-3\alpha)\quad \alpha\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$$

不等式 $f(\alpha,\alpha,\alpha,4-3\alpha)\le 8$ 等价于

$$\alpha^3+3\alpha^2(4-3\alpha)+\alpha^6+3\alpha^4(4-3\alpha)^2\le 8\Leftrightarrow(\alpha-1)^2(7\alpha^4-4\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha-2)\le 0$$

这是显然的，因为 $\alpha\in\left[0,\dfrac{4}{3}\right]$（从而 $7\alpha^4-4\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha-2\le 0$）。

等号成立的条件是 $a=b=c=d=1$

注意：使用归纳法，我们可以证明下列结果。

◆设 $n\ge 3$ 是自然数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$。对于每一个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们记 $b_k=a_1a_2\cdots a_{k-1}a_{k+1}\cdots a_n$。证明：

$$\frac{1}{n+1-b_1}+\frac{1}{n+1-b_2}+\cdots+\frac{1}{n+1-b_n}\le 1$$

为了证明它，我们使用归纳法来证明更一般的不等式

$$\frac{1}{k-b_1}+\frac{1}{k-b_2}+\cdots+\frac{1}{k-b_n}\le\frac{n}{k-1}$$

其中k是一个实数，且$k\ge n+1$。注意到，最困难的步骤是$n=4$的情况。对于$n=4$，不等式$\sum_{cyc}\frac{1}{k-abc}\le\frac{4}{k-1}\,(k\ge5)$的证明与$k=5$的情况是类似的。

84、设a,b,c是三个任意实数。证明:

$$\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{1}{(2b-c)^2}+\frac{1}{(2c-a)^2}\ge\frac{11}{7(a^2+b^2+c^2)}$$ （Pham kim Hung）

证明：记$x=2a-b,y=2b-c,z=2c-a$，则我们有

$$a=\frac{4x+2y+z}{7},b=\frac{4y+2z+x}{7},c=\frac{4z+2x+y}{7}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{2(x+y+z)+x^2+y^2+z^2}{7}$$

余下的只需要证明，对所有$x,y,z\in R$，有

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge\frac{11}{2(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2}$$

当然，我们只需考虑$x\ge y\ge0\ge z$的情况（不必讨论$x,y,z\ge0$或$x,y,z\le0$的情况）。事实上，我们只需证明

$$f(x,y,z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{11}{2(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2}\ge0$$

对所有$x,y,z\ge0$（我们改变了z的符号）。考虑两种情况

（i）如果$z\ge x+y$，则很容易证明

$$\frac{1}{z-x-y}\left[f(x,y,z)-f(x,y,x+y)\right]=\frac{11(3z-x-y)}{MN}-\frac{x+y+z}{z^2(x+y)^2}$$

其中$M=x^2+y^2+(x+y)^2;\quad N=x^2+y^2+z^2+2(z-x-y)^2$

因为$3z-x-y\ge x+y+z,2(x+y)^2\ge M,5z^2\ge N$，因此

$$f(x,y,z)\ge f(x,y,x+y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{11}{2\left[x^2+y^2+(x+y)^2\right]}$$

注意到

$$\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right]\left(x^2+y^2+xy\right)-\frac{27}{4}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}-\frac{19}{4}\ge 0$$

所以 $f(x,y,x+y)\ge 0$。

（ii）如果 $x+y\ge z$，设 $t=\sqrt{xy}$，我们有

$$f(x,y,z)\ge f(t,t,z)=\frac{2}{t^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{11}{2t^2+z^2+(2t-z)^2}$$

不失一般性，假设 $z=1$，则 $t\le\frac{1}{2}$。展开之后，不等式变成

$$f(t)=5t^4-4t^3+6t^2-8t+3\ge 0$$

因为 $t\le\frac{1}{2}$， $f'(t)=20t^3-12t^2+12t-8<(20t^3-10t^2)+(12t-6)$，所以我们得到

$$f(t)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=0.3125>0$$

注意：对所有实数 a,b,c，不等式 $\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{1}{(2b-c)^2}+\frac{1}{(2c-a)^2}\ge\frac{k}{7(a^2+b^2+c^2)}$ 都成立的最好的常数 $k=\min\limits_{0\le x\le\frac{1}{2}}g(x)=10x^2+\frac{6}{x^2}-\frac{16}{x}-8x+23$。某些计算之后，我们找到这个值大约是 11.6075。

85、设 a,b,c 是正实数。考虑下列不等式

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k+c^k}{3}}\quad（*）$$

（a）证明（*）对 $k=2$ 成立。

（b）证明（*）对 $k=3$ 不成立，但是对 $k=3$ 以及 a,b,c 满足下列条件成立

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \ge abc(a^3+b^3+c^3)$$

（c）k 取何值时，不等式（*）对任意正数 a,b,c 都成立？

证明:（a）对于 $k=2$，不失一般性，我们假设 $\sum_{cyc} a^2=3$。则不等式 $\sum_{cyc}\frac{ab}{c}\ge 3$ 等价于

$$\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{c}\right)^2 \ge 9 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{c^2}\ge 3 \Leftrightarrow \sum_{cyc}a^2\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}-2\right)\ge 0$$

这是显然成立的。等号成立的条件是 $a=b=c$。

（b）如果 $k=3$，我们设 $a=b=0.8, c=\sqrt[3]{1.976}$。则（*）不成立。现在，利用条件 $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \ge abc(a^3+b^3+c^3)$，（*）为真。事实上，根据 AM-GM 不等式，使用假设条件 $\sum_{cyc}a^3=3$，我们有

$$\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)=3+\sum_{cyc}a^2(b+c)=\sum_{cyc}\left(a^2b+b^2a+1\right)\ge 3\sum_{cyc}ab$$

$$\Rightarrow abc\left(\sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}ab(a+b)\right)\ge 3abc\left(\sum_{cyc}ab\right)$$

因为 $abc\sum_{cyc}a^3 \le \sum_{cyc}a^3b^3$，我们有

$$abc\left(\sum_{cyc}ab(a+b)\right)+\sum_{cyc}a^3b^3 \ge 3abc\left(\sum_{cyc}ab\right) \Rightarrow \left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)\ge 3abc\left(\sum_{cyc}ab\right)$$

$$\sum_{cyc}a^2b^2 \ge 3abc \Rightarrow \sum_{cyc}\frac{ab}{c}\ge 3$$

（c）考虑正实数 a,b,c 满足条件 $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=3$，我们来求表达式 S 的最大值

$$S=a^k+b^k+c^k \quad (k>0)$$

设 $x=\frac{ab}{c}, y=\frac{bc}{a}, z=\frac{ca}{b}$，则 $x+y+z=3$ 并且 $S=\sum_{cyc}(xy)^{\frac{k}{2}}$。由一个已知的结果（查看去每一个问题），我们有

$$S \le \max\left\{3, \frac{3^k}{2^k}\right\}$$

于是不等式(∗)对所有正实数a,b,c都成立，当且仅当$k \le \dfrac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \approx 2.709511\cdots < 3$(当然包括$k<0$的情况)。

86、设a,b,c是非负实数，证明

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \ge \frac{4}{a+b+c}$$ （Pham Kim Hung）

证明:（1）我们记

$$S=\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}};\quad P=\sum_{cyc}(b+c)^3(4a^2+bc)$$

根据 Holder 不等式，我们有

$$S\cdot S\cdot P \ge (a+b+c)^3$$

所以，只需证明

$(a+b+c)^5 \ge 2P$。因为

$$P=\sum_{cyc}a^4(b+c)+7\sum_{cyc}a^3(b^2+c^2)+24abc\sum_{cyc}ab,$$

$$\left(a+b+c\right)^5=\sum_{cyc}a^5+5\sum_{cyc}a^4(b+c)+10\sum_{cyc}a^3(b^2+c^2)+20abc\sum_{cyc}a^2+30abc\sum_{cyc}ab,$$

不等式$(a+b+c)^5 \ge 2P$等价于（整理之后）

$$\sum_{cyc}a^5+3\sum_{cyc}a^4(b+c)+20abc\sum_{cyc}a^2 \ge 4\sum_{cyc}a^3(b^2+c^2)+18abc\sum_{cyc}ab$$

这最后的不等式由下列不等式，得到。

$$18abc\sum_{cyc}a^2 \ge 18abc\sum_{cyc}ab,$$

$$\sum_{cyc}a^5+abc\sum_{cyc}a^2 \ge \sum_{cyc}a^4(b+c),$$

$$4\sum_{cyc}a^4(b+c) \ge 4\sum_{cyc}a^3(b^2+c^2)。$$

等号成立的条件是$a=b, c=0$及其排列。

（2）假设 $a \ge b \ge c$。记 $t=\dfrac{a+b}{2}\ge c$，则不等式 $(4a^2+bc)(4b^2+ca)\le(4t^2+tc)^2$ 等价于

$$(a-b)^2\left(\frac{1}{4}c^2+a^2+b^2+6ab-3ca-3cb\right)\ge 0,$$

这是显然成立的，因为 $a \ge b \ge c$。于是，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}}\ge\frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}$$

余下的只需证明

$$\frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}\ge\frac{4}{a+b+c}=\frac{4}{2t+c}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}-\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}-\frac{1}{t}\right)\ge\frac{4}{2t+c}-\frac{2}{t}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-c}{\sqrt{4t^2+tc}\left(2t+\sqrt{2t^2+tc}\right)}+\frac{-4c^2}{t\sqrt{4c^2+t^2}\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\ge\frac{-2c}{t(2t+c)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{t(2t+c)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}\left(2t+\sqrt{2t^2+tc}\right)}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\ge 0$$

注意到

$$\frac{1}{3t(2t+c)}\ge\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}\left(2t+\sqrt{2t^2+tc}\right)}\quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 9t^2(2t+c)^2\le(4t^2+tc)(2t+\sqrt{4t^2+tc})^2\Leftrightarrow t^2+6tc+2c^2\le 2t\sqrt{4t^2+tc}+c\sqrt{4t^2+tc},$$

这是显然成立的，因为 $t \ge c$。下面我们将证明

$$\frac{5}{3t(2t+c)}\ge\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}(t+\sqrt{4c^2+t^2})}\quad (**)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{4c^2+t^2}(t+\sqrt{4t^2+c^2})\ge 12c(2t+c)$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有 $\sqrt{5(4c^2+t^2)}\ge 4c+t$。类似地，$\sqrt{5(4t^2+c^2)}\ge 4t+c$

所以只需证明

$$(4c+t)\left[4c+(\sqrt{5}+1)t\right]\ge 12c(2t+c)\Leftrightarrow(\sqrt{5}+1)t^2+(16-4\sqrt{5})tc+4c^2\ge 0$$

这是显然成立的。综合（*）（**）可知，不等式成立。

87、设a,b,c是非负实数，证明:

$$\sqrt{\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}}+\sqrt{\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}}+\sqrt{\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}}\le 1$$（Pham Kim Hung）

证明：不失一般性，假设$a^2+b^2+c^2=3$。由加权的 Jensen 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}}=\sum_{cyc}\frac{a^2+4b^2+4c^2}{27}\cdot\sqrt{\frac{27^2\cdot ab}{(4a^2+b^2+4c^2)(a^2+4b^2+4c^2)^2}}$$

$$\le\sqrt{\sum_{cyc}\frac{27ab}{(4a^2+b^2+4c^2)(a^2+4b^2+4c^2)}}=\sqrt{\sum_{cyc}\frac{3ab}{(4-a^2)(4-b^2)}}$$

余下的只需证明

$$3\sum_{cyc}ab(4-c^2)\le\prod_{cyc}(4-a^2)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)\le\frac{16}{9}\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+4\sum_{cyc}a^2b^2+3\sum_{cyc}a^2bc-a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 36\sum_{cyc}a^3(b+c)+9\sum_{cyc}a^2bc+9a^2b^2c^2\le 16\sum_{cyc}a^4+68\sum_{cyc}a^2b^2$$

因为$3abc\sum_{cyc}a=abc\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)\ge 9a^2b^2c^2$，我们仅需证明

$$9\sum_{cyc}a^3(b+c)+3\sum_{cyc}a^2bc\le 4\sum_{cyc}a^4+17\sum_{cyc}a^2b^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(2a^2+2b^2+\frac{3c^2}{2}-5ab\right)(a-b)^2\ge 0$$

假设$a\ge b\ge c$，则由 Abel 不等式，不等式是成立的。因为

$$2a^2+2b^2+\frac{3c^2}{2}-5ab\ge 0$$ 而且

$$\left(2a^2+2b^2+\frac{3c^2}{2}-5ab\right)+\left(2a^2+2c^2+\frac{3b^2}{2}-5ac\right)=4a^2+\frac{9}{2}\left(b^2+c^2\right)-5a(b+c)$$

$$\ge 4a^2+9\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-10a\left(\frac{b+c}{2}\right)\ge 0$$

88、设n是一个正整数，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$;$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是两个正数序列。设$(z_1,z_2,\cdots,z_n)$是正数序列，且满足$z_{i+j}^2\ge x_iy_j\quad(1\le i,j\le n)$，记$M=\max\{z_2,\cdots,z_{2n}\}$，证明:

$$\left(\frac{M+z_2+\cdots+z_{2n}}{2n}\right)^2\ge\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$$ （IMO Shrtlist 2003）

证明：设$X=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\max\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$。不失一般性，我们可以假设

$X=Y=1$（否则，使用$\frac{x_i}{X}$替换x_i，用$\frac{y_i}{Y}$替换y_i，用$\frac{z_i}{\sqrt{XY}}$替换z_i）。根据 AM-GM 不等式，有下列更强的结果

$$M+z_2+\cdots+z_{2n}\ge x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n \quad (*)$$

设r是某些实数。我们将证明不等式（$*$）右边的表达式中比r大的项数不大于左边表达式中比r大的项数。事实上，这显然是成立的，因为$r>1$（因为（$*$）右边表达式没有比r大的项）。考虑$r<1$的情况。我们记

$$A=\{i\in N,1\le i\le n\mid x_i>r\},\quad B=\{i\in N,1\le i\le n\mid y_i>r\}$$

则当然$|A|,|B|\ge1$。

假设$A=\{i_1,i_2,\cdots,i_a\},B=\{j_1,j_2,\cdots,j_b\}$其中$i_1<i_2<\cdots<i_a,\ j_1<j_2<\cdots<j_b$。序列

$(z_2,z_3,\cdots,z_{2n})$中至少为$a+b-1$项比r大:

$$z_{i_1+j_1},z_{i_1+j_2},\cdots,z_{i_1+j_b},z_{i_2+j_b},\cdots,z_{i_a+j_b}$$

另一方面，注意到$a+b-1\ge1$，所以至少有一个数z_i比r大，因此$M>r$。这就意味着（$*$）左边的表达式至少有$a+b$个项比r大。

由这个性质，我们得到对每一个自然数$k\ (1\le k\le 2n)$，（$*$）左边第k个最大数不小于（$*$）右边表达式的第k个最大数。所以，很明显，（$*$）左边表达式的和不小于（$*$）右边表达式的和。证毕。

89、（a）设a,b,c是三个实数。证明:

$$a^4+b^4+c^4+ab^3+bc^3+ca^3\ge2(a^3b+b^3c+c^3a)$$

（b）设 a,b,c 是三个实数，且满足 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=6$。证明:

$$a^3b+b^3c+c^3a+abc(a+b+c)\le 6$$

（c）求最好（最大）的常数 k 满足对所有实数 a,b,c，下列不等式都成立。

$$a^4+b^4+c^4+k\left(ab+bc+ca\right)^2\ge(1+3k)\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$$

（Vasile Cirtoaje and Pham kim Hung）

证明: 对于所有实数 a,b,c，我们有

$$\left(a^2-kab+kac-c^2\right)^2+\left(b^2-kbc+kba-a^2\right)^2+\left(c^2-kca+kcb-b^2\right)^2\ge 0$$

展开之后，这个不等式变成

$$\sum_{cyc}a^4+(k^2-1)\sum_{cyc}a^2b^2+k\sum_{cyc}ab^3\ge 2k\sum_{cyc}a^3b+(k^2-k)\sum_{cyc}a^2bc$$

（a）令 $k=1$，我们有

$$a^4+b^4+c^4+ab^3+bc^3+ca^3\ge 2(a^3b+b^3c+c^3a)$$

（b）令 $k=2$，我们有

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}ab^3\ge 4\sum_{cyc}a^3b+2abc\sum_{cyc}a$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\ge 6\sum_{cyc}a^3b+6abc\sum_{cyc}a$$

如果 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=6$，则 $a^3b+b^3c+c^3a+abc(a+b+c)\le 6$

（c）我们有

$$\left[\left(a-b\right)^2+2c\left(a-c\right)\right]^2+\left[\left(b-c\right)^2+2a\left(b-a\right)\right]^2+\left[\left(c-a\right)^2+2b\left(c-b\right)\right]^2\ge 0$$

展开之后，不等式变成

$$6\sum_{cyc}a^4+4\sum_{cyc}a^2bc+2\sum_{cyc}a^2b^2\ge 12\sum_{cyc}a^3b\Rightarrow\sum_{cyc}\left(a^4+b^4+c^4\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}ab\right)^2\ge 2\sum_{cyc}a^3b$$

于是，我们找到的最好的（最大）常数 $k=\dfrac{1}{3}$。

注意: 在这些结果中，有一个等号成立的特殊情况，它不同于 $a=b=c$。例如在（a）

部分，等号成立的条件是 $a=2\cos 20+1\approx 2.88, b=2\cos 40\approx 1.532, c=-1$

90、设 a,b,c,d 是非负实数，且满足条件 $a+b+c+d=4$。证明：对所有正整数 $k,n\ge 2$，

有 $\left(k+a^n\right)\left(k+b^n\right)\left(k+c^n\right)\left(k+d^n\right)\ge\left(k+1\right)^4$（Pham kim hung）

证明：注意到，对于 $n\ge 2$，我们有

$$\left(\frac{k+a^n}{k+1}\right)^2\ge\left(\frac{k+a^2}{k+1}\right)^n$$

这个不等式可以很容易地由 AM-GM 不等式或者 Holder 不等式得证。
根据这个不等式，我们有

$$\prod_{cyc}\left(\frac{k+a^n}{k+1}\right)^2\ge\prod_{cyc}\left(\frac{k+a^2}{k+1}\right)^n$$

所以，只需证明不等式在 $n=2$ 的情况成立即可。假设这个不等式对于 $n=2$ 为真，则对于 $k\ge 2$ 也为真，因为由 Holder 不等式，我们有

$$\prod_{cyc}\left(k+a^2\right)=\prod_{cyc}\left[(k-2)+(2+a^2)\right]\ge\left(k-2+\sqrt[4]{\prod_{cyc}(2+a^2)}\right)^4\ge\left(k+1\right)^4$$

所以，只需证明不等式在 $k=n=2$ 时，成立。即

$$\left(2+a^2\right)\left(2+b^2\right)\left(2+c^2\right)\left(2+d^2\right)\ge 81$$

（1）对称分离方法。不等式等价于

$$\sum_{cyc}\ln\left(2+a^2\right)\ge 4\ln 3$$

考虑下列函数

$$f(x)=\ln\left(2+x^2\right)-\ln 3-\frac{2x}{3}+\frac{2}{3}$$

则其导数

$$f'(x)=\frac{2x}{2+x^2}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(x-1\right)\left(2-x\right)$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]\cup[2,+\infty)$ 上是减函数，在 $[1,2]$ 上是增函数，所以

$$\min_{0\le x\le t}f(x)=\min\{f(1),f(t)\}\quad t\in[0,4]\text{（*）}$$

由（*），我们有， $f(x)\ge f(1)=0\,(1\le x\le 2.5)$。如果 $a,b,c,d\le 2.5$，则显然成立。因为

$$\sum_{cyc} f(a) \le 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \ln(2+x^2) \le \left(\frac{2x}{3}-\frac{2}{3}+\ln 3\right) = 4\ln 3$$

否则，设 $a \ge 2.5$，记 $t = \dfrac{b+c+d}{3}$，则当然有

$$\prod_{cyc}\left(2+a^2\right) \ge 16+8\sum_{cyc} a^2+4a^2\left(b^2+c^2+d^2\right) \ge 16+8a^2+24t^2+12a^2t^2$$

余下，只需证明，对所有 $t \le 0.5$，有

$$g(t) = 8(4-3t)^2+24t^2+12t^2(4-3a)^2 \ge 65$$

因为 $4-3t \ge 2.5, \quad t(4-3t)^2 < 4$，于是

$$g'(t) = -48(4-3t)+48t+24t(4-3t)^2-72t^2(4-3t) \le -48\cdot(2.5)^2+48\cdot(0.5)+24\cdot 4 < 0$$

我们可以得出

$$g(t) \ge g(0.5) = 74.75 > 65$$

证毕。等号成立的条件是 $a=b=c=d=1$

（2）注意到，如果 $a+b \le 2$，则

$$(2+a^2)(2+b^2) \ge \left[2+\frac{(a+b)^2}{4}\right]^2$$

事实上，这个不等式等价于

$$2(a^2+b^2)-(a+b)^2-\frac{(a+b)^4}{16}-a^2b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\left[16-(a+b)^2-4ab\right] \ge 0$$

这显然是成立的，因为 $a+b \le 2$。现在，假设 $d \ge c \ge b \ge a$，并且记

$$F(a,b,c,d) = \prod_{cyc}\left(2+a^2\right)$$

因为 $c+a \le 2$，所以 $F(a,b,c,d) \ge F\left(\dfrac{a+c}{2}, b, \dfrac{a+c}{2}, d\right)$。根据问题 83 的解答（2），有

$$F(a,b,c,d) \ge F(x,x,x,4-3x), \quad x = \frac{a+b+c}{3}$$

余下的只需证明 $\left(2+x^2\right)^3\left[2+(4-3x)^2\right] \ge 81$，或者 $f(x) \ge 4\ln 3$。其中

$$f(x) = 3\ln(2+x^2)+\ln[2+(4-3x)^2]$$

很容易计算出

$$f'(x)=\frac{6x}{2+x^2}-\frac{6(4-3x)}{2+(4-3x)^2}=0\Leftrightarrow(x-1)\left(4-\frac{8}{x(4-3x)}\right)=0$$

如果 $x\neq 1$，我们必有 $x(4-3x)=2$。所以，由 AM-GM 不等式，我么有

$$3x(4-3x)\leq 4\Rightarrow x(4-3x)\leq\frac{4}{3}<2$$

所以，方程 $f'(x)=0$ 只有一个正根 $x=1$。因此，我们有

$$\max_{0\leq x\leq 1}f(x)=f(1)=4\ln 3$$

注意：使用类似于证法（2）的方法，我们可以证明下列一般的问题。

◆设 a,b,c,d 是非负实数，且满足 $a+b+c+d=4$，对于 $k\geq 1$，证明：

$$(k+a^2)(k+b^2)(k+c^2)(k+d^2)\geq\min\{(k+1)^4,(k+\alpha^2)^3(k+(4-3\alpha)^2)\}$$

这里 α,k 满足 $k\leq\frac{4}{3},\alpha=\frac{2-\sqrt{4-3k}}{3}$。

为了证明它，注意到，如果 $k\geq 1$ 而且 $a+b\leq 2$，则

$$(k+a^2)(k+b^2)\geq\left[k+\frac{(a+b)^2}{4}\right]^2$$

通过选择特殊的 k 值，我们可以得到一些有趣的结果如下

$$(5+4a^2)(5+4b^2)(5+4c^2)(5+4d^2)\geq 6480$$

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)\geq 10\left(1+\frac{1}{9}\right)^3=\frac{10^4}{9^3}$$

$$(4+3a^2)(4+3b^2)(4+3c^2)(4+3d^2)\geq\min\left(7^4,\frac{2^{16}}{3^3}\right)=7^4=2401$$

91、设 a,b,c 是正实数，且满足 $a^2+b^2+c^2=3$，证明：

$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\leq 3$$

证明：由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\left(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\right)^2\leq\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\right)$$

余下证明，如果 $x+y+z=3$，则

$$\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\le 3$$

注意到

$$3\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)=\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\sum_{cyc}xy\right)\left(\sum_{cyc}x^2y\right)$$

$$=\left(\sum_{cyc}xy\right)\left(\sum_{cyc}x^3y+\sum_{cyc}x^2y^2+3xyz\right)$$

设 $s=xy+yz+zx$，则由 Schur 不等式，由 $3abc\ge 4s-9$。另外

$$\sum_{cyc}x^2=9-2s;\quad \sum_{cyc}x^2y^2=s^2-6xyz;$$

考虑到问题 52，我们有

$$3\sum_{cyc}x^3y\le\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=(9-2s)^2$$

我们有

$$3\left(\sum_{cyc}xy\right)\left(\sum_{cyc}x^3y+\sum_{cyc}x^2y^2+3xyz\right)\le s\left[(9-2s)^2+3s^2-9abc\right]$$

$$\le s\left[(9-2s)^2+3s^2-3(4s-9)\right]$$

于是，只需证明

$$s\left[(9-2s)^2+3s^2-3(4s-9)\right]\le 81\Leftrightarrow (s-3)(7s^2-27s+27)\le 0$$

这是显然成立，因为 $s\le 3$。等号成立的条件是 $a=b=c$。

注意：根据这个结果，我们可以很容易地得到（Cauchy 求反）

★假设 $a,b,c>0, a+b+c=3$，证明：$\dfrac{a}{1+b^3}+\dfrac{b}{1+c^3}+\dfrac{c}{1+a^3}\ge\dfrac{3}{2}$

92、设 a,b,c 是任意正实数，证明

$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2+\left(c+\frac{a^2}{b}\right)^2\ge\frac{12\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a+b+c}$$ （Pham kim hung）

证明：不等式等价于

$$a^2+b^2+c^2+\frac{2ab^2}{c}+\frac{2bc^2}{a}+\frac{2ca^2}{b}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}+\frac{a^4}{b^2}\ge\frac{12\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a+b+c}$$

使用下列恒等式

$$\sum_{cyc}\frac{b^4}{c^2}-\sum_{cyc}a^2=\sum_{cyc}(b-c)^2\left(1+\frac{b}{c}\right)^2,$$

$$\sum_{cyc}\frac{ab^2}{c}-\sum_{cyc}ab=\sum_{cyc}\frac{a\left(b-c\right)^2}{c},$$

$$\frac{3\sum_{cyc}a^3}{\sum_{cyc}a}-\sum_{cyc}a^2=\frac{\sum_{cyc}(b+c)(b-c)^2}{a+b+c},$$

于是，不等式可以改写成

$$\sum_{cyc}\left(b-c\right)^2\left[\left(1+\frac{b}{c}\right)^2-1-\frac{4\left(b+c\right)}{a+b+c}+\frac{2a}{c}\right]\ge 0 \text{ 或者}$$

$$S_a\left(b-c\right)^2+S_b\left(c-a\right)^2+S_c\left(a-b\right)^2\ge 0$$

其中

$$S_a=\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{a+b+c}+\frac{2\left(a+b\right)}{c}-4,$$

$$S_b=\frac{c^2}{a^2}+\frac{4b}{a+b+c}+\frac{2\left(b+c\right)}{a}-4,$$

$$S_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{4c}{a+b+c}+\frac{2\left(a+c\right)}{b}-4$$

（i）$c\ge b\ge a$。当然，$S_b\ge 0$，而且

$$S_a+S_b=\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{4\left(a+b\right)}{a+b+c}+\frac{2\left(b+c\right)}{a}+\frac{2\left(a+b\right)}{c}-8$$

$$>\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}-4\right)+\left(\frac{2c}{a}+\frac{2a}{c}-4\right)+\left(\frac{2b}{a}-2\right)\ge 0$$

类似地，我们有

$$S_c+S_b=\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{4(b+c)}{a+b+c}+\frac{2(b+c)}{a}+\frac{2(a+c)}{b}-8$$

$$>\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}-2\right)+\left(\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}-4\right)+\left(\frac{2c}{a}-2\right)\geq 0$$

所以

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq(S_a+S_b)(b-c)^2+(S_b+S_c)(a-b)^2\geq 0$$

（ii）$a\geq b\geq c$。当然，$S_a\geq 1, S_c\geq -1+\frac{4c}{a+b+c}$，而且

$$S_a+2S_b=\frac{2c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{8b+4a}{a+b+c}+\frac{4(b+c)}{a}+\frac{2(a+b)}{c}-12$$

$$>\left(\frac{8b+4a}{a+b+c}-4\right)+\left(\frac{2b}{a}+\frac{2a}{c}-4\right)+\left(\frac{2c}{a}+\frac{2a}{c}-4\right)\geq 0$$

如果 $2b\geq a+c$，则我们有

$$S_a+4S_b+S_c\geq\frac{4c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{16b+4a+4c}{a+b+c}+\frac{8(b+c)}{a}+\frac{2(a+b)}{c}-21$$

$$\geq\frac{4c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{8(b+c)}{a}+\frac{2(a+b)}{c}-13\geq\frac{4c^2}{a^2}+\frac{16c}{a}+\frac{2a}{c}-10\geq 2\sqrt{32}-10>0$$

考虑下列情况

如果 $a+c\leq 2b$，当然 $2(b-c)\geq a-c$。如果 $S_b\geq 0$，则不等式显然成立。否则，假设 $S_b\leq 0$，则

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq(S_a+4S_b+S_c)(b-c)^2\geq 0$$

如果 $a+c\geq 2b$，我们将证明 $S_c+2S_b\geq 0$，即

$$g(c)=\frac{2c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{8b+4c}{a+b+c}+\frac{4(b+c)}{a}+\frac{2(a+c)}{b}-12\geq 0$$

注意到，$g(c)$ 是 $c\geq 0$ 和 $c\geq 2b-a$ 的增函数，所以

（.）如果 $a\geq 2b$，我们有

$$g(c)\ge g(0)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{8b}{a+b}+\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}-12=\left(\frac{a+b}{b}+\frac{8b}{a+b}-6\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}-4\right)$$

$$+\left(\frac{a^2}{b^2}-4\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{a+b}\right)+\frac{2}{3}\ge 0$$

（. . ）如果$a\le 2b$，我们很容易得到

$$g(c)\ge g(2b-a)=\frac{8b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{4b}{a}-\frac{4a}{3b}-\frac{14}{3}\ge 0$$

我们即得结论，因为

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge(S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2\ge 0$$

93、假设n是一个大于 2 的正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$是 n 个实数。证明：对于集合$\{1,2,\cdots,n\}$的任意非空子集 S，我们有

$$\left(\sum_{i\in S}a_i\right)^2\le\sum_{1\le i\le j\le n}\left(a_i+\cdots+a_j\right)^2$$ （Gabriel Dospinescu）

证明：我们首先证明一个引理

引理：对于所有实数$x_1,x_2,\cdots,x_{2k+1}$，有

$$\left(\sum_{0\le i\le k}x_{2i+1}\right)^2\le\sum_{1\le i\le j\le 2k+1}\left(x_i+\cdots+x_j\right)^2 \quad (*)$$

证明：设$s_i=x_1+x_2+\cdots+x_i \quad i\in\{1,2,\cdots,k\}$，则

$$\sum_{0\le i\le k}x_{2i+1}=s_1+s_3-s_2+s_5-s_4+\cdots+s_{2k+1}-s_{2k}$$

（*）左边的表达式可以改写成

$$\sum_{i=1}^{2k+1}s_i^2-2\sum_{i,j}s_{2i}s_{2j+1}+2\sum_{i<j}s_{2i}s_{2j}+2\sum_{i<j}s_{2i+1}s_{2j+1}+2$$

（*）右边的表达式可以改写成

$$\sum_{i<j}(s_i-s_j)^2=\left(2k+1\right)\sum_{i=1}^{2k+1}s_i^2-2\sum_{i<j}s_is_j$$

于是，不等式等价于

$$2k\sum_{i=1}^{2k+1}s_i^2\ge4\sum_{i<j}s_{2i}s_{2j}+4\sum_{i<j}s_{2i+1}s_{2j+1}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{1\le i<j\le k}\left(s_{2i}-s_{2j}\right)^2+\sum_{1\le i<j\le k}\left(s_{2i+1}-s_{2j+1}\right)^2+\sum_{1\le i<j\le k}s_{2i}^2\ge0$$

这是显然成立的。

回到原来的问题，我们要证明对任意集合$S\subset\{1,2,\cdots,n\}$，显然，如果 S 没有被分开的元素（$S=\{i,i+1,\cdots,j\}$），则结论显然成立（因为右边表达式所有项目都出现在左边的表达式中）。假设 S 是一些分离的“分部”组成的，即

$$S=\{j_1,j_1+1,\cdots,j_2,j_3,j_3+1,\cdots,j_4,\cdots,j_{2m+1},j_{2m+1}+1,\cdots,j_{2m+2}\}$$

记

$$b_1=a_{j_1}+a_{j_1+1}+\cdots+a_{j_2}$$

$$b_2=a_{j_2+1}+\cdots+a_{j_3}$$

………

$$b_{2k+1}=a_{j_{2m+1}}+a_{j_{2m+1}+1}+\cdots+a_{j_{2m+2}}$$

根据前面的引理，使用标记$\sum\limits_{i\in S}a_i=\sum\limits_{j=0}^{k}b_{2j+1}$，我们有

$$\left(\sum_{i\in S}a_i\right)^2=\left(\sum_{j=0}^{k}b_{2j+1}\right)^2\le\sum_{1\le i\le j\le n}\left(b_i+\cdots+b_j\right)^2\le RHS,$$

因为每个数$\left(b_i+\cdots+b_j\right)^2$都出现在右边的表达式中。

94、设a,b,c是非负实数，证明：

$$\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}+\frac{5abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge1$$（Pham kim hung）

证明：不等式可以改写成如下形式

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}+\frac{5}{(1+x)(1+y)(1+z)}\ge1,$$

其中$x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}\Rightarrow xyz=1$，我们记

$$m=1-\frac{2}{1+x},n=1-\frac{2}{1+y},p=1-\frac{2}{1+z}\quad m,n,p\in[-1,1]$$

而且

$$(1+m)(1+n)(1+p)=(1-m)(1-n)(1-p)\Rightarrow m+n+p+mnp=0。$$

我们的问题变成

$$\sum_{cyc}(1-m)^3+5\prod(1-m)\ge8\Leftrightarrow3\sum_{cyc}m^2+5\sum_{cyc}mn\ge3\sum_{cyc}m+\sum_{cyc}m^3$$

$$\Leftrightarrow3\sum_{cyc}m^2+5\sum_{cyc}mn\ge\sum_{cyc}m^3-3mnp$$

如果$mn+np+pm\ge 0$，则$LHS\ge 0$，否则，假设$mn+np+pm\le 0$，则

$LHS=\left(m+n+p\right)^2-\left(mn+np+pm\right)\ge 0$。所以，在每一种情况，我们都有$LHS\ge 0$。

此外，$RHS=\left(m+n+p\right)\left(m^2+n^2+p^2-mn-np-pm\right)$和$m+n+p$具有相同的符号，所以我们只需考虑$RHS\ge 0$的情况，或等价于$m+n+p\ge 0$。我们设

$$t=m+n+p,u=mn+np+pm$$

则不等式变成

$$3\left(t^2-2u\right)+5u\ge t\left(t^2-3u\right)\Leftrightarrow t^2\left(3-t\right)+u\left(3t-1\right)\ge 0 \text{（*）}$$

根据 AM-GM 不等式，我们有

$$m^2+n^2+p^2\ge 3|mnp|^{\frac{2}{3}}\ge -3mnp=3\left(m+n+p\right)\Rightarrow t^2-2u\ge 3t\Rightarrow 2u\le t\left(t-3\right) \text{（**）}$$

如果$u\ge 0$，则我们立马有$3\sum_{cyc}m^2+5\sum_{cyc}mn\ge 2\sum_{cyc}m^2\ge\sum_{cyc}m^3-3mnp$。否则，假设$u\le 0$。则如果$3t-1\le 0$，则不等式也是显然的，所以只需考虑$3t-1\ge 0$的情况。替换（**)到（*)，余下只需证明

$$2t^2\left(3-t\right)+t\left(t-3\right)\left(3t-1\right)\ge 0\Leftrightarrow t\left(3-t\right)\left(1-t\right)\ge 0\Leftrightarrow t\left(3-t\right)\left(1+mnp\right)\ge 0,$$

这是显然成立的，因为$m,n,p\in[-1,1]$。注意到（*）等号成立的条件是$m=n=p=0$和

$m=n=1,p=-1$及其排列，但原始不等式等号成立的条件是$a=b=c$。

注意：使用相同的方法，我们可以证明下列不等式。

★设a,b,c是非负实数，证明:

$$\frac{a^2}{\left(a+b\right)^2}+\frac{b^2}{\left(b+c\right)^2}+\frac{c^2}{\left(c+a\right)^2}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 1$$

我们使用 Cauchy-Schwarz 不等式，来证明这个问题。事实上，不等式等价于（替换之后）

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{\left(x^2+yz\right)^2}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}\ge 1$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{\left(x^2+yz\right)^2}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\left(x^2+yz\right)^2+\left(y^2+zx\right)^2+\left(z^2+xy\right)^2}$$

余下，只需证明

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\left(x^2+yz\right)^2+\left(y^2+zx\right)^2+\left(z^2+xy\right)^2}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}\ge\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^4+y^4+z^4}{\left(x^2+yz\right)^2+\left(y^2+zx\right)^2+\left(z^2+xy\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\prod_{cyc}\left(x^2+yz\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{x^2}\right)+2\sum_{cyc}\left(x^2+yz\right)^2\ge\prod_{cyc}\left(x^2+yz\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{yz}\right)$$

展开，并合并同类项，我们得到等价的不等式

$$\sum_{cyc}a^2bc+2\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}\frac{a^3b^3}{c^2}+\sum_{cyc}\frac{c^4\left(a^2+b^2\right)}{ab}\ge 2\sum_{cyc}\frac{a^2b^2\left(a+b\right)}{c}+\sum_{cyc}a^3\left(b+c\right)$$

不等式改写成如下形式

$$S_a\left(b-c\right)^2+S_b\left(c-a\right)^2+S_c\left(a-b\right)^2\ge 0$$

其中

$$S_a=\frac{a^4}{2bc}+\frac{a^3\left(b^3+c^3\right)}{b^2c^2}+\frac{\left(b-c\right)^2}{2}-\frac{a^2}{2};$$

$$S_b=\frac{b^4}{2ca}+\frac{b^3\left(c^3+a^3\right)}{c^2a^2}+\frac{\left(c-a\right)^2}{2}-\frac{b^2}{2};$$

$$S_c=\frac{c^4}{2ab}+\frac{c^3\left(a^3+b^3\right)}{a^2b^2}+\frac{\left(a-b\right)^2}{2}-\frac{c^2}{2};$$

不失一般性，假设 $a\ge b\ge c$ ，则 $S_a,S_b\ge 0$ 。此外，

$$S_b+S_c\ge\frac{b^3\left(c^3+a^3\right)}{c^2a^2}-\frac{b^2+c^2}{2}\ge\frac{b^3a}{c^2}-b^2\ge 0\text{，}$$

于是，我们有

$$\sum_{cyc}S_a\left(b-c\right)^2\ge\left(S_b+S_c\right)\left(a-b\right)^2\ge 0$$

95、假设a,b,c是任意正实数，证明：

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)^2 \ge 2\left(a^5b+b^5c+c^5a\right)+abc\left(a^3+b^3+c^3\right)$$（Pham kim hung,Le huu Dien Khue）

证明：不等式可以改写成如下形式

$$\sum_{cyc}a^6+2\sum_{cyc}a^3b^3 \ge 2\sum_{cyc}a^5b+abc\sum_{cyc}a^3$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum_{cyc}a^6+\sum_{cyc}a^4b^2-2\sum_{cyc}a^5b\right)+\left(\sum_{cyc}a^4b^2+\sum_{cyc}a^4c^2-2abc\sum_{cyc}a^3\right)+$$

$$\left(2\sum_{cyc}a^3b^3-\sum_{cyc}a^4b^2-\sum_{cyc}a^2b^4\right)\ge\left(\sum_{cyc}a^4b^2-\sum_{cyc}a^4c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(2a^4+c^4-a^2b^2\right)(a-b)^2 \ge \left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)$$（*）

记$M=(a-b)(b-c)(a-c)$。当然，我们可以假设$a\ge b\ge c, a>c \Rightarrow M\ge 0$。我们使用下列结果来证明不等式。

（1）$\sum_{cyc}(3a+2c-b)(a-b)^2 \ge 4M$

（2）$\sum_{cyc}\left(11a^2+6c^2-b^2-4ab\right)(a-b)^2 \ge 8(a+b+c)M$

（3）$\sum_{cyc}\left(4a^3+2c^3-a^2b-b^2a\right)(a-b)^2 \ge \left(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca\right)M$

这些不等式之间有很有趣的关系：$(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$。为了证明（2）和（3），我们首先证明（1）。

（1）的证明。当然，只需证明不等式在$c=\min\{a,b,c\}=0$的情况。因为如果我们利用最小的正实数c来减小a,b,c，则（1）右边的表达式没有改变，而左边的表达式减小了。如果$c=0$，则不等式（1）变成

$$(3a-b)(a-b)^2+(3b+2a)b^2+(-a+2b)a^2 \ge 3ab(a-b)$$

$$\Leftrightarrow 2a^3-8a^2b+10ab^2+2b^3 \ge 0 \Leftrightarrow h(x)=2x^3-8x^2+10x+2\ge 0,$$

其中$x=\frac{a}{b}$。注意到$h'(x)=2(x-1)(3x-5)$，所以，很容易得到

$$h(x) \ge f\left(\frac{5}{3}\right) > 5 > 0$$

因此（1）得证。现在让我们由（1）来证明（2）。

（2）的证明。设 $a = a_1 + t = f_1(t), b = b_1 + t = f_2(t), c = c_1 + t = f_3(t)$，则（2）等价于

$$f(t) = \sum_{cyc}\left[11 f_1(t)^2 - f_2(t)^2 - 4 f_1(t) f_2(t) + 6 f_3(t)^2\right](a-b)^2 - 8\left(f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)\right)M \ge 0$$

根据（1），我们有

$$f'(t) = \sum_{cyc}\left[18 f_1(t) - 6 f_2(t) + 12 f_3(t)\right](a-b)^2 - 24M = 6\sum_{cyc}(3a - b + 2c)(a-b)^2 - 24M \ge 0$$

所以 $f(t) \ge f(-c)$（因为 $t \ge -c$）。这个性质表明只需证明（2）在 $c = 0$ 的情况下成立即可。

$$\left(11a^2 - b^2 - 4ab\right)(a-b)^2 + \left(11b^2 + 6a^2\right)b^2 + \left(-a^2 + 6b^2\right)a^2 \ge 8(a+b)ab(a-b)$$

$$\Leftrightarrow 11a^4 - 35a^3b + 30a^2b^2 + 6ab^3 + 10b^4 \ge 0$$

这个不等式当然是成立的，因为 AM-GM 不等式表明 $11a^4 + 30a^2b^2 \ge 2\sqrt{11 \cdot 30}a^3b > 35a^3b$。（2）证明完成。

（3）的证明。类似地，根据（2）以及基于上面同样的原因，我们认为，（3）只需考虑 $\min\{a,b,c\} = c = 0$ 的情况，此时，不等式（3）变成

$$\left(4a^3 - a^2b\right)(a-b)^2 + \left(4b^3 + 2a^3\right)b^2 + 2b^3a^2 \ge \left(a^2 + b^2 + 3ab\right)ab(a-b)$$

$$\Leftrightarrow 4a^5 - 10a^4b + 6a^3b^2 + 3a^2b^3 + ab^4 + 4b^5 \ge 0$$

如果 $2a \ge 3b$，由于 $4a^5 - 10a^4b + 6a^3b^2 = 2a^3(a-b)(2a-3b) \ge 0$，所以不等式成立。

否则，设 $2a \le 3b$，则

$4a^5 - 10a^4b + 6a^3b^2 + 3a^2b^3 \ge 4a^5 - 10a^4b + 8a^3b^2 \ge \left(2\sqrt{32} - 10\right)a^4b \ge 0$。（3）证明完成。

（*）的证明。类似地，根据（3）以及同样的原因，我们假设 $c = 0$。则不等式编程简单的形式：$\left(a^3 + b^3\right)^2 \ge 2a^5b$，或者 $g(a) = a^6 - 2a^5b + 2a^3b^3 + b^6$。容易证明 $g'(a) \ge 0$，

所以 $g(a) \ge g(b) \ge 0$。不等式证明完成，等号成立的条件是 $a = b = c$

注意：上面的这个证法是基于混合变量法。这个问题可以帮助我们证明一个非常困难

的不等式，它是由一个匿名人提出的，如下。

★设 a,b,c 是正实数，且满足 $abc=1$，证明：$\frac{a}{b^4+2}+\frac{b}{c^4+2}+\frac{c}{a^4+2}\geq 1$

为了证明它，我们记 $a=\frac{y}{x},b=\frac{z}{y},c=\frac{x}{z}$，则由 Cauchy-Schwarz 不等式以及前面的结果，我们有

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b^4+2}=\sum_{cyc}\frac{y^5}{xz^4+2xy^4}=\sum_{cyc}\frac{y^6}{xyz^4+3xy^5}\geq\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{xyz\left(x^3+y^3+z^3\right)+2\left(xy^5+yz^5+zx^5\right)}\geq 1$$

96、设 a,b,c,d 是非负实数，且满足 $\left(a+b+c+d\right)^2=3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$，证明下列不等式

$a^4+b^4+c^4+d^4\geq 28abcd$ （Pham kim hung）

证明：设 $m=a+b,n=c+d,x=ab,y=cd$，则 $\left(m+n\right)^2=3\left(m^2+n^2-2x-2y\right)$ 或者 $3\left(x+y\right)=m^2+n^2-mn$。因此，不等式变成

$$F=2\left(x^2+y^2\right)-4\left(m^2x+n^2y\right)-28xy+m^4+n^4\geq 0。$$

现在，我们固定 m,n（作为常数看待），设 x,y 是变动的（作为变量看待）满足条件

$x\leq\frac{m^2}{4},y\leq\frac{n^2}{4},xy=s=\frac{m^2+n^2-mn}{3}$。此时，F 可以改写成如下形式

$$F=2s^2+m^4+n^4-4\left(m^2x+n^2y+8xy\right)。$$

因为

$$m^2x+n^2y+8xy=m^2x+n^2\left(s-x\right)+8x\left(s-x\right)=-8x^2+\left(m^2-n^2+8s\right)x+n^2s=f(x)$$

是 x 的一个凸函数，如果仅当 $x=\frac{m^2}{4}$（作为 x 的上边界）或者 $x=\frac{m^2-n^2+8s}{16}$（作为函数 $f'(x)$ 的唯一根，如果存在的话）$f(x)$ 达到它的的最大值。因此，问题就分为两个情况。

（i）情况 1：如果 $x=\dfrac{m^2-n^2+8s}{16}$，则 $y=\dfrac{-m^2+n^2+8s}{16}$。设 $\alpha=m^2+n^2,\beta=mn$，则

$$f(x)=\frac{\left(m^2-n^2+8s\right)^2+32n^2s}{32}=\frac{\alpha^2+16s\alpha-4\beta^2+64s^2}{32}。$$

我们只需证明

$$16s^2+8\alpha^2-16\beta^2\ge\alpha^2+16s\alpha-4\beta^2+64s^2\Leftrightarrow7\alpha^2\ge48s^2+16s\alpha+12\beta^2$$

$$\Leftrightarrow21\alpha^2\ge16(\alpha-\beta)^2+16\alpha(\alpha-\beta)+36\beta^2\Leftrightarrow21\alpha^2\ge32\alpha^2-48\alpha\beta+52\beta^2$$

$$\Leftrightarrow-11\alpha^2+48\alpha\beta-52\beta^2\ge0\Leftrightarrow(-11\alpha+26\beta)(\alpha-2\beta)\ge0。$$

注意到，$\alpha-2\beta=(m-n)^2\ge0$，所以，只需证明

$$11\alpha\le26\beta\Leftrightarrow11\left(m^2+n^2\right)\le26mn\Leftrightarrow\frac{13-\sqrt{48}}{11}\le\frac{m}{n}\le\frac{13+\sqrt{48}}{11}\quad（*）$$

因为 $x\le\dfrac{m^2}{4},y\le\dfrac{n^2}{4}$，我们必定有

$$\begin{cases}\dfrac{m^2-n^2+8s}{16}\le\dfrac{m^2}{4}\Rightarrow8s\ge3m^2+n^2\Rightarrow5n^2\le8mn+m^2\Rightarrow\dfrac{n}{m}\le\dfrac{4+\sqrt{20}}{5}\\[2ex]\dfrac{m^2-n^2+8s}{16}\le\dfrac{n^2}{4}\Rightarrow8s\ge3n^2+m^2\Rightarrow5m^2\le8mn+n^2\Rightarrow\dfrac{m}{n}\le\dfrac{4+\sqrt{20}}{5}\end{cases}$$

这些结果表明（*）是成立的，证明完成。

（ii）情况 2：如果 $x=\dfrac{m^2}{4}$，则 $y=\dfrac{4s-m^2}{4}=\dfrac{m^2+4n^2-4mn}{12}$。我们必须证明

$$2s^2+m^4+n^4\ge4\left(\frac{m^4}{4}+\frac{\left(m^2+4n^2-4mn\right)n^2}{12}+\frac{m^2\left(m^2+4n^2-4mn\right)}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow2\left(m^2-mn+n^2\right)^2+9n^4\ge3\left(m^2n^2+4n^4-4mn^3\right)+6\left(m^4+4m^2n^2-4m^3n\right)$$

$$\Leftrightarrow-4m^4+20m^3n-21m^2n^2+8mn^3-n^4\ge0$$

$$\Leftrightarrow(2m-n)^2\left(-m^2+4mn-n^2\right)\ge0。$$

由于 $y=\frac{m^2+4n^2-3mn}{12}\le\frac{n^2}{4}\Rightarrow m^2+n^2\le 3mn$，所以不等式是显然成立的。这种情况证明完成。

因此，原不等式是成立的。等号成立的条件是排出了情况

$(a,b,c,d)\approx(3,1,1,1)$ 或者 $(a,b,c,d)\approx\left(2+\sqrt{3},2+\sqrt{3},2-\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right)$ 及其排列。

97、设正实数 a,b,c 满足条件 $a+b+c=3$。证明:

$$\frac{a}{b^2+c}+\frac{b}{c^2+a}+\frac{c}{a^2+b}\ge\frac{3}{2}$$ （Pham kim hung）

证明：展开之后，不等式等价于

$$2\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}a^2b+3abc\ge 3a^2b^2c^2+\sum_{cyc}a^3b^2+3\sum_{cyc}ab^3$$

令 $M=ab+bc+ca,\ S=(a-b)(b-c)(a-c)$。根据恒等式

$$2\sum_{cyc}a^2b=S+3M-3abc;$$

$$2\sum_{cyc}a^3b^2=SM+3\sum_{cyc}a^2b^2-Mabc;$$

$$2\sum_{cyc}ab^3=\sum_{cyc}a^3(b+c)-3S;$$

不等式等价于

$$4\sum_{cyc}a^4+11S+6M+Mabc\ge 6a^2b^2c^2+SM+3\sum_{cyc}a^2b^2+3\sum_{cyc}a^3(b+c)$$

注意到 $abc(M+3)\ge 6a^2b^2c^2$，所以只需证明 $A\ge S(M-11)$，其中

$$A=4\sum_{cyc}a^4+6M-3\sum_{cyc}a^2b^2-3\sum_{cyc}a^3(b+c)-3abc。$$

把 A 表示成平方的形式

$$3A=12\sum_{cyc}a^4+7abc\sum_{cyc}a-5\sum_{cyc}a^2b^2-7\sum_{cyc}a^3(b+c)$$

$$\Rightarrow 6A=\sum_{cyc}\left(12a^2+12b^2+10ab-7c^2\right)(a-b)^2。$$

因为 $M\le 11$，我们可以假设 $S\le 0$ 以及 $b\ge a\ge c$。我们将证明

$$6A\ge -66S\Leftrightarrow 6A\ge 22(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$ （*）

如果 $\min(a,b,c)=0$，则不等式显然成立，因为

$$6A=\sum_{cyc}\left(12a^2+12b^2+10ab-7c^2\right)(a-b)^2$$

$$=\left(12a^2+12b^2+10ab-7c^2\right)(a-b)^2+\left(12a^2-7b^2\right)a^2+\left(12b^2-7a^2\right)b^2$$

$$=10a^2b^2+\left(24a^2+24b^2+34ab\right)(a-b)^2\geq 10a^2b^2+\frac{41}{2}\left(a^2-b^2\right)^2$$

$$\geq 2\sqrt{5.41}ab\left(b^2-a^2\right)>22ab(a-b)(a+b)$$

现在假设 $\min(a,b,c)>0$. 因为（∗）是齐次的，要证明（∗）对于任意正实数成立，我们可以撤销条件 $a+b+c=3$。我们认为，如果用 $a+t,b+t,c+t$，来替换 a,b,c，则两边的差是增加的。事实上，我们将证明

$$\sum_{cyc}\left[12(a+t)^2+12(b+t)^2+10(a+t)(b+t)-7(c+t)^2-12\left(a^2+b^2\right)-10ab+7c^2\right](a-b)^2$$
$$\geq 66tS$$

于是，我们推断

$$\sum_{cyc}(17a+17b-7c)(a-b)^2\geq 33(a-b)(b-c)(c-a)\text{（∗∗）}$$

使用相同的方法并花费更多的时间（用 $a+t,b+t,c+t$，来替换 a,b,c，），我们只需证明（∗∗）在 $\min(a,b,c)=c=0$ 的情况下即可。或等价于

$$17(a+b)(a-b)^2+(17a-7b)a^2+(17b-7a)b^2\geq 22ab(b-a),$$

这显然是正确的，因为

$$LHS\geq 17(a+b)(a-b)^2+10\left(a^3+b^3\right)\geq 2\sqrt{17\cdot 10(a+b)\left(a^3+b^3\right)}(b-a)\geq RHS$$

完成证明。等号成立的条件是 $a=b=c=1$

98、设 a,b,c 是正实数，证明:

$$\frac{1}{(2a+b)^2}+\frac{1}{(2b+c)^2}+\frac{1}{(2c+a)^2}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}\text{（Pham Kim Hung）}$$

证明：展开之后，不等式变成

$$\sum_{cyc}\left(4a^5b+4a^5c-12a^4b^2+12a^4c^2+5a^3b^3+8a^4bc-19a^3b^2c+5a^3c^2b-7a^2b^2c^2\right)\geq 0$$

或者

$$6\sum_{cyc} ab\left(a^2-b^2-2ab+2ac\right)^2+\sum_{sym}\left(2a^5b-a^3b^3-4a^4bc+10a^3b^2c-7a^2b^2c^2\right)\geq 0$$

余下，只需证明

$$2\sum_{cyc} a^5(b+c)-2\sum_{cyc} a^3b^3-8\sum_{cyc} a^4bc+10abc\sum_{cyc} ab(a+b)-42a^2b^2c^2\geq 0$$

使用恒等式 $2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\geq 0$，我们得到

$$2\sum_{cyc} a^4\left(b^2+c^2\right)+4abc\sum_{cyc} a^2(b+c)-4\sum_{cyc} a^3b^3-12a^2b^2c^2-4abc\sum_{cyc} a^3\geq 0$$

最后，我们只需证明

$$2\sum_{cyc} a^5(b+c)+6abc\sum_{cyc} ab(a+b)+2\sum_{cyc} a^3b^3\geq 4abc\sum_{cyc} a^3+30a^2b^2c^2+2\sum_{cyc} a^4\left(b^2+c^2\right)$$

这个不等式可以写成平方形式

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

其中

$$S_a=2bc\left(b^2+bc+c^2\right)+a^3(b+c)-2abc(b+c)+6a^2bc;$$

$$S_b=2ca\left(c^2+ca+a^2\right)+b^3(c+a)-2abc(c+a)+6c^2ab;$$

$$S_c=2ab\left(a^2+ab+b^2\right)+c^3(a+b)-2abc(a+b)+6c^2ab\,;$$

当然，S_a 是非负的，因为（使用 AM-GM 不等式）

$$S_a\geq bv(b+c)^2+6a^2bc-2abc(b+c)\geq 2\left(\sqrt{6}-1\right)abc(b+c)\geq 0\text{。}$$

类似地，S_b 和 S_c 也是非负的。所以，不等式证明完成。等号成立的条件是 $a=b=c$。

99、设 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_{2n-1}\geq x_{2n}\geq 0$ 是实数，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=2n-1$。求下列表达式的最大值。

$$P=\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_3^2+x_4^2\right)\cdots\left(x_{2n-1}^2+x_{2n}^2\right)$$ （Pham Kim Hung）

解：虽然直接求解这个问题非常困难，但我们意外地发现，求解这个问题的一般情况是比较简单的。事实上，我们的问题是下面一般结果的直接推论。

★假设 $\varepsilon\leq\dfrac{k}{2n}$ 时正的常数，$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_{2n-1}\geq x_{2n}\geq\varepsilon\geq 0$ 是实数，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=k=const$。则表达式 $P_n=\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_3^2+x_4^2\right)\cdots\left(x_{2n-1}^2+x_{2n}^2\right)$ 当且仅当

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n-1}, x_{2n} = \varepsilon$ 时达到最大值。

我们将用归纳法来证明这个一般的结果。在进行归纳步骤之前，我们以引理的形式给出三个结果（它们的建立。并不是偶然的，而是依据归纳步骤的进展情况创建的）。

引理 1．设 $x \ge y \ge z \ge t \ge 0, y+z=2\alpha$，则

$$\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right) \le \left(x^2+\alpha^2\right)\left(\alpha^2+t^2\right)$$

证明：设 $y=\alpha+\beta, z=\alpha-\beta, \beta \ge 0$，则 $x \ge \alpha+\beta \ge \alpha-\beta \ge t$。记

$$f(\beta)=\left[x^2+\left(\alpha+\beta\right)^2\right]\left[\left(\alpha-\beta\right)^2+t^2\right]$$

则，只需证明 $f'(\beta) \le 0$，这显然是成立的，因为

$$f'(\beta)=-2x^2\left(\alpha-\beta\right)+2t^2\left(\alpha+\beta\right)-2\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right) \le -2x^2t+2t^2x \le 0\text{。}$$

引理 2：设 $x \ge y \ge z \ge 0, \left(2n-1\right)x+2y=\left(2n+1\right)\gamma\ (n \in N, n \ge 2)$，则

$$x^{2n-2}\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right) \le 2\gamma^{2n}\left(\gamma^2+z^2\right)$$

证明：存在一个实数 $\beta \ge 0$，满足条件 $x=\gamma+2\beta, y=\gamma-\left(2n-1\right)\beta$。所以，我们必定有 $\gamma-\left(2n-1\right)\beta \ge z$。记

$$g(\beta)=\left(\gamma+2\beta\right)^{2n}\left(\gamma-(2n-1)\beta\right)^2+\left(\gamma+2\beta\right)^{2n-2}\left(\gamma-(2n-1)\beta\right)^4+\left(\gamma+2\beta\right)^{2n}z^2$$
$$+\left(\gamma+2\beta\right)^{2n-2}\left(\gamma-(2n-1)\beta\right)^2z^2$$

显然，$g(\beta)=x^{2n-2}\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)$。我们只需证明 $g'(\beta) \le 0$。事实上（在 $g'(\beta)$ 的表达式中，我们记 $x=\gamma+2\beta, y=\gamma-(2n-1)\beta$ 以简化表示，但我们仍然认为它们是和变量 γ 相关的）

$$g'(\beta)=4nx^{2n-1}y^2-(4n-2)x^{2n}y+(4n-4)x^{2n-3}y^4-(8n-4)x^{2n-2}y^3+4nx^{2n-1}z^2$$
$$+(4n-4)y^{2n-3}x^2z^2-(4n-2)x^{2n-2}yz^2$$

由于$x \ge y \ge z$，我们有

$$4nx^{2n-1}z^2+(4n-4)y^{2n-3}x^2z^2-(4n-2)x^{2n-2}yz^2$$

$$\le 4nx^{2n-1}z^2-2x^{2n-2}yz^2 \le 4nx^{2n-1}z^2-2x^{2n-2}y^3$$

于是，只需证明

$$8nx^{2n-1}y^2+(4n-4)x^{2n-3}y^4 \le (4n-2)x^{2n}y+(8n-2)x^{2n-2}y^3$$

$$\Leftrightarrow 4nx^2y+(2n-2)y^3 \le (2n-1)x^3+(4n-1)xy^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[(2n-1)x^2-(2n+1)xy+(2n-2)y^2\right] \ge 0$$

这是显然成立的，因为$x \ge y$。第二个引理证完。

我们也注意到，引理 2 对于$n=1$仍然是成立的（$n=1$的证明远远比$n \ge 2$情况的证明要简单，所以，在这里我们不给出证明）