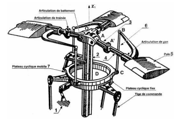
Sciences de l'Ingénieur

Torseurs



I CHAMP DE VECTEUR

I.1 Définition

On appelle champ de vecteur, une application de (ε) dans (E) qui à tout point M de l'espace affine associe un vecteur unique noté $\overrightarrow{V_{(M)}}$.

I.2 Champs particuliers

I.2.1 Champ uniforme

$\forall M, N$ appartenant à l'espace affine (ε), $\overrightarrow{V_{(M)}} = \overrightarrow{V_{(N)}}$

I.2.2 Champ central

$\forall M$ appartenant à l'espace affine (ε), $\overrightarrow{V_{(M)}} = \lambda_{(M)}\overrightarrow{MC}$. Tous les vecteurs sont dirigés vers un même point C de l'espace affine.

I.2.3 Champ équiprojectif

Un champ de vecteur est équiprojectif ssi $\forall M, N$ appartenant à l'espace affine (ε), la relation suivante est vérifiée: $\overrightarrow{V_{(M)}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{(N)}} \cdot \overrightarrow{MN}$

I.2.4 Champ de moment

Un champ de moment est un champ de vecteur pour lequel il est possible de vérifier la relation suivante: $\overrightarrow{V_{(M)}} = \overrightarrow{V_{(N)}} + \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{U} = \overrightarrow{V_{(N)}} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{NM}$.

Remarque : (théorème de Delassus)
Il est possible de démontrer :

Champ équiprojectif $\Leftrightarrow$ Champ de moment

II TORSEUR

II.1 Définition d'un torseur

Un torseur $\{\mathcal{T}\}$ est l'association de :

- Un vecteur résultant $\vec{R}$ (identique en tout point de l'espace) ;
- Un champ de moment $\vec{M}$ (dépendant du point où on le calcule)

Il vérifie l'équation $\overrightarrow{M_{(M)}} = \overrightarrow{M_{(N)}} + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{R} \;\left(\forall M \; et \; N \in (\varepsilon)\right)$.

$\vec{R}$ est appelé la résultante et $\overrightarrow{M_{(A)}}$ le moment en A. Ces deux vecteurs sont alors appelés les éléments de réduction du torseur en A. on note le torseur $\{\mathcal{T}\}$ comme suit :

$$\{\mathcal{T}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(A)}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} R_x\vec{x}+R_y\vec{y}+R_z\vec{z} \\ M_{(A)x}\vec{x}+M_{(A)y}\vec{y}+M_{(A)z}\vec{z} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les coordonnées de $\vec{R}$ et $\overrightarrow{M_{(A)}}$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sont appelées les coordonnées pluckériennes du torseur $\{\mathcal{T}\}$.

II.2 Opération sur les torseurs

II.2.1 Addition

Soient deux torseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ tels que :

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R_1} \\ \overrightarrow{M_{(A)1}} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{T}_2\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{(A)2}} \end{Bmatrix}$$

Soit $\{\mathcal{T}_S\}$ la somme des deux torseurs. Alors la résultante $\vec{R_S}$ est égale à la somme des résultantes $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$ et le moment $\overrightarrow{M_{(A)S}}$ **exprimé en A** est égal à la somme des moments $\overrightarrow{M_{(A)1}}$ et $\overrightarrow{M_{(A)2}}$ **exprimés en A**.

$$\left\| \begin{array}{l} \vec{R_S} = \vec{R_1} + \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{(A)S}} = \overrightarrow{M_{(A)1}} + \overrightarrow{M_{(A)2}} \end{array} \right.$$

Attention ! Ajouter deux torseurs dont les éléments de réduction sont exprimés en des points différents n'a aucun sens.

II.2.2 Multiplication par un scalaire

Soit $\{\mathcal{T}_1\}$ un torseur et λ un réel, alors :

$$\{\mathcal{T}_2\} = \lambda.\{\mathcal{T}_1\} = {}_A\begin{Bmatrix} \lambda.\vec{R_1} \\ \lambda.\overrightarrow{M_{(A)1}} \end{Bmatrix}$$

II.2.3 Comoment de deux torseurs

On appelle comoment de deux torseurs et $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$, la quantité scalaire :

$$\{\mathcal{T}_1\}\times\{\mathcal{T}_2\} = \vec{R_1}.\overrightarrow{M_{(A)2}} + \vec{R_2}.\overrightarrow{M_{(A)1}}$$

Comme pour la somme, les moments doivent être **exprimés au même point**.

Remarque : Le résultat ne dépend pas du point A choisi. C'est un invariant.

$$\{\mathcal{T}_1\}\times\{\mathcal{T}_2\} = \vec{R_1}.\overrightarrow{M_{(A)2}} + \vec{R_2}.\overrightarrow{M_{(A)1}} = \vec{R_1}.\left(\overrightarrow{M_{(B)2}} + \overrightarrow{AB}\wedge\vec{R_2}\right) + \vec{R_2}.\left(\overrightarrow{M_{(B)1}} + AB\wedge\vec{R_1}\right)$$

$$= \vec{R_1}.\overrightarrow{M_{(B)2}} + \vec{R_2}.\overrightarrow{M_{(B)1}} + \vec{R_1}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{R_2}\right) + \vec{R_2}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{R_1}\right)$$

$$\{\mathcal{T}_1\}\times\{\mathcal{T}_2\} = \vec{R_1}.\overrightarrow{M_{(A)2}} + \vec{R_2}.\overrightarrow{M_{(A)1}} = \vec{R_1}.\overrightarrow{M_{(B)2}} + \vec{R_2}.\overrightarrow{M_{(B)1}}$$

II.2.4 Automoment d'un torseur

On appelle automoment $A(\{\mathcal{T}\})$ du torseur $\{\mathcal{T}\}$ la moitié du comoment de ce torseur par lui-même.

$$A(\{\mathcal{T}\}) = \frac{1}{2}.\{\mathcal{T}\}\times\{\mathcal{T}\} = \vec{R}\,.\,\overrightarrow{M_{(A)}}$$

II.3 Axe central d'un torseur

On appelle axe central d'un torseur $\{\mathcal{T}\}$ l'ensemble des points I pour lesquels le champ $\vec{M}$ est colinéaire à $\vec{R}$. Soit $\overrightarrow{M_{(I)}} = \lambda.\vec{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

I est alors appelé point central du torseur.

Soit $\{\mathcal{T}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_{(A)}}\end{matrix}\right\}$. Avec A un point quelconque de l'espace.

$\overrightarrow{M_{(I)}} = \overrightarrow{M_{(A)}} + \overrightarrow{IA}\wedge\vec{R} = \lambda.\vec{R}$; En faisant le produit vectoriel par $\vec{R}$, on obtient

$$\vec{R}\wedge\overrightarrow{M_{(I)}} = \vec{R}\wedge\overrightarrow{M_{(A)}} + \vec{R}\wedge\left(\overrightarrow{IA}\wedge\vec{R}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_{(A)}}\wedge\vec{R} = \overrightarrow{IA}\left\|\vec{R}\right\|^2 - \underbrace{\vec{R}(\vec{R}.\overrightarrow{IA})}_{\mu\vec{R}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IA} = \frac{\overrightarrow{M_{(A)}}\wedge\vec{R}}{\left\|\vec{R}\right\|^2} + \mu\vec{R}}$$

L'axe central est toujours une droite parallèle à $\vec{R}$.
Le moment d'un torseur est minimum pour tous les points de l'axe central.

II.4 Torseurs particuliers

II.4.1 Torseur nul

Un torseur nul $\{0\}$ est un torseur dont la résultante et le moment sont nuls en au moins un point M de l'espace. Le moment est alors nul en tout point de l'espace :

$$\{\mathcal{T}\} = {}_{\forall M}\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\} = \{0\}$$

II.4.2 Torseur couple

Un torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle :

$$\{\mathcal{C}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \overrightarrow{M_{(A)}}\end{matrix}\right\}$$

Remarque : Le moment d'un torseur couple est le même en tout point de l'espace et il n'y a pas d'axe central pour ce torseur.

II.4.3 Torseur glisseur

Un torseur glisseur est un torseur dont l'automoment est nul avec $\vec{R}\neq 0$.
Remarque : Le moment est donc toujours perpendiculaire à la résultante et il est nul sur l'axe central.