LES TORSEURS

I) Introduction.

Un torseur est avant tout un outil mathématique. Cet outil nous permettra de traiter des problèmes de statique entre autre, mais aussi des problèmes de cinématique et de dynamique. (en classe poste bac.).

L'inconvénient de cet outil est qu'il est relativement « lourd » d'utilisation pour les problèmes simples. Par contre il est extrêmement puissant et permet de traiter avec facilité des problèmes complexes. De plus il est facilement informatisable.

II) Torseur statique.

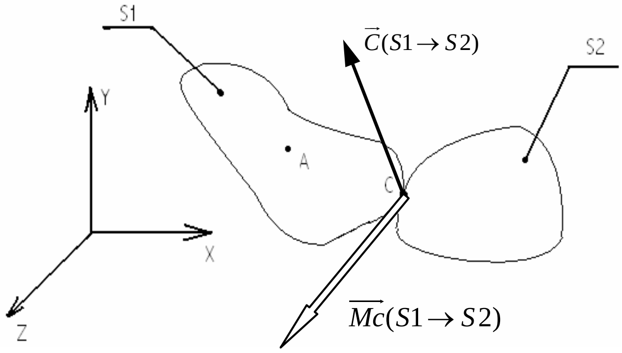
Nous avons vu jusqu'à présent qu'une action mécanique pouvait englober deux choses.

- Une force (représentée par un vecteur)
- Un moment (représenté aussi par un vecteur).
  Rappel : Un moment est une action de « TORSION », c'est le produit d'une force par une distance.

Un torseur sera la représentation complète d'une action mécanique (force + moment) transmise entre 2 systèmes matériels « S1 » et « S2 » en un point « C » par exemple.

1) Représentation.

Soit deux systèmes matériels « S1 » et « S2 » en contact en « C ».



Le torseur associé à l'action mécanique de « S1 » sur « S2 » au point C sera noté :

$$\boxed{\{T(S1 \rightarrow S2)\}_C \begin{Bmatrix} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \\ \overrightarrow{Mc}(S1 \rightarrow S2) \end{Bmatrix}}$$

Définition :

$\vec{R}(S1 \rightarrow S2)$: est appelé la résultante du torseur associé à l'action mécanique de « S1 » sur « S2 ».

$\overrightarrow{Mc}(S1 \rightarrow S2)$: est appelé le moment résultant au point C de l'action mécanique de « S1 » sur « S2 ».

2) <u>Ecriture d'un torseur sous la forme des coordonnées vectorielles de ces deux composantes, résultante et moment.</u>

Dans le cas précédent la résultante $\vec{R}(S1 \rightarrow S2) = \vec{C}(S1 \rightarrow S2)$

Ses coordonnées dans R seront notées $\vec{C}(S1 \rightarrow S2) \left|\begin{matrix} Cx \\ Cy \\ Cz \end{matrix}\right._{R}$

De même le moment au point C, s'il n'est pas nul, aura les coordonnées suivantes

$$\overrightarrow{Mc}(S1 \rightarrow S2) \left|\begin{matrix} Lc \\ Mc \\ Nc \end{matrix}\right._{R}$$

Le torseur représentant l'action transmise de « S1 » sur « S2 » aura donc l'écriture suivante

$$\boxed{\{T(S1 \rightarrow S2)\} \; {}_{C}\begin{Bmatrix} Cx & Lc \\ Cy\,; & Mc \\ Cz & Nc \end{Bmatrix}_{R}}$$

Repère dans lequel est exprimé le torseur

Coordonnées de la résultante $\vec{R}(S1 \rightarrow S2)$

Coordonnées du moment $\overrightarrow{Mc}(S1 \rightarrow S2)$

3) Expression des éléments de réduction du torseur associé à l'action de « S1 » sur « S2 » en un point « A » différent de « C ».

Un torseur représente une action complète en un point considéré. Exprimé en un autre point, ce torseur représentant cette même action mécanique aura des éléments de réductions différents.

Remarque : On parle de COORDONNEES D'UN VECTEUR (3 valeurs numériques). De la même manière on parle D'ELEMENTS DE REDUCTION D'UN TOSEUR (6 valeurs numériques)

Ce torseur exprimé au point « A » sera noté :

$$\{T(S1\rightarrow S2)\}_A \begin{Bmatrix} \vec{R}(S1\rightarrow S2) \\ \overrightarrow{MA}(S1\rightarrow S2) \end{Bmatrix}$$

Lettre A

Ses éléments de réductions seront les suivants :

- **La résultante : ELLE SERA TOUJOURS LA MÊME**

Dans notre exemple $\vec{R}(S1\rightarrow S2)=\vec{C}(S1\rightarrow S2)$ avec $\vec{C}(S1\rightarrow S2)\ {}_R\left|\begin{matrix} Cx \\ Cy \\ Cz \end{matrix}\right.$

- **Le moment :**

Les coordonnées du vecteur moment au point « A » $\overrightarrow{MA}(S1\rightarrow S2)$ seront déterminées par la relation vectorielle de **CHANGEMENT DE POINT** suivante

1ère LETTRE

$$\boxed{\overrightarrow{MA}(S1\rightarrow S2)=\overrightarrow{MC}(S1\rightarrow S2)+\overrightarrow{AC}\wedge\vec{R}(S1\rightarrow S2)}$$

2ème LETTRE

Pour notre exemple :

Si le bipoint $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix} 10 \\ -20 \\ 5 \end{matrix}\right._R$

Alors $\quad \overrightarrow{MA}(S1 \to S2) = \overrightarrow{Mc}(S1 \to S2) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}(S1 \to S2)$

$$\left|\begin{matrix} Lc \\ Mc \\ Nc \end{matrix}\right. \quad + \quad \left|\begin{matrix} 10 \\ -20 \\ 5 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} Cx \\ Cy \\ Cz \end{matrix}\right.$$

D'où $\quad \overrightarrow{MA}(S1 \to S2)\left|\begin{matrix} Lc - 20Cz - 5Cy \\ Mc + 5Cx - 10Cz \\ Nc + 10Cy + 20Cx \end{matrix}\right._R$

D'où l'expression du torseur associé à l'action de « S1 » sur « S2 » au point « A »

$$\{T(S1 \to S2)\} \; {}_A\left\{\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} Cx \\ Cy \\ Cz \end{matrix}}_{\vec{R}(S1 \to S2)} & ; & \underbrace{\begin{matrix} Lc - 20Cz - 5Cy \\ Mc + 5Cx - 10Cz \\ Nc + 10Cy + 20Cx \end{matrix}}_{\overrightarrow{MA}(S1 \to S2)} \end{matrix}\right\}_R$$

Ce qu'il faut surtout, c'est comprendre la méthode et ne pas se laisser impressionner par l'écriture ou par le vocabulaire utilisé.

4) <u>Différentes formes de torseurs.</u>

a) Torseur couple

On appelle torseur couple tous torseur associé à une action mécanique particulière dont la résultante est nulle (et le moment non nul)

Il sera noté

$$\{T(S1 \to S2)\} \; {}_c\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{Mc}(S1 \to S2) \end{matrix}\right\}$$

Expression de ce torseur en un point « A » différent de « C ».

La résultante restant la même au point « A » qu'au point « C », c'est-à-dire $\vec{0}$, occupons nous du moment au point « A » $\overrightarrow{MA}(S1 \rightarrow S2)$

$$\overrightarrow{MA}(S1 \rightarrow S2) = \overrightarrow{MC}(S1 \rightarrow S2) + \underbrace{\overrightarrow{AC} \wedge \vec{0}}_{\vec{0}}$$

Conclusion.

Un torseur couple aura la même expression (même éléments de réduction) quel que soit le point ou il est écrit.

$$\overrightarrow{MA}(S1 \rightarrow S2) = \overrightarrow{Mc}(S1 \rightarrow S2)$$

Application.

Ce torseur représentera par exemple l'action :

- D'une clé en « croix » sur un écrou pour serrer ou desserrer une roue de voiture.
- D'un arbre de transmission de camion sur l'arbre d'entée de l'essieu arrière.
- Etc.…

b) Le glisseur

On appelle GLISSEUR AU POIN « C », tous torseurs associés à une action mécanique particulière dont le moment résultant au point « C » est NUL.

Il sera noté

$$\boxed{\{T(S1 \rightarrow S2)\}_c \begin{Bmatrix} \vec{R}(S1 \rightarrow S2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Expression de ce torseur en un point « A » différent de « C ».

Toujours la même résultante, mais pour le moment au point « A », il est donné par la relation de changement de point.

$$\overrightarrow{MA}(S1 \rightarrow S2) = \vec{0} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}(S1 \rightarrow S2)$$

$$\begin{vmatrix} 10 \\ -20 \\ 5 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} Cx \\ Cy \\ Cz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20Cz - 5Cy \\ 5Cx - 10Cz \\ 10Cy + 20Cx \end{vmatrix}$$

Ce glisseur en « C » redevient un torseur en « A » (avec une résultante et un moment non nuls)

ATTENTION ! Ceci n'est vrai que si le point « A » n'est pas situé sur la droite qui supporte le vecteur $\vec{R}(S1 \to S2)$ car dans le cas contraire $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{R}(S1 \to S2)$ seraient colinéaires. Nous aurions donc $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}(S1 \to S2) = \vec{0}$.
L'action de « S1 » sur « S2 » serait aussi représentée par un glisseur en « A ».

Application.

De nombreuses actions mécaniques seront modélisables par un glisseur.

- L'action de la pesanteur (le poids).
- L'action transmise par une liaison ponctuelle.
- Etc..(voir cours sur les torseurs associés à l'action transmissible par les liaisons

c) Le torseur nul.

Le torseur nul noté $\{0\}$ est un torseur dont :

- **La résultante est égale à VECTEUR NUL.**
- **Le moment résultant en un point « C » quelconque est égal à VECTEUR NUL.**

Ce torseur étant nul en « C », il sera nul aussi en n'importe quel point « A » de l'espace vectoriel.

$$\{0\} \quad \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

III) Opérations sur les torseurs.

1) Somme de torseurs

Considérons deux torseurs ${}_A\{T(0 \to 1)\}$ et ${}_B\{T(2 \to 1)\}$

Le premier est écrit au point « A » et il représente l'action mécanique d'un système matériel « 0 » sur un S.M. « 1 »
Le second est écrit au point « B » et il représente l'action mécanique « 2 » sur « 1 ».

Définition.

Il ne sera possible d'écrire une addition de plusieurs torseurs que si les éléments de réductions de chacun d'eux sont exprimés en un **même point** de l'espace vectoriel.

Pour notre exemple, nos deux torseurs doivent être écrit au point « A » ou au point « B » ou en un autre point quelconque.

$$_A\{T(0\to 1)\} + {}_A\{T(2\to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(0\to 1) \\ \overrightarrow{MA}(0\to 1) \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(2\to 1) \\ \overrightarrow{MA}(2\to 1) \end{Bmatrix}$$

Rappel $\overrightarrow{MA}(2\to 1) = \overrightarrow{MB}(2\to 1) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}(2\to 1)$

IV) <u>Principe fondamental de la statique.</u>

Soit un système matériel « S » soumis à n actions mécaniques extérieures modélisées par les torseurs suivants.

C'est-à-dire $_A\{T(1\to S)\}$; $_B\{T(2\to S)\}$; … ; $_i\{T(n\to S)\}$

Expression du principe fondamental de la statique au point « A » (par exemple)

« S » sera en équilibre si :

$$_A\{T(\overline{S}\to S)\} = \{0\}$$

La somme des torseurs des actions extérieures appliquées sur « S » est égale à torseur nul

$$_A\{T(\overline{S}\to S)\} = {}_A\{T(1\to S)\} + {}_A\{T(2\to S)\} + \ldots + {}_A\{T(n\to S)\} = \{0\}$$

$$_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(\vec{S}\to S) \\ \overrightarrow{MA}(\vec{S}\to S) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(1\to S) \\ \overrightarrow{MA}(1\to S) \end{Bmatrix} {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(2\to S) \\ \overrightarrow{MA}(2\to S) \end{Bmatrix} +..+ {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(n\to S) \\ \overrightarrow{MA}(n\to S) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Nous aboutissons enfin au deux équations vectorielles habituelles traduisant l'équilibre de « S »
C'est-à-dire :

- $\vec{R}(\overline{S}\to S) = \vec{R}(1\to S) + \vec{R}(2\to S) + \ldots + \vec{R}(n\to S) = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA}(\overline{S}\to S) = \overrightarrow{MA}(1\to S) + \overrightarrow{MA}(2\to S) + \ldots + \overrightarrow{MA}(n\to S) = \vec{0}$

Conclusion : Seule l'écriture est différente par rapport aux études menées jusqu'à présent.