Contenus

Articles

Références

Licence des articles

Torseur

Un **torseur** est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour décrire les mouvements des solides et les actions mécaniques qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur.

Définition

Un torseur est un champ de vecteurs équiprojectif, champ dont les vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}$ en chaque point P s'appellent « moments » du torseur. De par les propriétés d'un tel champ, les moments en deux points P et O vérifient la relation de Varignon : $\overrightarrow{\mathcal{M}_P} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}$. Un moyen mnémotechnique de la retenir est la dénomination "formule de BABAR" : $\overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}$, où le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ (associé de façon unique à tout champ équiprojectif), s'appelle résultante du torseur. Un torseur est donc déterminé par deux vecteurs, constituant sa "réduction" en un point quelconque P de l'espace, à savoir :

- La résultante $\overrightarrow{\mathcal{R}}$. Ce vecteur est unique et indépendant du point de réduction.
- Le moment en P du torseur, $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}$.

La résultante est un vecteur caractéristique du champ qui permet, à partir du moment en un point particulier, de retrouver les autres moments. De ce fait, les torseurs forment parmi les champs de vecteurs un sous-espace de dimension 6 (dans le cas de l'espace physique de dimension 3).

On écrit alors :

$$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O} \end{Bmatrix}_O$$

ou, en projetant la résultante et le moment sur une base orthonormée $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

où X, Y, Z sont les coordonnées de la résultante et L, M, N les coordonnées du moment. Ces coordonnées sont appelées « coordonnées plückeriennes », du mathématicien allemand Julius Plücker.

Exemples

- Le champ des moments d'une force (ou de la somme de plusieurs forces) par rapport à un point est un torseur, dit **torseur des actions mécaniques**. La résultante du torseur est la somme des forces.
- Le champ des vitesses d'un solide indéformable en un instant donné est un torseur, appelé **torseur cinématique** du solide. La résultante est le vecteur instantané de rotation.
- Soit A un point affecté d'une masse m et d'une vitesse $\vec{V}$ par rapport à un référentiel donné. Si l'on choisit un point P quelconque, on peut définir le **torseur cinétique** de A en P par :

$\overrightarrow{L(P)} = \overrightarrow{PA} \wedge m\overrightarrow{V}$. Ce torseur s'appelle le torseur cinétique de A . Sa résultante est la quantité de mouvement $m\overrightarrow{V}$ de A .

- On définit de même le **torseur dynamique** de A par le champ $\overrightarrow{PA} \wedge m\overrightarrow{a}$ où $\overrightarrow{a}$ est l'accélération de A . Si une force s'applique sur le point A , le principe fondamental de la dynamique énonce qu'il y a identité entre le torseur des forces et le torseur dynamique dans un référentiel galiléen (mécanique des solides).
- Le champ de moments nuls s'appelle le **torseur nul**. Il correspond à un champ de forces dans le cas statique.

- Un **couple** est un champ vectoriel uniforme, donc représenté par un torseur dont la résultante est nulle. Physiquement, il correspond à un torseur de forces dont la résultante est nulle.
- Un **glisseur** est un torseur dont le champ des moments s'annule en au moins un point. Le torseur d'une force appliquée en un point est un glisseur, le moment étant nul sur la droite servant de support à la force. Le champ des vitesses d'un solide en rotation est un glisseur. La vitesse est nulle sur l'axe de rotation. Pour un glisseur, on peut utiliser la notation $\mathcal{T}_{\vec{R}/O}$ où $\vec{R}$ désigne la résultante et O le point d'application où le moment est nul.
- Formulation du Principe d'Archimède :

Le torseur des forces de pression est égal et opposé au torseur des forces de gravité dans le fluide considéré.

Propriétés des torseurs

Équiprojectivité

Soit un torseur de résultante $\vec{R}$ et de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}$ en O. Son moment en P est $\overrightarrow{\mathcal{M}_P} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O} + \vec{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP}$, de sorte que, en faisant le produit scalaire par $\overrightarrow{OP}$, on obtient :

$$(\overrightarrow{\mathcal{M}_P}|\overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{\mathcal{M}_O}|\overrightarrow{OP})$$

Cette relation s'appelle propriété d'équiprojectivité du champ. On montre que cette propriété est caractéristique des champs de torseurs. Autrement dit, si un champ de vecteurs est équiprojectif, alors il s'agit du champ des moments d'un torseur. C'est d'ailleurs la façon la plus fondamentale de définir un torseur.

L'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide indéformable est la propriété fondamentale décrivant le comportement cinématique de ces corps.

Cette relation est appelée aussi loi de transfert des moments puisqu'on obtient le moment du torseur au point P en utilisant celui en O tant que O et P appartiennent au même solide indéformable.

Axe d'un torseur

Considérons un torseur de résultante $\vec{R}$ non nulle. Alors on montre que les **points** P tels que $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}$ soit colinéaire à $\vec{R}$ forment une droite appelée axe central d'un torseur. Cet axe central existe et est unique pour tout torseur, sauf dans le cas particulier du couple et du torseur nul, où la résultante est nulle. Dans le cas d'un glisseur, les moments sur l'axe central sont nuls.

Pour le torseur cinématique d'un solide (dont les moments sont les vitesses des points du solide), la résultante est le vecteur instantané de rotation. Le mouvement du solide est en général la superposition d'un mouvement de rotation et d'un mouvement de translation parallèlement à l'axe de rotation instantané (vissage). Les points du solide en translation sont précisément les points de l'axe central du torseur cinématique.

Torseurs couramment utilisés en mécanique

Torseur cinétique

La résultante du torseur cinétique est constitué de l'impulsion, du système. Son moment est le moment cinétique.

Principe fondamental de la dynamique

En mécanique du solide, le principe fondamental de la dynamique (PFD) est généralisé pour décrire le mouvement de tous les points d'un solide (ou d'un ensemble de solides), à travers le concept des couples qui peuvent agir sur un solide mais n'ont pas de contrepartie en mécanique du point. Le PFD s'énonce ainsi :

> *il existe un repère galiléen, tel qu'à tout instant, le torseur dynamique du solide dans son mouvement par rapport à ce repère est égal au torseur des forces extérieures agissant sur le solide.*

Dans le cas particulier du point matériel (en assimilant le solide à sa masse rapportée en son centre d'inertie), le PFD se réduit à l'égalité des résultantes de ces torseurs, soit le principe fondamental de la dynamique de translation.

Exemple d'utilisation

Soit une barre en équilibre, en appui sur l'un de ses points, de poids négligeable, et sollicitée par deux forces $\vec{F_1}$ (en un point A1 de la barre) et $\vec{F_2}$ (en un point A2). Soit O son point d'appui et soit R la force de réaction au point O. D'après les lois de Newton, il faut pour que la barre soit en équilibre que la somme des forces et la somme des moments soient nulles. Donc,

$$\mathcal{T}_{\vec{F}_1} + \mathcal{T}_{\vec{F}_2} + \mathcal{T}_{\vec{R}} = \mathcal{T}_{\vec{0}}$$

(torseur nul), ce qui équivaut à :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = \vec{0}$$

et à (puisque $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{R}/O} = \vec{0}$)

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_1/O} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_2/O} = \vec{0}\cdot$$

De façon équivalente, au point A1,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_1/A1} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_2/A1} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{R}/A1} = \vec{0}\cdot$$

Autre acception

Soit G un groupe. Un **G-torseur** (traduction littérale de l'anglais *G-torsor*) désigne un ensemble sur lequel G agit de façon transitive (une seule orbite) et sans fixer aucun point. Cela équivaut à "oublier lequel des éléments de G est l'unité". Un G-torseur et le groupe G associé sont donc le même ensemble, mais muni de structures différentes.

L'espace affine en est un exemple pour le groupe des translations spatiales: additionner deux points n'a aucun sens, leur différence par contre est un élément du groupe additif des translations, c'est-à-dire un vecteur. De même, les notes de la gamme dodécaphonique (avec identification des octaves) forment un G-torseur pour le groupe additif Z_12 des entiers mod. 12, les jours de la semaine pour le groupe Z_7, etc. La droite réelle et le groupe additif des réels sont un autre exemple: l'énergie d'un système physique n'est définie que modulo une constante arbitraire, mais les variations d'énergie sont des éléments du groupe R.

La fibre d'un fibré principal est un G-torseur.

Puissance générale

De manière générale, tout solide en mouvement et subissant des efforts extérieurs peut être modélisé par 2 torseurs:

- Le torseur cinématique décrivant le mouvement du solide : $\{\mathcal{V}(S/R)\}_{A/R} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{matrix} \right\}_{A/R}$
- Le torseur des efforts extérieurs ou torseur statique (S: le solide, E: l'extérieur) : $\mathcal{T}_A(E \to S)_{/R} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\mathcal{R}}(E \to S) \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(E \to S) \end{matrix} \right\}_{A/R}$

Puissance extérieure ($\mathcal{P}_{ext}$)

Soit un ensemble de solides (notés $\mathcal{S}_i$ avec i un indice) qui constitue ce que l'on appelle un système (noté $\mathcal{S}$). La puissance extérieure est la puissance de tous les efforts extérieures qui s'appliquent sur le système. On se place par rapport au référentiel R qui est le référentiel de base c'est-à-dire le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen.

Pour calculer la puissance extérieure instantanée du système en mouvement subissant des efforts extérieurs, on calcule le comoment ($\otimes$) des 2 torseurs : $\mathcal{P}_{ext} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{matrix} \right\}_{A/R} \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\mathcal{R}}(R \to S) \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(R \to S) \end{matrix} \right\}_{A/R}$

Ce qui donne en fait la formule suivante :

- $\mathcal{P}_{ext} = \overrightarrow{\mathcal{R}}(R \to S).\vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(R \to S).\vec{\Omega}(S/R)$

Puissance intérieure ($\mathcal{P}_{int}$)

Les puissances intérieures ($\mathcal{P}_{int}$) d'un système sont les puissances entre les divers solides. Il faut utiliser la même méthode de calcul c'est-à-dire effectuer un comoment des 2 torseurs. Seulement il faut faire très attention aux torseurs à utiliser. En effet, ce comoment s'effectue entre le torseur des efforts d'un solide sur un autre et le torseur distributeur des vitesses du solide en question par rapport **à l'autre solide!!** .

Ce qui donne : $\mathcal{P}_{int} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(Si/Sj) \\ \vec{V}(A \in Si/Sj) \end{matrix} \right\}_{A/Sj} \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\mathcal{R}}(Sj \to Si) \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(Sj \to Si) \end{matrix} \right\}_{A/Si}$

Remarques :

- C'est la formule générale. Si on considère un solide en translation ou si on considère un solide en rotation subissant un couple, on retombe sur les formules déjà précédemment énoncées.
- La puissance instantanée calculée de cette manière ne dépend pas du point A du solide mais le comoment doit être calculé avec les 2 torseurs exprimés **au même point**
- L'expression de ces 2 types de puissances nous amène au théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \sum \mathcal{P}_{int}$$

Démontrons que la puissance ne dépend pas du point du solide :

Formules de changement de point (la vitesse et le moment sont des vecteurs qui s'expriment en un point) :

- $\vec{V}(A \in S/R) = \vec{V}(B \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BA}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(R \to S) = \overrightarrow{\mathcal{M}_B}(R \to S) + \overrightarrow{\mathcal{R}}(R \to S) \wedge \vec{BA}$

La puissance exprimée au point A est :

$$P(t) = \overrightarrow{\mathcal{R}}(R \to S).\vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(R \to S).\vec{\Omega}(S/R)$$

On utilise la formule de changement de point :

$$P(t) = \overrightarrow{\mathcal{R}}(R \to S).(\vec{V}(B \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BA}) + (\overrightarrow{\mathcal{M}_B}(R \to S) + \overrightarrow{\mathcal{R}}(R \to S) \wedge \vec{BA}).\vec{\Omega}(S/R)$$

Puis on développe : $P(t) = \vec{\mathcal{R}}(R \to S).\vec{V}(B \in S/R) + \overrightarrow{\mathcal{M}_B}(R \to S).\vec{\Omega}(S/R) + \vec{\mathcal{R}}(R \to S).(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BA}) + (\vec{\mathcal{R}}(R \to S) \wedge \vec{BA}).\vec{\Omega}(S/R)$

Or on sait que : $\vec{\mathcal{R}}(R \to S).(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BA}) = \vec{\Omega}(S/R).(\vec{BA} \wedge \vec{\mathcal{R}}(R \to S))$ (permutation circulaire).

Donc le terme : $\vec{\mathcal{R}}(R \to S).(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BA}) + (\vec{\mathcal{R}}(R \to S) \wedge \vec{BA}).\vec{\Omega}(S/R)$ est en fait nul.

Finalement on tombe donc sur : $P(t) = \vec{\mathcal{R}}(R \to S).\vec{V}(B \in S/R) + \overrightarrow{\mathcal{M}_B}(R \to S).\vec{\Omega}(S/R)$

Autrement dit, pour tout point A et B du solide, on a l'égalité vectorielle suivante : $\vec{\mathcal{R}}(R \to S).\vec{V}(B \in S/R) + \overrightarrow{\mathcal{M}_B}(R \to S).\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\mathcal{R}}(R \to S).\vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(R \to S).\vec{\Omega}(S/R)$

Conclusion : on a donc bien démontré que la puissance ne dépend pas du point choisi.

Liens externes

- présentation de niveau première / terminale : cours de sciences industrielles ANNEXE : TORSEURS, Lycée Jacques Amyot, Robert Papanicola [1]
- éléments de cours de niveau supérieur : Préparation aux agrégations de mécanique et de génie mécanique, ENS Cachan, Sylvie Pommier, [2]
- Pseudovecteur

Références

[1] http://www.sciences-indus-cpge.apinc.org/IMG/pdf/CIN5_torseur.pdf
[2] http://www.librecours.org/documents/42/4282.pdf

Torseur statique

Le **torseur statique**, ou **torseur d'action**, est largement utilisé pour modéliser les actions mécaniques lorsqu'on doit résoudre un problème de mécanique tridimensionnelle en utilisant le principe fondamental de la statique. Le torseur statique est également utilisé en résistance des matériaux. On utilisait autrefois le terme de **dyname**[1].

Approche « empirique »

Le torseur est un objet mathématique abstrait, dont l'étude théorique peut être rebutante pour des personnes ne l'utilisant que comme un outil. Il peut cependant être utile de le voir comme une manière d'organiser les informations.

En effet, la résolution des problèmes de statique, de dynamique et de résistance des matériaux fait intervenir les forces et les moments :

Principe fondamental de la statique (PFS)

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

et

$$\sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}/B} = \vec{0}$$

où B est un point quelconque ;

Principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$$

et

$$J \cdot \vec{\alpha} = \sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}/G}$$

où G est le centre d'inertie de l'objet.

Considérons deux pièces notées 1 et 2 en contact au point A. Notons $\vec{A}_{2/1}$ la force de contact de la pièce 2 sur la pièce 1 en ce point A.

Pour les problèmes hors d'un plan, les vecteurs-force ont trois composantes, et il faut utiliser des vecteurs-moment à trois composantes :

$$\vec{A}_{2/1} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} ;$$

$$\vec{M}_B(\vec{A}_{2/1}) = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}.$$

Le moment en B de la force $\vec{A}_{2/1}$, noté $\vec{M}_{\vec{A}_{2/1}/B}$ ou $\vec{M}_B(\vec{A}_{2/1})$, s'écrit :

$$\vec{M}_B(\vec{A}_{2/1}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{A}_{2/1}$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

Notons que l'action de contact entre 1 et 2 peut aussi comporter un moment $\vec{M}_{A2/1}$ en A (cas par exemple d'un tournevis qui exerce à la fois une force de pression et un couple de torsion à la vis). On a alors

$$\vec{M}_B(\vec{A}_{2/1}) = \vec{M}_{A2/1} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{A}_{2/1}.$$

En notant R la résultante, on peut retenir le moyen mnémotechnique BABAR : $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$

On peut regrouper les composantes des deux vecteurs dans un même objet que l'on appelle « torseur », et noté :

$$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} A_x & M_x \\ A_y & M_y \\ A_z & M_z \end{Bmatrix}_R$$

où R désigne le repère dans lequel sont écrits les composantes des vecteurs. Les composantes du torseur sont en général notés X, Y, Z, L, M, N :

$$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$$

La résultante des actions extérieures sur la pièce 1 s'écrit

$$\sum_{\text{pièces } i} \{\mathcal{T}_{i/1}\}$$

Le PFS s'écrit alors :

$$\sum_{\text{pièces } i} \{\mathcal{T}_{i/1}\} = \{0\}$$

et le PFD s'écrit

$$\sum_{\text{pièces } i} \{\mathcal{T}_{i/1}\} = \{\mathcal{D}\}$$

où $\{\mathcal{D}\}$ est le torseur dynamique.

On utilise les termes de :

- **torseur d'action** pour désigner le torseur statique décrivant l'action mécanique d'une pièce sur une autre, voir *Liaison mécanique#Statique et dynamique* ;
- **torseur de cohésion** ou **torseur des efforts intérieurs** pour désigner le torseur statique décrivant un effort interne à une pièce (résistance des matériaux), voir *Principe de la coupure*.

Définition

Considérons une pièce 1 et une pièce 2 ayant un contact. Le torseur d'action de 2 sur 1 est noté

$$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{R}}_{2/1} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A\ 2/1} \end{Bmatrix}$$ ou bien $$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{R}}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{\mathcal{M}}_A(2 \rightarrow 1) \end{Bmatrix}$$

où la résultante $\vec{\mathcal{R}}_{2/1}$ représente la force exercée par le solide 2 sur le solide 1 et où le moment $\vec{\mathcal{M}}_{A\ 2/1}$ représente le moment exercé par le solide 2 sur le solide 1 au point *A*.
Ce torseur peut s'écrire en n'importe quel point. Le point A où l'on choisit de définir le moment est appelé « centre de réduction ».

Composantes dans un repère donné

Résultante du torseur

La *résultante du torseur* $\vec{\mathcal{R}}_{2\rightarrow 1}$ est un vecteur qui peut être projeté suivant les trois axes du repère *R* associé. On peut donc écrire :

$$\vec{\mathcal{R}}_{2\rightarrow 1} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_R$$

La résultante du torseur est invariable quel que soit le point d'écriture du torseur.

L'unité internationale utilisée pour quantifier une force est le newton (N).

Moment du torseur

Le moment du torseur $\vec{\mathcal{M}}_{A\ 2\rightarrow 1}$ est un vecteur qui possède trois composantes notées *L*, *M*, *N*. Le moment du torseur s'écrit alors

$$\vec{\mathcal{M}}_{A\ 2\rightarrow 1} = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$$

où $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont les vecteurs formant la base orthonormée du repère *R*.

Le moment du torseur peut également être noté

$$\vec{\mathcal{M}}_{A\ 2\rightarrow 1} = \begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix}_R$$

Lorsqu'on veut connaître les composantes d'un moment en un point *B* connaissant entièrement celles-ci en un point *A* et connaissant le vecteur déplacement $\overrightarrow{BA}$, on utilise la relation de Varignon :

$$\vec{\mathcal{M}}_{B\ 2\rightarrow 1} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{2\rightarrow 1} + \vec{\mathcal{M}}_{A\ 2\rightarrow 1}.$$

L'unité internationale utilisée pour quantifier un couple est le newton mètre (N·m).

Cas particuliers

Un torseur dont la résultante est nulle est dit *torseur couple*.

Le torseur dont le moment et la résultante sont nuls est appelé le *torseur nul* $\{0\}$.

Lorsque le moment est perpendiculaire à la résultante, on dit que ce torseur est un *glisseur* :

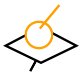
$$\vec{\mathcal{R}} \perp \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{A}},\ \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{A}} = 0;$$

il existe un point tel que la réduction de ce torseur en ce point a un moment nul. Les torseurs représentant des forces seules sont des glisseurs, le point de réduction où le moment s'annule est le point d'application de la force.

Torseur d'action des liaisons parfaites

Au point de contact, une pièce ne peut transmettre un effort à une autre que si le mouvement relatif est bloqué. Chaque liaison mécanique bloque certaines translations et certaines rotations relatives. On peut donc connaître la forme qu'aura le torseur d'action réduit au point de contact si l'on connaît la liaison entre les pièces : le type de liaison « force » certaines composantes du torseur d'action à 0. On parle de torseur des actions mécaniques transmissibles (TAMT).

Ceci est résumé dans le tableau ci-dessous. Notez que l'emplacement des zéros dépend de l'orientation de la liaison par rapport aux axes du repère.

Liaisons	Efforts possibles
Ponctuelle 	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire rectiligne 	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire 	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Rotule 	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot glissant 	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Appui plan 	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & M \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Pivot 	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Glissière 	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Hélicoïdale 	${}_A\begin{Bmatrix} k \cdot L & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Rotule à doigt 	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}$

Encastrement	${}_A\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$

Notes et références

[1] G. Lemasson, J. Gal, *Mécanique, 1. Statique et cinématique*, Dunod (Paris), 1968

Articles connexes

- Moment (mécanique)
- Pseudovecteur

Torseur cinématique

Le **torseur cinématique** est, comme les torseurs statique, cinétique et dynamique, un outil mathématique utilisé couramment en mécanique classique.

Le torseur cinématique est utilisé pour décrire les comportements de translation et de rotation d'un solide indéformable, en général dans un repère orthonormé direct.

Définition

Le torseur cinématique d'un solide par rapport à un référentiel R quelconque est entièrement défini par deux vecteurs :

- le premier, caractéristique du champ des vitesses et indépendant du point d'expression du torseur, décrit le comportement rotatif du solide.

$\vec{\Omega}(S/R)$

On doit lire Oméga de S (le solide étudié) par rapport à R.

- le second, exprimé en un point A du repère correspond à la vitesse du point A appartenant au solide par rapport à R.

$\vec{V}(A \in S/R)$

On doit lire V en A (point appartenant au solide S dans R) de S par rapport à R.

Finalement l'ensemble s'écrit:

$$\{\mathcal{V}(S/R)\}_{A/R} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{Bmatrix}_{A/R}$$

On doit lire torseur V en A de S par rapport à R est égal à Oméga de S par rapport à R et V en A de S par rapport à R.

Le champ des vitesses d'un solide indéformable est représentable par un torseur en raison du caractère équiprojectif de ce champ, caractère qui est intimement lié à l'indéformabilité du solide.

Le vecteur rotation

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ possède dans un repère tridimensionnel {R,x,y,z} trois composantes notées ω_x, ω_y, ω_z.

Le vecteur rotation s'écrit alors $\vec{\Omega}(S/R) = \omega_x\vec{x} + \omega_y\vec{y} + \omega_z\vec{z}$ avec $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ vecteurs formant le repère orthonormé R.

Le vecteur rotation peut également être noté $\vec{\Omega}(S/R) = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_{/R}$

Dans le cas où le vecteur rotation est nul le mouvement du solide est une translation simple. Tous les points du solide ont alors le même vecteur vitesse.

Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse $\vec{V}(A \in S/R)$ possède dans un repère tridimensionnel {R,x,y,z} trois composantes notées ν_x, ν_y, ν_z.

Le vecteur vitesse s'écrit alors $\vec{V}(A \in S/R) = \nu_x\vec{x} + \nu_y\vec{y} + \nu_z\vec{z}$ avec $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ vecteurs formant le repère orthonormé R.

Le vecteur vitesse peut également être noté $\vec{V}(A \in S/R) = \begin{Bmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_z \end{Bmatrix}_{A \in S/R}$

Lorsqu'un solide se déplace dans un plan, il est possible à chaque instant de définir un Centre instantané de rotation (CIR), qui est le point du solide de vitesse nulle dans ce plan.

Calcul du torseur en un autre point du solide

Connaissant le torseur cinématique complet en un point A du repère R et connaissant la distance entre le point A et un point B, on peut calculer le torseur complet au point B.

on note le torseur au point A $\{\mathcal{V}(S/R)\}_{A/R} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{Bmatrix}_{A/R}$

on note la distance entre BA $\vec{BA} = \begin{Bmatrix} X_{BA} \\ Y_{BA} \\ Z_{BA} \end{Bmatrix}$

le vecteur rotation est identique en chaque point du repère, il reste simplement à calculer le vecteur translation.

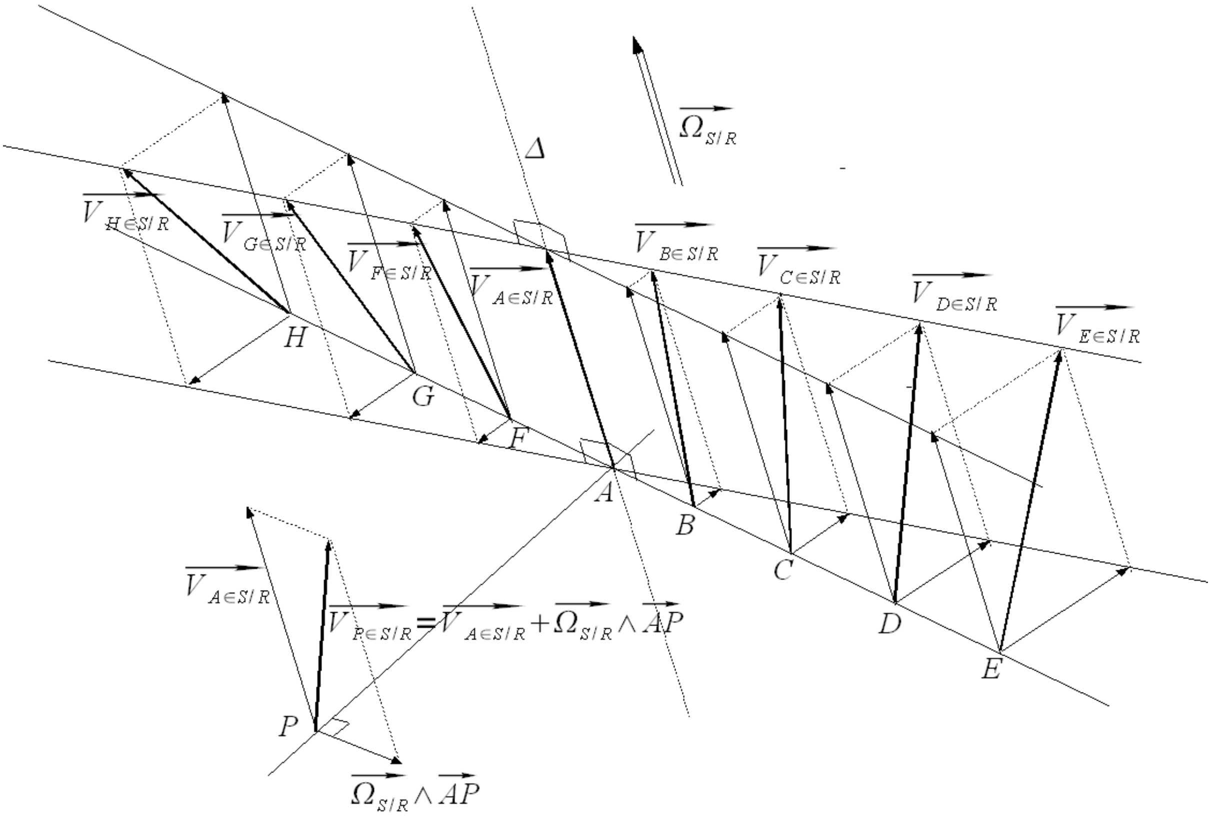
$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}$

Il est bien entendu que $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ et $\vec{\Omega}$ appartiennent à S et sont tous repérés comme $\overrightarrow{BA}$ dans R.

Finalement $\{\mathcal{V}(S/R)\}_{B/R} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(B \in S/R) \end{Bmatrix}_{B/R} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \end{Bmatrix}_{B/R}$

Représentation d'un torseur cinématique

Pour tous points P du solide en mouvement, le vecteur vitesse est une combinaison de $\overrightarrow{V(A \in S/R)}$ et du terme $\overrightarrow{\Omega(S/R)} \wedge \overrightarrow{AP}$:



Informations diverses

Les vitesses de translations sont normalement exprimées en mètres par secondes (m/s). Les vitesses de rotations sont normalement exprimées en radians par secondes (rad/s).

Torseur cinétique

Le **torseur cinétique** est un outil mathématique utilisé notamment pour calculer l'énergie cinétique d'un système.

Définition

Le torseur cinétique comme tous les torseurs est la réduction en un point d'un champ vectoriel en deux vecteurs particuliers.

Sa notation est la suivante : $\mathcal{C}(S/R)_A = \begin{Bmatrix} \vec{p}(S/R) \\ \vec{\sigma_A}(S/R) \end{Bmatrix}_{A/R}$

avec R repère d'étude, S solide étudié, A point quelconque du solide S.

Quantité de mouvement

Le vecteur $\vec{p}(S/R)$ représente la quantité de mouvement du solide. La quantité de mouvement s'exprime en $kg.m.s^{-1}$

On a $\vec{p}(S/R) = m\vec{V}(G/R) = \int_{(S)} \vec{V}(P \in S/R)dm$.

Où $\vec{V}(G/R)$ est la vitesse du point G par rapport au repère et $\vec{V}(P \in S/R)$ est le vecteur vitesse du solide par rapport au repère, les vitesses sont en $m.s^{-1}$. Avec G centre d'inertie de S.

Moment cinétique

Le vecteur $\vec{\sigma_A}(S/R)$ est le moment cinétique.

On a $\vec{\sigma_A}(S/R) = \int_{(S)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R)dm(p)$.

ou encore

$$\vec{\sigma_A}(S/R) = \vec{AG} \wedge m\vec{V}(A/R) + \left[I_A(S)\right].\vec{\Omega}(S/R)$$

avec $\left[I_A(S)\right]$ matrice d'inertie de S écrite en A.

si on écrit le moment cinétique en G on a donc :

$$\vec{\sigma_G}(S/R) = \left[I_G(S)\right].\vec{\Omega}(S/R)$$

Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique :

$$\vec{\delta_A}(S/R) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma_A}(S/R) + m\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R).$$

Cette relation se simplifie lorsque les points A et G sont confondus ou lorsque A est un point fixe dans R:

$$\vec{\delta_A}(S/R) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma_A}(S/R).$$

Énergie cinétique

Grâce aux notations torsorielles on peut calculer l'énergie cinétique d'un solide. Cette dernière est égale à la moitié du comoment du torseur cinétique par le torseur cinématique.

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{C}(S/R)_G\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S/R)_G\right\}$$

L'énergie cinétique est exprimée en joules (J).

Torseur dynamique

Le **torseur dynamique** est un outil mathématique utilisé lors de l'application du principe fondamental de la dynamique.

Définition

Le torseur dynamique comme tous les torseurs est la réduction d'un champ vectoriel en un point en deux vecteurs particuliers.

Sa notation est la suivante : $\mathcal{D}(S/R)_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{A}}(S/R) \\ \overrightarrow{\delta_A}(S/R) \end{Bmatrix}_{A/R}$

avec R repère d'etude, S solide étudié, A point quelconque du solide S.

Quantité d'accélération

Le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{A}}(S/R)$ représente la quantité d'accélération du solide. La quantité d'accélération s'exprime en $kg.m.s^{-2}$

On a $\overrightarrow{\mathcal{A}}(S/R) = m\vec{\Gamma}(G/R) = \int_{(S)} \vec{\Gamma}(P, S/R)dm$.

Avec G centre d'inertie de S.

Moment dynamique

Le vecteur $\overrightarrow{\delta_A}(S/R)$ est le moment dynamique.

On a $\overrightarrow{\delta_A}(S/R) = \int_{(S)} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P, S/R)dm$.

Il peut aussi s'exprimer en fonction du moment cinétique par la formule $\overrightarrow{\delta_A}(S/R) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_A}(S/R)\right] + m \cdot \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_G}(S/R)$

Cas particuliers

- Dans le cas d'un solide uniquement en translation, on a $\mathcal{D}(S/R)_G = \begin{Bmatrix} m\overrightarrow{a_{G/R}} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_{G/R}$
- Dans le cas d'un solide uniquement en rotation autour de son axe de symetrie et avec son centre de gravité sur l'axe de rotation noté $\vec{z}$, on a $\mathcal{D}(S/R)_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ I\ddot{\theta}\vec{z} \end{Bmatrix}_{G/R}$

avec I moment d'inertie de S exprimé en $kg.m^2$et $\ddot{\theta}$ accélération angulaire en $rad.s^{-2}$.

- Dans le cas où le point A est le centre d'inertie du solide, ou un point fixe, le torseur dynamique dérive directement du torseur cinétique, à savoir : $\mathcal{D}(S/R)_A = \frac{d}{dt}\left[\mathcal{C}(S/R)_A\right]$

Sources et contributeurs de l’article

Torseur *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=76747023 *Contributeurs*: Aldoo, Anne Bauval, Arnaud.Serander, Azbycxdwevfu, Badmood, Caron, Croquant, Dfeldmann, Dijkschneier, Dontknowhow, EDUCA33E, Escaladix, Francois Trazzi, Gchardon, Gem, HB, IAlex, Jean de Parthenay, Kokoyaya, Kropotkine 113, LeYaYa, Lylvic, Melusyne, Mouz, Myrddyn, Nefbor Udofix, Nykozoft, Odyssee, Pamputt, Pethrus, PieRRoMaN, Pld, Poulos, Poupoupidoub, Ptitpoul, Renaud G, Romary, Ruizo, Tbmsddk, Theon, Toan0, Tower, Trassiorf, Xmlizer, 61 modifications anonymes

Torseur statique *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=77559996 *Contributeurs*: Ascaron, Badmood, Bob08, Cantons-de-l'Est, Cdang, Cfu, Dhatier, GaMip, Jean-Jacques MILAN, JihemD, Kangou, Lagrangien, Melusyne, Nono64, PA, PieRRoMaN, Pierre Boitel, Ptitpoul, Romanc19s, Romary, Sharayanan, The RedBurn, Thomasangot, WikiYo, 25 modifications anonymes

Torseur cinématique *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=76339710 *Contributeurs*: Badmood, Barbetorte, Cdang, DUMONT Guillaume, Lasl92260, Lomita, Melusyne, Mouz, Pamputt, PieRRoMaN, Tbmsddk, Thomasangot, Xzapro4, 14 modifications anonymes

Torseur cinétique *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=77009391 *Contributeurs*: Badmood, Dertuition, Matdu13, Maxwarrior, Melusyne, Mikiael, Mouz, Pamputt, PieRRoMaN, PierreB49, RustyBSD, Thomasangot, Vivarés, 16 modifications anonymes

Torseur dynamique *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=46057582 *Contributeurs*: Badmood, Dominique natanson, Melusyne, Mouz, Pamputt, PieRRoMaN, Ptitpoul, Rafafouille, Thomasangot, Tibault, Trassiorf, 7 modifications anonymes

Source des images, licences et contributeurs

Licence