12

正交曲线坐标系

分离变量法是求解数理方程（偏微分方程）的常用方法。

在分离变量法中，我们需要齐次边条，再把多元函数的齐次边条化为单变量函数的齐次边条，进而求解本征值问题求得本正值与本整函数。

例如：当边界在 $x = a$ 平面时，在直角坐标系中，我们可以轻易地把多元函数的 I 类（Dirichlet）齐次边条化为单变量函数的齐次边条

$$u(x,\ y,\ z,\ t)\Big|_{x=a} = 0 \xrightarrow{u(x,y,z,t)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,T(t)} X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,T(t)\Big|_{x=a} = 0 \longrightarrow X(a) = 0$$

但如果边界是球面，取直角坐标系显然不能把多元函数的齐次边条化为单变量函数的齐次边条。

直角坐标系将得到：$u(x,\ y,\ z,\ t)\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0 \xrightarrow{u(x,y,z,t)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,T(t)} X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,T(t)\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0$

无法得到单变量函数的齐次边条。

这时应该取球坐标 $(r,\ \theta,\ \phi)$，在球坐标中进行分离变量，从而有：

$$u(r,\ \theta,\ \phi,\ t)\big|_{r=a} = 0 \xrightarrow{u(r,\theta,\phi,t)=R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)\,T(t)} R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)\,T(t)\Big|_{r=a} = 0 \longrightarrow R(a) = 0$$

所以，要利用分离变量法，应该取合适的坐标系，使得

边界在所取的坐标系中对应于某一个坐标变量等于常数。

这样才能把多元函数的齐次边条化为单变量函数的齐次边条，从而利用齐次边条定出本征值、本征函数。

所以我们有以下结论：体系的边界决定了我们应该取什么样的坐标系。或者，说得更迷人（更迷蒙？），Bigger 更高一点，

体系的对称性决定了坐标系。 —— 做物理的一扯上对称性，就高大上多了

对Laplace方程（波动方程可化为Helmholtz方程，比Laplace方程稍微复杂，分离变量的做法相同），数学上证明了：

只有在11种坐标系中才能通过分离变量求解。这11种坐标系包括（常用的）：

直角坐标系、球坐标系、圆柱坐标系

当然还有：椭圆柱坐标系、抛物柱面坐标系、扁球面坐标系、长球面坐标系、圆锥坐标系等等也许闻所未闻至少从未用过的坐标系。

因为我们要在球坐标系、圆柱坐标系中应用分离变量法，为此我们需要了解一些曲线坐标系的常识，

如：梯度、散度、旋度、特别是 Laplacian（∇^2）的表达形式，因为数理方程大多涉及 Laplacian （∇^2）运算。

这里的推导没有涉及各种几何意义，可作为大部分数学教材的一种 alternative。

12.1 正交曲线坐标系

直角坐标系中的矢量分析公式

先回顾直角坐标系的矢量分析公式。除非特别说明，以下公式中隐含了对重复指标求和（Einstein 求和约定）。

位置矢量、微分线元：对空间上以直角坐标 $(x,\ y,\ z)$ 表征的任意一点 P，

位置矢量：$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = x_i\,\vec{e}_i$，为从坐标原点到 P 点的矢量。其中 $x_1 = x,\ \ x_2 = y,\ \ x_3 = z$

$\vec{e}_1 = \vec{e}_x,\ \vec{e}_2 = \vec{e}_y,\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z$ 为直角坐标的三个基矢，这三个基矢与空间点的位置无关，长度为1。

微分线元：$d\vec{r} = \vec{e}_x\,dx + \vec{e}_y\,dy + z\,\vec{e}_z\,dz = \vec{e}_i\,dx_i$， 因坐标 $\{x_i\}$ 发生变化导致的位置矢量的变化

上式表明：若保持其它坐标不变，只让坐标 x_i 发生一微小变化 dx_i，位置矢量沿 $\vec{e}_i$ 方向移动了长度 dx_i

梯度：对标量函数 $\varphi(x,\ y,\ z)$

$$\nabla\varphi(x,\ y,\ z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z = \vec{e}_i\,\partial_i\varphi,$$

其中 $x_1 = x,\ \ x_2 = y,\ \ x_3 = z,\ \ \partial_i\varphi \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i},\ \ \vec{e}_1 = \vec{e}_x,\ \vec{e}_2 = \vec{e}_y,\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z$

性质：全微分 $d\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}dz = [\nabla\varphi(x,\ y,\ z)]\cdot d\vec{r}$， 其中 $d\vec{r} = \vec{e}_i\,dx_i$ 为微分线元

上式表明：

因坐标 $\{x_i\}$ 变化导致函数的变化 $d\varphi$，等于该函数的梯度与位置矢量的微分线元 $d\vec{r}$ 之标量积。 (1.1)

又：让位置矢量沿某方向 $\vec{e}_l$ 做一微小变化：$d\vec{r} = \vec{e}_l\,dl$，函数值的变化为：

$$d\varphi = [\nabla\varphi(x,\ y,\ z)]\cdot d\vec{r} = [\nabla\varphi(x,\ y,\ z)]\cdot\vec{e}_l\,dl \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\varphi}{dl} = \vec{e}_l\cdot\nabla\varphi(x,\ y,\ z)$$

上式表明：

梯度与任意方向单位矢量的标量积等于函数沿该方向的方向导数。

以上两个性质，加上：

若只让坐标 x_i 发生一微小变化 dx_i，微分线元 $d\vec{r} = \vec{e}_i\,dx_i$ （这里的重复下标不求和）

是推导一般坐标系中的梯度、散度、旋度和 Laplacian 等各种表达式的基础。

散度：对矢量函数 $\vec{V}(x,\ y,\ z) = V_1(x,\ y,\ z)\,\vec{e}_x + V_2(x,\ y,\ z)\,\vec{e}_y + V_3(x,\ y,\ z)\,\vec{e}_z = V_i\,\vec{e}_i$

$$\nabla\cdot\vec{V}(x,\ y,\ z) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \partial_i V_i,\quad 其中\ \partial_i V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

旋度：对矢量函数 $\vec{V}(x,\ y,\ z) = V_1(x,\ y,\ z)\,\vec{e}_x + V_2(x,\ y,\ z)\,\vec{e}_y + V_3(x,\ y,\ z)\,\vec{e}_z = V_i\,\vec{e}_i$

$$\nabla\times\vec{V}(x,\ y,\ z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right) + \vec{e}_2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right) + \vec{e}_3\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)$$
$$= \epsilon_{ijk}\left(\vec{e}_i\,\partial_j V_k\right),$$

$$\left[\nabla\times\vec{V}(x,\ y,\ z)\right]_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j V_k = \partial_j V_k\,\epsilon_{jki}$$

其中 ϵ_{ijk} 为 Levi – Civita符号：$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & 若下标\ ijk = 123\ 及其循环置换 \\ -1 & 若下标\ ijk = 321\ 及其循环置换 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

Levi – Civita符号满足：$\begin{cases} \vec{a}\times\vec{b} = \epsilon_{ijk}\,\vec{e}_i\,a_j\,b_k \quad 或更简单些：\vec{e}_i\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \epsilon_{ijk}\,a_j\,b_k \\ \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} \quad 任意两下标互换，差一负号 \\ \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\,\delta_{jn} - \delta_{in}\,\delta_{jm} \\ \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{mjk} = \delta_{im}\,\delta_{jj} - \delta_{ij}\,\delta_{jm} = 3\,\delta_{im} - \delta_{im} = 2\,\delta_{im} \end{cases}$

Laplacian：对标量函数 $\varphi(x,\ y,\ z)$

$$\nabla^2\varphi(x,\ y,\ z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \partial_i\partial_i\varphi,\quad 其中\ \partial_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

Laplacian ∇^2 的平移、转动不变性

容易看出，Laplacian 在坐标平移变换下是不变的

坐标平移：$x'_i = x_i + \alpha_i \quad i = 1, 2, 3,$ 满足：$\dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \delta_{ij}$

定义：$\partial_i \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad \partial'_i \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'_i}$

显然：$\partial'_i \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} \dfrac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} \delta_{ik} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \partial_i \varphi$

从而：Laplacian $\quad \nabla^2 \varphi = \partial_i \partial_i \varphi = \partial'_i \partial'_i \varphi$

Laplacian 在转动变换下也是不变的

对于一个由 Euler 角 (α, β, γ) 确定的转动，空间同一点新旧坐标的变换关系为：

$x'_i = A_{ij} x_j$ 　转动矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

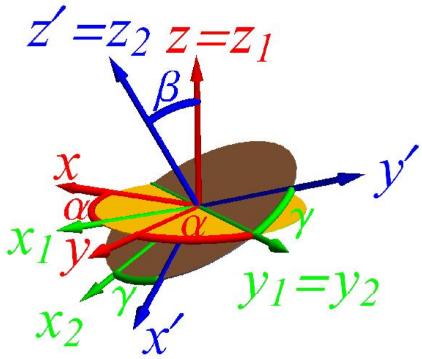
Euler 角 (α, β, γ)：三次转动，如图所示

(1) 绕 z 轴转动 α，　$(x, y, z) \longrightarrow (x_1, y_1, z_1)$

(2) 绕 y_1 轴转动 β，$(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow (x_2, y_2, z_2)$

(3) 绕 z_2 轴转动 γ，$(x_2, y_2, z_2) \longrightarrow (x', y', z')$

　动态图见：code12 .01 Euler angle.nb



转动矩阵满足：$A^T = A^{-1}$

$\Longrightarrow \ A^{-1}_{ij} = A_{ji}$

$x_j = A^{-1}_{ji} x'_i \quad \Longrightarrow$

$\partial'_i \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$

$= A^{-1}_{ji} \partial_j \varphi = A_{ij} \partial_j \varphi$

$\partial'_i \partial'_i \varphi = \partial'_i \left[A_{ik} \partial_k \varphi\right]$

$= A_{ik} \partial_k \partial'_i \varphi = A_{ik} \partial_k \left[A_{ij} \partial_j \varphi\right]$

$= A_{ik} A_{ij} \partial_k \partial_j \varphi = A^{-1}_{ki} A_{ij} \partial_k \partial_j \varphi$

$= \delta_{jk} \partial_k \partial_j \varphi = \partial_j \partial_j \varphi$

正交曲线坐标系

空间上的任意一点 P 可以用直角坐标 (x, y, z) 或 (x_1, x_2, x_3) 表征。

如果存在一组独立、连续、可微的单值函数

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad u_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad u_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

并且其反函数

$$x = x_1 = \tilde{f}_1(u_1, u_2, u_3), \quad y = x_2 = \tilde{f}_2(u_1, u_2, u_3), \quad z = x_3 = \tilde{f}_3(u_1, u_2, u_3)$$

也独立、连续、可微、单值，

那么 P 点的坐标就也可以用 (u_1, u_2, u_3) 表征，因为 (x_1, x_2, x_3) 与 (u_1, u_2, u_3) 一一对应。

(u_1, u_2, u_3) 称为空间点 P 的曲线坐标。

用曲线坐标来描述空间任意点位置的坐标系称为曲线坐标系。

典型的曲线坐标系如：

（圆）球坐标系：$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\quad\begin{cases} u_1 = r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ u_2 = \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{r}, \quad \rho = (x^2+y^2)^{1/2} \\ u_3 = \phi = \begin{cases} \cos^{-1}\dfrac{x}{\rho}, & y \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}\dfrac{x}{\rho}, & y < 0 \end{cases} \end{cases}$

（圆）柱坐标系：$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$ $\quad\begin{cases} u_1 = \rho = (x^2+y^2)^{1/2} \\ u_2 = \phi = \begin{cases} \cos^{-1}\dfrac{x}{\rho}, & y \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}\dfrac{x}{\rho}, & y < 0 \end{cases} \\ u_3 = z \end{cases}$

三个函数独立的要求为：Jacobi 行列式不等于 0。

$$J = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

在直角坐标系和一般曲线坐标系中，位置矢量 $\vec{r}$ 分别表为：

$$\vec{r} = \vec{e}_i x_i = \vec{r}(x_1, x_2, x_3) = \vec{r}(u_1, u_2, u_3), \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_x, \ \vec{e}_2 = \vec{e}_y, \ \vec{e}_3 = \vec{e}_z\text{。}$$

即：位置矢量 $\vec{r}$ 是坐标的矢量函数。

由于坐标变化导致位置矢量的变化，称为微分线元 $d\vec{r}$，表为全微分形式

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} dx_i = \vec{e}_i\, dx_i = \frac{\partial\vec{r}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} du_i = \vec{a}_i\, du_i,$$

$$\text{其中：}\frac{\partial\vec{r}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = \vec{e}_i, \qquad \frac{\partial\vec{r}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} = \vec{a}_i$$

显然，$\dfrac{\partial\vec{r}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}$ 即为直角坐标中三个单位长度的基矢，因为 $\vec{r} = \vec{e}_i x_i$ 中的 $\vec{e}_i$ 为常矢量。

现在来看 $\vec{a}_i$ 的方向。以 $\vec{a}_1$ 为例。

$$\underbrace{\vec{a}_1 = \frac{\partial\vec{r}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1}}_{\text{定义式}} = \frac{\partial x_1(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial x_2(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1}\vec{e}_2 + \frac{\partial x_3(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1}\vec{e}_3 = \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\vec{e}_i$$

$\vec{a}_1$ 的几何意义：在空间某点，保持坐标 u_2 和 u_3 不变，仅让坐标 u_1 作一微小变化，

位置矢量 $\vec{r}$ 相对于 u_1 的变化率。

而保持坐标 u_2 和 u_3 不变，让坐标 u_1 变化，点在空间的轨迹（跑出的曲线）称为坐标曲线 u_1。

显然，坐标曲线 u_1 由下列参数方程给出

$\begin{cases} x_1 = \tilde{f}_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 = \tilde{f}_2(u_1, u_2, u_3), \\ x_3 = \tilde{f}_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$ 因此坐标曲线 u_1 的切向为：$\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}\vec{e}_2 + \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1}\vec{e}_3 = \vec{a}_1$

所以，坐标曲线 u_1 的切向就是 $\vec{a}_1 = \dfrac{\partial\vec{r}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1}$ 的方向（此处是方向相同，大小尚未归一）。

通常，取沿坐标曲线 u_1 切向的单位矢量作为曲线坐标系的一个基矢 $\hat{u}_1$，因此，曲线坐标系的三个基矢为：

$$\hat{\boldsymbol{u}}_i = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}_i}{|\vec{\boldsymbol{a}}_i|} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}_i}{h_i},\quad h_i = |\vec{\boldsymbol{a}}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)^2},\quad \text{利用了 } \vec{\boldsymbol{a}}_i = \frac{\partial x_1}{\partial u_i}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_i}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_i}\vec{\boldsymbol{e}}_3$$

这里在直角坐标系中利用 Pythagorean 定理 求得 $\vec{\boldsymbol{a}}_i$ 的长度 h_i 并进行归一化得 $\hat{\boldsymbol{u}}_i$

$$\boxed{d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{e}}_i\, dx_i = \vec{\boldsymbol{a}}_i\, du_i = h_i\, \hat{\boldsymbol{u}}_i\, du_i,\qquad \vec{\boldsymbol{a}}_i = \vec{\boldsymbol{e}}_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}}$$

注意曲线坐标系的基矢 $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 尽管长度均为1，但是其方向与空间位置有关，依然是 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 的函数

即：曲线坐标系的基矢 $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 可能不是常矢量。（尽管其长度已归一化，但方向会变。）

这一点不同于直角坐标系，后者的三个基矢 $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ 都是常矢量。

微分线元 $d\vec{\boldsymbol{r}}$ 的长度，利用直角坐标系中的基矢量满足： $\vec{\boldsymbol{e}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{k'} = \delta_{k k'}$

$$\begin{aligned} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} &= (\vec{\boldsymbol{e}}_i\, dx_i)\cdot(\vec{\boldsymbol{e}}_j\, dx_j) = (\vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_j)\, dx_i\, dx_j) = dx_i\, dx_i \\ &= (\vec{\boldsymbol{a}}_i\, du_i)\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}_j\, du_j) = \vec{\boldsymbol{a}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{a}}_j\, du_i\, du_j \\ &= \vec{\boldsymbol{e}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{k'} \frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_{k'}}{\partial u_j}\, du_i\, du_j = \frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j}\, du_i\, du_j = g_{ij}\, du_i\, du_j \end{aligned}$$

$$g_{ij} = \vec{\boldsymbol{a}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{a}}_j = \frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j} = \frac{\partial x_1}{\partial u_i}\frac{\partial x_1}{\partial u_j} + \frac{\partial x_2}{\partial u_i}\frac{\partial x_2}{\partial u_j} + \frac{\partial x_3}{\partial u_i}\frac{\partial x_3}{\partial u_j},$$

g_{ij} 构成的矩阵称为度规。度规的对角元 $g_{ii} = h_i^2$ （注意这里 g_{ii} 的两个重复指标不求和）

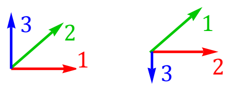
如果 $g_{ij} = \vec{\boldsymbol{a}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{a}}_j = \begin{cases} h_i^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$，则对应的曲线坐标系称为：正交曲线坐标系

对正交曲线坐标系： $\boxed{d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = dx_i\, dx_i = h_i^2\, du_i\, du_i}$ （注意这里三个重复指标仅对 i 求和一次）

对正交曲线坐标系，总可以对三个两两正交的单位矢量：$\hat{\boldsymbol{u}}_1$，$\hat{\boldsymbol{u}}_2$，$\hat{\boldsymbol{u}}_3$ 的下标（编号）进行适当的调整，使得：

$\vec{\boldsymbol{u}}_1 \times \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \hat{\boldsymbol{u}}_3$，$\vec{\boldsymbol{u}}_2 \times \vec{\boldsymbol{u}}_3 = \hat{\boldsymbol{u}}_1$，$\vec{\boldsymbol{u}}_3 \times \vec{\boldsymbol{u}}_1 = \hat{\boldsymbol{u}}_2$

这种正交曲线坐标系称为右手系。



Take-home message，对正交曲线坐标系，有：

如图：空间中任一点 P，用三个坐标 u_1，u_2，u_3 描述。

对应到直角坐标：$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$

若保持坐标 u_2 和 u_3 不变，仅让坐标 u_1 变化

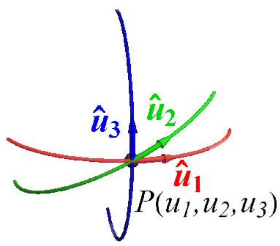
将在空间画出红色曲线，称为 坐标曲线 u_1

曲线在 P 点的切向沿：$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_1}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_1}\vec{\boldsymbol{e}}_3$

若保持坐标 u_3 和 u_1 不变，仅让坐标 u_2 变化

将在空间画出绿色曲线，称为 坐标曲线 u_2

曲线在 P 点的切向沿：$\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial u_2}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_2}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_2}\vec{\boldsymbol{e}}_3$



若保持坐标 u_1 和 u_2 不变，仅让坐标 u_3 变化

将在空间画出蓝色曲线，称为 坐标曲线 u_3

曲线在 P 点的切向沿：$\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \frac{\partial x_1}{\partial u_3}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_3}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_3}\vec{\boldsymbol{e}}_3$

若三个坐标 u_1，u_2，u_3 都发生改变，则微分线元 $d\vec{\boldsymbol{r}}$ 满足

$$\boxed{d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{e}}_i\, dx_i = \vec{\boldsymbol{a}}_i\, du_i = h_i\, \hat{\boldsymbol{u}}_i\, du_i}\qquad \hat{\boldsymbol{u}}_i = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}_i}{|\vec{\boldsymbol{a}}_i|} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}_i}{h_i}$$

（$\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 表达式中的重复指标不求和）

$\boxed{d\vec{r}\cdot d\vec{r} = dx_i\,dx_i = g_{ij}\,du_i\,du_j \xrightarrow{\text{正交系}} h_i^2\,du_i\,du_i}$, $\quad g_{ij} = \vec{a}_i\cdot\vec{a}_j \xrightarrow{\text{对正交系}} \begin{cases} h_i^2, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

$$\boxed{h_i = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)^2\right]^{1/2}}$$

几何意义：若仅仅让第 i 个坐标 u_i 作微小变化 du_i，对应的微分线元长度为：$h_i\,du_i$ 不是 du_i

因此，在正交曲线坐标系中，函数 $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ 沿 $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 方向的方向导数为：$\dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}$ 而非 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}$。

正交曲线坐标系中的梯度、散度、旋度与Laplacian

梯度：

当正交曲线坐标 (u_1, u_2, u_3) 发生一微小变化时，标量函数 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(u_1, u_2, u_3)$ 发生的改变可表为函数的全微分

全微分：$d\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}du_i$

另一方面，当坐标发生一微小变化时，位置矢量的微分线元 $d\vec{r}$ 为

$d\vec{r} = \vec{e}_i\,dx_i = h_i\,\hat{\boldsymbol{u}}_i\,du_i$

而 梯度的意义 就在于：因坐标变化导致函数值的变化 $d\varphi$，等于该函数的梯度与微分线元 $d\vec{r}$ 的标量积。

令：正交曲线坐标中梯度 $\nabla\varphi = \alpha_1\,\hat{\boldsymbol{u}}_1 + \alpha_2\,\hat{\boldsymbol{u}}_2 + \alpha_3\,\hat{\boldsymbol{u}}_3$，并利用正交曲线坐标系：$\hat{\boldsymbol{u}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_j = \dfrac{\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j}{h_i\,h_j} = \delta_{ij}$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}du_i = (\nabla\varphi)\cdot d\vec{r} = (\alpha_j\,\hat{\boldsymbol{u}}_j)\cdot h_i\,\hat{\boldsymbol{u}}_i\,du_i = \alpha_i\,h_i\,du_i \xrightarrow{du_i\text{ 相互独立}} \alpha_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \quad \text{（这里不对 } i \text{ 求和）}$$

从而：$\boxed{\nabla\varphi = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\hat{\boldsymbol{u}}_1 + \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\hat{\boldsymbol{u}}_2 + \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}\hat{\boldsymbol{u}}_3}$,

其中：$h_i = \left[\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)^2\right]^{1/2}$,

记得 h_i 的意义：仅让第 i 个坐标发生微变 du_i，微分线元 $d\vec{r}$ 的长度为：$h_i\,du_i$ （这里不对 i 求和）

上式即为正交曲线坐标系中梯度的表达式。

在推导散度与旋度表达式前，先推导两个即将使用到的简单关系式。

两个关系式：

(a) $\nabla u_i = \dfrac{1}{h_i}\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 证明： 令 $\varphi = u_i$ 代入 $\nabla\varphi$ 的表达式即得。直角坐标中：$\nabla x_i = \vec{e}_i$

(b) $\hat{\boldsymbol{u}}_1 = h_2\,h_3(\nabla u_2)\times(\nabla u_3)$, $\hat{\boldsymbol{u}}_2 = h_3\,h_1\,\nabla u_3\times\nabla u_1$, $\hat{\boldsymbol{u}}_3 = h_1\,h_2\,\nabla u_1\times\nabla u_2$, 类比于：$\vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_3$

证明：据式 (a), $\nabla u_2 = \dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}_2}{h_2}$, $\nabla u_3 = \dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}_3}{h_3} \longrightarrow (\nabla u_2)\times(\nabla u_3) = \dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}_2\times\hat{\boldsymbol{u}}_3}{h_2\,h_3} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}_1}{h_2\,h_3}$,

这里利用了 $\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \hat{\boldsymbol{u}}_3$ 两两垂直构成右手系。 $\hat{\boldsymbol{u}}_i = \dfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,\hat{\boldsymbol{u}}_j\times\hat{\boldsymbol{u}}_k$

散度：

在正交曲线坐标系，矢量函数：$\vec{V}(x, y, z) = V_1(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\boldsymbol{u}}_1 + V_2(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\boldsymbol{u}}_2 + V_3(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\boldsymbol{u}}_3$

散度：$\nabla\cdot\vec{V}(x, y, z) = \underbrace{\nabla\cdot(V_1\,\hat{\boldsymbol{u}}_1)}_{d_1} + \underbrace{\nabla\cdot(V_2\,\hat{\boldsymbol{u}}_2)}_{d_2} + \underbrace{\nabla\cdot(V_3\,\hat{\boldsymbol{u}}_3)}_{d_3}$ 注意在正交曲线坐标系中，$\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 不是常矢量。

$d_1 = \nabla\cdot(V_1\,\hat{\boldsymbol{u}}_1) \xrightarrow{\text{利用}(b)} \nabla\cdot[V_1\,h_2\,h_3(\nabla u_2)\times(\nabla u_3)]$ 利用 $\nabla\cdot(V\vec{A}) = (\nabla V)\cdot\vec{A} + V\,\nabla\cdot\vec{A}$

$= \nabla(V_1\,h_2\,h_3)\cdot(\nabla u_2\times\nabla u_3) + (V_1\,h_2\,h_3)\,\nabla\cdot(\nabla u_2\times\nabla u_3)$ 第一项利用关系式 (b)

$= \underbrace{\nabla(V_1 h_2 h_3)}_{\text{标量函数的梯度}} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_1}{h_2 h_3}$,　　上一行第二项利用了 $\nabla \cdot [(\nabla u_2) \times (\nabla u_3)] = 0$ （证明见下）

$$= \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \hat{\boldsymbol{u}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_2} \hat{\boldsymbol{u}}_2 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_3} \hat{\boldsymbol{u}}_3\right] \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_1}{h_2 h_3}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1}$$

实际上 $\hat{\boldsymbol{u}}_1 \cdot \nabla\varphi$ 等于 φ 沿 $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 方向的方向导数，从而：$\hat{\boldsymbol{u}}_1 \cdot \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \neq \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}$。

注意坐标 u_1 做微小变化时，位置矢量沿 $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 方向的变化长度为 $h_1\, d u_1$ 而非 $d u_1$，故：$\frac{\partial\varphi}{\partial l_1} \neq \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}$

类似可得：$d_2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(V_2 h_3 h_1)}{\partial u_2}$,　$d_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(V_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}$

从而：$\boxed{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(V_2 h_3 h_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(V_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}\right]}$

- $\nabla \cdot [(\nabla u) \times (\nabla v)] = 0$ 的证明。

$\nabla u = \partial_i u$,　　右边其实表示 ∇u 的第 i 个直角坐标分量

$\nabla v = \partial_j v$,　　右边其实表示 ∇v 的第 i 个直角坐标分量

$(\nabla u) \times (\nabla v) = \epsilon_{ijk} (\partial_i u)(\partial_j v)$,　　右边其实表示 $(\nabla u) \times (\nabla v)$ 的第 k 个直角坐标分量

$\nabla \cdot [(\nabla u) \times (\nabla v)] = \partial_k [\epsilon_{ijk} (\partial_i u)(\partial_j v)] = (\partial_j v)[\epsilon_{ijk} (\partial_k \partial_i u)] + (\partial_i u)[\epsilon_{ijk} (\partial_k \partial_j v)]$

$\epsilon_{ijk} (\partial_k \partial_i u)$：因为出现 Levi – Civita 符号，故 i, j, k 三下标应各不相同才不为 0

不是一般性，考虑当 $j = 1$ 情况，这时 i, k 只能分别取 2, 3 或 3, 2

因 $\epsilon_{ijk} (\partial_k \partial_i u)$ 隐含着对重复指标 i, k 求和，

故应对 $(i, k) = (2, 3)$ 和 $(3, 2)$ 的两项求和

$$\left.\begin{array}{ll} (i, k) = (2, 3) \text{时，} \partial_k \partial_i u = \partial_3 \partial_2 u = \partial_2 \partial_3 u, & \epsilon_{ijk} = \epsilon_{213} = -1 \\ (i, k) = (3, 2) \text{时，} \partial_k \partial_i u = \partial_2 \partial_3 u, & \epsilon_{ijk} = \epsilon_{312} = 1 \end{array}\right\} \text{两者之和} = 0$$

故：$\epsilon_{ijk} (\partial_k \partial_i u) = 0$，类似地：$\epsilon_{ijk} (\partial_k \partial_j v) = 0 \implies \nabla \cdot [(\nabla u) \times (\nabla v)] = 0$

其实：$\epsilon_{ijk} (\partial_k \partial_i u) = \nabla \times (\nabla u) = 0$ （任何标量函数求梯度再求旋度等于 0）

旋度：

在正交曲线坐标系，矢量函数：$\vec{\boldsymbol{V}}(x, y, z) = V_1(u_1, u_2, u_3)\, \hat{\boldsymbol{u}}_1 + V_2(u_1, u_2, u_3)\, \hat{\boldsymbol{u}}_2 + V_3(u_1, u_2, u_3)\, \hat{\boldsymbol{u}}_3$

散度：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{V}}(x, y, z) = \underbrace{\nabla \times (V_1 \hat{\boldsymbol{u}}_1)}_{\vec{c}_1} + \underbrace{\nabla \times (V_2 \hat{\boldsymbol{u}}_2)}_{\vec{c}_2} + \underbrace{\nabla \times (V_3 \hat{\boldsymbol{u}}_3)}_{\vec{c}_3}$

$\vec{\boldsymbol{c}}_1 = \nabla \times (V_1 \hat{\boldsymbol{u}}_1) \xrightarrow{\text{利用}(a)} \nabla \times (V_1 h_1 \nabla u_1)$

利用 $\nabla \times (V \vec{\boldsymbol{A}}) = (\nabla V) \times \vec{\boldsymbol{A}} + V \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$,

更多的矢量分析公式，参见 ref12 .01 矢量分析中的微分公式.pdf

$= \nabla(V_1 h_1) \times (\nabla u_1) + (V_1 h_1) \underbrace{\nabla \times (\nabla u_1)}_{\text{此项为 0}}$　　任何标量函数求梯度再求旋度等于 0

$= \underbrace{\nabla(V_1 h_1)}_{\text{函数的梯度}} \times \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_1}{h_1}$,　其中利用了 $\nabla \times (\nabla u_1) = 0$，利用梯度表达式计算 $\nabla(V_1 h_1)$

$= \frac{1}{h_1}\left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_1} \hat{\boldsymbol{u}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_2} \hat{\boldsymbol{u}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_3} \hat{\boldsymbol{u}}_3\right] \times \hat{\boldsymbol{u}}_1$　　利用 $\hat{\boldsymbol{u}}_3 \times \hat{\boldsymbol{u}}_1 = \hat{\boldsymbol{u}}_2$, $\hat{\boldsymbol{u}}_2 \times \hat{\boldsymbol{u}}_1 = -\hat{\boldsymbol{u}}_3$

$$=\frac{1}{h_1}\left[\frac{1}{h_3}\frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_3}\hat{\boldsymbol{u}}_2-\frac{1}{h_2}\frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_2}\hat{\boldsymbol{u}}_3\right]$$

类似可得：
$$\begin{cases}\vec{c}_2=\dfrac{1}{h_2}\left[\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial(V_2 h_2)}{\partial u_1}\hat{\boldsymbol{u}}_3-\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial(V_2 h_2)}{\partial u_3}\hat{\boldsymbol{u}}_1\right]\\ \vec{c}_3=\dfrac{1}{h_3}\left[\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial(V_3 h_3)}{\partial u_2}\hat{\boldsymbol{u}}_1-\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial(V_3 h_3)}{\partial u_1}\hat{\boldsymbol{u}}_2\right]\end{cases}$$

整理：
$$\boxed{\nabla\times\vec{V}=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix}h_1\hat{\boldsymbol{u}}_1 & h_2\hat{\boldsymbol{u}}_2 & h_3\hat{\boldsymbol{u}}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3\end{vmatrix}}$$

Laplacian ∇^2：

对标量函数 $\varphi(x_1, x_2, x_3)=\varphi(u_1, u_2, u_3)$，

$$\nabla^2\varphi\equiv\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\nabla\cdot\left[\underbrace{\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}}_{V_1}\hat{\boldsymbol{u}}_1+\underbrace{\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}}_{V_3}\hat{\boldsymbol{u}}_2+\underbrace{\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}}_{V_3}\hat{\boldsymbol{u}}_3\right]\quad \text{应用了梯度公式}$$

$$=\nabla\cdot\left[V_1\hat{\boldsymbol{u}}_1+V_2\hat{\boldsymbol{u}}_2+V_3\hat{\boldsymbol{u}}_3\right]\quad \text{接着应用散度公式}$$

$$=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1}+\frac{\partial(V_2 h_3 h_1)}{\partial u_2}+\frac{\partial(V_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}\right]$$

$$=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)\right]$$

整理：
$$\boxed{\nabla^2\varphi=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)\right]}$$

柱坐标系和球坐标系中的 Laplacian ∇^2

柱坐标：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\phi\\ y=\rho\sin\phi\\ z=z\end{cases}\qquad\begin{cases}u_1=\rho\\ u_2=\phi\\ u_3=z\end{cases}\qquad \text{故：}\begin{cases}h_1=\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2\right]^{1/2}=1\\ h_2=\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\phi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial\phi}\right)^2\right]^{1/2}=\rho\\ h_3=\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}=1\end{cases}$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

```
Laplacian[φ[ρ, ϕ, z], {ρ, ϕ, z}, "Cylindrical"];
FullSimplify[%]
% // TraditionalForm
```

$\varphi^{(0,0,2)}[\rho, \phi, z] + \frac{1}{\rho^2}\left(\varphi^{(0,2,0)}[\rho, \phi, z] + \rho\, \varphi^{(1,0,0)}[\rho, \phi, z]\right) + \varphi^{(2,0,0)}[\rho, \phi, z]$

$$\frac{\varphi^{(0,2,0)}(\rho, \phi, z) + \rho\, \varphi^{(1,0,0)}(\rho, \phi, z)}{\rho^2} + \varphi^{(0,0,2)}(\rho, \phi, z) + \varphi^{(2,0,0)}(\rho, \phi, z)$$

球坐标：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = r \\ u_2 = \theta \\ u_3 = \phi \end{cases} \quad 故： \begin{cases} h_1 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right]^{1/2} = 1 \\ h_2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right]^{1/2} = r \\ h_3 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2\right]^{1/2} = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}\right]$$

```
Laplacian[φ[r, θ, ϕ], {r, θ, ϕ}, "Spherical"];
FullSimplify[%]
% // TraditionalForm
```

$\frac{1}{r^2}\left(\mathrm{Csc}[\theta]^2\, \varphi^{(0,0,2)}[r, \theta, \phi] + \mathrm{Cot}[\theta]\, \varphi^{(0,1,0)}[r, \theta, \phi] + \varphi^{(0,2,0)}[r, \theta, \phi] + 2\, r\, \varphi^{(1,0,0)}[r, \theta, \phi]\right) + \varphi^{(2,0,0)}[r, \theta, \phi]$

$$\frac{1}{r^2}\left(\varphi^{(0,2,0)}(r, \theta, \phi) + 2\, r\, \varphi^{(1,0,0)}(r, \theta, \phi) + \cot(\theta)\, \varphi^{(0,1,0)}(r, \theta, \phi) + \csc^2(\theta)\, \varphi^{(0,0,2)}(r, \theta, \phi)\right) + \varphi^{(2,0,0)}(r, \theta, \phi)$$

取巧的方法：

柱坐标：

```
sim1 = {x → ρ Cos[ϕ], y → ρ Sin[ϕ]};
sim2 = {ρ → Sqrt[x^2 + y^2], ϕ → ArcCos[x/ρ]};
sim3 = {ArcCos[Cos[ϕ]] → ϕ};
t1 = D[φ[ρ, ϕ, z] //. sim2, {x, 2}];
t2 = D[φ[ρ, ϕ, z] //. sim2, {y, 2}];
t3 = D[φ[ρ, ϕ, z] //. sim2, {z, 2}];
t = Simplify[(t1 + t2 + t3) /. sim1, {ρ > 0, ϕ ∈ Reals}];
t = Simplify[t //. sim3] // TraditionalForm
```

$$\frac{\varphi^{(0,2,0)}(\rho,\phi,z)}{\rho^2}+\varphi^{(0,0,2)}(\rho,\phi,z)+\frac{\varphi^{(1,0,0)}(\rho,\phi,z)}{\rho}+\varphi^{(2,0,0)}(\rho,\phi,z)$$

比较 $\nabla^2\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

球坐标：（请作为练习，完成这段简单代码）

12.2 正交曲线坐标系中的分离变量

本节以柱坐标与球坐标为例，讨论在正交曲线坐标系中求解 Helmholtz 方程的分离变量法。

为何关注 Helmholtz 方程

为何对 Helmholtz 方程情有独钟？最常见的数理方程大致分为三类：波动方程、扩散方程、稳定问题的 Laplace 方程。

从以下讨论可见，Laplace方程是 Helmholtz 方程的特殊形式。

而波动方程和扩散方程在做了时空坐标分离之后，空间部分满足的微分方程也为 Helmholtz 方程。

- 波动方程（此处仅讨论齐次标量波动方程，矢量波动方程的求解也以标量波动方程为基础）

  标量波动方程：u 为时空的标量函数

  $u_{tt}-a^2\nabla^2 u=0$ 　时空分离：$u(x,y,z,t)=w(x,y,z)\,T(t)$ 代入波动方程

  $T''(t)\,w(x,y,z)-a^2\,T(t)\,\nabla^2 w(x,y,z)=0 \longrightarrow \frac{T''(t)}{a^2\,T(t)}=\frac{\nabla^2 w(x,y,z)}{w(x,y,z)}=-\lambda$ 　其中 λ 为常数。

  从而：$\begin{cases}T''(t)+\lambda\,a^2\,T(t)=0\\ \nabla^2 w(x,y,z)+\lambda\,w(x,y,z)=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\text{1. 时空 总可以分离，与所选取的坐标系无关}\\ \text{2. 空间部分 } w(x,y,z) \text{ 满足的就是Helmholtz方程。}\end{cases}$

  此外，从时间函数 $T(t)$ 满足的方程就可隐约看出：$\lambda\geq 0$。

  因为，若 $\lambda<0$，$\lambda=-\gamma^2$，必有 $T\sim e^{\pm\gamma a t}$，指数上升不合物理，指数下降很快衰减，不构成波。

- 扩散方程（热传导方程）

  $u_t-a^2\nabla^2 u=0$ 　时空分离：$u(x,y,z,t)=w(x,y,z)\,T(t)$ 代入扩散方程

  $T'(t)\,w(x,y,z)-a^2\,T(t)\,\nabla^2 w(x,y,z)=0 \longrightarrow \frac{T'(t)}{a^2\,T(t)}=\frac{\nabla^2 w(x,y,z)}{w(x,y,z)}=-\lambda$ 　其中 λ 为常数。

从而：$\begin{cases} T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ \nabla^2 w(x, y, z) + \lambda w(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 空间部分 $w(x, y, z)$ 满足的也是Helmholtz方程。

实际上，从时间函数 $T(t)$ 满足的方程就可隐约看出：$\lambda \geq 0$。

因为，若 $\lambda < 0$, $\lambda = -\gamma^2$, 必有 $T \sim e^{\gamma^2 a^2 t}$，指数上升不合物理。

- 稳定问题的Laplace方程

$\nabla^2 u = 0$ 相当于 $\lambda = 0$ 的Helmholtz方程。

因此，问题总指向 Helmholtz 方程，我们要讨论利用分离变量法求解标量 Helmholtz 方程。

柱坐标系中Helmholtz方程的分离变量

利用柱坐标系的Laplacian ∇^2 的表达式

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

可得柱坐标系中Helmholtz方程：$\nabla^2 w(x, y, z) + \lambda w(x, y, z) = 0$ 化为：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda w = 0,$$ 其中 $\lambda \geq 0$ 为时空分离时引入的常数。

分离变量，令：$w(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$，代入上式 Helmholtz方程，有：

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{RZ}{\rho^2}\left(\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right) + R\Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda R \Phi Z = 0$$ 方程两边同除以 $R\Phi Z$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda = 0,$$ $\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}$ 仅依赖于 z，故必为常数

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \lambda = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu$$

其中利用了左边与 z 无关，右边仅依赖于 z，两者相等，必为常数，记为 μ。从而有方程：

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0 \\ \frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + (\lambda - \mu)\rho^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{\partial \phi^2} = \gamma \end{cases}$$ 又引进两分离变量常数：μ，γ

进一步化为：

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0 \\ \Phi'' + \gamma \Phi = 0 \\ \frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + (\lambda - \mu)\rho^2 - \gamma = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho^2 R'' + \rho R' + \left[(\lambda - \mu)\rho^2 - \gamma\right] R = 0 \end{cases}$$

以上实现了空间三个变量的分离，问题退化为一些常微分方程，

但引进了三个待定常数：λ, μ, γ，分别源自：分离出时间、分离出 $Z(z)$ 和分离出 $\Phi(\phi)$

下一步就是把三元函数的边界条件化为单变量函数：$Z(z)$、$\Phi(\phi)$ 或 $R(\rho)$ 的边界条件，

进而确定这些待定常数的允许取值，即求本征值与本征函数。我们将在下一章仔细讨论。

Take-home message: 柱坐标系中 Helmholtz 方程的分离变量

$$\underbrace{\nabla^2 w(\rho, \phi, z) + \lambda w(\rho, \phi, z) = 0}_{\lambda \geq 0,\ \text{Helmholtz 方程}} \xrightarrow[\text{柱坐标系}\ (\rho,\phi,z)]{w(\rho,\phi,z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)} \begin{cases} Z'' + \mu Z = 0 \\ \Phi'' + \gamma \Phi = 0 \\ \rho^2 R'' + \rho R' + \left[(\lambda - \mu)\rho^2 - \gamma\right] R = 0 \end{cases}$$

球坐标系中Helmholtz方程的分离变量

利用球坐标系的Laplacian表达式

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

可得球坐标系中Helmholtz方程：$\nabla^2 w + \lambda w = 0$ 化为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \lambda w = 0,$$

其中 λ 为时空分离时引入的常数。

令：$w(r, \theta, \phi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$，代入上式 Helmholtz方程，有：

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{R\Theta}{r^2 \sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \lambda R\Theta\Phi = 0$$

两边同除以 $R\Theta\Phi$

$$\frac{1}{R r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \lambda = 0$$

接下去，有两种做法：

1. 可先分出 r

$$\frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi \sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - \lambda r^2 = -l(l+1)$$

其中利用了左边与 r 无关，右边只依赖于 r，两者相等，必为常数，记为 $-l(l+1)$。

从而有方程：

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r^2 R') + \left[\lambda r^2 - l(l+1)\right] R = 0 \\ \frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\,\Theta') + \frac{\Phi''}{\Phi \sin^2\theta} + l(l+1) = 0 \end{cases}$$

第二式改写以分理处 Φ： $\longrightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\,\Theta') + l(l+1)\sin^2\theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \gamma$

2. 也可先分出 ϕ

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \lambda r^2 \sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \gamma$$

得：

$$\begin{cases} \Phi'' + \gamma\Phi = 0 \\ \frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{\gamma}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - \lambda r^2 = -l(l+1) \end{cases}$$

无论哪种分法，总可进一步化为：

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r^2 R') + \left[\lambda r^2 - l(l+1)\right] R = 0 \quad \xrightarrow[y(x)=R(r)]{\text{令：}x=\sqrt{\lambda}\,r} \quad x^2 y'' + 2 x y' + \left[x^2 - l(l+1)\right] y = 0 \\ \Phi'' + \gamma\Phi = 0 \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\,\Theta') + \left[l(l+1) - \frac{\gamma}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \quad \xrightarrow[y(x)=\Theta(\theta)]{\text{令：}x=\cos\theta} \quad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{\gamma}{1-x^2}\right] y = 0 \end{cases}$$

以上实现了变量分离，问题退化为一些常微分方程，但引进了三个待定常数：λ, $l(l+1)$, γ。

下一步就是依据边界条件定出这些待定常数的允许取值，即求本征值与本征函数。我们将在下一章仔细讨论。

Take-home message: 球坐标系中 Helmholtz 方程的分离变量

$$\underbrace{\nabla^2 w(\rho,\phi,z)+\lambda\, w(\rho,\phi,z)=0}_{\lambda\geq 0,\ \text{Helmholtz 方程}} \xrightarrow[\text{球坐标系 }(r,\theta,\phi)]{w(r,\theta,\phi)=R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)} \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta\,\Theta')+\left[l(l+1)-\dfrac{\gamma}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \\ \Phi''+\gamma\,\Phi=0 \\ \dfrac{d}{dr}(r^2R')+\left[\lambda\, r^2-l(l+1)\right]R=0 \end{cases}$$

例题

在正式讨论求解本征值和本征函数之前，先通过简单例题，找点感觉。

例 1. 一半径为 b 的薄圆盘，上下两面绝热，圆盘边缘温度为 $f(\phi)$，求圆盘稳定温度 u。

解：总是先写出定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho,\phi)=0, & 0\leq\rho\leq a \quad \text{（写出方程的范围 } 0\leq\rho\leq a\text{，以便自然想到要有 } \rho=0,\ a \text{ 的边条）} \\ u(a,\phi)=f(\phi) & \text{注意在 } \rho=a \text{ 处并不是齐次边条} \\ u(0,\phi)\ \text{有限} & \text{在 } \rho \text{ 的两个边界上（} \rho=0 \text{ 与 } \rho=a\text{）都要写出边条，实在写不出，就用自然边条。} \\ u(\rho,\phi)=u(\rho,\phi+2\pi) & \phi \text{ 没有“边界”，满足周期条件。} \end{cases}$$

因为问题不出现 z 坐标，否则还需记得写出 z 边界的边条。

以上条件构成定解问题（定解条件），接着，就可以试着分离变量。

分离变量： $u(\rho,\phi,z)=R(\rho)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$：

$$\text{对 Helmholtz 方程，有：}\begin{cases} Z''+\mu Z=0 \\ \Phi''+\gamma\,\Phi=0 \\ \rho^2R''+\rho R'+\left[(\lambda-\mu)\rho^2-\gamma\right]R=0 \end{cases} \tag{1.2}$$

原来是Laplace方程，相当于 $\lambda=0$ 的 Helmholtz 方程，

又：问题与 z 无关，故 $\mu=0$，

$$\text{从而定解问题分离变量退化为：}\begin{cases} \Phi''+\gamma\,\Phi=0 \\ \Phi(\phi)=\Phi(\phi+2\pi) \\ \rho^2R''+\rho R'-\gamma R=0 \\ R(0)\ \text{有限} \end{cases}$$

这里 $u(a,\phi)=R(a)\,\Phi(\phi)=f(\phi)$ 非齐次，

无法写成单变量函数 $R(\rho)$ 的边条

接着，要从哪一个方程出发确定本征值 γ？

—— 看哪一个变量的单变量函数给定边界条件：齐次边条、周期边条、自然边条。

对一般情形，从 Z, Φ 和 R 三个函数所满足的微分方程 (1.2) 知：

R 显然不会是第一个用于确定本征值的函数，因为它的方程包含了多个分离变量常数：λ, μ, γ。

本问题中，也即通常情况，应先由 Φ 确定本征值 γ。

—— 因为 $\Phi(\phi)$ 满足周期边界条件，易用于确定“本征值”

周期边界条件：$\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$

▲ 柱坐标系中，因为通常总有周期条件，故一般先利用周期边界条件，确定与 Φ 相关的本征值 γ。

至于下一个是 Z 还是 R，看那一变量有齐次边界条件。（本问题中不涉及 Z）

先考虑 Φ：$\Phi''+\gamma\,\Phi=0$

设：$\gamma<0$，令 $\gamma=-m^2 \longrightarrow \Phi=A_m\,e^{m\phi}+B_m\,e^{-m\phi}$ 显然不可能满足周期条件

$\gamma=0, \longrightarrow \Phi=B_0\,\phi+A_0$，仅当 $B_0=0$ 时才满足能周期条件，故有：$\gamma=0$, $\Phi=A_0$（常数）

$\gamma > 0$，令 $\gamma = m^2 \quad \longrightarrow \quad \Phi = A_m \cos m\,\phi + B_m \sin m\,\phi \quad m$ 为整数时满足周期条件

注：m 等于负整数并不产生新的线性无关本征函数，故 $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

本征值：$\gamma = m^2$，本征函数：$\Phi_m = A_m \cos m\,\phi + B_m \sin m\,\phi$，其中 $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

注：这里已包含了 $\gamma = 0$ 及其本征函数。

再考虑 R：$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$，以下利用 Frobenius and Fuchs 方法求解，

Frobenius 法（弗如笨牛法）未必最简单，却一定可行。

显然，$\rho = 0$ 为方程的正则奇点，方程的解必为：$R = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k$ 形式，代入微分方程

当 $m \neq 0$ 时，求得指标 $s = \pm m$ 及系数的递推关系 $k(k + 2\,s)\,c_k = 0$ （见下）

$$\begin{cases} \rho^2 R'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+s)(k+s-1)\,\rho^{k+s} \\ \rho R' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+s)\,\rho^{k+s} \\ m^2 R = \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^2 \rho^{k+s} \end{cases} \Longrightarrow c_k (k+s)(k+s-1) + c_k (k+s) + c_k m^2 = 0$$

$$\begin{cases} \text{指标方程（}k = 0,\ c_0 \neq 0\text{）：} s(s-1) + s - m^2 = 0 \longrightarrow s = \pm m \\ c_k \text{ 满足的关系：} \begin{cases} c_k (k+m)(k+m-1) + c_k (k+m) - c_k m^2 = 0 \longrightarrow k(k+2\,m)\,c_k = 0 \\ c_k (k-m)(k-m-1) + c_k (k-m) - c_k m^2 = 0 \longrightarrow k(k-2\,m)\,c_k = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} s = m \text{ 时：因为 } m \geq 0\text{，故仅当 } k = 0 \text{ 时，} c_k = c_0 \neq 0\text{，故：} R = C_m \rho^m \\ s = -m \text{ 时 仅当 } k = 0 \text{ 与 } k = 2\,m \text{ 时，} c_k \neq 0\text{，故：} R = D_m \rho^{-m} + E_m \rho^m \end{cases}$$

两个线性无关解是：ρ^m 与 ρ^{-m} 写成：$m \neq 0$ 时：$R = C_m \rho^{-m} + D_m \rho^m$

当 $m = 0$ 时，ρ^m 与 ρ^{-m} 线性相关，直接从方程出发，

求解 $\rho^2 R'' + \rho R' = 0$ 得：$R = C_0 + D_0 \ln \rho$

注：对任意 $m \geq 0$，也可令 $t = \ln \rho$ 把微分方程化为：$\dfrac{d^2 R}{d t^2} - m^2 R = 0$ 求解。

综上：$R_m(\rho) = \begin{cases} C_m \rho^m + D_m \rho^{-m}, & m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ C_0 + D_0 \ln \rho, & m = 0 \end{cases}$

自然边条：$\rho \to 0$ 时，$R(0)$ 有限 $\longrightarrow$ $R = C_m \rho^m$，$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

所以：$u_m(\rho, \phi) = C_m \rho^m (A_m \cos m\,\phi + B_m \sin m\,\phi)$

$$\Longrightarrow u(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\,\phi + B_m \sin m\,\phi)$$

最后利用：$u(a, \phi) = f(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m (A_m \cos m\,\phi + B_m \sin m\,\phi)$ 求出：

$$A_0 = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi, \qquad A_m = \frac{1}{\pi\,a^m} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos m\,\phi\,d\phi,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi\,a^m} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin m\,\phi\,d\phi, \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

- 若为内外半径分别为 a 和 b 的薄圆盘，其解为

$$u(\rho, \phi) = C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \rho^m + D_m \rho^{-m})(A_m \cos m\,\phi + B_m \sin m\,\phi)$$

因为这时的求解区不包括 $\rho = 0$，在 $\rho = 0$ 处发散的解不能粗暴地舍去。

这时须同时给定 $\rho = a$ 与 b 的边条。

12.3 矢量波动方程、矢量 Helmholtz 方程

上一节讨论的是标量波动方程：$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0$

而电磁场满足的是矢量波动方程：$\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0$

这个波动方程由线性均匀各向同性介质中无源区的 Maxwell 方程导得。推到如下。

$$\text{Maxwell 方程：}\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} = 0 & (1) \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} & (2) \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 & (3) \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

其中 (2) 式求旋度得：

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right) \xRightarrow{\text{利用(4)式}} -\mu\,\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{另一方面：}\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) \xRightarrow{\text{利用(1)式}} -\nabla^2 \vec{E}$$

故电场 $\vec{E}$ 满足矢量波动方程：

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0, \quad c^2 = \frac{1}{\mu\,\varepsilon} \qquad \text{—— 矢量波动方程}$$

$$\text{是比较：}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0 \qquad \text{—— 标量波动方程}$$

矢量Helmholtz方程

设矢量函数 $\vec{u}\left(\vec{r}, t\right)$ 满足矢量波动方程

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{u} = 0$$

类似于标量波动方程，分离变量：$\vec{u}\left(\vec{r}, t\right) = \vec{A}(\vec{r})\,T(t)$

空间矢量函数 $\vec{A}(\vec{r})$ 满足矢量 Helmholtz 方程：

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{u} = 0 \xrightarrow{\vec{u}\left(\vec{r},t\right) = \vec{A}(\vec{r})\,T(t)} \vec{A}(\vec{r})\,T''(t) - c^2\left[\nabla^2 \vec{A}(\vec{r})\right] T(t) = 0$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \frac{T''(t)}{c^2\,T(t)} - \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = 0 \ \text{显然}\ \frac{T''(t)}{c^2\,T(t)}\ \text{应为常数：}\ \frac{T''(t)}{c^2\,T(t)} = -k$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0 & \text{—— 矢量 Helmholtz 方程} \\ T'' + k^2 c^2\,T = 0 \end{cases}$$

其中 k^2 为时空分离常数，作用于矢量函数 $\vec{C}$ 的 Laplacian 定义为：

$$\nabla^2 \vec{C} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{C}\right) - \nabla \times \nabla \times \vec{C}$$

下证之。

$$\nabla\times\nabla\times\vec{C}=\overbrace{\nabla\times\left[\epsilon_{jkl}\,\partial_j C_k\right]}^{\text{这一步为中间结果 正式场合不这样写}}=\epsilon_{ilm}\,\partial_i\left[\epsilon_{jkl}\,\partial_j C_k\right]$$

$$=\epsilon_{ilm}\;\epsilon_{jkl}\,\partial_i\partial_j C_k \quad \text{对重复下标 } l \text{ 求和}$$

$$=\left(\delta_{ik}\,\delta_{jm}-\delta_{ij}\,\delta_{km}\right)\partial_i\partial_j C_k$$

$$=\partial_m\partial_i C_i-\partial_i\partial_i C_m$$

$$=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{C}\right)-\nabla^2\vec{C}$$

矢量Helmholtz方程的解：矢量球波函数

矢量Helmholtz方程

$$\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{A}+k^2\vec{A}=0$$

在直角坐标系下，矢量函数：$\vec{A}=A_i\,\vec{e}_i$ 的每个分量都满足标量Helmholtz方程

$$\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=\left(\nabla^2 A_i\right)\vec{e}_i+k^2 A_i\,\vec{e}_i=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla^2 A_i+k^2 A_i=0 \quad \text{—— 标量Helmholtz方程}$$

可对其三个分量分别求解。

但如前所言，体系的对称性决定了坐标系。当体系边界为球面时，显然取球坐标系较为方便。

但在球坐标系，矢量Helmholtz方程就不能再化为三个标量Helmholtz方程分别求解。

那么，如何求解非直角坐标系中的矢量Helmholtz方程？

通常，我们先求标量Helmholtz方程：$\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$ 的解。

再由标量Helmholtz方程的解构造矢量Helmholtz方程：$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{A}+k^2\vec{A}=0$ 的解。

具体做法如下。

假设我们以求得标量Helmholtz方程的解：φ

用它构造三个矢量函数：

$$\vec{L}=\nabla\varphi,\qquad \vec{M}=\nabla\times\left(\vec{v}\,\varphi\right),\qquad \vec{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{M}$$

其中 $\vec{v}$ 为常矢量。

可以证明，三个矢量函数：$\vec{L}$，$\vec{M}$，$\vec{N}$ 都满足矢量Helmholtz方程：

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{A}+k^2\vec{A}=0 \tag{1.3}$$

以下证明。

1. $\vec{L}=\nabla\varphi$ 代入矢量Helmholtz方程 (1.3) 得：

$$\nabla\left(\nabla^2\varphi\right)+k^2\nabla\varphi=\nabla\left(\nabla^2\varphi+k^2\varphi\right)=0$$

其中利用了：$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$。因此，$\vec{L}=\nabla\varphi$ 是矢量Helmholtz方程的解。

此外，$\vec{L}=\nabla\varphi$ 还满足：$\nabla\times\vec{L}=0$

2. $\vec{M}=\nabla\times\left(\vec{v}\,\varphi\right)=(\nabla\varphi)\times\vec{v}=\vec{L}\times\vec{v}$

$$\nabla\cdot\vec{M}=\nabla\cdot\left[\nabla\times\left(\vec{v}\,\varphi\right)\right]=0 \quad \text{任何矢量函数的旋度再散度为 } 0$$

$$\nabla^2\vec{M}=\nabla^2\left[\nabla\times\left(\vec{v}\,\varphi\right)\right]=\nabla\times\left(\vec{v}\,\nabla^2\varphi\right) \quad \vec{v}\text{ 为常矢量，}\nabla^2\text{ 为标量算符}$$

$$\nabla^2\vec{M}+k^2\vec{M}=\nabla\times\left(\vec{v}\,\nabla^2\varphi\right)+k^2\,\nabla\times\left(\vec{v}\,\varphi\right)=\nabla\times\left[\vec{v}\left(\nabla^2\varphi+k^2\varphi\right)\right]=0$$

因此，$\vec{M}$ 也满足矢量Helmholtz方程：$\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=0$

3. $\vec{N}=\dfrac{1}{k}\nabla\times\vec{M}$

$$\nabla\cdot\vec{N}=\frac{1}{k}\nabla\cdot\left[\nabla\times\vec{M}\right]=0$$ 任何矢量函数的旋度再散度为 0

$$\nabla^2\vec{N}=\frac{1}{k}\nabla^2\left[\nabla\times\vec{M}\right]=\frac{1}{k}\nabla\times\left(\nabla^2\vec{M}\right)$$ ∇^2 为标量算符

$$\nabla^2\vec{N}+k^2\vec{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\left(\nabla^2\vec{M}\right)+k\,\nabla\times\vec{M}=\frac{1}{k}\nabla\times\left[\nabla^2\vec{M}+k^2\vec{M}\right]=0$$

因此，$\vec{N}$ 也满足矢量Helmholtz方程：$\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=0$

此外，$\nabla\times\vec{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times\vec{M}=\frac{1}{k}\left[\nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{M}\right)}_{\text{散度}=0}-\nabla^2\vec{M}\right]=k\,\vec{M}$

$$\Longrightarrow\quad\vec{M}=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{N}\qquad\text{比较：}\quad\vec{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{M}$$

4. 矢量Helmholtz方程的解是 $\vec{L}$, $\vec{M}$, $\vec{N}$ 的线性组合。

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{A}+k^2\vec{A}=0\quad\Longrightarrow\quad\vec{A}=\sum_n\left(a_n\vec{M}_n+b_n\vec{N}_n+c_n\vec{L}_n\right)$$

散度为 0 的场（如真空中的电磁场）是 $\vec{M}$, $\vec{N}$ 的线性组合。

$$\begin{cases}\vec{E}=\sum_n\left(a_n\vec{M}_n+b_n\vec{N}_n\right), & \text{利用 }\vec{M}=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{N},\ \ \vec{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{M}\\ \vec{H}=\dfrac{\nabla\times\vec{E}}{i\,\omega\,\mu}=\dfrac{k}{i\,\omega\,\mu}\sum_n\left(a_n\vec{N}_n+b_n\vec{M}_n\right)\end{cases}$$

5. 试利用Levi-Civita 符号 ϵ_{ijk}，理解

$$\nabla^2\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\times\left(\nabla^2\vec{A}\right),\qquad\nabla^2\left(\vec{v}\,\varphi\right)=\vec{v}\left(\nabla^2\varphi\right)\ \text{if }\vec{v}\text{ is a constant vector}$$

6. 若 $\vec{v}=\vec{r}=x\,\vec{e}_x+y\,\vec{e}_y+z\,\vec{e}_z=x_i\,\vec{e}_i$，同样构造的三个矢量函数

$$\vec{L}=\nabla\varphi,\qquad\vec{M}=\nabla\times\left(\vec{r}\,\varphi\right),\qquad\vec{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{M}$$

依然满足矢量Helmholtz方程： $\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{A}+k^2\vec{A}=0$ （试证之）

如此构造的三个矢量函数就是球坐标系中矢量Helmholtz方程的基本解。

称为：矢量球波函数。

7. 这里矢量球波函数只是考虑了原物理量的矢量性质，因而有三个矢量函数

至于Helmholtz方程是二阶微分方程，有两个线性无关解，那是另一个因素（自由度）。

也就是说，对标量 Helmholtz 方程的每一个解，都可以构造三个矢量函数，

使它们满足矢量 Helmholtz 方程。