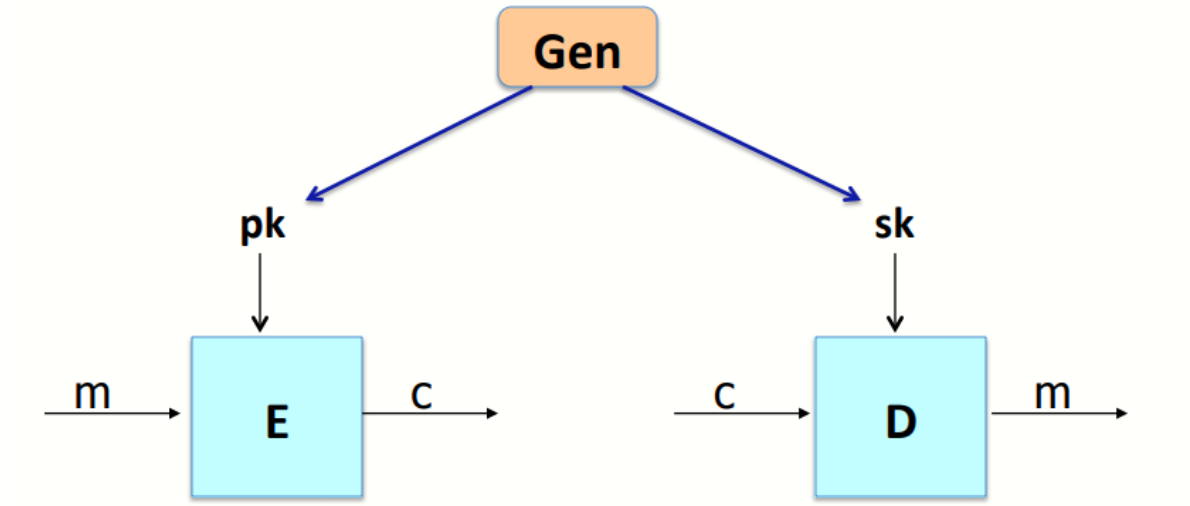
W6 12-1 The ElGamal Public-key System

上一章讨论了基于RSA的公钥加密系统（一种建立在陷门函数基础上的系统），本章介绍另一个公钥加密系统，建立在D-H密钥交换协议上

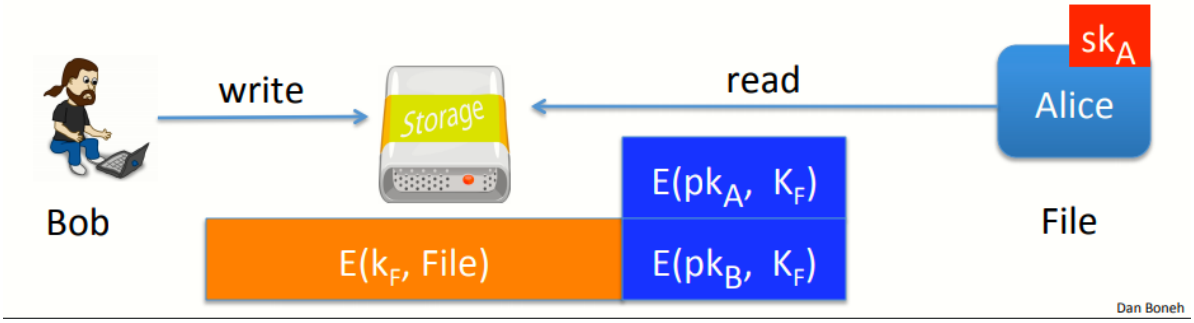
1、Recap：public key encryption：(Gen,E,D)

回忆一下，公钥系统由三个算法G、E、D组成，其中加密算法E使用公钥，解密算法D使用私钥



2、Recap：public-key encryption applications

上一章中还讨论了公钥加密系统的一些应用，如密钥交换（HTTPS），还有一些非交互的应用（如安全Email、文件系统加密等）



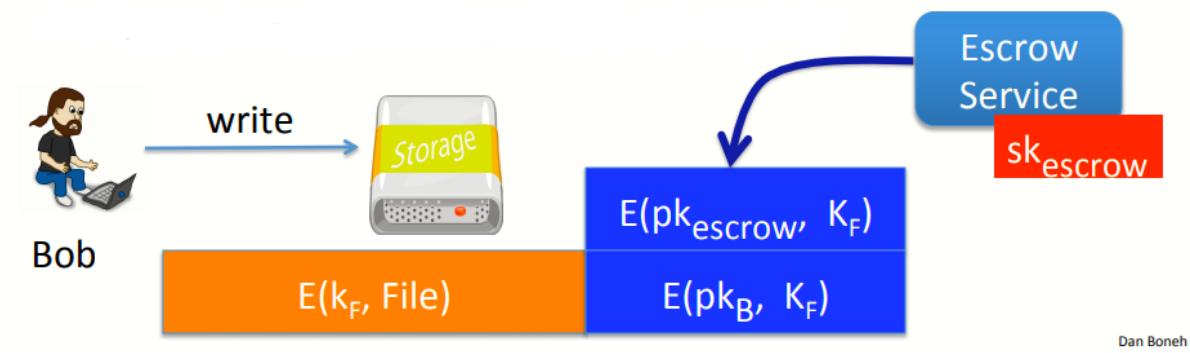
比如文件系统加密，Bob想要加密文件并保存到某个存储服务器上，则其只要保存加密过的文件到服务器上即可

首先生成一个随机的文件加密密钥K_F，然后用对称加密系统与该密钥加密这个文件，接着将K_F用其自己的公钥pk_B加密，并附在文件首部，这样Bob就能在以后的某个时间访问这些文件（先用私钥恢复K_F，然后用K_F恢复文件）

如果此时Bob希望Alice也有权限访问这个文件，则需要在文件首部加上用Alice的公钥pk_A加密的K_F，且这个过程无需Bob与Alice通信，只需要Bob获取Alice的公钥即可将该文件分享给Alice，同样Alice访问文件也无需与Bob交互

非交互情景的公钥加密系统还有一种应用，成为密钥托管（看起来很蠢），实际上是在企业环境中必备的一个功能

比如Bob把数据写到了磁盘里，然后一段时间后Bob不见了（离职、休假、出差等），但是公司需要Bob保存的文件，如果此时Bob是唯一可以解密的人，显然非常不现实，因此企业必须要有一种方式可以访问到Bob的文件，因此提出了密钥托管的概念



Bob 将他的文件写入磁盘时，这个系统会把他的文件写入到共享的媒介中，系统先向往常一样用密钥K_F加密，然后用Bob的公钥pk_B加密，并记录到文件头中，然后系统会把K_F用密钥托管服务的密钥pk_{escrow}加密一次（该过程密钥托管系统处于离线状态）

此时如果公司需要恢复Bob的文件，公司会联系密钥托管服务，读取文件头并用私钥解密，恢复K_F，然后用K_F解密文件

3、Constructions

之前的课程中提到了许多建立在陷门函数基础上的系统，比如说ISO标准和OAEP+等其它系统

本章会介绍建立在D-H密钥交换协议山东个公钥加密系统，称为ElGamal公钥加密方案（ElGamal方案由Taher Elgamal提出，T.E.其实是Marty Hellman的学生，提出后又作为了他的博士论文的一部分），但出于一些历史原因，ElGamal还被用在了GPG邮件加密系统中（GNU Privacy Guard）

和以往一样，构造公钥加密系统是，目标是构造一个满足CCA安全的系统，这样即可以防止监听，又可以防止篡改

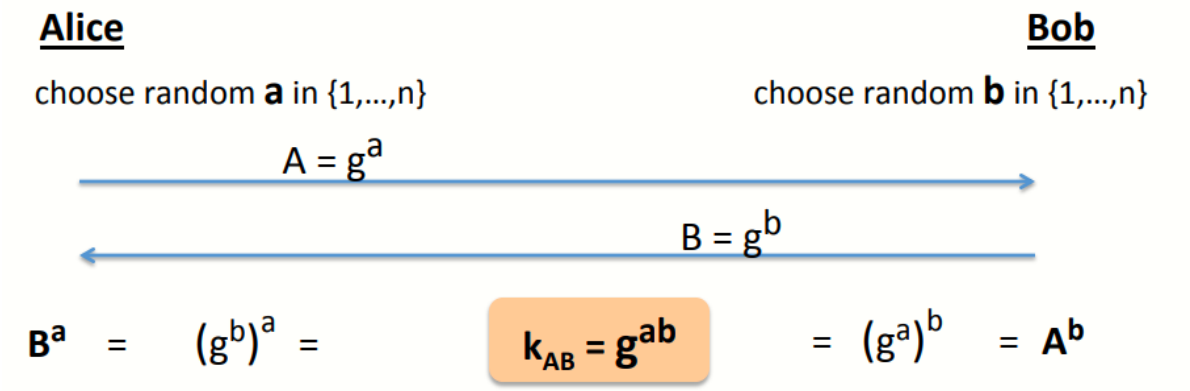
4、Review：the Diffie-Hellman protocol(1997)

先回顾一下D-H密钥交换协议（回避之前讲的要抽象一些）

有限循环群G：比如$(Z_p)^*$，或者可以是椭圆曲线上的点集，记其阶为n

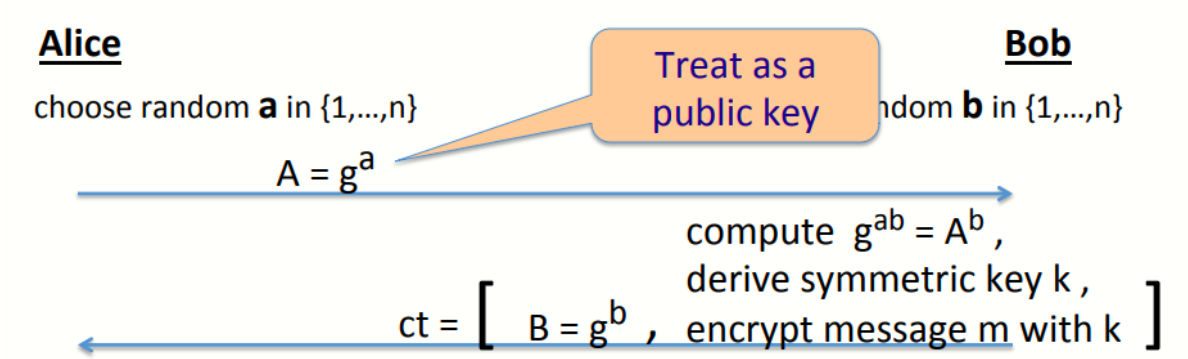
生成元g：由g的不断幂运算可以得到群G中所有元素，注意到G的阶位n，因此G的元素为g^0=1到g^{n-1}

然后回顾一下D-H协议



5、ElGamal：converting to pub-key enc.

然后看看D-H协议如何转化成公钥系统，还是D-H协议



首先确定群G和生成元g，第一步是密钥生成，将A视为公钥而a视为私钥，若期望由公钥推算出私钥本质上是解决一个离散对数问题

假设Bob需要将加密信息发送个Alice，此时Bob需要完成D-H密钥交换中他自己的那一部分，即随机选择b并计算$B=g^b$，并且计算共享密钥$k=g^{ab}$，然后利用该共享密钥加密自己要传输的信息，并将B与加密消息一起发送给Alice

其实这个流程和D-H协议完全一样，只不过Bob会立即使用共享密钥发送信息

此时Alice收到后，利用Bob的B计算出共享密钥k，然后用k解密消息即可

值得注意的是，某种程度上说这是一种随机加密方法，BOb每次想要加密一个消息时都需要重新选择一个随机的b，并用这个b生成密钥并加密消息

6、The ElGamal system (a modern view)

接下来看更详细的ElGamal系统，先确定一些东西

- G：阶为n的有限循环群
- (E_S,D_S)：定义在(K,M,C)上的对称加密系统，提供认证加密
- H：hash函数，将一堆群中的元素映射到密钥空间，即$G^2 \rightarrow K$

然后定义公钥加密系统(Gen,E,D)，其中：

- Gen：密钥生成算法，从群G中随机选择一个生成元G，然后在Z_n中随机选择一个指数a作为私钥，公钥$pk=(g,h=g^a)$（不采用固定生成元的目的是增加安全性，随机选择一个生成元也不是什么很难的工作）
- (E,D)：加解密算法

E(pk=(g,h), m) :

$b \xleftarrow{R} Z_n$, $u \leftarrow g^b$, $v \leftarrow h^b$

$k \leftarrow H(u,v)$, $c \leftarrow E_s(k, m)$

output (u, c)

D(sk=a, (u,c)) :

$v \leftarrow u^a$

$k \leftarrow H(u,v)$, $m \leftarrow D_s(k, c)$

output m

比如Bob想要加密消息：

1. 先从Z_n中随机选择b（即完成D-H协议中Bob发送给Alice的那部分），计算$u=g^b$，$v=h^b=g^{ab}$
2. 利用u和v计算对称加密需要的密钥k=H(u,v)（由于u将要发送出去，因此攻击者可以接获到u的值，而v是攻击者不知道的，因此出于安全考虑，将u和v一起计算hash值会比较好）
3. 然后加密消息$c=E_S(k,m)$
4. 最后算法输出(u,c)

解密消息流程如下：

1. 计算$v=u^a$
2. 计算对称密钥k=H(u,v)
3. 由对称密钥解密密文c
4. 输出明文m

7、ElGamal perfomance

加密过程中有两个幂运算的步骤（计算u和v），解密只有一次幂运算（计算v），由于加密时的幂运算的底数g和h都由公钥推导出，因此每次都是不变的，而解密时的底数u每次都不同，因此加密速度并不完全是解密速度的两倍

由于底数不变，因此可以通过提前计算重复平方的每一步来加速加密过程，如果有更大的表来保存提前计算好的值的话，可以更快完成计算