W5 10-3 Modular e'th roots

1、Modular e'th roots

上节课提到了怎么解线性同余方程，可以通过求逆元的方式解决

问题在于，有没有办法解决高次同余方程，如$x^2 - c=0$,$y^3 - c=0$,或者$z^{37} - c=0$之类的

假设p为一素数，$c \in Z_p$

定义：$x \in Z_p$，且满足$x^e = c$ 在Zp内，称x为c模p的e次方根

比如，若p=11，则7的立方根为6（6^3=216≡7 mod 11），3的立方根为5（5^2=25≡3 mod 11），1的立方根为1，2在模11的情况下没有平方根

2、The easy case

c模p的e次方根何时存在？存在的情况下有没有高效的计算方法？

假设需要计算某数c的e次根，且gcd(e , p-1) = 1，则对于Z_p*内的所有的c，c的e次根在Zp内，且有一种比较快速的方法找到这个根，方法如下

Proof: let $d = e^{-1}$ in Z_{p-1} . Then $\boxed{c^{1/e} = c^d \text{ in } Z_p}$

$d \cdot e = 1$ in Z_{p-1} $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: d \cdot e = k \cdot (p-1) + 1 \Rightarrow$

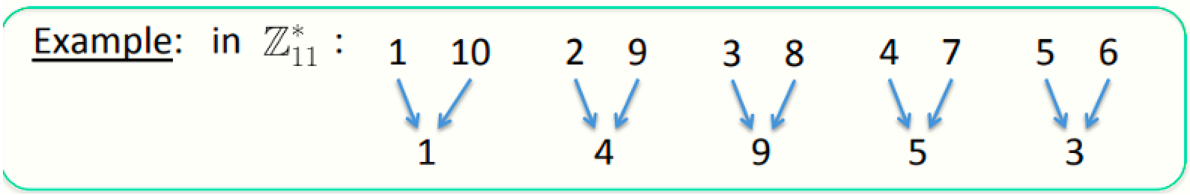
$\Rightarrow (c^d)^e = c^{d \cdot e} = c^{k \cdot (p-1)+1} = [c^{p-1}]^k \cdot c = c$ in Z_p

Dan Boneh

3、The case e=2: square roots

另一个问题就是，e=2且p是奇素数的情况，此时e和p-1并不互素

问题在于，由x到x^2的映射实际上是2对1函数（2-to-1 function），x和-x都能映射到同一个x^2，比如在p=11的情况下，会有如下所示



其中10和-1在p=11下同余，因此二者的平方都为1，其他数同理，因此引出二次剩余概念

定义：若x在Zp中存在平凡根，则称其为二次剩余（Quadratic Residue，Q.R.），否则为二次非剩余（Quadratic Nonresidue），当p为奇素数时，二次剩余的数量为(p-1)/2+1

4、Euler's theorem

给出一个Zp中的元素x，能否判断出有无平方根

定理：x为(Zp)*内的二次剩余，等价于$x^{[(p-1)/2]}$≡1 mod p（p为奇素数，且x≠0）

Example: in $\mathbb{Z}_{11}$: $1^5,\ 2^5,\ 3^5,\ 4^5,\ 5^5,\ 6^5,\ 7^5,\ 8^5,\ 9^5,\ 10^5$

= 1 -1 1 1 1, -1, -1, -1, 1, -1

p=11的例子，计算每个元素的(p-1)/2次幂，因此，只有1、3、4、5、9为模11的二次剩余，其他不是

定理只说了某个数是或者不是二次剩余，没说怎么计算某个数的平方根，即证明了其存在性，但是没说怎么计算平方根

勒让德符号（Legendre Symbol）：$x^{[(p-1)/2]}$≡1 (mod p)的简写，=1为Q.R.，=-1为二次非剩余

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1 \equiv a^{\frac{p-1}{2}}\ (mod\ p)$$

5、Computing square roots mod p

如何计算模p（p为素数）的平方根?

Suppose $p = 3 \pmod 4$

Lemma: if $c \in (Z_p)^*$ is Q.R. then $\sqrt{c} = c^{(p+1)/4}$ in Z_p

Proof: $\left[c^{\frac{p+1}{4}}\right]^2 = c^{\frac{p+1}{2}} = \underbrace{c^{\frac{p-1}{2}}}_{=1} \cdot c = c$ in $\mathbb{Z}_p$

When $p = 1 \pmod 4$, can also be done efficiently, but a bit harder

run time ≈ $O(\log^3 p)$

分为两种情况

- 如果p≡3 (mod 4)，则√c =$c^{[(p+1)/4]}$ (mod p)
- 如果p≡1 (mod 4)，没有确定性算法找到模平方根，但是随机性算法效率也还行，大约在O($\log^3$p)

6、Solving quadratic equations mod p

计算二次同余方程，大致步骤和初中学的一元二次方程一样，前提是Zp中有平方根

Solve: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ in Z_p

Solution: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c})\ /\ 2a$ in Z_p

需要指出的是，其中的分母2a可以用扩展欧几里得算法找到，√(b^2 – 4·a·c)如果存在的话需要用到上面的找平方根的算法

7、Computing e'th roots mod N

计算某个数模N的e次根（N为合数），和之前的问题一样，这个e次根是否真的存在，又是否有高效的算法计算之

就目前已知而言，计算这个e次根和分解N一样难，因为需要分解N为若干个素因子，然后分别计算这个数对于每个素因子的e次根，然后再将这些结果合并，就可以得到模N的e次根