

基于量子计算方法的核子结构研究

李天胤

量子物质研究院

2023/06/19

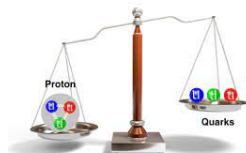
- 研究动机
- 量子计算背景知识
- 基于量子计算对强子部分子纵向结构的研究
- 基于量子计算对强子光锥分布振的研究
- 总结

目前为止仍存在的问题

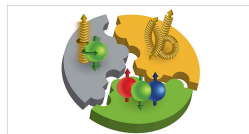
- 质子质量起源问题

人们认识质子的历史

- 1919 年卢瑟福发现**质子**
- 1964 年盖尔曼提出质子的**夸克模型**
- 1969 年费曼提出质子的**部分子模型**
- ...



- 质子自旋分解问题



- ...

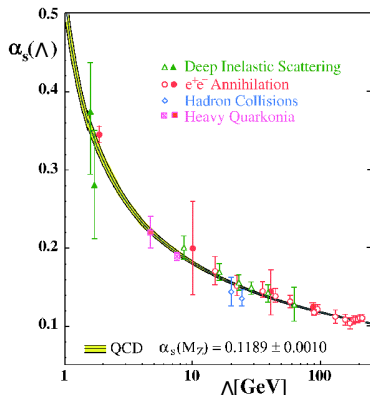


图 1: QCD 跑动耦合常数.[1]

[1] S. Bethke, Prog.Part.Nucl.Phys. 58, 351 (2007).

- QCD 在低能标时是强耦合理论，**核子结构包含了 QCD 的非微扰信息**。
- 目前格点 QCD 是主流的非微扰方法，但存在**符号问题**，**无法模拟动力学问题**等根本性困难。
- **量子计算模拟**的方法或许可解决上述这些根本性难题。

- 量子比特

可把量子比特看作自旋, $|0\rangle$ 为自旋向上 $|1\rangle$ 为自旋向下。N 量子比特计算机的计算基矢为: $|i_1, \dots, i_N\rangle$, $i_1, \dots, i_N = 0, 1$.

- 量子门

- 单量子比特门: 泡利算符 X, Y, Z , H 门

$$H|0\rangle(|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-)|1\rangle) \dots$$

- 两量子比特门: 控制非门或称控制 X ($CNOT$) 门:

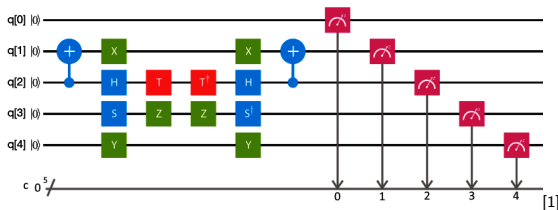
$$CNOT|00\rangle(|01\rangle) = |00\rangle(|01\rangle), CNOT|10\rangle(|11\rangle) = |11\rangle(|10\rangle)$$

- 单量子比特门和 $CNOT$ 门为通用量子门。
- 只包含近邻相互作用的哈密顿量的时间演化可被分解为基本量子门, 其复杂度随着量子比特数幂次增长, 为 $O(N^2/\epsilon)$.

量子计算背景知识

- 量子线路

一个量子线路由初始输入态，一系列的量子门以及输出端的测量来组成。



- 测量。只需对 σ^Z ，进行多次测量。
- 量子计算模拟在哈密顿量框架下工作，**不存在符号问题**。

[1] <https://towardsdatascience.com/what-is-a-quantum-circuit-transpiler-ba9a7853e6f9>

基于量子计算对强子部分子纵向结构的研究

纵向非极化部分子分布函数

- 根据 QCD 因子化定理，初态含有强子过程（如深度非弹性散射过程 $e + p \rightarrow e' + X$ ）的散射截面可被因子化成硬散射截面卷积上纵向非极化部分子分布函数 (PDFs)。
- PDFs 是描述核子结构的一个非微扰量，其算符定义^[1]：
$$f_{i/h}(x) = \int \frac{dy^-}{4\pi} e^{-ixP^+ y^-} \langle h | \bar{\psi}(0, y^-) \gamma^+ W(y^-, 0) \psi(0, 0) | h \rangle .$$
- 在量子计算机上模拟 PDFs 需要：1、制备强子态 $|h\rangle$ ，2、模拟威尔逊链 $W(y^-, 0)$ ，3、计算光锥两点关联函数。

[1] John Collins Foundations of perturbative QCD.

基于量子计算对强子部分子纵向结构的研究

模拟 PDFs 的量子线路

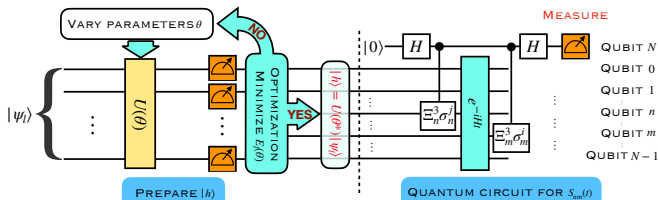


图 2: 在量子计算机上计算 PDFs 的量子线路。该量子线路复杂度为 $O(N^3)$ 。

- 虚线左边为变分法制备强子态的量子线路 [1]。
- 虚线右边为计算强子态下光锥两点关联函数算法。 [2]
- 威尔逊链的模拟我们仅做一般性讨论。模拟威尔逊链的复杂度为 $O(N^2)$ ，它的存在不会改变算法的多项式复杂度行为。

[1] Phys. Rev. D 105(2022) 11 p. L111502. [2] Phys. Rev. Lett. 113, 020505 (2014);

基于量子计算对强子部分子纵向结构的研究

变分法制备强子态

- 分解 $H = H_1 + \dots + H_n$ 且满足 $[H_i, H_{i+1}] \neq 0, [H_i, Q^j] = 0$, 其中 Q^j 是任一守恒量。
- 若目标强子态 $|h\rangle$ 是具有量子数 l 的第 k 激发态, 我们需要 k 个具有与目标强子态具有相同量子数且相互正交的简单输入态 $|\psi_{li}\rangle_{\text{ref}}$. (Dicke 态)^[1]
- $$U(\theta) \equiv \prod_{i=1}^p \underbrace{\left(\prod_{j=1}^n \exp(i\theta_{ij} H_j) \right)}_{\text{one layer}}, |\psi_{li}(\theta)\rangle = U(\theta) |\psi_{li}\rangle_{\text{ref}}$$
- 最小化目标函数 $E_l(\theta) = \sum_i^k w_{li} \langle \psi_{li}(\theta) | H | \psi_{li}(\theta) \rangle$ ^[2], 其中 w_{li} 满足 $w_{l1} > w_{l2} > \dots > w_{lk}$. 寻求最优参数 θ^*
- $|h\rangle = U(\theta^*) |\psi_{lk}\rangle_{\text{ref}}$.

[1] A. Bartschi and S. Eidenbenz, Deterministic preparation of dicke states.

基于量子计算对强子部分子纵向结构的研究

量子线路经典模拟结果

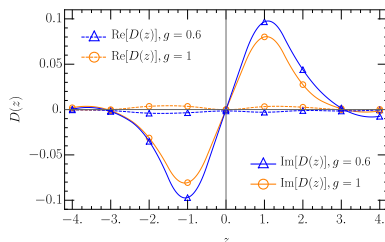


图 3: 坐标空间 PDF。

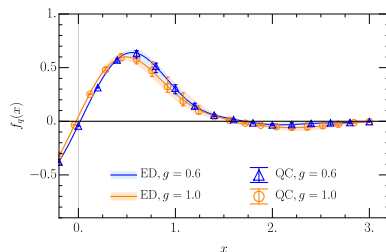


图 4: NJL 模型夸克 PDF $f_q(x)$ 。

- 作为概念的证明，我们用前面的量子算法计算了 1+1 维单味道 NJL 模型 $q\bar{q}$ 强子态的 PDFs。
- $f_q(x) = -f_q(-x)$ 在减去真空图后成立 [1]
- $\text{Re}[D(z)] = 0$ 可得 $f_q(x) = -f_q(-x)$. 因此对于 $q\bar{q}$ 有 $\bar{f}_q(x) = f_q(x)$.
- $x = 0.5$ 处有一峰，定性符合 lattice QCD 的 pion PDFs. [2]

[1] John Collins Foundations of perturbative QCD. [2] Y. Jia, S. Liang, X. Xiong, and R. Yu, Phys. Rev. D.

基于量子计算对强子光锥分布振幅 (LCDAs) 的研究

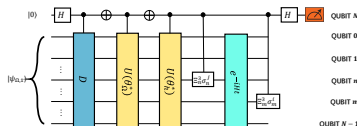
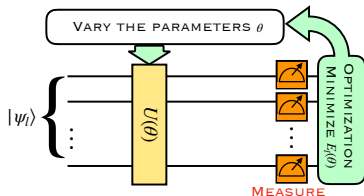
介子 LCDAs 的定义

- 根据 QCD 因子化定理, 末态有强子产生遍举过程的散射振幅可被因子化成硬散射振幅直积上 LCDAs。
- 介子 LCDA 被记作 $\phi_\pi(x, \mu)$ 其物理意义为在标度 μ 下, 一对纵向动量份额分别为 x 和 $1-x$ 的正反夸克对结合成 π 介子的概率振幅函数。
- 介子 LCDA 的算符定义

$$\phi(x) = \frac{1}{f} \int dz e^{-i(x-1)\vec{n} \cdot Pz} \langle \Omega | \bar{\psi}(z\vec{n}) \gamma^+ W(z\vec{n}, 0) \psi(0) | h(P) \rangle . \quad (1)$$

基于量子计算对强子 LCDAs 的研究

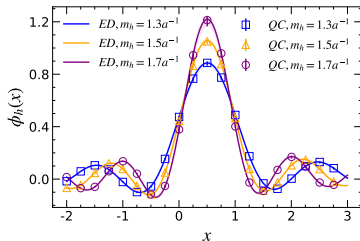
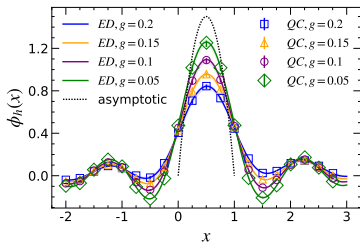
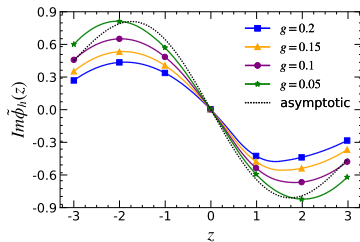
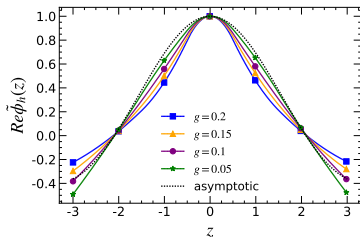
计算 LCDAs 的量子线路



- 左图：通过变分法制备强子态的量子线路。
- 右图：计算左矢真空，右矢强子态的“左右矢不对称”关联函数。量子门 D 可把真空参考态映射为强子参考态。
- 对于 $\theta_{\Omega}^* = \theta_h^*$ 的情况，量子线路复杂度为 $O(N^3)$ ；对于 $\theta_{\Omega}^* \neq \theta_h^*$ 的较复杂情况，量子线路复杂度为 $O(N^6)$ 。

基于量子计算对强子 LCDAs 的研究

NJL 模型 $|q\bar{q}\rangle$ 强子 LCDAs 结果



- 在基于量子计算对强子 PDFs 的研究中，我们提出了一整套系统的从光锥关联函数出发计算强子共线非极化 PDFs 的方法，并利用了 18 个量子比特经典计算机模拟的量子计算机计算了 NJL 模型的夸克 PDF，得到定性上与 lattice QCD 相符的结果。
- 基于量子计算对强子 LCDAs 的研究中，我们提出了可以在量子计算机上模拟强子的 LCDAs，给出了做该模拟所需量子线路，并利用了 14 个量子比特经典计算机模拟量子计算机计算了 NJL 模型的强子 LCDAs，得到了定性上与 lattice QCD 相符的结果。

谢谢大家的聆听！